Boole Cebri

George Boole (1815-1864) İngiliz Matematikçi

- B={0,1} kümesi üzerinde tanımlı
- İkili işlemler: VEYA, VE { + , • }
- Birli işlem: Tümleme { ' }
  Tümleme için diğer bir simge: $\bar{a}$

a • b

a \ b	0	1
0	0	0
1	0	1

a + b

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	1

Tümleme

a	a' ($\bar{a}$)
0	1
1	0

- **Aksiyomlar:**

a , b ∈ B olmak üzere

1.Kapalılık (*Closure*): a + b ∈ B   a • b ∈ B

2.Değişme (*Commutative*): a + b = b + a   a • b = b • a

3.Birleşme (*Associative*): a + (b + c) = (a + b) + c   a • (b • c) = (a • b) • c

4.Etkisiz eleman (*Identity*) : a + 0 = a   a • 1 = a

5.Dağılma (*Distributive*): a + (b • c) = (a + b) • (a + c)   a • (b + c) = (a • b) + (a • c)

6.Tümleme (*Inverse*): $a + \bar{a} = 1$ $a \cdot \bar{a} = 0$

İşlemler arasındaki öncelik yüksekten öncelikten başlayarak şöyledir:
1. Parantez, 2. Tümleme, 3. VE, 4. VEYA

Özellikler ve Teoremler:

Burada gösterilen tüm özellikler ve teoremler Boole cebrinin tanımında yer alan işlemler ve aksiyomlar ile kanıtlanabilirler.

1. Yutma (*Annihilator*):
   a + 1 = 1   a • 0 = 0
2. Dönüşme (*Involution*): (a')' = a veya $\bar{\bar{a}} = a$
3. Sabit kuvvet (*Idempotency*):
   a+a+a+….+a = a   a•a•a •… •a = a
4. Soğurma (*Absorption*):
   a + a·b = a (Kanıt 2.4'te)   a·(a+b) = a
5. De Morgan Teoremi: *Augustus De Morgan (1806 – 1871)*
   $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$
5. Genel De Morgan Teoremi:

   $\overline{f(X1, X2, ..., Xn, 0, 1, +, \cdot)} = f(\overline{X1}, \overline{X2}, ..., \overline{Xn}, 1, 0, \cdot, +)$

   - İkili işlemler (VE, VEYA) arasında ilişki sağlar: • ve + arasında

6. İkilik (Düalite) (*Duality principle*)

Bir lojik ifadenin düali, • yerine +, + yerine •, 0 yerine 1, 1 yerine 0, koyarak ve değişkenler değiştirilmeden elde edilir.

$$a + b + \ldots \Leftrightarrow a \bullet b \bullet \ldots$$

Kanıtlanan her teorem düali için de geçerlidir.

Örnek:
Soğurma (*Absorption*):

$a + a \cdot b = a$ kanıtlanırsa düali de doğrudur. $a \cdot (a+b) = a$

Önceki yansılarda yer alan aksiyom ve teoremlerde düal ifadeler yan yana yazılmıştır.

Genelleştirilmiş düalite:

$$f(X1,X2,\ldots,Xn,0,1,+,\bullet) \Leftrightarrow f(X1,X2,\ldots,Xn,1,0,\bullet,+)$$

- De Morgan Teoreminden farklıdır.
  - Teoremlerin kanıtları arasında ilişki sağlar.
  - Lojik ifadelerin dönüştürülmesini sağlayan bir yöntem değildir.

Teoremlerin Kanıtlanması:

a) Aksiyomlar ile

Örnek:

Teorem:	$X \bullet Y + X \bullet Y'$	$= X$
Kanıt:		
Dağılma	$X \bullet Y + X \bullet Y'$	$= X \bullet (Y + Y')$
Tümleme		$= X \bullet (1)$
Etkisiz		$= X$ ✓

Örnek:

Teorem:	$X + X \bullet Y$	$= X$	Soğurma (*Absorption*)
Kanıt:			
Etkisiz	$X + X \bullet Y$	$= X \bullet 1 + X \bullet Y$	
Dağılma		$= X \bullet (1 + Y)$	
Yutma		$= X \bullet (1)$	
Etkisiz		$= X$ ✓	

Teoremlerin Kanıtlanması: **b) Doğruluk Tablosu**

Tümleme (değil) (NOT) işleminin gösterilmesinde $\overline{A}$ simgesi de kullanılır.

De Morgan Teoreminin kanıtı:

$$\overline{(X + Y)} = \overline{X} \bullet \overline{Y}$$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{(X + Y)}$	$\overline{X} \bullet \overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

$$\overline{(X \bullet Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{(X \bullet Y)}$	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Doğruluk tablolarında çok sayıda satır olsa da bunları bir bilgisayar programı yardımıyla kısa sürede sınamak mümkün olabilir.

