1)Temel Isaret Bilgisi
Isaret Kavrami, Isaretlerin Olculmesi, Gurultu Kavrami, Isaretlerin Bilgisayara Aktarilmasi, Yuvarlatma Hatalari ve AD kartinin Cozunurlugu, Isaretlerin Degerlendirilmesi
2) Periyodik Isaretler
Genlik (amplitude, magnitude), Periyot, Faz (aci)(phase)
Sinuzoidal Isaretlerin Spektrumu
3)Isaretlerin Sinuzoidal Terimlerin Toplami Cinsinden Ifade Edilmesi, Furier Serileri

4) Furier Donusumu

5) Ayrik isaretler
isaretlerin in bilgisayara aktarilmasi. Ornekleme teoremi
Ayrik Furier Donusumu
Hizli Furier DOnusumu

6) LINEER SISTEMLER
anlog sistemlerin transfer fonksiyonu
ayrik sistemler

7) Filtre(suzgec) Kavrami ve FIR FIR filtre tasarimi
Filtre Kavrami
FIR filtre tasarimi

8) Laplas donusumleri
$Z$ donusumleri

9) Analog Filtre Dizayni
Genlik Karakteristigi Bilinen Analog Filtrenin Transfer

Genlik karakteristigi grafik olarak verilen filtrenin $|H(jw)|^2$
genlik fonksiyonunun hesaplanmasi

AGF den Diger tip Filtrelerin elde edilmesi
Frekans Donusumleri}

10) Analog Filtrelerin gerceklemesi

11)IIR filtreler ve Analog Sistemlerin Sayisal Esdegeri

12) Sayisal Filtrelerin Gerceklemesi
1)Direk Programlama,2)Standart Programlama, 3)Paralel Programlama
4)Seri Programlama (IANAL11A)
13)Merdiven tipi Programlama
14)Kafes Yapisinda Programlamma
15)Durum deklemleri fomunda gercekleme

# Temel Isaret Bilgisi

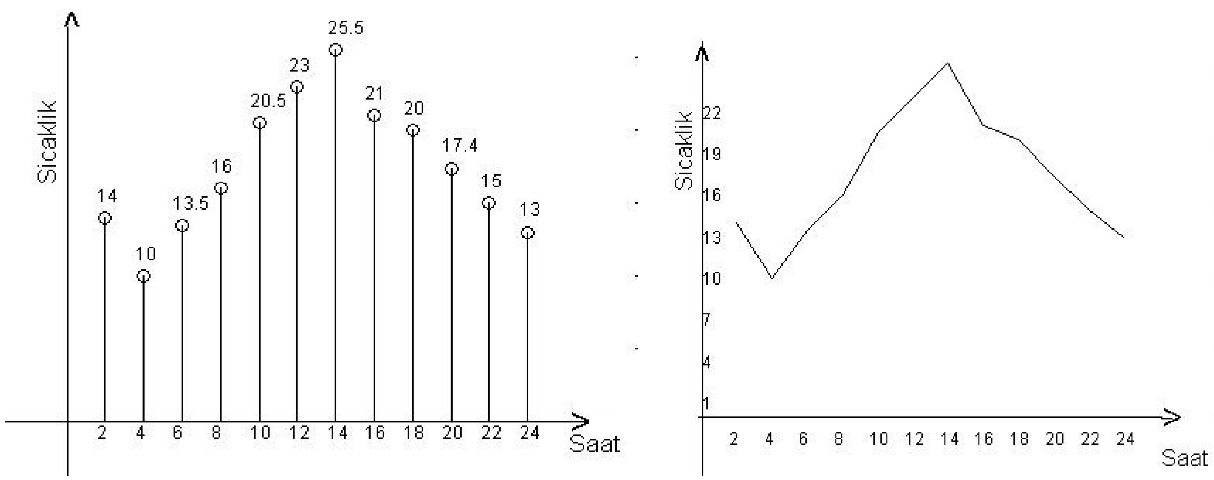
## Isaret Kavrami

Zamana bagli olarak degisen buyuklukler isaret olarak adlandirilir. Gunun degisik saatlerindeki elektrik tuketimini gosteren grafik veya oda sicakligin zamana gore degisimini gosteren grafik muhendislik dilinde isaret olarak adlandirilir.

Mesela Tablo(1.1)de gosterilen gunun degisik saatlerindeki sicalik degerlerini ele alalim. Bu tablo gercekte bir isareti gosterir. Isaretin grafigi sekil(1.1)'de gosterilmistir. Bunun gibi sekil(1.2)'de gosterilen icten yanmali bir dizel motorun icindeki sicakliklarin degisimini gosteren grafik de isaret olarak adlandirlir.

| Saat | 02 | 04 | 06 | 08 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sicaklik$^{0}$C | 14 | 10 | 13.5 | 16 | 20.5 | 23 | 25.5 | 21 | 20 | 17.4 | 15 | 13 |

Tablo(1.1) Gunun degisik saatlerindeki sicaklik degisimi




a)sutun gosterimi b)cizgi grafik gosterimi

Sekil(1.1)Gunun degisik saatlerindeki sicakligin grafik olarak gosterimi

Sekil (1.1)a ve (1.1)b degosterilen grafikler ayni veriyi kullanirlar. Veri sayisi az ise a)gosterimi daha kolay anlasilir. Veri sayisi cok ise (1.1.)b de verilen grafik daha kolay anlasilir.

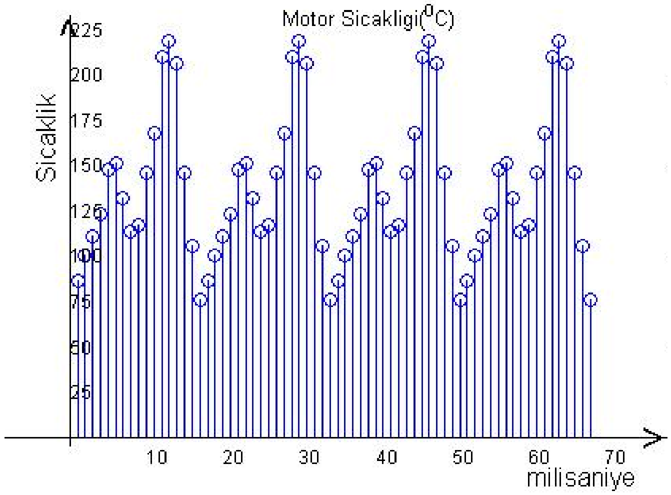
Tablo(1.2) de bir dizel motorun sicakliginin 60 milisaniye sure ile degisimi verilmistir.

| Zaman (milisan) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sicaklik | 87 | 100 | 111 | 123 | 148 | 151 | 132 | 114 | 117 | 146 | 168 | 210 | 219 | 207 | 146 | 105 | 76 | 87 | 100 | 111 |

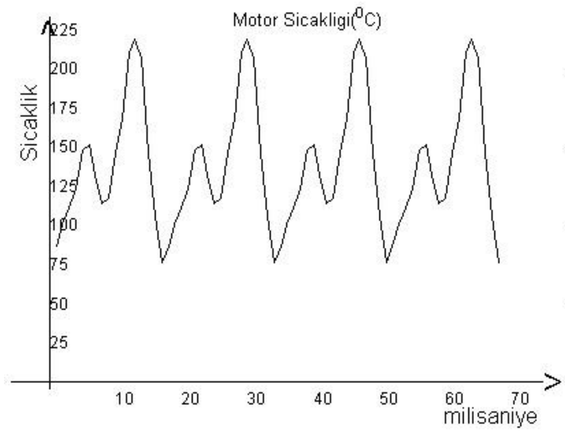
| Zaman (milisan) | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sicaklik | 123 | 148 | 151 | 132 | 114 | 117 | 146 | 168 | 210 | 219 | 207 | 146 | 105 | 76 | 87 | 100 | 111 | 123 | 148 | 151 |

| Zaman (milisan) | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sicaklik | 132 | 114 | 117 | 146 | 168 | 210 | 219 | 207 | 146 | 105 | 76 | 87 | 100 | 111 | 123 | 148 | 151 | 132 | 114 | 117 |

Tablo(1.2)Bir dizel motorun sicakliginin degisimi




a)sutun gosterimi

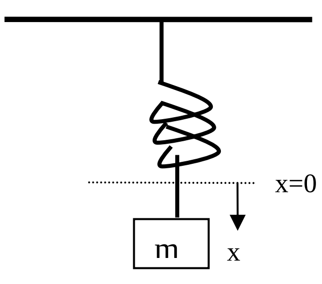



b)cizgi grafik gosterimi

Sekil(1.2)Bir dizel motorun sicakliginin degisiminin grafigi

Gunun sicakliginin degisimi ile, motorun sicakliginin degisimi, her ikiside bir isarettir. Birisinde degisim cok yavas digerinde cok hizlidir.

Sekil(1.3)de gosterilen duzenegi ele alalim. Burada m ile gosterilen bir agirlik bir yaya baglanmis ve yay da bir iple sabit bir noktaya baglanmistir. m ile gosterilen kutleye asagiya dogru, F kuvveti uygulansin. Bu durumda kutle once asagi dogru hareket edecek sonra yukariya dogru hareket edecek ve bu islem surekli olarak tekrar edecektir. Ortamda hava surtunmesi oldugundan bu hareket belli bir zaman sonra duracaktir. Simdi m kutlesine hic kuvvet uygulanmadigi durumda kutlenin alt ucunu x=0 noktasi olarak ele alalim. Kuvvetin uygulandigi ani t=0 ani kabul ederek zamana gore kutlenin hareketini kaydederek sekil(1.4)de oldugu gibi grafigini cizelim. Elde edilen bu x(t) muhendislik terminolojisinde mekanik bir isaret olarak isimlendirilir



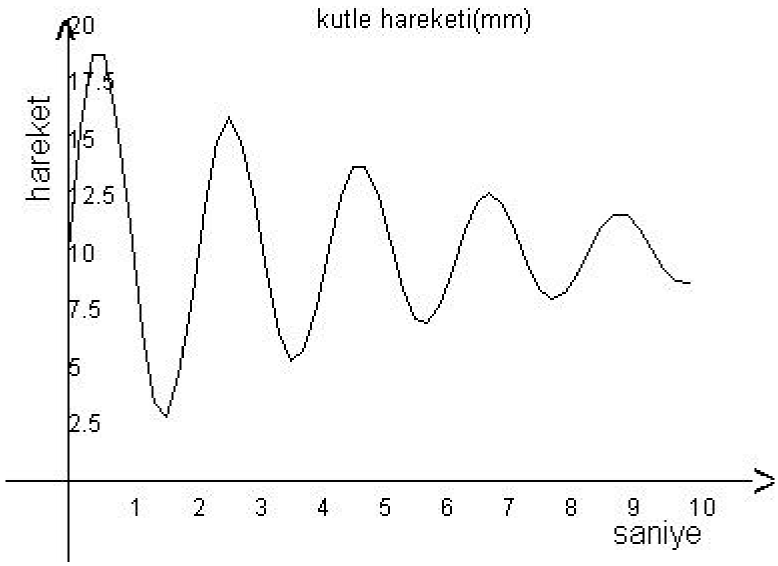

Sekil(1.3) Yay kutle sistemi

| Zaman (saniye) | 4 | 4.2 | 4.4 | 4.6 | 4.8 | 5 | 5.2 | 5.4 | 5.6 | 5.8 | 6 | 6.2 | 6.4 | 6.6 | 6.8 | 7 | 7.2 | 7.4 | 7.6 | 7.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hareket (mm) | 7.59 | 10.1 | 12.5 | 13.8 | 13.7 | 12.4 | 10.4 | 8.4 | 7.1 | 6.89 | 7.74 | 9.29 | 11 | 12.2 | 12.6 | 12.1 | 10.9 | 9.53 | 8.42 | 7.93 |

| Zaman | 4 | 4.2 | 4.4 | 4.6 | 4.8 | 5 | 5.2 | 5.4 | 5.6 | 5.8 | 6 | 6.2 | 6.4 | 6.6 | 6.8 | 7 | 7.2 | 7.4 | 7.6 | 7.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (saniye) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hareket (mm) | 7.59 | 10.1 | 12.5 | 13.8 | 13.7 | 12.4 | 10.4 | 8.4 | 7.1 | 6.89 | 7.74 | 9.29 | 11 | 12.2 | 12.6 | 12.1 | 10.9 | 9.53 | 8.42 | 7.93 |

Tablo(1.3) Yay kutle sisteminin zamana gore degisim degerleri



Sekil(1.4) Yay kutle sistemi ve mekanik x(t) isareti.

.

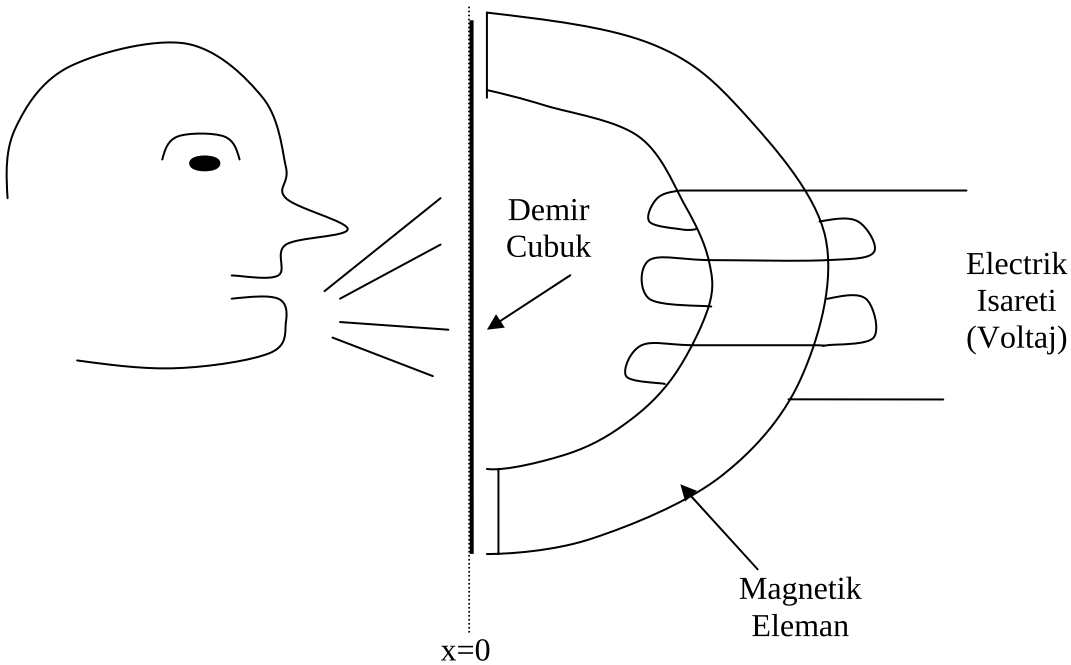
Sekil(1.5) Depremde olculen sismik isaret

Sekil(1.6)da basit bir mikrofonun calisma prensibi gorulmektedir. Insan konustugunda (veya herhangibir cisim ses cikardiginda) havadaki molekulleri titrestirir. Bu titresim bir basinc olusturur. Bu basinc dalgasi bizim kulagimiza gelir ve biz de ses istiriz. Tablo(1.6) da mikrofon hareketine iliskin veriler, sekil(1.7)de ise buverilerin grafik gosterimi verilmistir. Sekil(1.8)a,b,c de bir insanin aaaa, eeee ve harran universitesi teleffuz ederkenki grafigi verilmistir.

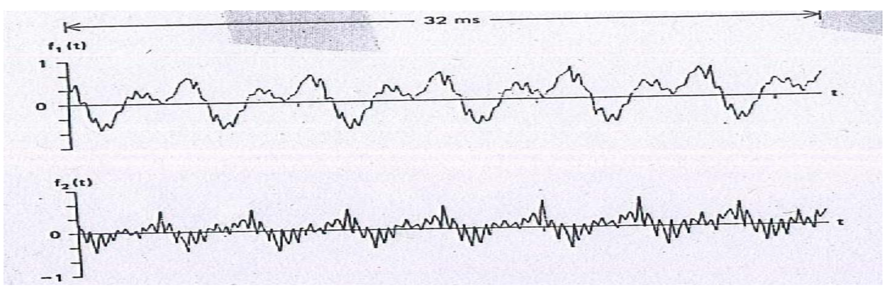
Insandaki kanin basincini gosteren kalb kardiografisi olarak bilnen grafik tibbi bir isarettir.

Bunun gibi elektrik, elektromekanik, hidrolik, pnumatik, kimya, jeodezi, tip vb gibi bilim dallarinda da isaret kavrami benzer sekilde tanimlanmistir.

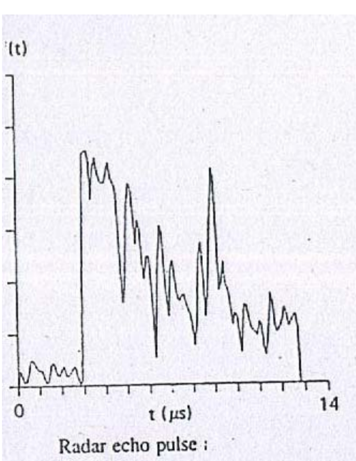
**Mikrofonun Calisma Prensibi**

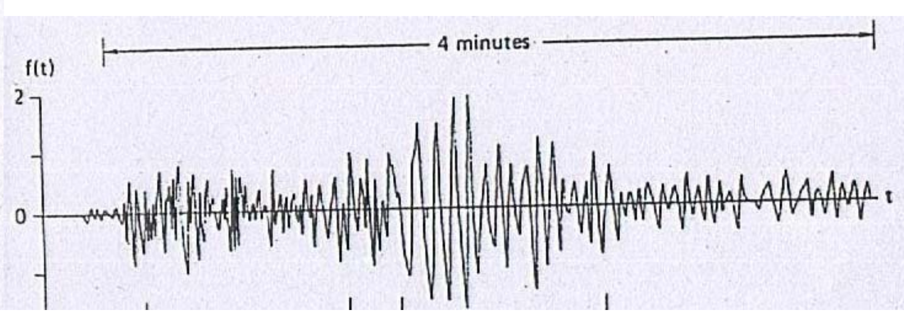



Sekil(1.6) Mikrofon sistemi



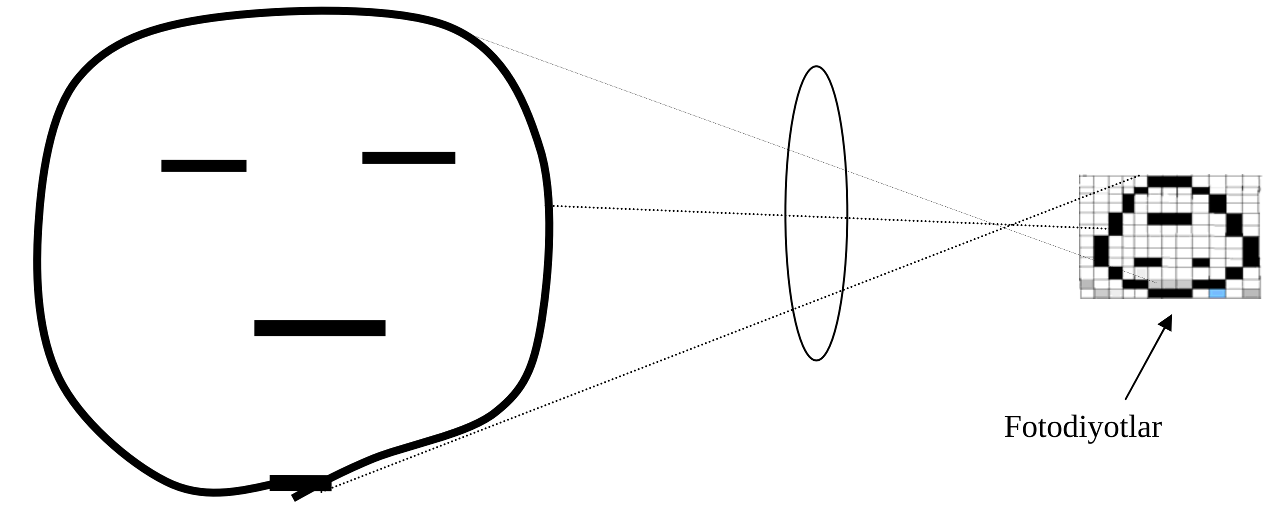
EEE sesi (Ustteki adama ait eee sesi alttaki cocuga ait eeee sesi)

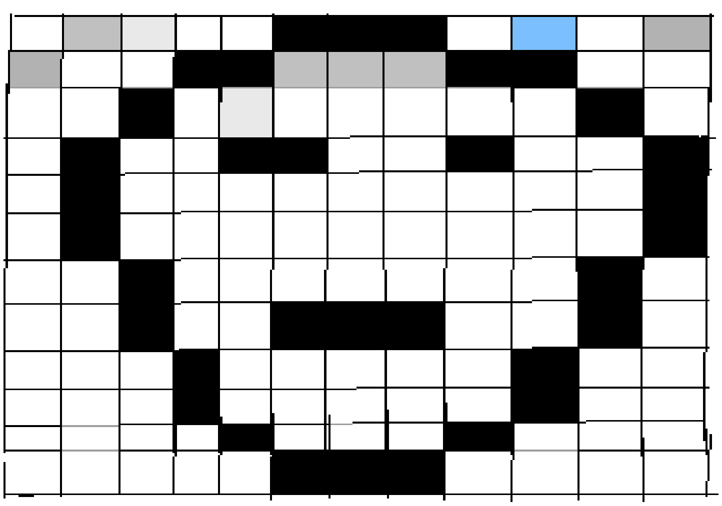



Radara gelen yansima isarti Deprem esnasinda olculen titresim isareti

SCANNER SISTEMI



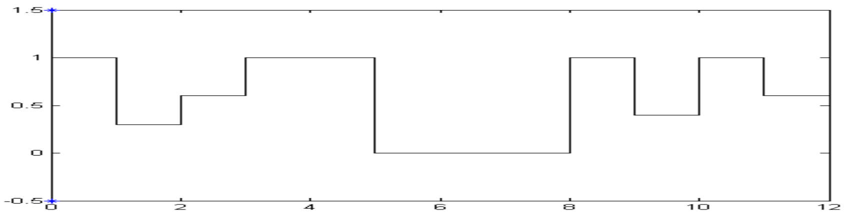



12x12 pixel Resim(image)

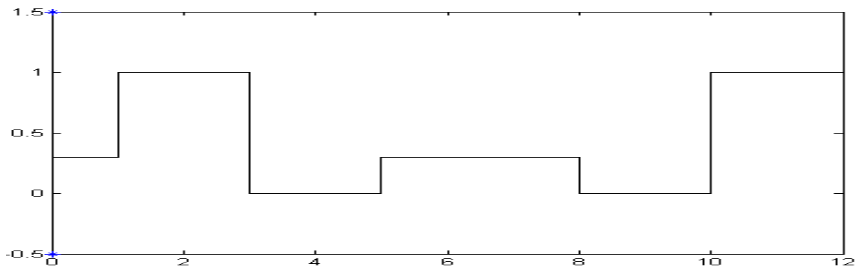
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.4 | 1 | 0.6 |
| 0.3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0.6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

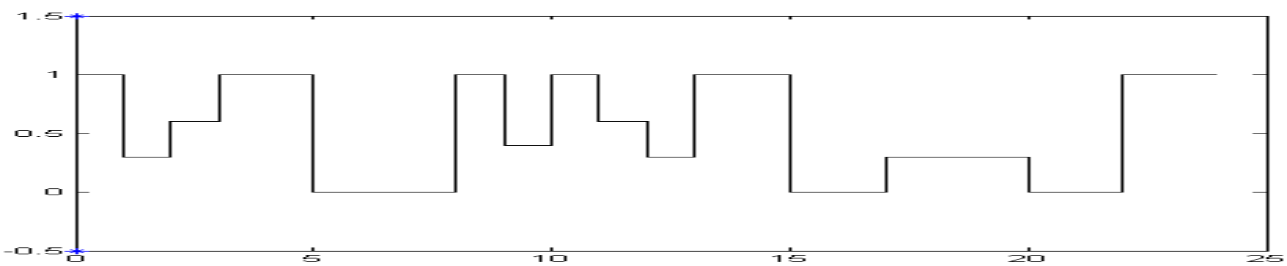
Resme karsilik gelen volt degerleri



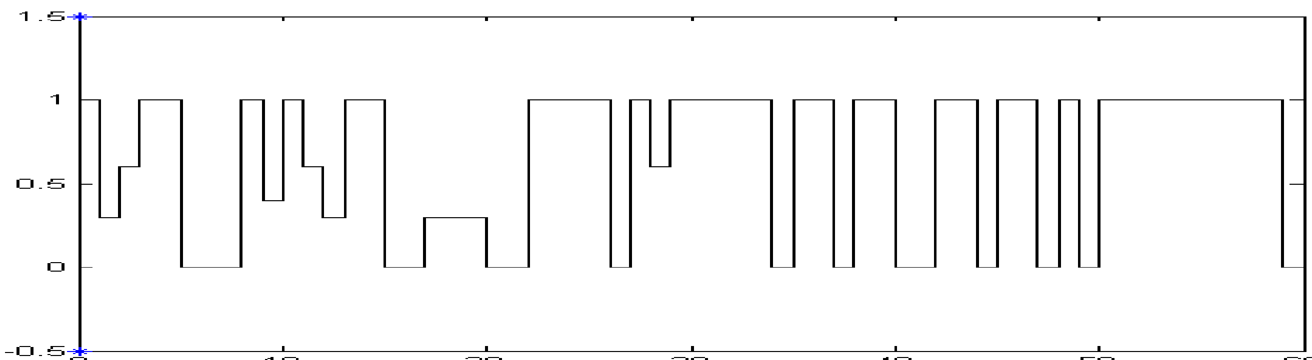
Birinci satira ait volt degerleri (1, 0.3, 0.6, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0.4, 1, 0.6)



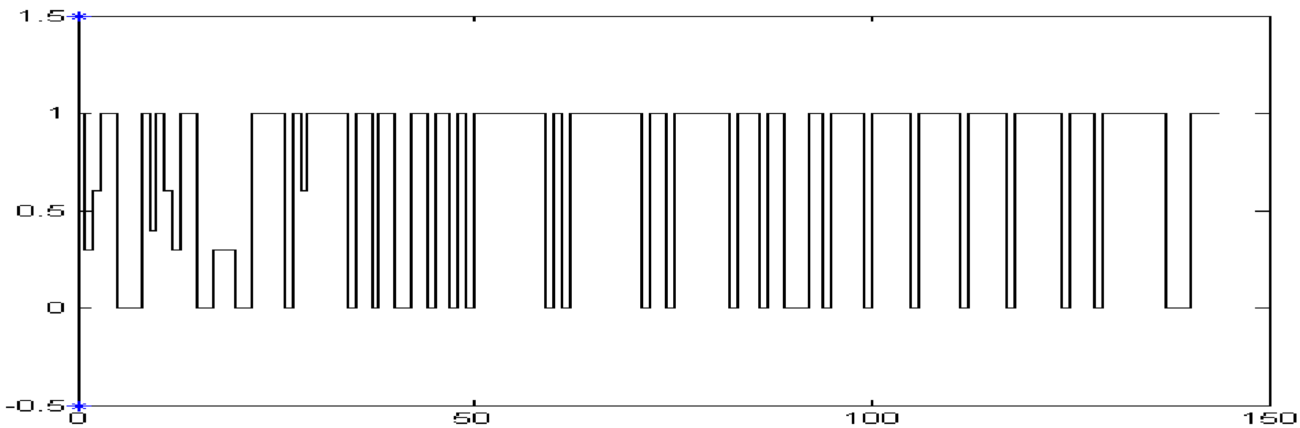
Ikinci satira ait volt degerleri ( 0.3, 1, 1, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 0, 0, 1, 1)



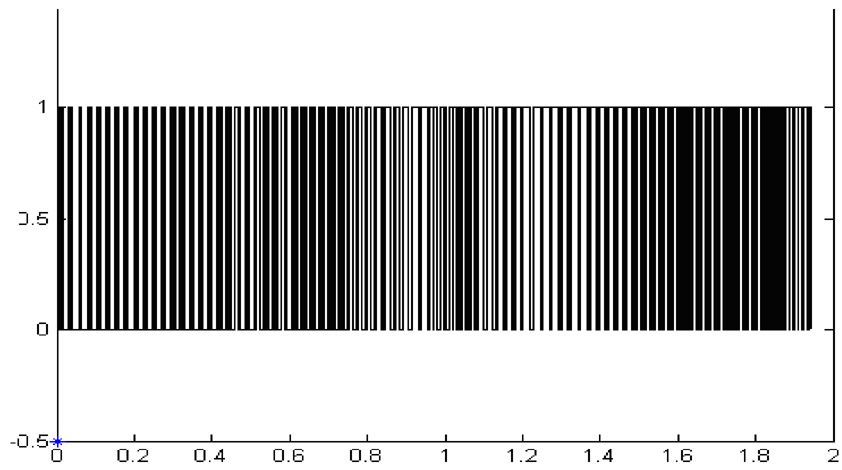
Birinci+ikinci satira ait volt degerleri ( 1, 0.3, 0.6, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0.4, 1, 0.6 ---- 0.3, 1, 1, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 0, 0, 1, 1)



Ilk 5 satira ait volt degerleri

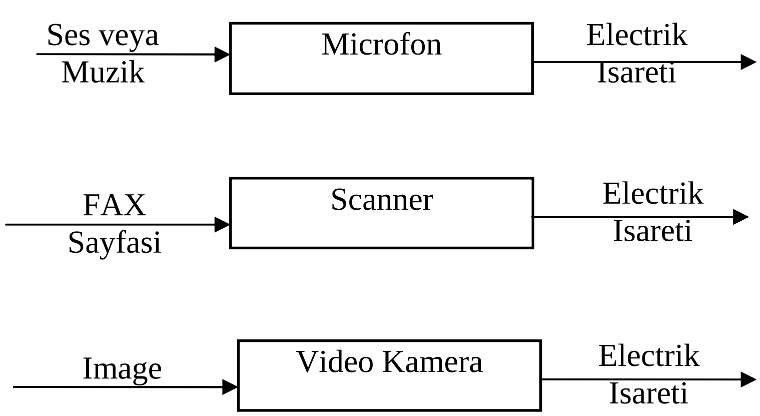



Tum resme ait volt degerleri



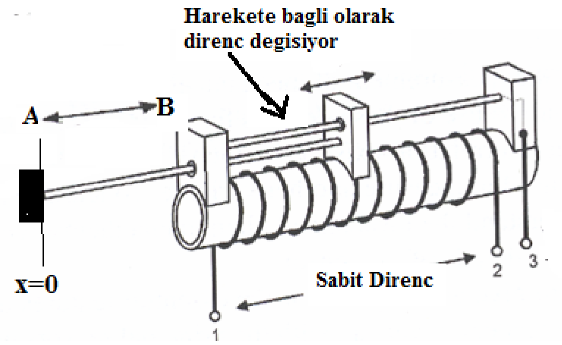

Gercek bir resim ve onaait volt degerleri

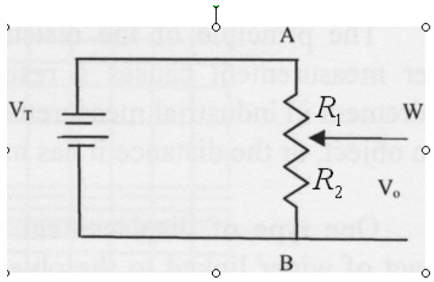
Bir resim yaklasik olarak 600x400 =240000 pixel.
TV: bir saniyede 25 resim var. 25x240000=6000000 pixel. =6megapixel
Bir TV signali bir saniyede 6 megapixel veri tasir. (6 Megahertz'lik bir signal)



## Isaretlerin Olculmesi

Direk veya dolayli yoldan olculemeyen bir isaretin muhendislikte bir anlami yoktur. Isaretin olcumu icin ilk adim kucuk istisnalar disinda olculecek isaretin elektriksel isarete (elektrik akimi veya gerilimine) cevrilmesidir. Bu cevirmeyi yapan aletler duyarga(sensor, transducer) olarak adlandirilir.