Lojik ifadelerin aksiyom ve teoremler ile sadeleştirilmesi:

Bir lojik ifadenin minimize edilmesi;
mümkün olduğu kadar az değişken ve işlem içeren,
aynı girişler için orijinal ifade ile aynı çıkış değerlerini üreten,
en kısa ifadeyi bulmak anlamına gelir.

Örnek:

$$
\begin{aligned}
Z &= A'BC + AB'C + ABC' + ABC \quad \boxed{\text{Orijinal ifade}} \\
&= A'BC + AB'C + ABC' + ABC + ABC \\
&= A'BC + ABC + AB'C + ABC' + ABC \\
&= (A' + A)BC + AB'C + ABC' + ABC \\
&= (1)BC + AB'C + ABC' + ABC \\
&= BC + AB'C + ABC' + ABC + ABC \\
&= BC + AB'C + ABC + ABC' + ABC \\
&= BC + A(B' + B)C + ABC' + ABC \\
&= BC + A(1)C + ABC' + ABC \\
&= BC + AC + AB(C' + C) \\
&= BC + AC + AB(1) \\
&= BC + AC + AB \quad \boxed{\text{En sade ifade}}
\end{aligned}
$$

Lojik İfadeler (*Expressions*)

Lojik ifade, değişkenlerin, sabitlerin ve işlemlerin kurallara uygun şekilde yazılmış sonlu kombinezonudur.

X= (x_1, x_2, ... x_n), Her $x_i \in \{0,1\}$ olmak üzere E(X) şeklinde gösterilir.

E_1 ve E_2 lojik ifade ise, E_1', E_2', $E_1 + E_2$, $E_1 \bullet E_2$ gibi tüm kombinezonlar da birer lojik ifadedir.

Lojik İfadelerin Yapıları:

Tek biçimli (*Monoform*) ifadelerde değişkenlerin sadece kendileri ya da sadece tümleyenleri bulunur.

İki biçimli (*Biform*) ifadeler belli bir x değişkenine göre tanımlanırlar. x'e göre biform bir ifadede hem x hem de tümleyeni bulunur.

Çarpım ifadeleri, değişkenlerin sadece lojik çarpımlarından oluşurlar.

Örnek: ab'cd Çarpım (*product*) yerine *monom* sözcüğü de kullanılır.

Toplam ifadeleri, değişkenlerin sadece lojik toplamlarından oluşurlar.

Örnek: a'+b'+c+d Toplam (*sum*) yerine *monal* sözcüğü de kullanılır.

Çarpım böleni, bir çarpımdan bir ya da daha fazla değişken kaldırıldığında elde edilen çarpım ifadesidir.

Örnek: ab'cd nin bazı bölenleri: a, b', c, d, ab', b'c, acd, b'd

İfadelerin yazılma şekilleri:

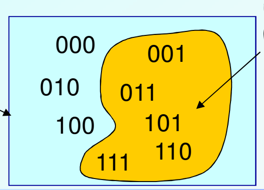
- **ΣΠ:** Lojik çarpımların lojik toplamı ya da "VE"lerin "VEYA"lanması
  Örnek: bc'+ad+a'b
- **ΠΣ:** Lojik toplamların lojik çarpımı ya da "VEYA"ların "VE"lenmesi
  Örnek: (a+b+c')(a+d)(a'+b)

Bir lojik ifadenin değeri:

E(X) ifadesi X=(x_1, ... x_n) giriş vektörünün her değeri için B={0,1} kümesinden bir çıkış değeri üretir.

Bu değerler ifadenin doğruluk tablosunu oluşturur.

Tüm giriş kombinezonları (X) uzayı



E(X)'nin '1' değeri ürettiği (örttüğü) kombinezonlar

Örnek: $E(X) = x_1x_2 + x_3$ ifadesinin doğruluk tablosu

x_1	x_2	x_3	E(X)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Sıra bağıntısı:

Lojik ifadelerin bazı özelliklerini ortaya koymak için aşağıda tanımlanan sıra bağıntısı da kullanılır.

B={0,1} kümesinin elemanları arasında şu sıra bağıntısı tanımlanır: $0 < 1$

0, 1'den "önce gelir" ya da "küçüktür" diye okunur.

Buna göre X vektörleri arasında da bir sıra bağıntısı tanımlanabilir.

Eğer X1 vektörünün tüm elemanları X2 vektörünün aynı sıradaki elemanlarından yukarıda tanımlandığı anlamda "küçük"se (önce geliyorsa) ya da eşitse $X1 \leq X2$ sıralaması geçerlidir.

Örnek:

X1=1001 , X2 = 1101 ise

$X1 \leq X2$ dir.

İki vektör arasında sıra bağıntısı olmayabilir.

Örneğin, X1=0011 , X2 = 1001 ise

X1 ile X2 arasında sıra bağıntısı yoktur.

İfadeler üzerinde sıra bağıntısı:

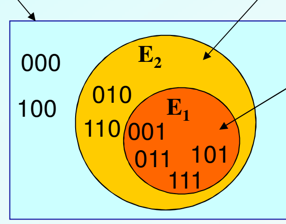
$E_1(X) \leq E_2(X)$ yazılışı, X'in tüm kombinezonları için E_1'in alacağı değerlerin E_2'nin alacağı değerlere eşit ya da küçük olduğunu belirtir.

Örnek :

x_1	x_2	x_3	$E_1(X)$		$E_2(X)$
0	0	0	0	=	0
0	0	1	1	=	1
0	1	0	0	<	1
0	1	1	1	=	1
1	0	0	0	=	0
1	0	1	1	=	1
1	1	0	0	<	1
1	1	1	1	=	1

Tüm giriş kombinezonları (X) uzayı

$E_2(X)$'nin '1' değeri ürettiği (örttüğü) kombinezonlar



$E_1(X)$'nin '1' değeri ürettiği (örttüğü) kombinezonlar

$E_1(X)$'in 1 değerini aldığı her giriş kombinezonu için $E_2(X)$ de 1 değerini alır. (Bu özel bir durumdur.)

$E_1(X) \leq E_2(X)$ ise

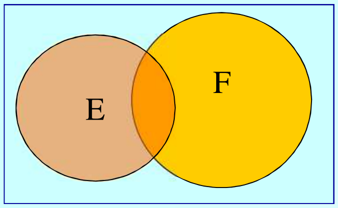
$E_1(X)$, $E_2(X)$'yi gerektirir, $E_1(X) \Rightarrow E_2(X)$,

$E_2(X)$, $E_1(X)$'i örter.

$E_1(X) \leq E_2(X)$ ise:

1. $E_1(X) + E_2(X) = E_2(X)$
2. $E_1(X) \bullet E_2(X) = E_1(X)$

İki ifade arasında her zaman sıra bağıntısı (≤) geçerli olmaz.



E ve F lojik ifadeler olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikleri her zaman geçerlidir:

$E \cdot F \leq E \leq E+F$ ve

$E \cdot F \leq F \leq E+F$

Yutma özellikleri:

$\boxed{E+E \cdot F = E}$ ve düali $\boxed{E(E+F) = E}$

Kanıt: $E(E+F) = EE+EF = E+EF = E(1+F) = E$

$\boxed{E+E' \cdot F = E+F}$ ve düali $\boxed{E(E'+F) = E \cdot F}$

Kanıt: $E+E'F = (E+E')(E+F) = 1(E+F) = E+F$

Bu özellikler lojik ifadelerin sadeleştirilmesinde kullanılır.

Örnek:

$E(a,b,c,d) = abc'$, $F(a,b,c,d) = bd$ E ile F arasında sıra bağıntısı yoktur.

$E \cdot F = abc'd$ $E+F = abc' + bd$

a b c d	E	F	E·F	E+F
0 0 0 0	0	0	0	0
0 0 0 1	0	0	0	0
0 0 1 0	0	0	0	0
0 0 1 1	0	0	0	0
0 1 0 0	0	0	0	0
0 1 0 1	0	1	0	1
0 1 1 0	0	0	0	0
0 1 1 1	0	1	0	1
1 0 0 0	0	0	0	0
1 0 0 1	0	0	0	0
1 0 1 0	0	0	0	0
1 0 1 1	0	0	0	0
1 1 0 0	1	0	0	1
1 1 0 1	1	1	1	1
1 1 1 0	0	0	0	0
1 1 1 1	0	1	0	1

$E \cdot F < E$ ve $E \cdot F < F$.

Bu nednele

$E \cdot F + E = E$

$\cancel{abc'd} + abc' = abc'$

ve

$E \cdot F + F = F$

$\cancel{abc'd} + bd = bd$

$E < E+F$ ve $F < E+F$.