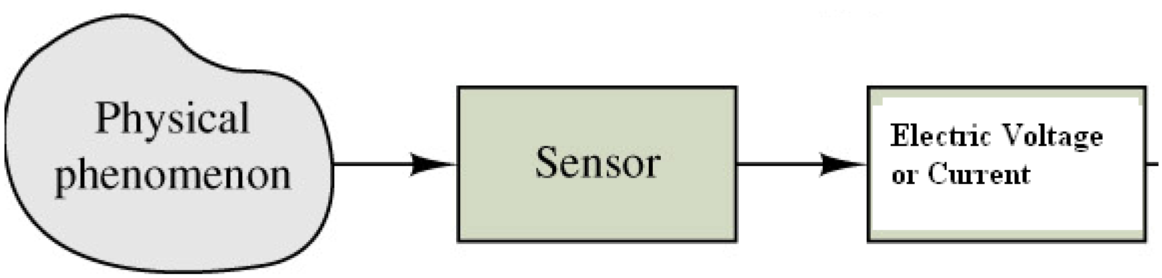


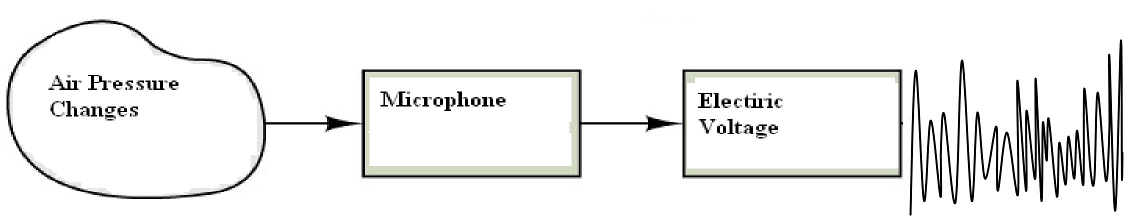

$$V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_T$$

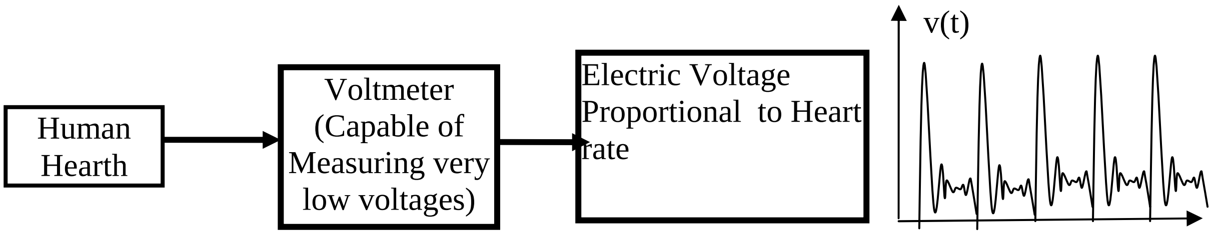
Sekil(1.11)Direnc yardimiyla mesafe olcumu

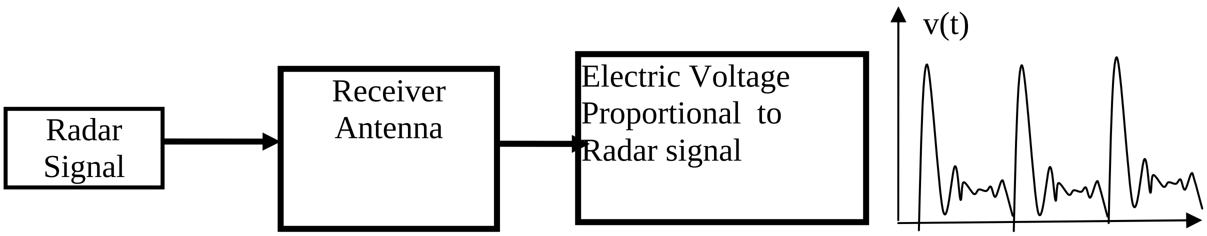
Sekil(1.11) de mesafe olcen bir duyarganin prensip semasi goruluyor. Burada cubuk hareket ettikce $R_2$ direnci degisecektir. Olusan $V_0$ gerilimi x mesafesine ait bilgiyi tasiyacaktir. Duyargalar konusu bu kitabin kapsami disindadir. Ancak butun duyargalar temel itibarile yukaridakine benzer sekilde is goruruler. Mesela basinc olcen piezoelektrik bir duyarga basincla orantili bir gerilim urettigi gibi bir ultrasonik duyarga da uzerine dusen basincla orantili bir gerilim uretir. Bunun gibi bir radyo veya televizyon anteni de uzerine dusen elektromagnetik dalganin siddeti ile orantili bir gerilim uretir. Cep telefonunun anteni de kendine gelen elektromagnetik dalganin siddeti ile orantili bir gerilim uretir.

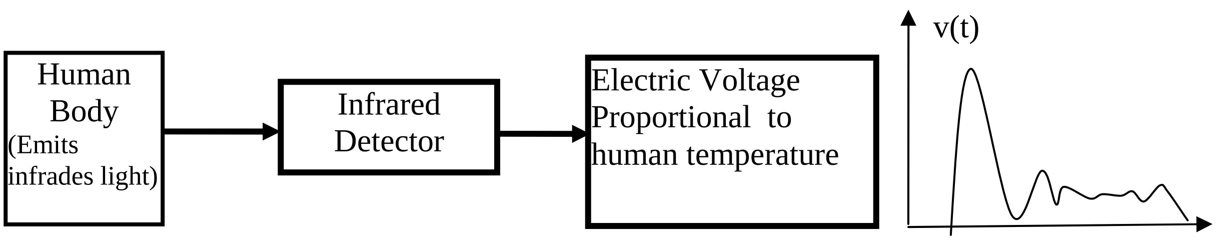


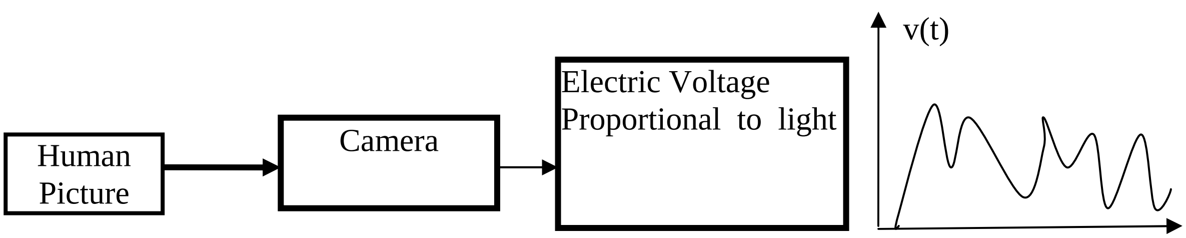

**Examples**

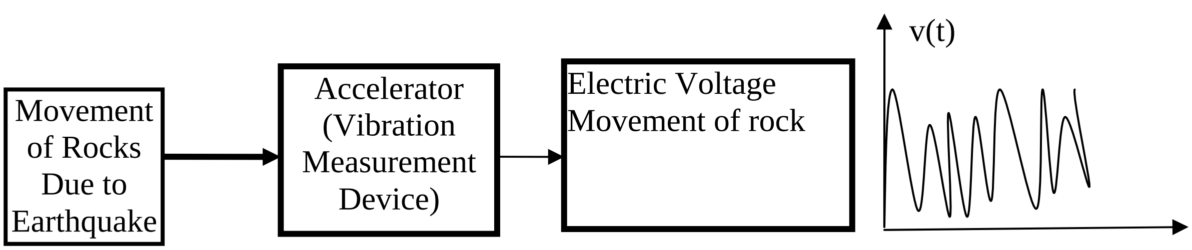





In the above examples

Microphone, Voltmetre, Receiveing Antenna, Infrared detector, Camera, Accelerator are all **sensors.**

**What We Measure**

Microphone example ➔ We measure air pressure

Human heart example ➔ We measure the voltage produced by human body

Radar Example ➔ We measure the amplitude of electromagnetic wave

Infrared detector example ➔ We Measure the intensity of infrared light

Camera example ➔ We Measure the intensity of visible light

Earthquake example ➔ We measure the  acceleration

## Gurultu Kavrami

Muhendislikte olculen bir isaretin yaninda istenmeyen fakat olcum esnasinda tabii olarak bulunan isaretler gurultu olarak adlandirilir. Mesela sekil(1.11)'deki duzenekle mesafe olcumu yapilirken o civarda bir elektrik dugmesi acilsa yada kapansa sisteme bir parazit(gurultu) isareti eklenecektir. Sekil(1.12)'de bu durum gosterilmistir. Gurultu isareti kesikli yada surekli olabilir. Sekil(1.11)'deki duzenegin yakininda bir bir motor calissa bu motorun meydana getirdigi elektromanyetik etkiler olcme isaretine surekli olarak bir parazit(gurultu) ekleyecektir.

Gurultu isaretlerinin degeri onceden hesaplanabiliyorsa bu tip gurultu isaretlerine deterministik gurultu isareti eger onceden hesaplanamiyorsa rasgele (random) isaretler denir. Yukaridaki olcme duzeneginde motorun cikardigi gurultu onceden hesaplanabilecegi icin deterministik gurultu sinifina girer. Elektrik acma kapama olayi ise ne zaman olacagi belli olmadigi icin rasgele gurltu sinifina girer. Sabit araliklarla elektrik dugmesinin acilip kapanmasi sonucu cikan gurultu ise haliyle deterministik gurultu olur.

Rasgele isarete bir baska ornek atmosferde ucaga etki eden turbilans etkisi ...... seklinde gosterilebilir.

Rasgele gurultu isaretleri onceden belli olmadigi icin bir matematiksel bir ifade ile gosterilemez. Ancak isaretin genligi ve frekansi hakkinda belirli sinirlar kabul edilip olcme duzenegi bu sinirlara toleransli olacak sekilde dizayn edilir.

Bir isaretin dogru olarak olculmesi icin icindeki gurultu miktarinin az olmasi gerektigi aciktir.

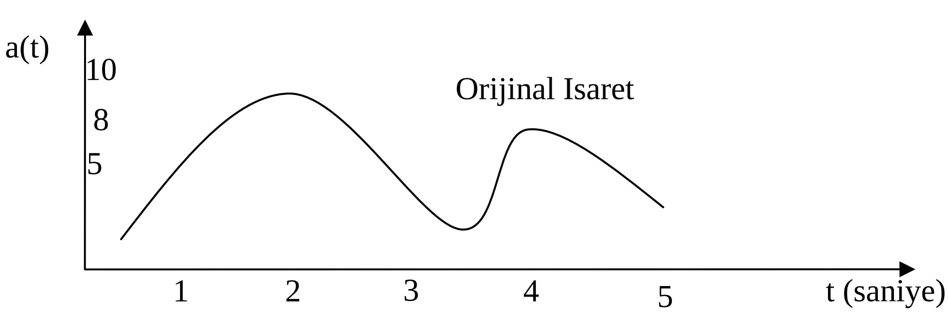
# Isaretlerin Bilgisayara Aktarilmasi

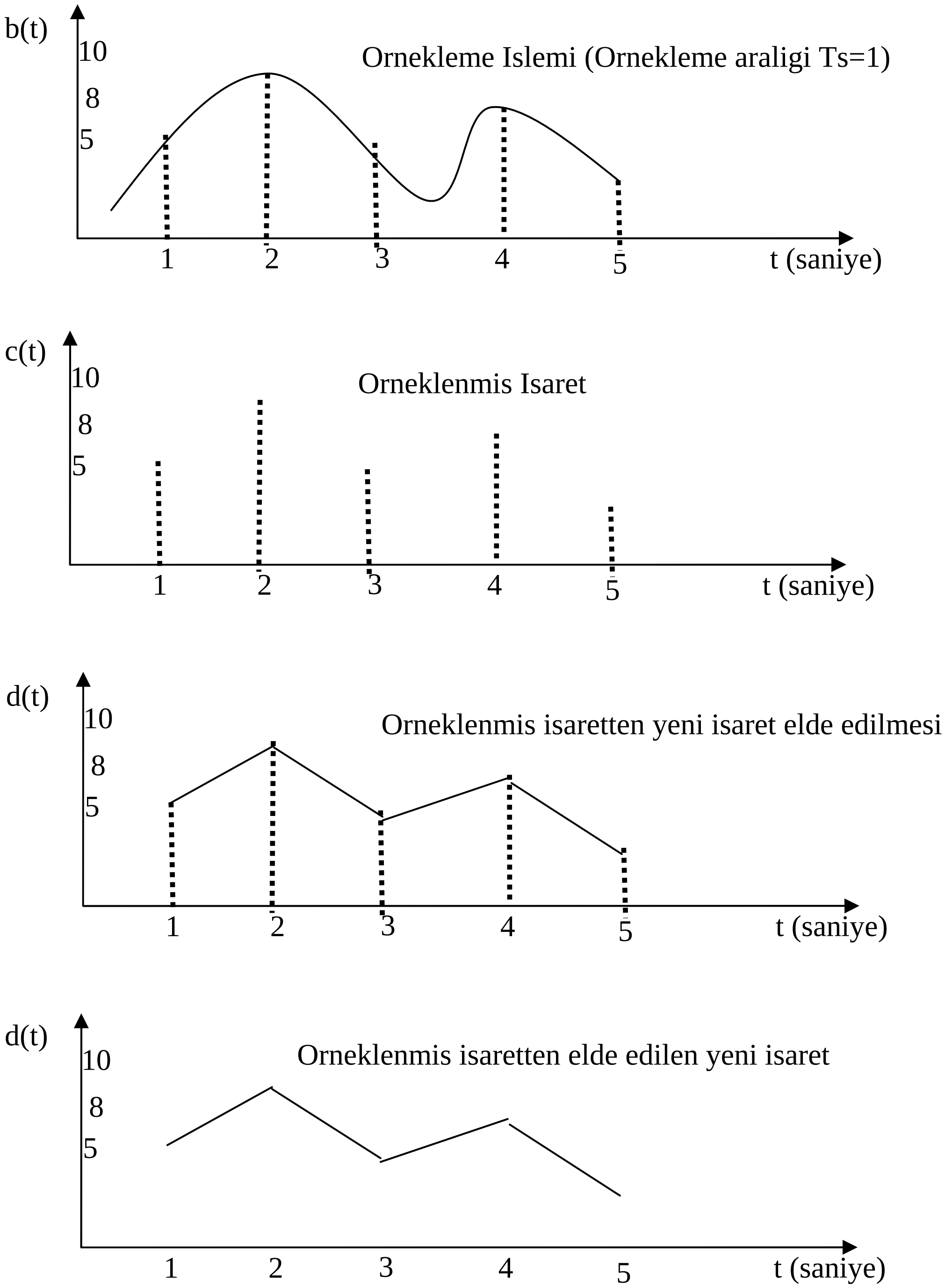
Ayrik isaretler zamanin belli anlarinda degerleri olan bu zaman araliginda degerlerinin anlami olmayan isaretlerdir. Ayrik isaretlerin bir kismi tabiati geregi ayriktir, (bir dukkandaki gunluk esya satis sayisi, bir yeri ziyaret eden gunluk insan sayisi gibi) bir kismi da surekli isaretlerin ayrik hale donusturulmus halidir (bir firinin sicakliginin her saat olculmesi, ucagin irtifasinin her dakika olculmesi gibi).

Bilgisyarlarin gelismmesi ile isaretleri bilgisayara aktararak analiz etmek daha kolay hale gelmistir. Bilgisayara analog datanin aktarimi bilgisayara takilan elektronik devreler vasitasiyla yapilir. Analog datanin bilgisayara aktarilmasi endustride cok kullanildigi icin bu tip devreler ticari olarak imal edilmekte ve satilmaktadir. Bu tip elektronik devrelerin endustride en cok kullanilani piyasada PC olarak bilinen bilgisayarlar icin hazirlanmis olanlaridir. Bu tip devreler PC'lerin slotlarina hazir olarak takilmakta ve buyuk bir kullanim kolayligi gertirmektedir. Bu tip kartlari kullanan kisinin kart uzerindeki elektronik devrenin ic yapisini bilmesi gerekmez. Analog dijital cevirici kart veya kisaca AD cevirici kart olarak bilinen bu kartlar analog bir isareti belli araliklarla bilgisayara aktarir.

### Isareti Bilgisayara Aktarma Hizi

Bir isaretin bilgisayara aktarilmasi demek isaretin belirli anlardaki degerinin bilgisayara aktarilmasi demektir, yoksa isaretin her t anindaki degerinin bilgisayara aktarilmasinin pratik bir anlami yoktur.