Bu nednele

$E \cdot (E + F) = E$

$abc' \, \cancel{(abc' + bd)} = abc'$

ve

$F \cdot (E + F) = F$

$bd \, \cancel{(abc' + bd)} = bd$

Konsensüs Teoremi :

E_1 ve E_2 içinde x_1 olmayan iki ifade olsun: $E_1(x_2, ... x_n)$ ve $E_2(x_2, ... x_m)$

$E = \mathbf{x_1} E_1 + \mathbf{x_1}' E_2$ ve düali $E^D = (\mathbf{x_1} + E_1^D)(\mathbf{x_1}' + E_2^D)$

ifadeleri x_1 in biform kareleridir.

Örnek: $x_1(x_2+x_3')+x_1'(x_3+x_4)$, $x_1x_2x_3+x_1'x_4x_5$, $(x_1+x_2+x_3')(x_1'+x_3+x_4)$ ve $(x_1+x_2x_3')(x_1'+x_3x_4)$ x_1'in biform karelerine dair örneklerdir.

Konsensüs:

•Çarpımların toplamı şeklinde yazılmış olan $xE_1 + x'E_2$ biform karesinde $\mathbf{E_1E_2}$ çarpımına **konsensüs** adı verilir.

Örnek: abc + a'cd ifadesinin a ya göre konsensüsü: bccd = **bcd**

•Toplamların çarpımı şeklinde yazılmış olan $(x+E_1)(x'+E_2)$ biform karesinde $\mathbf{E_1+E_2}$ toplamı **konsensüs**tür.

Örnek: (a+b+c) (a'+c+d) ifadesinin a ya göre konsensüsü: b+c+c+d = **b+c+d**

Teorem: Biform kareler konsensüslerini yutarlar.

$$\boxed{xE_1 + x'E_2 + E_1E_2 = xE_1 + x'E_2}$$

$$\boxed{(x+E_1)(x'+E_2)(E_1+E_2) = (x+E_1)(x'+E_2)}$$

Örnek: Konsensüs teoremi ile lojik ifadelerin indirgenmesi

F(A, B, C) = A'B'C + A'BC + AB'C + ABC + ABC'

C ye göre konsensüs eklendi

= A'B'C + A'BC + AB'C + ABC + ABC' + AB

= A'B'C + A'BC + AB'C + $A\cancel{B}C$ + $A\cancel{B}C'$ + AB   Soğurma, yutma (*Absorption*)

= A'B'C + A'BC + AB'C + AB

B ye göre konsensüs eklendi

= A'B'C + A'BC + A'C + AB'C + AB

= $A'\cancel{B'}C$ + $A'\cancel{B}C$ + A'C + AB'C + AB   Soğurma, yutma (*Absorption*)

= A'C + AB'C + AB

B ye göre konsensüs eklendi

= A'C + $A\cancel{B'}C$ + AB + AC   Soğurma (*Absorption*)

= A'C + AB + AC

A ya göre konsensüs eklendi

= $\cancel{A'C}$ + AB + $\cancel{AC}$ + C   Soğurma (*Absorption*)

= AB + C

Teorem: Biform kareler arasında dönüşme özelliği vardır.

$$\boxed{xE_1 + x'E_2 = (x+E_2)(x'+E_1)}$$

Tüm lojik ifadeler her iki şekilde de yazılabilir.
$\Sigma\Pi \leftrightarrow \Pi\Sigma$

Lojik Fonksiyonlar

Lojik fonksiyonlar B^n kümesi (n elemanlı 2'li kodların kümesi) üzerinde tanımlanırlar ve üçe ayrılırlar:

1. Yalın fonksiyonlar: Çok girişli bir çıkışlı

$$\forall X^0 \in B^n \ ; \ \exists! \ y^0 \in B \ ; \ y=f(X)$$

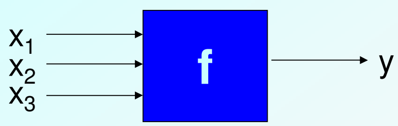
B^n kümesinden değer alan X^0 kombinezonuna f fonksiyonu uygulandığında B kümesinden değer alan bir y^0 değeri elde edilir ve bu değer tektir.

Örnek:

$y = f(X)$

$X \in B^3$

$y \in B$



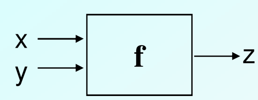
$y = f(X)$ fonksiyonuna ilişkin doğruluk tablosu:

x_1 x_2 x_3	y
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

Yalın Lojik Fonksiyonlar (devam):

n girişli $2^{(2^n)}$ adet yalın lojik fonksiyon vardır.