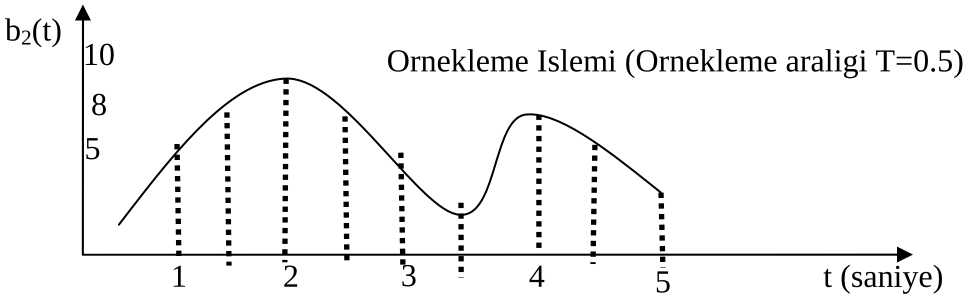


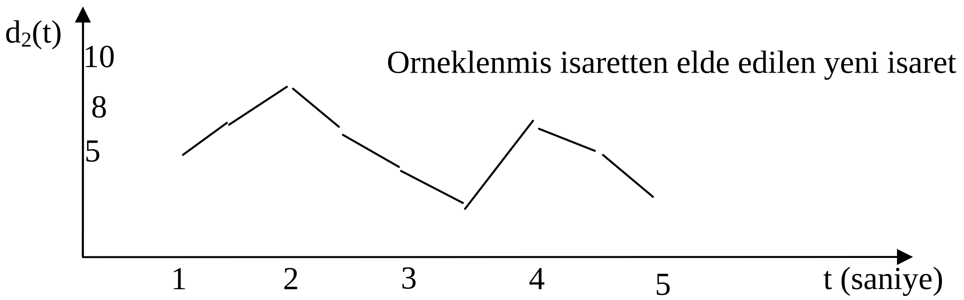

Sekil (1.15)Isaretin orneklenmesi

Sekil(1.15.a)daki g(t) isaretini ele alalim. Bu isaretin bilgisayara aktarilmasi icin sekildeki t anlarindaki degeri bilgisayar tarafindan olculmus olsun. t=1 ve t=2 arasindaki bir zamanda isaretin ne oldugu bilgisayar tarafindan bilinmemektedir. Bilgisayar isareti sekil(1.15.d) deki gibi zannetmektedir. Isaret bilgisayara aktarildiginda bilgisayarin hafizasinda (veya bir data dosyasinda) tablo (1.15)deki rakamlar olacaktir.

| Zaman | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Voltaj Degeri | 5 | 9 | 5.5 | 7.4 | 3.5 |

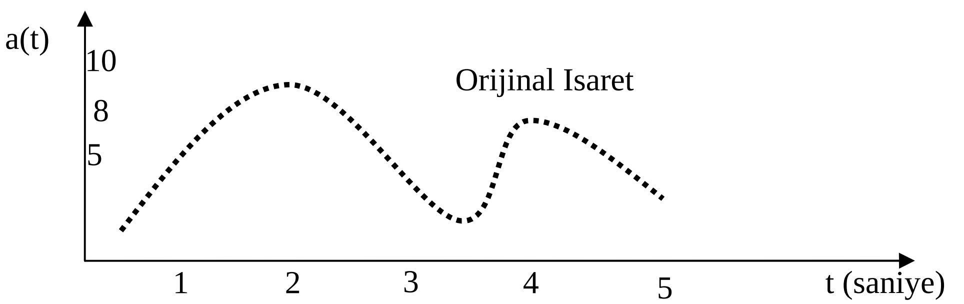
Ornekleme araligi T=0.5 olarak secilsin.



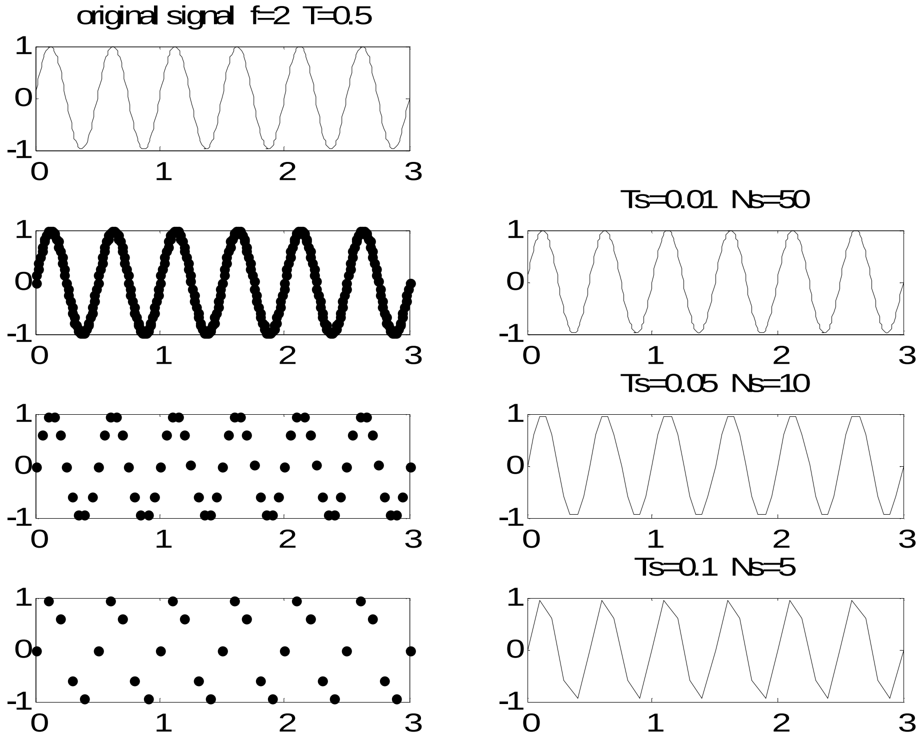

Sekil(1.16) isaretin Ts=0.5 saniye araliklarla orneklenmesi.

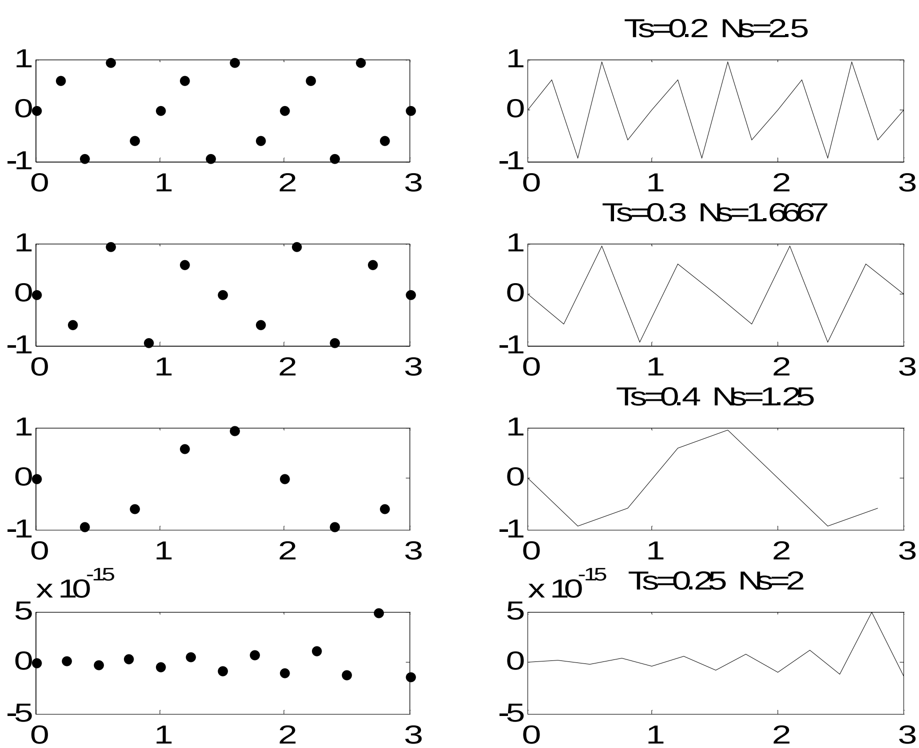
Bu durumda bilgisayar isareti sekil(1.16.b) deki gibi varsayacatir. Ornekleme araligini T=0.01 secelim bu durumda bilgisayar iareti Sekil(1.17) dekii gibi varsaycaktir.




Sekil(1.17) isaretin Ts=0.01 saniye araliklarla orneklenmesi sonucu isaretin yeniden elde edilmesi.

a) g(t)=sin 2t isaretinin orneklenmesi



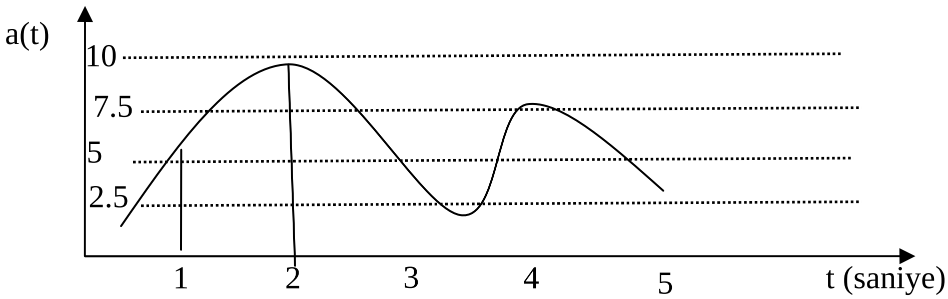




Ts=0.01,0,02…0.1,0.4 saniye araliklarla ornekleyelim. gercek isaret sinus oldugu halde bilgisayara gelen bilgi sinuse benzer hali kalmamistir. O halde hemen su sorular akla gelir. Bilgisayara aktarilan data hangi olcude gercek isareti temsil eder? Gercek isarete benzemesi icin ornekleme araligi ne kadar kucuk olmalidir ki bilgisayardaki rakamlar gercek isaretin tasidigi bilgileri tasisin?

Fabrikanizdaki bilgisayara boyle bir kart takmaniz gerektiginde, yukaridaki bilgilerin isigi altinda bilgisayara aktarma hizi cok yuksek olan kart lazim diyeceginiz aciktir. Ancak burada fiat faktoru iisin icine girer. Bilgisayara data aktarma hizi yuksek olan kartin fiati da yuksektir. O halde hangi hizda bir AD karti takilacak sorusu bilgisayara aktarilacak isaret nasildir sorusunu gundeme getirmektedir. Bolum(??)de $t_1,t_2$ araliginin ne kadar kucuk olmasi konusu incelenecektir.

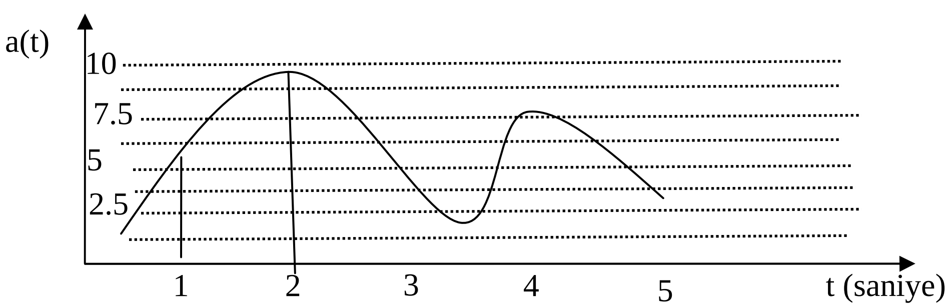
## Yuvarlatma Hatalari ve AD kartinin Cozunurlugu

Sekil(1.17)'de gosterilen g(t) isaretini bilgisayara aktarmak isteyelim. AD cevirici kartina isaretin maximum ve minimum degeleri onceden bildirildigini varsayalim. (Bu islem A/D cevirici kartin kullaniminda onceden ayarlanir).




Sekil(1.18)

A/D cevirici karti verilen maximum ve minimum degerler arasini N bolgeye boler. Analog g(t) isaretinin herhangibir andaki degeri bu bolgelerden birinde oldugu varsayilir. Ornek olarak sekil(1.18)'de gosterilen isaret bilgisayara aktarim icin 4 bolgeye ayrilmistir. Bu durumda t=1 anindaki gerilim 5V olarak alinacak t=2 anindaki gerilim ise 10V olarak alinacaktir. Gercekte t=1 noktasindaki gerilim 5.3V t=2 noktasindaki gerilim ise 9.1V dur. Gerilimin daha hassas olarak olculebilmesi icin bolge sayisinin artirilmasi gerekir. Iste A/D kartinin ayirabildigi bolge sayisina A/D kartinin cozunurlugu denir.




Sekil(1.19)

Sekil(1.19) da isaret 8 bolgeye ayrilmistir. (0- 1.25- 2.5- 3.75-5.0 - 6.25 -7.5-9.75- 10.00 )

Konuyu daha acik gorebilmek icin bilgisayarlarin yapisina kisaca bakalim. Bugunku bilgisayar teknolojisi ikili sistem uzerine bina edilmistir. Bilgisayarlarda rakamlar 0 ve 1'lerin kombinezonlari seklinde tutulur. Kelimelerin cumlelerin, resimlerin sekillerin bilgisayarda tutulmasi da ayni sekilde ikili sistem iledir. Piyasada ticari amacli satilan kartlarin cozunurlugu 4-bit, 8-bit, 12-bit, 16-bit olarak verilir. Bit sayisi arttikca A/D kartinin ayirabilecegi bolge sayisi da artacak dolayisiyla daha hassas olcum yapilacaktir. 4 bitlik ve 12 bitlik iki A/D cevirici karti ele alalim. 4-bitlik kartin ayirabilecegi bolge sayisi $2^4$=16 olurken 16 bitlik bir kartin ayirabilecegi bolge sayisi $2^{16}$=65536 olacaktir.

## Isaretlerin Degerlendirilmesi

Sekil(1.18)'de genel bir isaret isleme duzenegi gosterilmistir.

Olculen isaret icin ilk yapilacak islem isaretin icinde gurultunun ayiklanarak gercek isaretin elde edilmesidir. Bu is filtre kullanarak veya degisik bilgisayara algoritmalari kullanarak yapilir.

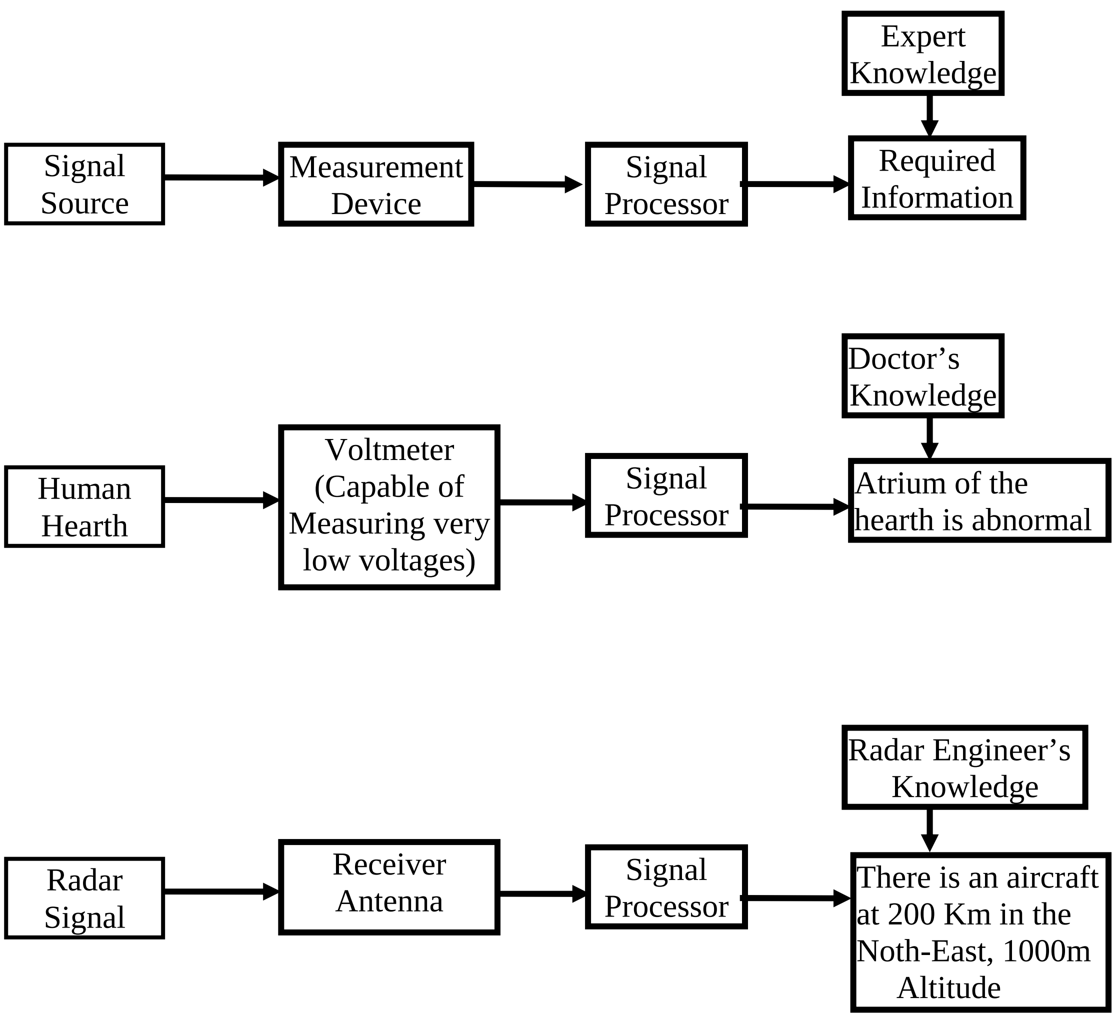
Gurultuden ayiklanmis bir isaret uzerinde bir yorum yapmak cogu kere imkansizdir. Bu yuzden isaretin Furier donusumu alinir.

Isaret bilgisayara aktarilmissa cesitli (akilli) algoritmalar kullanilarak isaret icindeki gurultu giderilebilir.