İki girişli 16 adet yalın lojik fonksiyon vardır:



2 girişli 16 adet yalın lojik fonksiyon (F0–F15)

Girişler X	Y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Fonksiyonlar:

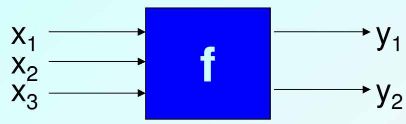
- F0: 0
- F1: X <u>VE</u> Y
- F3: X
- F5: Y
- F6: X <u>YA DA</u> Y
- F7: X <u>VEYA</u> Y
- F8: X <u>TVEYA</u> Y (X <u>VEYA</u> Y)'
- F9: X = Y
- F10: Y'
- F12: X'
- F14: X <u>TVE</u> Y (X <u>VE</u> Y)'
- F15: 1

2. Genel fonksiyonlar: Çok girişli, çok çıkışlı

$Y = f(X): B^n \rightarrow B^m$, $X=(x_1, ... x_n)$, $Y=(y_1, ... y_m)$,

Örnek:

$Y = f(X)$
$X \in B^3$
$Y \in B^2$



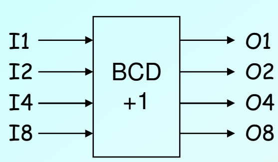
Y = f(X)
fonksiyonuna ilişkin doğruluk tablosu:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

3. Tümüyle tanımlanmamış fonksiyonlar:

Bazı giriş kombinezonları için fonksiyonun alacağı değer belirsizdir.
Bu giriş değeri ya fiziksel olarak oluşamaz ya da bu giriş geldiğinde devrenin çıkışının alacağı değer önemli değildir.

Örnek: BCD sayıları 1 arttıran fonksiyon:



I8	I4	I2	I1	O8	O4	O2	O1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	X	X	X	X
1	0	1	1	X	X	X	X
1	1	0	0	X	X	X	X
1	1	0	1	X	X	X	X
1	1	1	0	X	X	X	X
1	1	1	1	X	X	X	X

Bu girişler için devrenin (fonksiyonun) çıkışlarının alacağı değer belirsizdir. Belirsiz değerleri göstermek için X yerine Φ sembolü de kullanılır.

Lojik Fonksiyonların Gösterilişi

Aynı lojik fonksiyon farklı yöntemler ile gösterilebilir.

Bu fonksiyona ilişkin devre tasarlanırken bu gösterilimlerden uygun olanı kullanılır.

Doğruluk Tablosu İle Gösterilim

Tüm giriş kombinezonları için çıkışın (veya çıkışların) alacağı değerler tablo halinde yazılır.

Sayısal Gösterilim

Giriş kombinezonları 2'li sayılarla kodlandığına göre her kombinezona 10 tabanında bir numara verilir.

Fonksiyon hangi giriş kombinezonları için lojik "1" değeri (ya da lojik "0", "Φ") üretiyorsa o kombinezonların numaraları listelenir.

Örnek: Tümüyle tanımlanmış, yalın bir fonksiyonun gösterilimi:

No	Giriş x_1	Giriş x_2	Çıkış y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

$y = f(x_1,x_2) = \cup_1(0,2)$ $\cup$: Birleşme (*union*) veya "kümesidir"

Değişkenlerin sırası önemlidir. Doğruluk tablosundaki sıraya dikkat edilmelidir. Aksi durumda kombinezon numaraları değişecektir.

$y = f(\mathbf{x_2},\mathbf{x_1}) = \cup_1(0,1)$

Aynı fonksiyon lojik "0" üreten kombinezonlar ile de gösterilebilir.

$y = f(x_1,x_2) = \cup_0(1,3)$

Örnek: Tümüyle tanımlanmış, genel bir fonksiyonun gösterilimi:
Her çıkış için yukarıdaki gösterilim uygulanır.

No	x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
2	1	0	1	0
3	1	1	0	0

$y_1=f(x_1,x_2)= \cup_1(0,2)$

$y_2=f(x_1,x_2)= \cup_1(0,1)$

Aynı fonksiyon lojik 0 üreten kombinezonlar ile de göste

$y_1=f(x_1,x_2)= \cup_0(1,3)$

$y_2=f(x_1,x_2)= \cup_0(2,3)$

Örnek: Tümüyle tanımlanmamış, genel bir fonksiyonun gösterilimi:

Bu durumda sadece lojik "1" veya lojik "0" üreten çıkışları göstermek yeterli değildir.