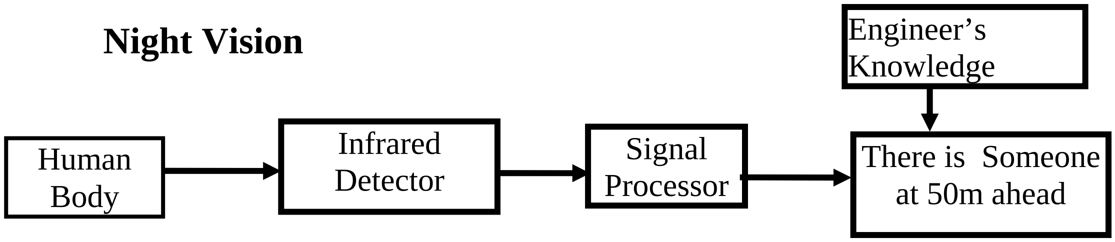
Olcme g(t)+n(t) gurultu g(t) isaret gozlem ve yorum
duzenegi ayilama isleme

Sekil(1.18)Genel bir isaret isleme duzenegi

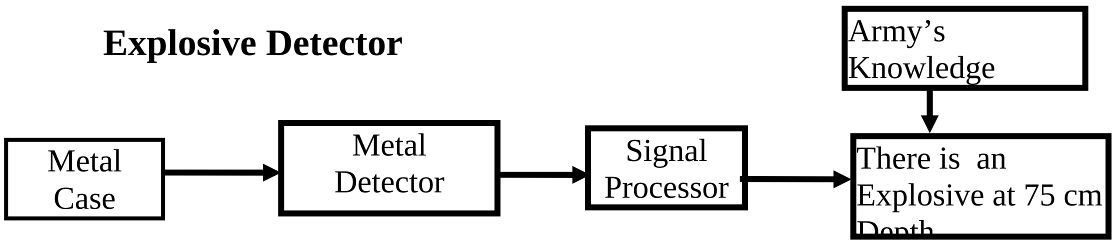
Examples of Signal Processings



**Night Vision**




**Explosive Detector**




**Speech Recognition**

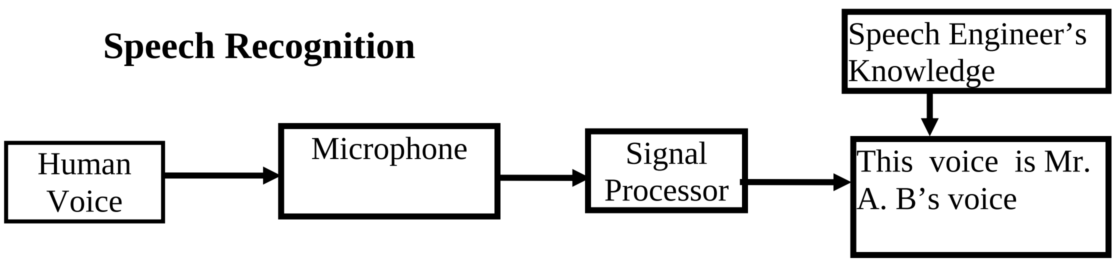
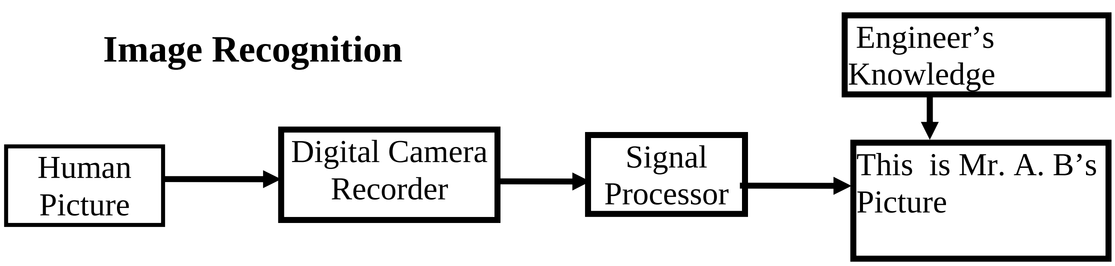
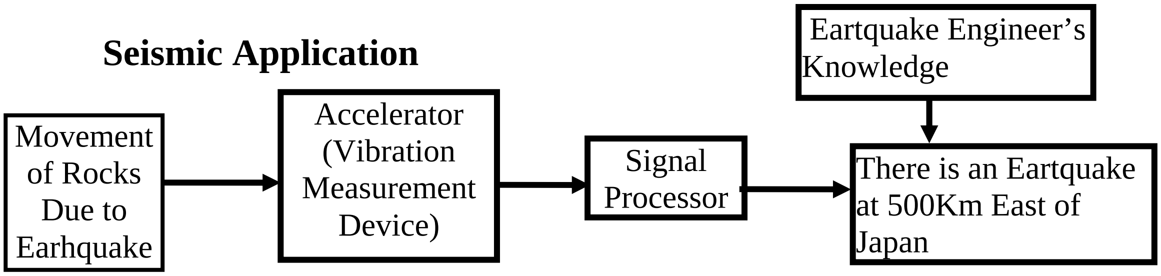


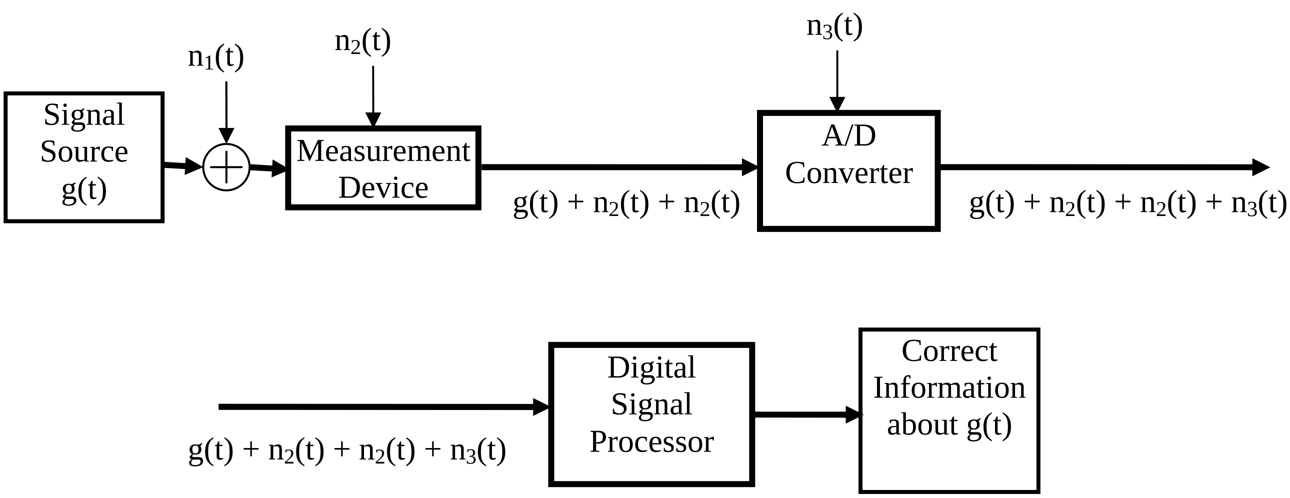

**Image Recognition**



**Seismic Application**



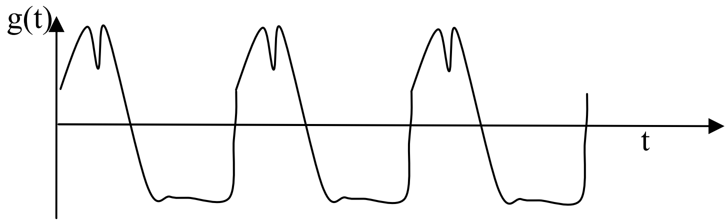

## Digital Signal Processing



# PERIYODIK ISARETLER VE SPEKTRUMLARI

## Periyodik Isaretler

Onceki bolumde aciklanan isaretler genel olarak periyodik isaretlerdir. Mesela sekil(1.33)'deki yay kutle sisteminde hava surtunmesi olmasa x(t) grafigi sonumlenmeden sonsuza kadar periyodik olarak artip azalacaktir. Boyle bir x(t) isareti peroyodik bir isaret olarak adlandirilir.




Sekil(1.33) Periyodik Isaret

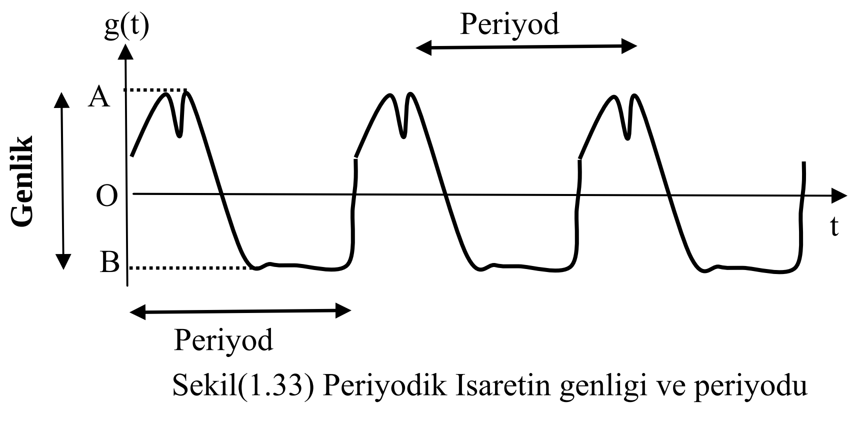
Bu kitapda kucuk harf zamana bagli isareti buyuk harfde o isaretin Furier donusumu, Laplas donusumu veya Z donusumu gosterir. kucuk ′x′ ile buyuk ′X′ birbirine benzediginden karisikliga sebeb olmamasi icin isaret g(t) veya f(t) notasyonlari ile gosterilecektir.

Periyodik isareti karakterize eden 3 temel ozellik vardor. genlik, frekans ve faz Sekil(1.21) de bu ozellikler gosterilmistir.

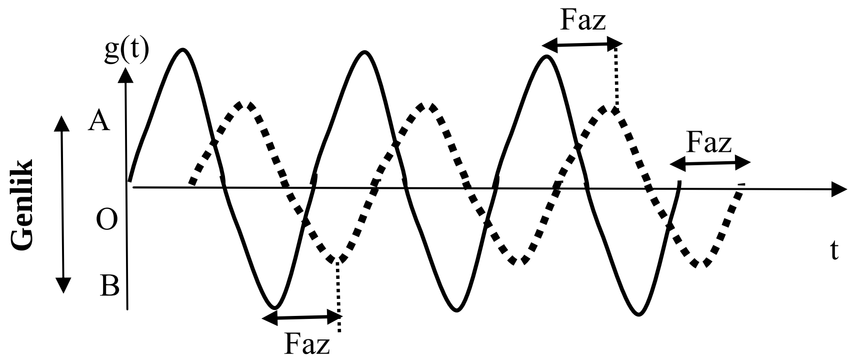
**Genlik (amplitude, magnitude)**: Genlik olarak bazen alt tepeden ust tepeye uzaklik olan AB uzakligi alinir, isaretin pozitif ve negatif taraflari simetrik ise cogu kere tepeden tepeye uzakligin yarisi olan OA uzakligi genlik olarak alinir.

**Periyot:** $g(t)=g(t+T)$, $T\neq 0$ esitligini saglayan en kucuk T degerine g(t) isaretinin periyodu denir.

Frekans (frequency): $f=(1/T)$ ifadesine g(t) nin frekans?, $w=2\pi f=((2\pi)/T)$ ifadesine g(t) nin acisal frekansi denir. T'nin birimi saniye, f'nin birimi Hertz, w'nun birimi radyan'dir.




Sekil(1.33) Periyodik Isaretin genligi ve periyodu



Sekil(1.34)Periyodik iki isaret arasindaki faz farki

**Faz (aci)(phase):** Periyodik bir isaretin acisi(fazi) ya sabit bir referans noktasina gore veya ayni periyotda baska bir sekle gore tarif edilir. Bir periyotluk zaman $360^0$ ye karsilik gelir. Sekil(1.34) de ayni periyotda iki isaret arasindaki faz farki gosterilmistir.

Periyodik isaretler ileriki bolumlerde isbatlanacagi uzere sinus ve kosinuslu terimlerin toplami olarak yazilabilir.

Periyodik isaretler ileriki bolumlerde isbatlanacagi uzere sinus ve kosinuslu terimlerin toplami olarak yazilabilir.

$$\begin{aligned} g(t) &= a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + a_3 \cos 3w_0 t + \ldots\ldots a_k \cos k w_0 t \\ & b_1 \sin w_0 t + b_2 \sin 2w_0 t + b_3 \sin 3w_0 t + \ldots\ldots b_k \sin k w_0 t \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{k} \left[a_n \cos n w_0 t + b_n \sin n w_0 t\right] \end{aligned} \quad \text{xA1}$$

seklinde bir isaret dusunelim. Bu isaretin periyodik oldugu ve periyodunun $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ oldugu kolayca gosterilebilir.

$$\begin{aligned} g(t+T_0) &= a_0 + k\ \left[a_n \cos n w_0 (t+T_0) + b_n \sin n w_0 (t+T_0)\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{k} \left[a_n \cos(n w_0 t + n w_0 T_0) + b_n \sin(n w_0 t + n w_0 T_0)\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{k} \left[a_n \cos(n w_0 t + n2\pi) + b_n \sin(n w_0 t + n2\pi)\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{k} \left[a_n \cos n w_0 t + b_n \sin n w_0 t\right] \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Not: $w_0 T_0 = w_0 \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi$ ve

$$\cos(n w_0 t + 2\pi n) = \cos(n w_0 t) \cos 2\pi n - \sin(n w_0 t) \sin 2\pi n = \cos(n w_0 t)$$

oldugu dikkate alinmistir. (ref: xA1) esitligi ile verilen $g(t)$ isareti

$$A \cos(pt) + B \sin(pt) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(pt - argtg \frac{B}{A}) = d \cos(pt - \theta_n)() \quad \text{a214}$$

seklindeki trigonometrik baginti yardimiyla ayni frekansdaki sinus ve kosinus terimleri tek terim haline getirilerek

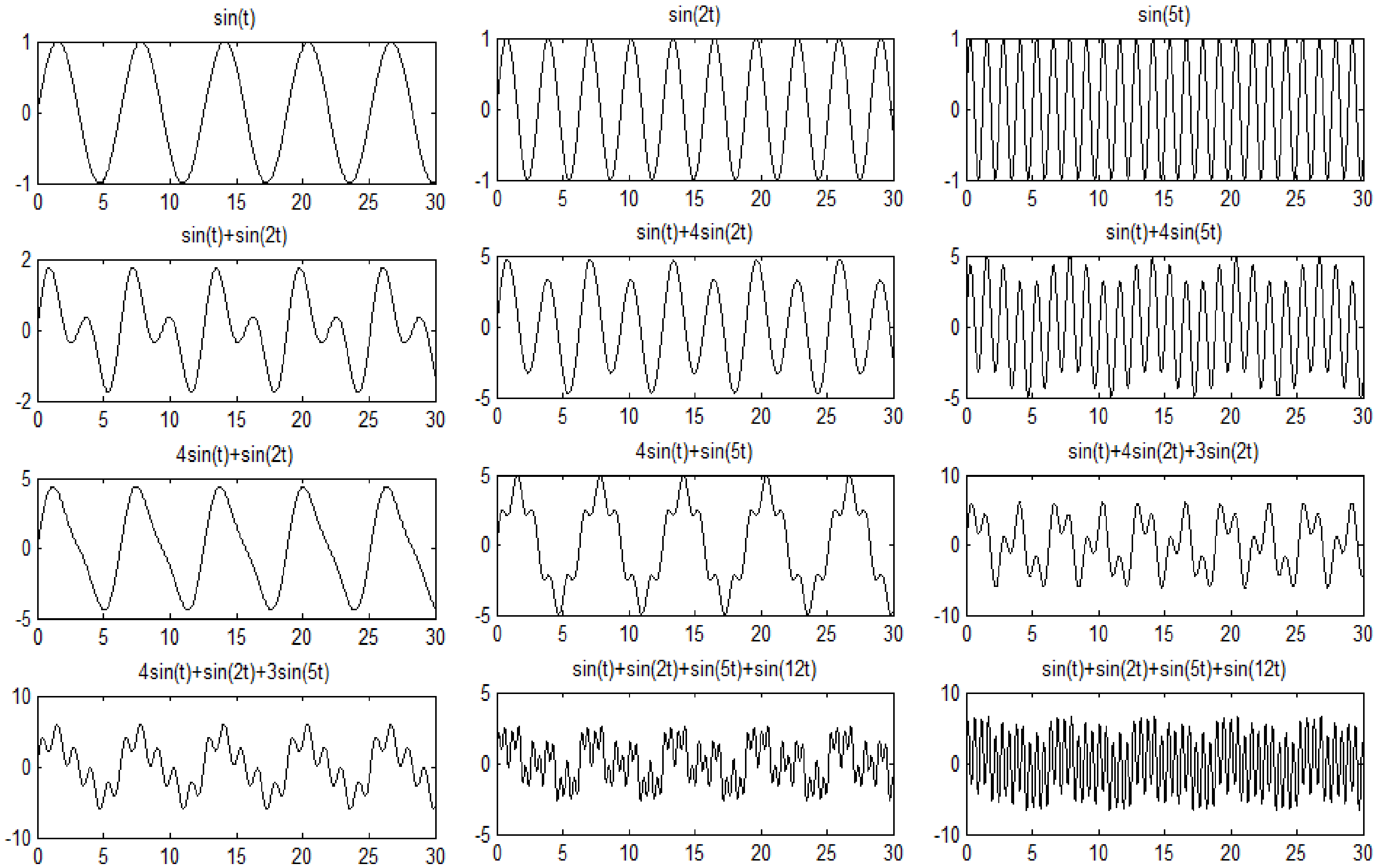
$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} \left[a_n \cos n w_0 t + b_n \sin n w_0 t\right] = d_0 + \sum_{n=1}^{k} d_n \cos(n w_0 t - \theta_n) \quad \text{xAq1}$$

formunda da gosterilir.