No	x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	1	1
1	0	1	0	Φ
2	1	0	Φ	0
3	1	1	0	Φ

$y_1 = f(x_1,x_2) = \cup_1(0) + \cup_0(1,3)$

veya $y_1 = f(x_1,x_2) = \cup_1(0) + \cup_\Phi(2)$

veya $y_1 = f(x_1,x_2) = \cup_0(1,3) + \cup_\Phi(2)$

$y_2 = f(x_1,x_2) = \cup_1(0) + \cup_0(2)$

veya $y_2 = f(x_1,x_2) = \cup_1(0) + \cup_\Phi(1,3)$

veya $y_2 = f(x_1,x_2) = \cup_0(2) + \cup_\Phi(1,3)$

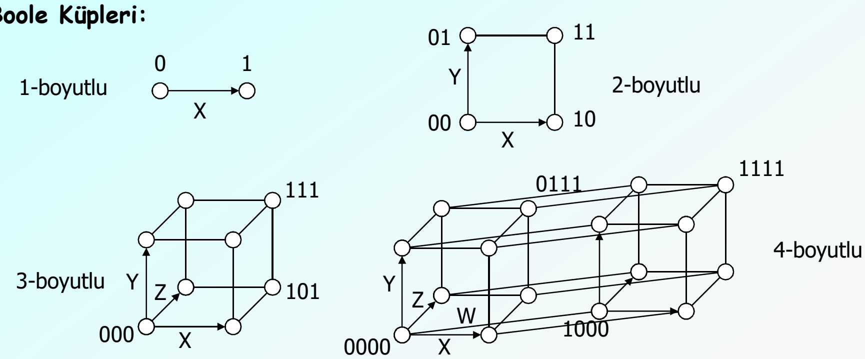
Grafik Gösterilim

Girişi kombinezonları B^n kümesinin elemanları olduklarına göre n boyutlu uzaydaki bir (çok boyutlu) hiperküpün köşelerini oluştururlar.

Fonksiyonun doğru noktalarını (lojik 1) üreten kombinezonlar küp üzerinde işaretlenir. Fonksiyonun giriş sayısı küpün boyutunu belirler.

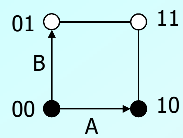
n giriş $\rightarrow$ n boyutlu küp

Boole Küpleri:



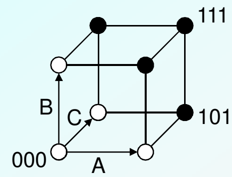
Örnek:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0



Örnek:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



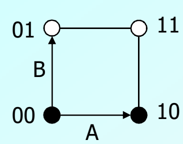
Giriş sayısı arttıkça çizimin zorlaşması nedeniyle, Boole küpleri lojik fonksiyonların gösterilmesi için pratikte kullanılan bir yöntem değildir.
Grafik gösterilim lojik fonksiyonların anlaşılması ve bundan sonraki konuların anlatılması açısından yararlıdır.

Karnaugh Diyagramları (Karnaugh Map)

Maurice Karnaugh (1924-), ABD, fizikçi

Boole küplerinin düzlem üzerindeki iz düşümleri olarak düşünülebilir.

No	A	B	F
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0



F: A \ B	0	1
0	1 (0)	0 (1)
1	1 (2)	0 (3)

veya

F: B \ A	0	1
0	1 (0)	1 (2)
1	0 (1)	0 (3)

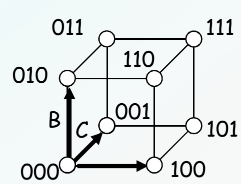
Tabloların gözleri **Gray** koduna göre düzenlenir. Yan yana (ve alt alta) gözlere ait kombinezonların bitişik olması sağlanır.

Üç girişli bir fonksiyon için Karanaugh diyagramının biçimi:

Gray Kodu

F: A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

F: A \ BC				
	000	001	011	010
	100	101	111	110



4 girişli bir fonksiyona ilişkin Karnaugh diyagramının biçimi:

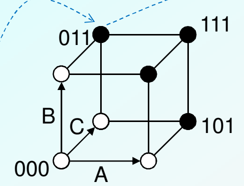
F (AB \ CD)	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Gray Kodu

Gray Kodu

Örnek: 3 girişli bir fonksiyonun Karnaugh diyagramı:

No	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



F (A \ BC)	00	01	11	10
0	0: **0**	1: **0**	3: **1**	2: **0**
1	4: **0**	5: **1**	7: **1**	6: **1**

Karnaugh diyagramları dersin ilerleyen bölümlerinde fonksiyonların indirgenmesinde kullanılacaktır.

Cebirsel Gösterilim (İfadeler) ve Kanonik Açılımlar

Gerçek dünyadaki bir problemin çözümü doğruluk tablosu ile ifade edilebilir.

Örneğin; giriş değişkeni A bir aracın kapısının açık olduğunu, B anahtarın yuvaya takılı olduğunu ifade ederse, alarmın çalıp çalmadığı gösteren (Z=1 ise alarm çalıyor) doğruluk tablosu aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Num.	A	B	Z
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Ancak gerçek dünyadaki problemler çok daha fazla girişe sahip olduklarından doğruluk tabloları da daha karmaşıktır.