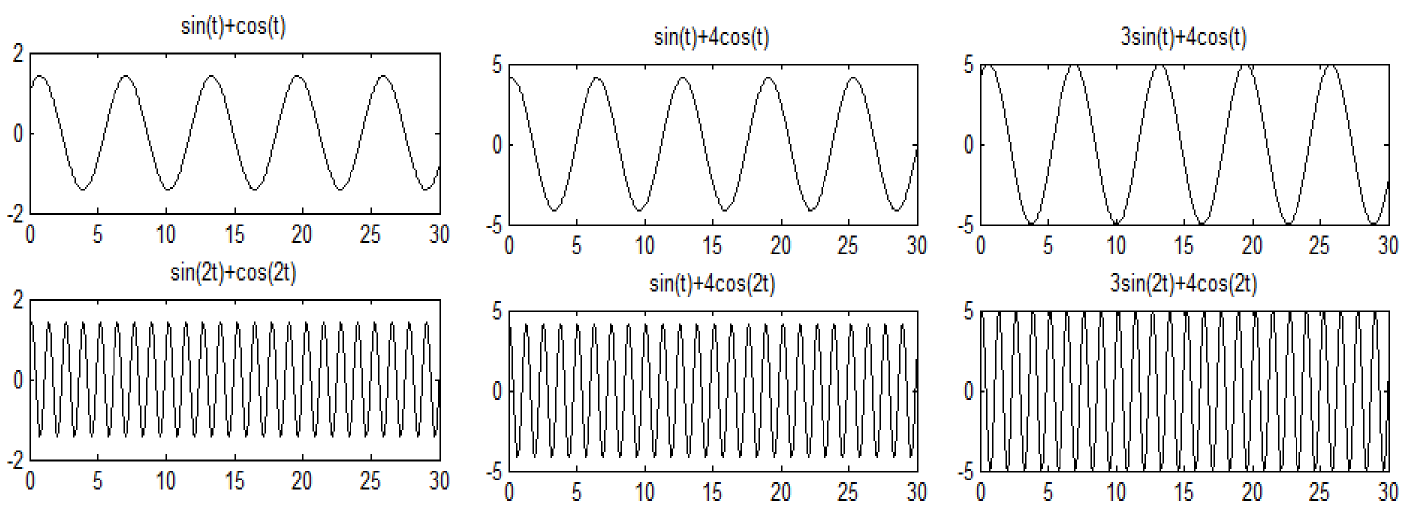
O halde icinde $w_0, 2w_0, 3w_0, \ldots\ldots k w_0$ frekansli bilesenler bulunan bir $g(t)$ isareti $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ periyodu ile periyodiktir. (ref: xA1 esitliginde $a_1, a_2, \ldots. a_k, b_1, b_2, \ldots. b_k$ katsayilari degistirilerek cesitli isaretler olusturulabilir. Ornek olarak $T_0 = 0.25, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 5$ ve diger katsayilar sifir olsa.
$w_0 = \frac{2\pi}{0.25} = 8\pi = 25.1$

$$x(t) = -3 \cos(25t) + 2 \cos(50t) + 5 \cos(75t)$$

elde edilir.




Sekil(xz13) Cesitli sinuzoidal isaretlerden  uretilmis periyodik isaretler




Sekil(xz15)Ayni frekansdaki sinus ve kosinus  isaretlerin toplami yine ayi frekansdadir.

Yukaridaki islemlerin tersi de bazi istisnalar disinda dogrudur. Yani $T_0$ periyotlu bir isaret  $w_0$, $2w_0$, $3w_0$, $kw_0$,   acisal frekansli sinus ve kosinus fonksiyonlari cinsinden yazilabilir. Bir periyodik isaretin sinus ve kosinus fonksiyonlari cinsinden yazilmasi islemine isaretin FURIER SERISIne acilmasi denir. Fiziksel olarak elde edilen butun periyodik isaretler Furier serisine acilabilir. Furier serilerine girmeden once isaretlerin spektrumu kavraminin incelenmesi faydali olacaktir.

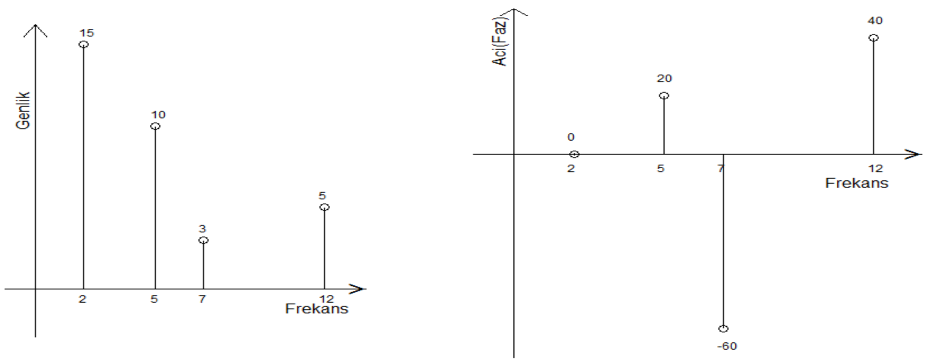
# Sinuzoidal Isaretlerin Spektrumu

$g(t)=A\cos(w_0t+\theta)$ seklindeki bir isarette A genlik, $w_0$ acisal frekans θ aci(faz)dir. Pratikteki isaretler tek bir sinuzoidal dalgadan degil bircok sinuzoidal dalganin toplamindan meydana gelir. Bu tip isaretleri bir grafikte toplayarak gozlemlemek icin genlikler bir eksende fazlar bir eksende gosterilir. Isaretin fazi icin kosinus'lu terim referans alinir. Yani cos(wt) nin fazi 0 cos(wt+θ) nin fazi θ dir. Sinuslu terimlerin fazi asagida gorulecegi gibi trigonometrik bagintilar kullanilarak kosinuslu terim haline getirilirerek bulunur. Kosinuslu terimin fazinin sifir kabul edilmesinin nedeni geleneksel olarak sinuzoidal terimleri kompleks duzlemde donen vektorlerden meydana geldigi varsayilarak incelenmesi ve kosinuslu terimi temsil eden vektorlerin baslangic noktasinin reel eksen olmasidir.

Tek Tarafli Spektrum

Yukarida anlatilanlara gore

$g(t)=15\cos(2t)+10\cos(5t+20)+3\cos(7t-60)+5\cos(12t+40)$ isaretinin spektrumu sekil(xz23) deki gibi olacaktir.




Sekil(xz23) $g(t)=15\cos(2t)+10\cos(5t+20)+3\cos(7t-60)+5\cos(12t+40)$ isaretinin tek tarafli spektrumu

g(t)'nin icinde sinuslu terim varsa, bazi terimler negatif ise asagidaki bagintilar kullanilarak butun terimler pozitif ve sadece kosinus terimlerini icerir eder hale getirilir.

$\cos(-x)=\cos(x)$
$\sin(-x)=-\sin(x)$
$\sin(x)=\cos(90-x)=\cos(x-90)$
$-\sin(x)=\sin(-x)=\cos(90+x)=\cos(x+90)$
$-\cos(x)=\cos(x-180)=\cos(x+180)$
$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\sin(x)$

g(t) nin icinde ayni frekansda sinus ve kosinuslu terimler varsa

$A\cos(x)+B\sin(x)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\theta)$, $\theta=\tan^{-1}(B/A)$

trigonometrik bagintilar yardimiyla tek bir terim haline getirilir. Yukaridaki bagintida $\tan^{-1}(B/A)$ ifadesini hesaplarken A ve B nin isaretlerine dikkat etmek lazimdir. ozellikle

$\tan^{-1}(B/A) \neq \tan^{-1}((-B)/(-A))$
$\tan^{-1}((-B)/A) \neq \tan^{-1}(B/(-A))$

oldugu gozden kacirilmamalidir.

Ornek olarak asagidaki numerik ifadeleri inceleyiniz.

$3\cos(20t)+4\sin(20t)=\sqrt{(3^2+4^2)}\cos(20t-\mathrm{argtg}(4/3)) = 5\cos(20t-53.1)$

-3cos(20t) + 4sin(20t) = 5cos(20t-argtg(4/(-3))) =5cos(20t-(180-53.1)) =5cos(20t-126.9)
-3cos(20t)-4sin(20t) = 5cos(20t-argtg((-4)/(-3))) =5cos(20t-(180+53.1))=5cos(20t-233.13)
3cos(20t)-4sin(20t)=5cos(20t-argtg((-4)/3)) =5cos(20t-(360-53.1))= 5cos(20t-306.9)

Ayrica cos(x)=cos(x+360)=cos(x-360) bagintisi kullanilarak. cos(20t-306.9)=cos(20t+53.1) ve cos(20t-233.13)=cos(20t+127) elde edilir. isaretin fazi -180 +180 arasinda incelenir.

**Ornek Problem:** Asagidaki ifadeleri kosinuslu terime cevirin.
a)sin(2t+125) b)-sin(5t) c) -sin(7t+60) d) -sin(9t-30) e) -cos(7t) f) -cos(7t-50)
g) 3sin(2t)+6cos(2t) h) 3sin(2t)-6cos(2t) j)-3sin(2t)+6cos(2t) k) -3sin(2t)-6cos(2t)
m)2sin(2t+30)+3cos(2t+60)

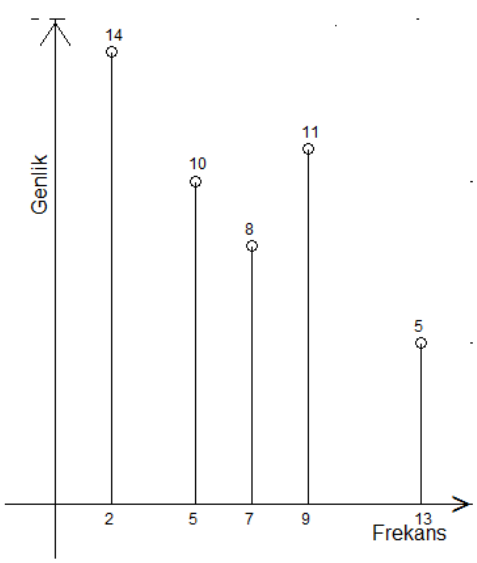
**Cevaplar**

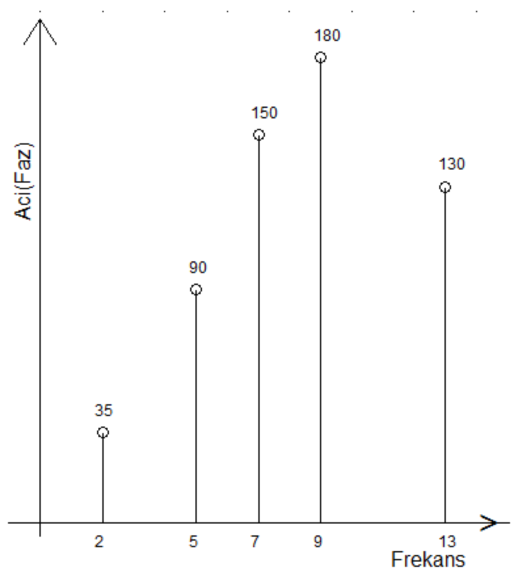
a) sin(2t+125) = cos(2t +125-90)= cos(2t +35)
b)-sin(5t)=cos(5t+90)
c) -sin(7t+60)= cos(7t+60+90)= cos(7t+150)
d) -sin(9t-30)= cos(9t-30+90)= cos(9t+60)
e) -cos(7t)= cos(7t+180)
f) -cos(7t-50)= cos(7t-50+180)= cos(7t+130)

$\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 6.7$, $\tan^{-1}(3/6) = 26.5$, $\tan^{-1}(-3/6) = -26.5$, $\tan^{-1}(3/-6) = 180-26.5 = 153.5$
$\tan^{-1}(-3/-6) = 180+26.5 = 206.5$

g) 3sin(2t)+6cos(2t)= 6.7cos(2t-26.5)
h) 3sin(2t)-6cos(2t)= 6.7cos(2t+153.5)
j)-3sin(2t)+6cos(2t) =6.7cos(2t+26.5)
k) -3sin(2t)-6cos(2t)= 6.7cos(2t+206.5)= 6.7cos(2t-153.5)
m) 2sin(2t+30)+3cos(2t+60)

**Ornek Problem:** g(t)=14 sin(2t+125) -10sin(5t) - 8sin(7t+60) – 11 cos(9t) - 5 cos(13t-50) ifadesinin spektrumunu cizin.
Cozum: Yukaridaki ifadeler yerlerine konulursa
g(t)=14 cos(2t+35) + 10cos(5t+90) + 8cos(7t+150) + 11 cos(9t+180) + 5 cos(13t+130)
elde edilir.



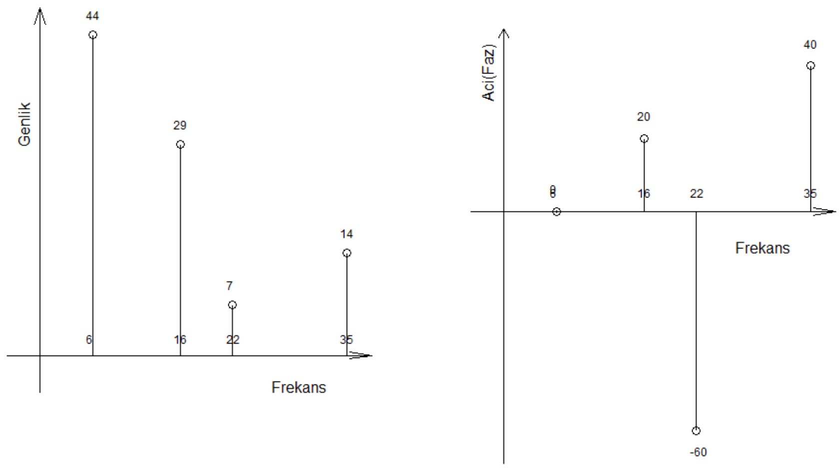



Cift Tarafli Spektrum

Sinus ve kosinusterimleri ustel formda yazilarak cift tarafli spektrum elde edilir. Cift tarafli spektrum matematik islemlerin daha kolay yapilmasini saglar. $g(t) = Ae^{j(w_0 t+\theta)}$ seklindeki bir ifadede $A$ genlik, $w_0$ acisal frekans, $\theta$ fazi gosterir. ornek olarak

$$g(t) = 44e^{j6t} + 29e^{j(16t+20)} + 7e^{j(22t-60)} + 14e^{j(35t+40)}$$

isaretinin spektrumu sekil(ref: xz26) daki gibidir.




“xz26 $g(t) = 44e^{j6t} + 29e^{j(16t+20)} + 7e^{j(22t-60)} + 14e^{j(35t+40)}$ isaretinin spektrumu

Isaret sinuzoidal formda verilmisse

$$\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} \qquad \sin(wt) = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} \qquad \#$$

bagintilari kullanilarak sinus ve kosinuslu terimler ustel hale getirilir ve spektrum cizilir.

$g(t) = 15\cos(2t) + 10\cos(5t+20) + 3\cos(7t-60) + 5cos(12t+40)$ isaretinin cift tarafli spektrumunu cizin.

Sinuzoidal terimleri ustel hale getirelim.

$$\cos(2t) = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}$$

$$\cos(5t+20) = \frac{e^{j(5t+20)} + e^{-j(5t+20)}}{2}$$

$$\cos(7t-60) = \frac{e^{j(7t-60)} + e^{-j(7t-60)}}{2}$$

$$\cos(12t+40) = \frac{e^{j(12t+40)} + e^{-j(12t+40)}}{2}$$

$$g(t) = 15\cos(2t) + 10\cos(5t+20) + 3\cos(7t-60) + 5cos(12t+40)$$

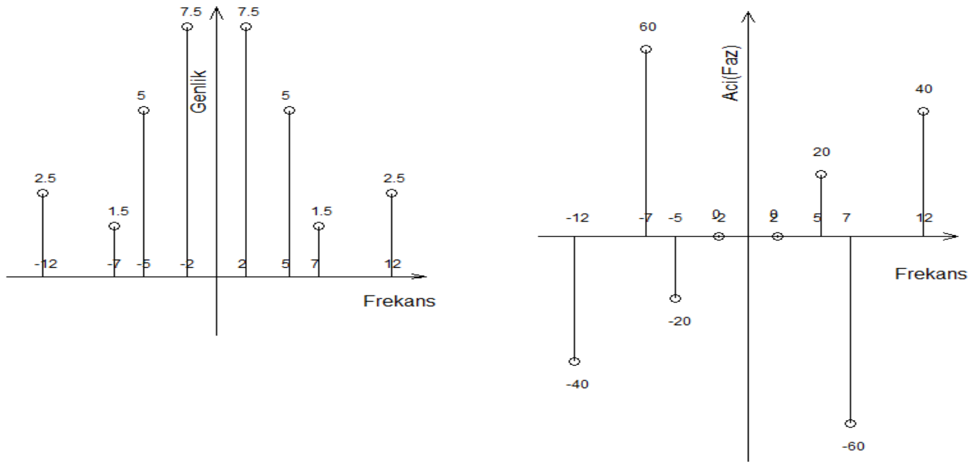
$$= 15\frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} + 10\frac{e^{j(5t+20)} + e^{-j(5t+20)}}{2} + 3\frac{e^{j(7t-60)} + e^{-j(7t-60)}}{2}$$

$$5\frac{e^{j(12t+40)} + e^{-j(12t+40)}}{2}$$

$$= 2.5e^{-j(12t+40)} + 1.5e^{-j(7t-60)} + 5e^{-j(5t+20)} + 7.5e^{-j2t}$$

$$+ 7.5e^{j2t} + 5e^{j(5t+20)} + 1.5e^{j(7t-60)} + 2.5e^{j(12t+40)}$$

Onceki ornekte oldugu gibi spektrum cizilir.



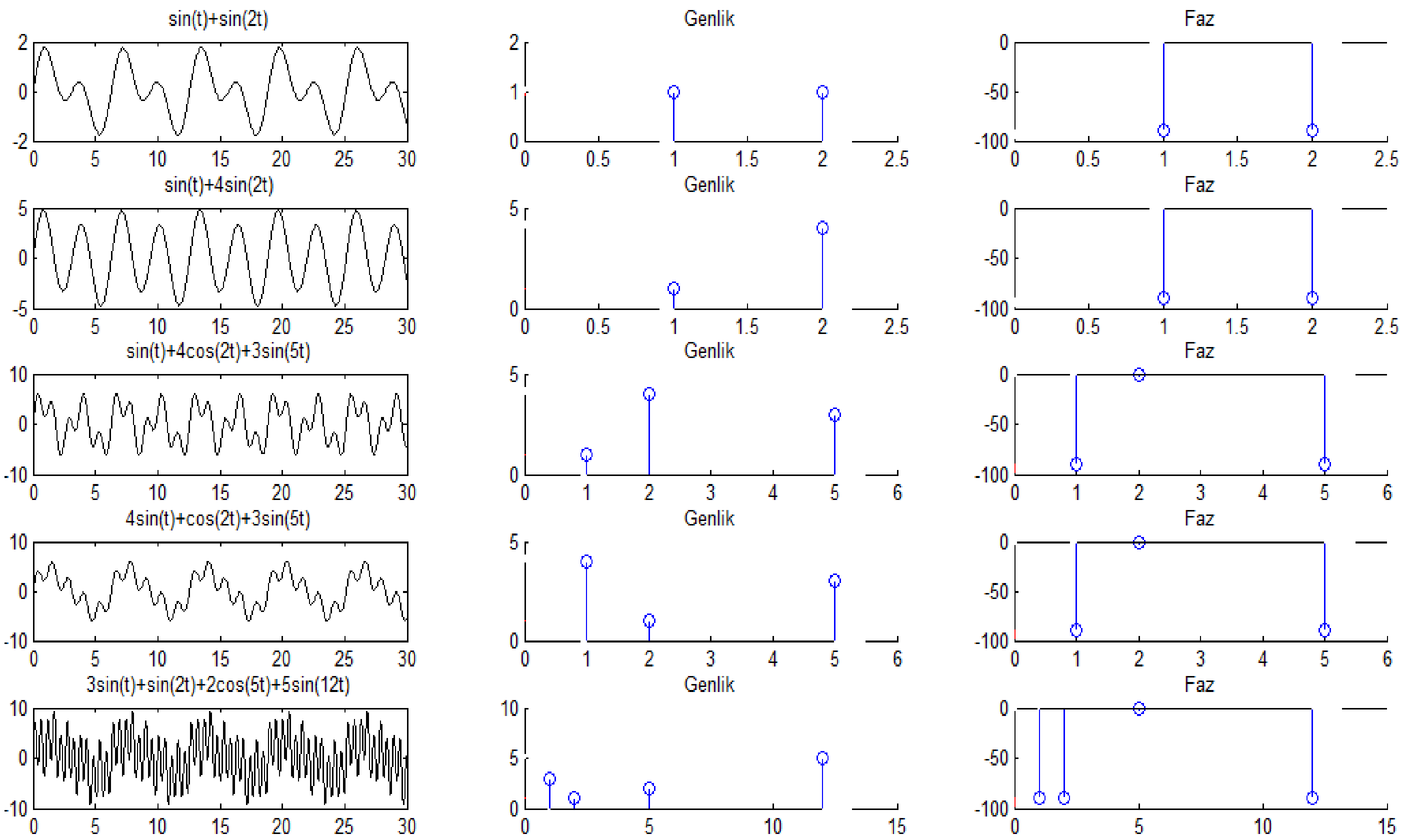

Sekil(xz27) $g(t) = 15\cos(2t) + 10\cos(5t+20) + 3\cos(7t-60) + 5cos(12t+40)$ isaretinin cift tarafli spektrumu

Sekil (ref: xz23) deki tek tarafli spektrum ile sekil (ref: xz27) deki cift tarafli spektrum arasinda gorulen iliski aciktir. cift taraflli spektrumda genlikler yariya inmistir ve spektrum cift smetriye sahiptir. Faz spektrumu ise tek simetriye sahiptir.

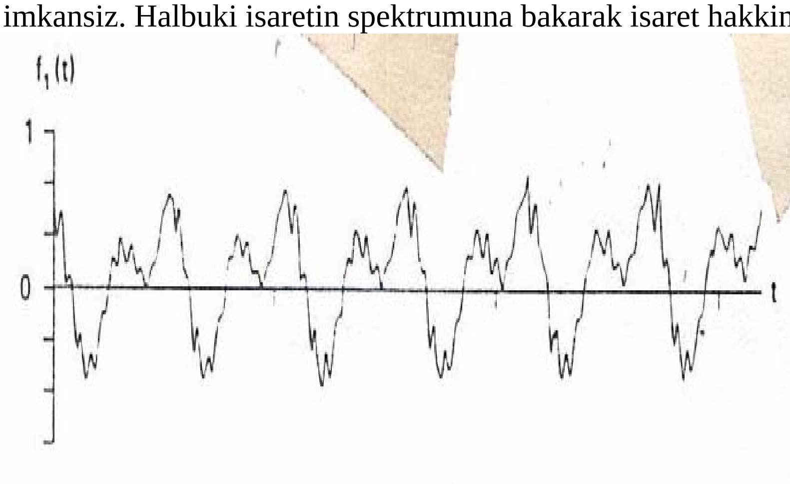
.

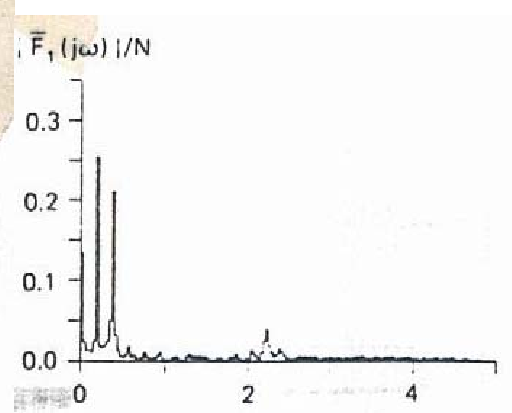
## Isaretlerin Sinuzoidal Terimlerin Toplami Cinsinden Ifade Edilmesi, Furier Serileri

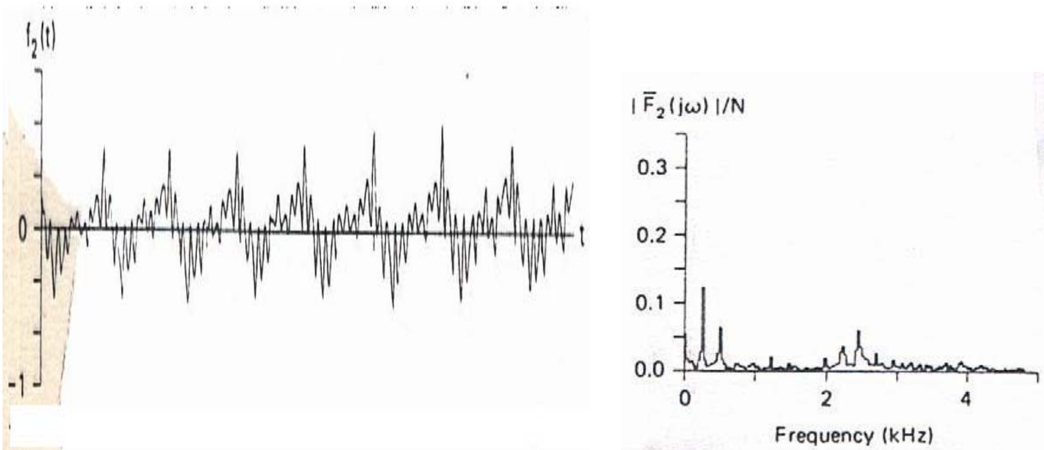
Bir onceki bolumde periyodik bir isaretin bazi istisnalar disinda sinuzidal bilesenler cinsinden yazilabilecegini gormustuk. $a_1, a_2 \dots a_k$, $b_1, b_2, \dots b_k$ katsayilarinin hesabina baslamadan once periyodik isaretin sinuzidal terimlerin toplami cinsinden yazilmasi ne ise yarar bir ornek uzerinde kisaca inceleyelim. Pratikte olculen isaretler zaman domenindedir. Zaman domenindeki isaretlerin incelenmesi ve yorumlanmasi zor hatta cogu kere imkansizdir. Asagida sinuzoidal isaretlerin zaman domeninde ve frekans domeninde grafikleri verilmistir.



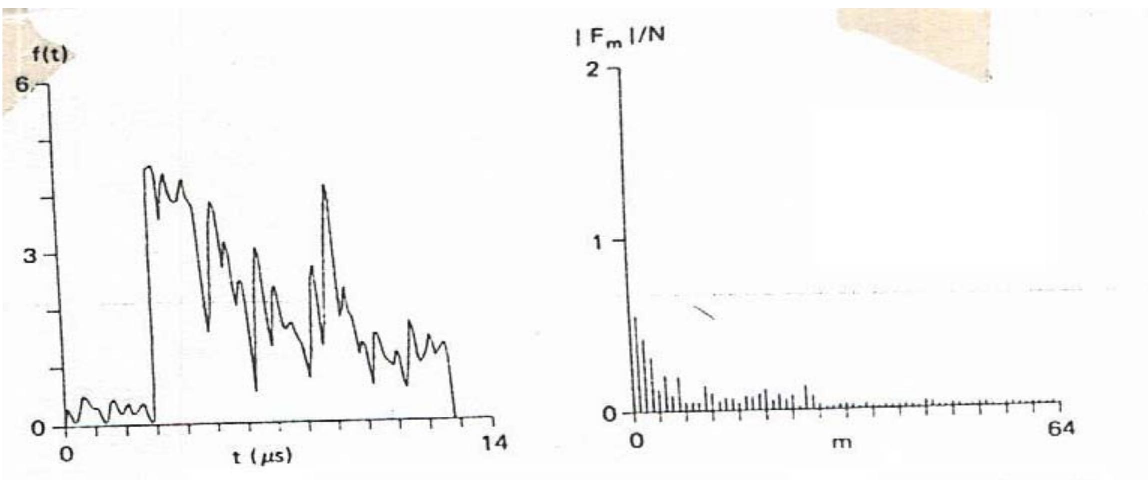

Isaretlerin zaman domenindeki grafiklerine bakarak isaretin icinde hangi sinuzoidal bilesenler var bulmamiz imkansiz. Halbuki isaretin spektrumuna bakarak isaret hakkinda kolayca bilgi sahibi olabiliriz.






Eee sesinin bir adam ve bir cocuk tarafindan soylemesi ve bu seslerin spektrumu




Radar echo pulse and its amplitude spectrum. Sampling interval $T$ = 100 ns; $N$ = 128.

Radar isareti ve spektrumu

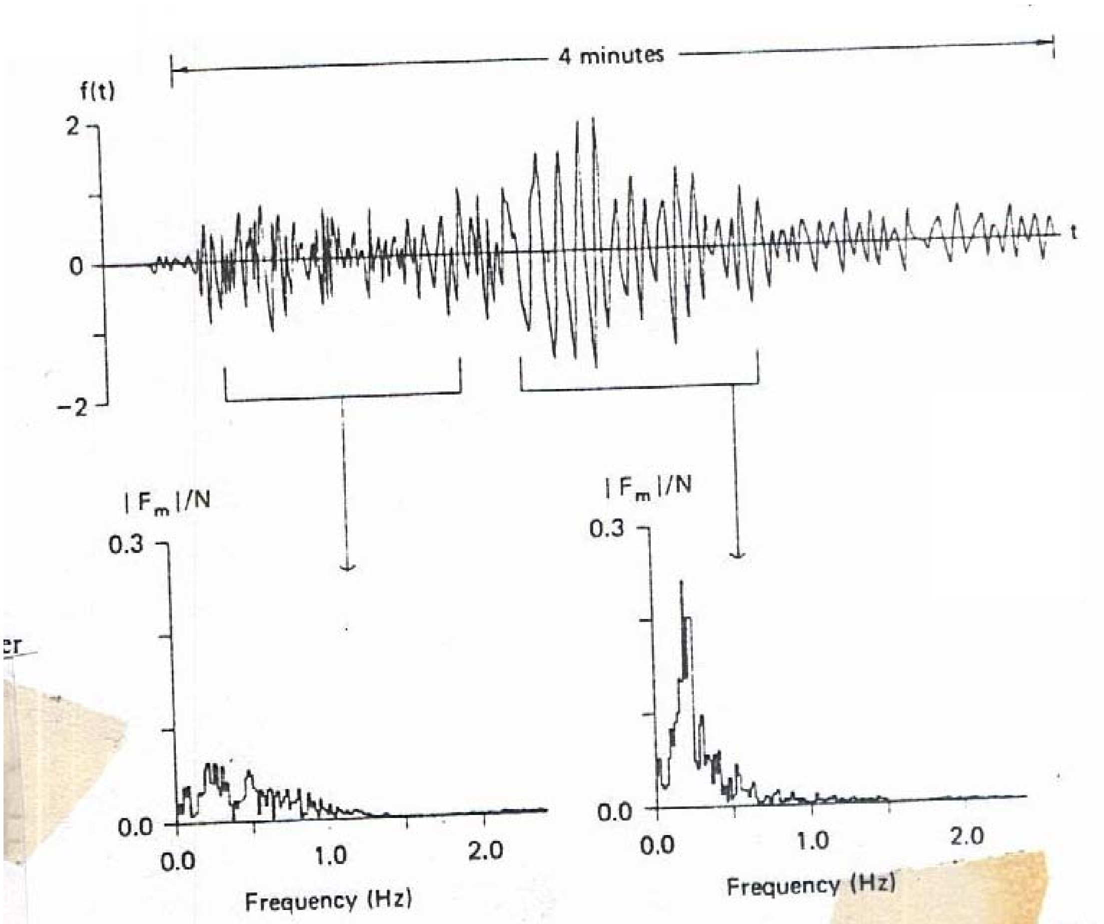



**Figure 5.26** Seismic waveform with spectra of two different segments. Time step $T = 0.1$
$N = 512$ for each spectrum.

Deprem esnasinda olculen titresim ve spektrumu.
Goruldugu gibi zaman domenindeki verilere bakarak bir yorum yapilamazken, spektrumlarina bakarak yorum yapmak cok daha kolay olmaktadir.

**Spektrum nedir nasil elede edilir.**

## Furier Serisi Katsayilarinin Hesabi

( ref: xA1) bagintisi geregi periyodik bir $g(t)$ isaretinin

$g(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{k}[a_p \cos pw_0 t + b_p \sin pw_0 t]$ seklinde yazilabilecegini gormustuk.

(A $\cos x$ +B $\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x-\theta)$, $\theta = \tan^{-1}\frac{b_p}{a_p}$ bagintisi uyarinca $g(t)$

isareti

$= a_0 + \sum_{p=1}^{k} d_p \cos(pw_0 t - \theta_p)$

seklinde yazilabilir. burada $d_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$, $\theta_p = \tan^{-1}\frac{b_p}{a_p}$ seklindedir.