Bu problemlerin çözümlerini basitleştirmek ve ilgili devreleri lojik kaplılar ile gerçeklemek için fonksiyonların **cebirsel ifadelerini** bulmak gerekir.

Lojik fonksiyonların ifadeleri doğruluk tablolarından **kanonik açılımlar** ile elde edilir.

İki tür kanonik açılım vardır:

- **1. kanonik açılım** : Çarpımların toplamı ($\Sigma\Pi$)

"1" çıkışı üreten giriş kombinezonlarının çarpımlarının toplamından oluşur.

- **2. kanonik açılım** : Toplamların çarpımı ($\Pi\Sigma$)

"0" çıkışı üreten giriş kombinezonlarının toplamlarının çarpımından oluşur.

1. Kanonik Açılım: Çarpımların toplamı

- 1. kanonik açılım, fonksiyonun "doğru" (1 çıkışı üreten) noktalarına ilişkin çarpımların toplamından oluşur
- n Değişkenli bir fonksiyonda n değişkenin hepsini sadece bir defa (ya kendisi ya da tümleyeni şeklinde) içeren çarpım ifadelerine **minterim** denir.
- Örneğin 3 değişkenli (a, b, c) bir fonksiyonun 8 adet minterimi vardır:

  a'b'c', a'b'c, a'bc', a'bc, ab'c', ab'c, abc', abc
- Her minterim doğruluk tablosunda sadece bir "doğru" satırı örter.
- Fonksiyonun 1. kanonik açılımı minterimlerin toplamından oluşur.
- Minterimlerin oluşturulması,
  - Doğruluk tablosunda çıkışın "1" olduğu satırlar seçilir.
  - Bu satırlarda girişlerin 1 olduğu yerlere değişkenlerin kendileri (örneğin A, B, C) ve sıfır olduğu yerlere tümleyenleri (A', B', or C') yazılarak çarpımlar oluşturulur.
- Bir lojik fonksiyonun birden fazla cebirsel ifadesi vardır.
- Ancak bir fonksiyonun 1nci kanonik açılımı tektir.

Örnek:

"Doğru" değer (1) üreten kombinezonlar: F = 001 011 101 110 111
Minterimlerin Toplamı: F = A'B'C + A'BC + AB'C + ABC' + ABC

A	B	C	F	F'
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Fonksiyonun tümleyeni de benzer şekilde "yanlış" noktalardan hareket edilerek yazılır:

F' = A'B'C' + A'BC' + AB'C'

Minterimlerin numaralanması:
Minterimler giriş kombinezonlarının sıraları dikkate alınarak numaralandırılırlar.

A	B	C	minterimler	
0	0	0	A'B'C'	m0
0	0	1	A'B'C	m1
0	1	0	A'BC'	m2
0	1	1	A'BC	m3
1	0	0	AB'C'	m4
1	0	1	AB'C	m5
1	1	0	ABC'	m6
1	1	1	ABC	m7

3 değişkenli minterimlerin simgesel gösterilimi

Yansı 2.27'deki Örnek F nin Kanonik açılımı:

$$F(A, B, C) = \Sigma m(1,3,5,6,7)$$
$$= m1 + m3 + m5 + m6 + m7$$
$$= A'B'C + A'BC + AB'C + ABC' + ABC$$

$F = \Sigma_{A, B, C}(1,3,5,6,7)$ şeklinde de yazılabilir.

Kanonik açılım fonksiyonun en basit cebirsel ifadesi değildir. Çoğunlukla kanonik açılımlar yalınlaştırılabilir (basitleştirilebilir).

Kanonik açılımın basitleştirilmesi

$$F(A, B, C) = A'B'C + A'BC + AB'C + ABC + ABC'$$
$$= (A'B' + A'B + AB' + AB)C + ABC'$$
$$= ((A' + A)(B' + B))C + ABC'$$
$$= C + ABC'$$
$$= ABC' + C$$
$$= AB + C$$

2. Kanonik Açılım: Toplamların Çarpımı

- 2. kanonik açılım, fonksiyonun "yanlış" (0 çıkışı üreten) noktalarına ilişkin toplamların çarpımlarından oluşur
- n Değişkenli bir fonksiyonda n değişkenin hepsini sadece bir defa (ya kendisi ya da tümleyeni şeklinde) içeren toplam ifadelerine **maksterim** denir.
- Örneğin 3 değişkenli (a, b, c) bir fonksiyonun 8 adet maksterimi vardır:

  a+b+c, a+b+c', a+b'+c, a+b'+c', a'+b+c, a'+b+c', a'+b'+c, a'+b'+c'

- Her maksterim doğruluk tablosundaki sade bir giriş kombinezonu için 0 değerini alır.
- Fonksiyonun 2. kanonik açılımı maksterimlerin çarpımlarından oluşur.
- Maksterimlerin oluşturulması,
  - Doğruluk tablosunda çıkışın "0" olduğu satırlar seçilir.
  - Bu satırlarda girişlerin "0" olduğu yerlere değişkenlerin kendileri (örneğin A, B, C) ve "1" yerlere tümleyenleri (A', B', or C') yazılarak toplamlar oluşturulur.
- Bir lojik fonksiyonun 2nci kanonik açılımı tektir.

Örnek:

"Yanlış" değer (0) üreten kombinezonlar: F = 000 010 100

Maksterimlerin Çarpımı: F = (A + B + C) (A + B' + C) (A' + B + C)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fonksiyonun tümleyeninin 2.kanonik açılımı benzer şekilde “doğru" noktalardan hareket edilerek yazılır:

F' = (A + B + C') (A + B' + C') (A' + B + C') (A' + B' + C) (A' + B' + C')

Maksterimlerin numaralanması:
Maksterimler giriş kombinezonlarının sıraları dikkate alınarak numaralandırılırlar.

Kanonik açılım fonksiyonun en basit cebirsel ifadesi değildir.
Çoğunlukla kanonik açılımlar indirgenebilir (sadeleştirilebilir).

A	B	C	maksterimler	
0	0	0	A+B+C	M0
0	0	1	A+B+C'	M1
0	1	0	A+B'+C	M2
0	1	1	A+B'+C'	M3
1	0	0	A'+B+C	M4
1	0	1	A'+B+C'	M5
1	1	0	A'+B'+C	M6
1	1	1	A'+B'+C'	M7

3 değişkenli maksterimlerin simgesel gösterilimi

Örnek: 2.30'daki F nin kanonik açılımı:

F(A, B, C) = ΠM(0,2,4)
= M0 • M2 • M4
= (A + B + C) (A + B' + C) (A' + B + C)

F = $\Pi_{A,B,C}$(0,2,4) şeklinde de yazılabilir.

İndirgeme:

F(A, B, C) = (A+B+C) (A+B'+C) (A'+B+C)
= ((A+C)+(B·B')) (A'+B+C)
= (A+C) (A'+B+C)
= (A+C) (A'+B+C) (B+C) (konsensüs)
= (A + C) (B + C)

Kanonik Açılımların Dönüştürülmesi

- 1. kanonik açılımdan 2. kanonik açılıma (minterimden maksterime) dönüşüm
  - 1. kanonik açılımda yer almayan minterimlerin indisleri maksterim olarak seçilir.
  - $F(A,B,C) = \Sigma m(1,3,5,6,7) = \Pi M(0,2,4)$
- 2. kanonik açılımdan 1. kanonik açılıma (maksterimden minterime) dönüşüm
  - 2. kanonik açılımda yer almayan maksterimlerin indisleri minterim olarak seçilir.
  - $F(A,B,C) = \Pi M(0,2,4) = \Sigma m(1,3,5,6,7)$
- Minterimler ile tümleyen ifadenin bulunması
  - Açılımda yer almayan minterimler seçilir
  - $F(A,B,C) = \Sigma m(1,3,5,6,7)$ $F'(A,B,C) = \Sigma m(0,2,4)$
- Maksterimler ile tümleyen ifadenin bulunması
  - Açılımda yer almayan maksterimler seçilir
  - $F(A,B,C) = \Pi M(0,2,4)$ $F'(A,B,C) = \Pi M(1,3,5,6,7)$

Kanonik Açılımlar ve De Morgan Teoremi

- Çarpımların Toplamı (Fonksiyonun tümleyeni)

  $F' = A'B'C' + A'BC' + AB'C'$
  - De Morgan

  $(F')' = (A'B'C' + A'BC' + AB'C')'$

  $F = (A + B + C)\ (A + B' + C)\ (A' + B + C)$ 2. kanonik açılım elde edildi.
- Toplamların Çarpımı (Fonksiyonun tümleyeni)

  $F' = (A + B + C')\ (A + B' + C')\ (A' + B + C')\ (A' + B' + C)\ (A' + B' + C')$
  - De Morgan

  $(F')' = (\ (A + B + C')(A + B' + C')(A' + B + C')(A' + B' + C)(A' + B' + C')\ )'$

  $F = A'B'C + A'BC + AB'C + ABC' + ABC$ 1. kanonik açılım elde edildi.