Bu bolumde $a_0,\ a_1, a_2 \ldots . a_k, b_1, b_2 \ldots . b_k$ katsayilarinin nasil hesaplanagi aciklanacaktir.

Asagidaki belirli integrallerin hesabi kismi integrasyon yontemiyle integraller kolayca yapilabilir. Problem(xz761) re bakiniz. Burada $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ve $k, n$ tamsayidir.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(kw_0 t)\ \cos(nw_0 t)\ dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \frac{T_0}{2} & k = n \end{cases} \qquad s1$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(kw_0 t)\ \sin(nw_0 t)\ dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \frac{T_0}{2} & k = n \end{cases} \qquad s2$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(kw_0 t)\ \cos(nw_0 t)\ dt = 0 \qquad s3$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(kw_0 t)\ dt = 0 \qquad s4$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(kw_0 t)\ dt = 0 \qquad s5$$

(ref: xA1) esitliginin her iki tarafini $t_0,\quad T_0$ araliginda integralini alalim.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sum_{n=1}^{k}\{a_n \cos(nw_0 t)dt + b_n \sin(nw_0 t)dt\}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{k}\left\{\int_{t_0}^{t_0+T_0} a_n \cos(nw_0 t)dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} b_n \sin(nw_0 t)dt\right\}$$

Toplam isaretinin icindeki integraller (ref: s4) ve (ref: s5) bagintilarindan dolayi sifirdir. Dolayisiyla

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt = a_0 t|_{t_0}^{t_0+T_0} dt = a_0 T_0 \qquad \rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt = a_0 T_0$$

olacaktir. Sonuc olarak $a_0$ katsayisi

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt} \qquad s56$$

seklinde hesaplanabilir.

(ref: xA1) esitliginin her iki tarafini $\cos(pw_0 t)$ ile carpip her iki tarafi $t_0, t_0 + T_0$ arasinda integre edelim.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\cos(pw_0 t)\ dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 \cos(pw_0 t)\ dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_1 \cos(w_0 t)\cos(pw_0 t)\ dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_2 \cos 2(w_0 t)\cos(pw_0 t)\ dt + \ldots\ldots + \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_p \cos(pw_0 t)\cos(pw_0 t)\ dt.\ldots\ldots$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_k \cos(kw_0 t)\cos(pw_0 t)\ dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} b_1 \sin(w_0 t)\cos(pw_0 t)\ dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_2\sin(2w_0t)\cos(pw_0t)\;dt+\ldots\ldots+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_p\sin(pw_0t)\cos(pw_0t)\;dt+\ldots\ldots$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_k\sin(kw_0t)\cos(pw_0t)\;dt \qquad \text{s21}$$

Estiligin sag tarafindaki birinci integral (ref: s5) esitliginden dolayi sifirdir. $a_m\cos(pw_0t)\cos(pw_0t)$ li terim haric diger integraller de (ref: s1),(ref: s2) ve (ref: s3) esitligi geregi ($k \neq n$ sikki) sifirdir. Kalan terim ise (ref: s1) esitligi geregi ($k = n$ sikki)

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} a_p\cos(pw_0t)\cos(pw_0t)dt = a_m\frac{T_0}{2}$$

olacaktir. Dolayisiyla (ref: s21) esitligi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\cos(pw_0t)dt = a_p\frac{T_0}{2}$$

veya

$$\boxed{a_p = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\cos(pw_0t)\;dt} \qquad \text{s57}$$

seklinde yazilabilir. Sonuc olarak $a_1, a_2, \ldots.. a_n$ katsayilari yukaridaki formuldeki gibi hesaplanabilir. Simdi (ref: xA1) esitliginin her iki tarafini $\sin(pw_0t)$ ile carpip her iki tarafi $t_0, t_0+T_0$ arasinda integre edelim.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\sin(pw_0t)\;dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0\sin(pw_0t)\;dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_1\cos(w_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T_0} a_2\cos 2(w_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt+\ldots\ldots+\int_{t_0}^{t_0+T_0} a_p\cos(pw_0t)\;\sin(pw_0t)dt\ldots\ldots$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T_0} a_k\cos(kw_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_1\sin(w_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_2\sin(2w_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt+\ldots\ldots+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_p\sin(pw_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt+\ldots\ldots$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T_0} b_k\sin(kw_0t)\;\sin(pw_0t)\;dt \qquad \text{s25}$$

Yukaridakine benzer sekilde esitligin sag tarafindaki integraller $a_p\sin(pw_0t)\sin(pw_0t)$ li terim haric diger elemanlar sifir olacaktir. Bu yuzden (ref: s25) esitligi

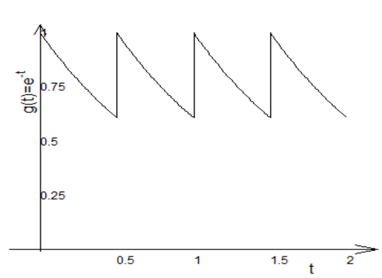
$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\sin(pw_0t)dt = b_p\frac{T_0}{2}$$

seklinde yazilabilir. Dolayisiyla $b_p$ katsayilari

$$\boxed{b_p=\frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\sin(pw_0t)\;dt} \qquad \text{s26}$$

seklinde hesaplanabilir.

**Sekil(ref: xz45) deki $g(t)$ isaretinin Furier serisi katsaylarini hesaplayn**.




Sekil(xz45) Periyodik $g(t) = e^{-t}$ isareti.

Sekilden goruldugu gibi isaretin periyodu $T_0 = \frac{1}{2}$ frekansi $f_0 = \frac{1}{T_0} = 2$ acisal frekansi $w_0 = 2\pi f = 4\pi = 12.56$ dir.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} g(t)dt = 2\int_0^{1/2} e^{-t}\,dt$$

$$= 2[-e^{-t}]_0^{\frac{1}{2}} = 2(-e^{-1/2} - (-e^{-0})) = 2(-0.606 + 1) = 0.79$$

benzer sekilde $a_p$ ve $b_p$ katsayilari da hesaplanir.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$a_p = \frac{2}{T_0}\int_0^{1/2} e^{-t}\cos pw_0 t dt = \frac{2}{T_0}\frac{1}{1+p^2w_0^2}e^{-t}[(-\cos pw_0 t + pw_0\sin pw_0 t)]_0^{0.5}$$

$$= \frac{2}{0.5}\frac{1}{1+p^2(4\pi)^2}e^{-t}[(-\cos p4\pi t + p4\pi\sin p4\pi t)]_0^{0.5}$$

$$= \frac{4}{1+p^2(4\pi)^2}\left\{\begin{array}{c} e^{-0.5}[(-\cos p4\pi 0.5 + p4\pi\sin p4\pi 0.5)] - \\ e^{-0}[(-\cos p4\pi 0 + p4\pi\sin p4\pi 0)] \end{array}\right\}$$

$$= \frac{4}{1+p^2(4\pi)^2}\left\{e^{-0.5}\left[-1 + 0\right] - e^{-0}[(-1+0)]\right\}$$

$$= \frac{4}{1+p^2(4\pi)^2}\{-e^{-0.5} + 1)\} = \frac{1.57}{1+p^2(4\pi)^2}$$

$$b_p = \frac{2}{T_0}\int_0^{1/2} e^{-t}\sin pw_0 t dt = \frac{2}{T_0}\frac{1}{1+p^2w_0^2}e^{-t}[(-\sin pw_0 t - pw_0\cos pw_0 t)]_0^{0.5}$$

$$= \frac{2}{0.5}\frac{1}{1+p^2(4\pi)^2}e^{-t}[(-\sin p4\pi t - pw_0\cos p4\pi t)]_0^{0.5}$$

$$= \frac{4}{1+p^2(4\pi)^2}\left\{\begin{array}{c} e^{-0.5}[(-\sin p4\pi 0.5 - p4\pi\cos p4\pi 0.5)] - \\ e^{-0}[(-\sin p4\pi 0 - p4\pi\cos p4\pi 0)] \end{array}\right\}$$

$$= \frac{4}{1+p^2(4\pi)^2}\{e^{-0.5}[-0 - p4\pi] - e^{-0}[(-0 - p4\pi)]\}$$

$$= \frac{4}{1+p^2(4\pi)^2}\{-e^{-0.5}p4\pi + p4\pi)\} = \frac{4\;4\pi p(1-e^{-0.5})}{1+p^2(4\pi)^2} = \frac{6.32\pi p}{1+p^2(4\pi)^2}$$

p=1, icin $a_1 = \frac{1.58}{1+p^2 16\pi^2} = \frac{1.58}{1+1^2\ 16\ \ 3.14^2}$ =0.009

$b_1 = \frac{6.32\pi p}{1+p^2 16\pi^2} = \frac{6.32\ \ 3.14\ 1}{1+1^2\ 16\ \ 3.14^2}$ =0.124

p=2, icin $a_2 = \frac{1.58}{1+p^2 16\pi^2} = \frac{1.58}{1+2^2\ 16\ \ 3.14^2}$ =0.002

$b_2 = \frac{6.32\pi p}{1+p^2 16\pi^2} = \frac{6.32\ \ 3.14\ 2}{1+2^2\ 16\ \ 3.14^2}$ =0.062

p=3,4,5... icin hesaplanip tablo yapalim.

| $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_p$ | 0.79 | 0.009 | 0.002 | 0.001 | 0.0006 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 |
| $b_p$ | 0 | 0.124 | 0.062 | 0.042 | 0.031 | 0.025 | 0.021 | 0.018 | 0.016 | 0.014 |

Tablo(xt54) $g(t) = e^{-t}$ fonksiyonuna iliskin Furier serisi katsayilari

$$g(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{k}[a_p \cos pw_0 t + b_p \sin pw_0 t]$$
$$= a_0 + a_1 \cos w_0 t + b_1 \sin w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + b_2 \sin 2w_0 t + a_3 \cos 3w_0 t + b_3 \sin 3w_0 t + \ldots$$
$$= 0.79 + 0.009 \cos 12.56t + 0.124 \sin 12.56t + 0.002 \cos 25.13t + 0.062 \sin 25.13t$$
$$+ 0.001 \cos 37.7t + 0.042 \sin 37.7t + \ldots$$

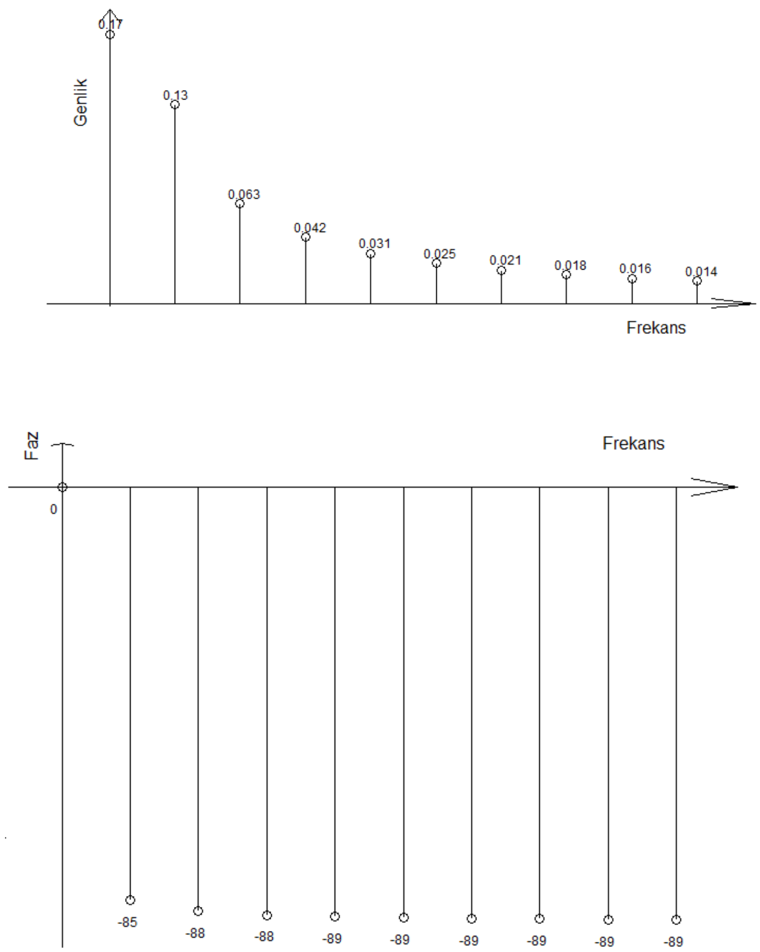
Ayni frekansdaki terimleri birlestirelim. [A $\cos x$ +B $\sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \theta)$, $\theta = \tan^{-1}\frac{b_p}{a_p}$]

$$0.009 \cos 12.56t + 0.124 \sin 12.56t = \sqrt{0.009^2 + 0.124^2} \cos(12.56t - \tan^{-1}\frac{0.124}{0.009})$$
$$=0.125 \cos(12.56t - 85)$$
$$0.002 \cos 25.13t + 0.062 \sin 25.13t = 0.06 \cos(25.13t - 87)$$
$$0.001 \cos 37.7t + 0.0419 \sin 37.7t = 0.0419 \cos(37.7t - 88)$$

bu sekilde devam edilirse

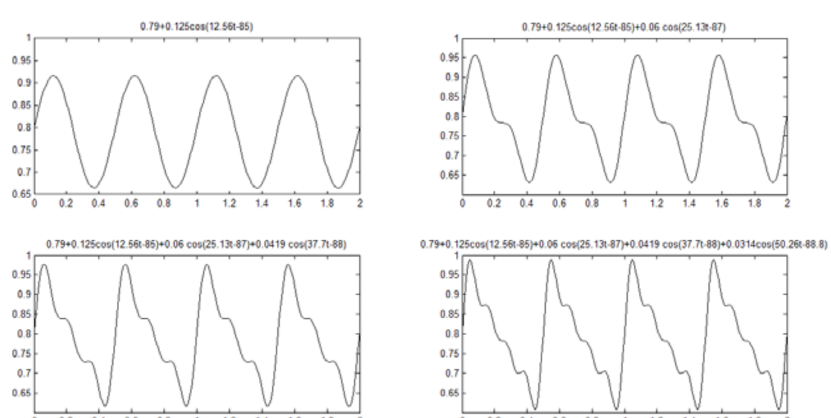
$$g(t) = 0.79 + 0.125 \cos(12.56t - 85) + 0.06 \cos(25.13t - 87) + 0.0419 \cos(37.7t - 88)$$
$$+ 0.0314 \cos(50.26t - 88.8) + 0.0251 \cos(62.83t - 89) + 0.021 \cos(75.39t - 89.2)$$
$$+ 0.018 \cos(87.96t - 89.3) + 0.015 \cos(100.8t - 89.4) + 0.014 \cos(113t - 89.5) + \ldots\ldots$$

elde edilir. Bu $g(t)$ isaretinin spektrumunu cizelim.

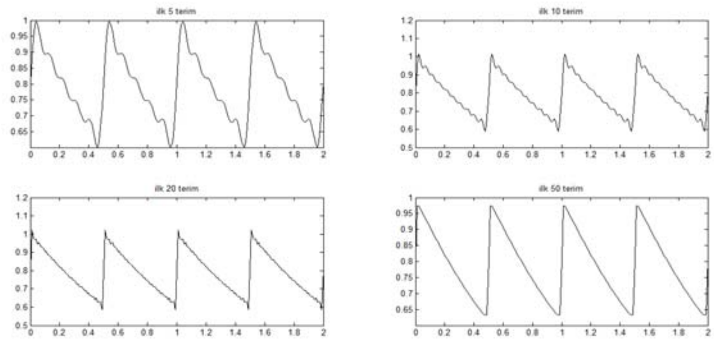



Sekil(xz46) $g(t) = e^{-t}$ (0<t<0.5 ile periyodik) isaretinin genlik ve faz spektrumu

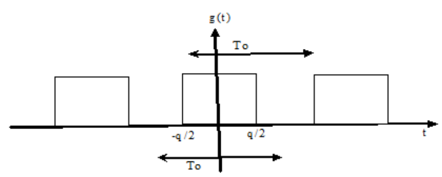
Burada sadece ilk 9 bilesen cizilmistir. Grafik sonsuza kadar gitmektedir. Bu spektrum ne anlama gelir. Simdi bunun uzerinde duralim. Biz $g(t) = e^{-t}$ isaretini furieer serisine actik ve elde ettigimiz seriden tekrar $g(t) = e^{-t}$ fonsiyonunu elde etmeye calisiyoruz. Sekil(xz49)da ilk iki terim, ilk uc terim, ilk dort terim alarak $g(t) = e^{-t}$ fonksiyonunu elde etmeye calistik. Kabaca goz karari ile baktigimizda Ilk dort terimi alinca elde ettigimiz fonksiyon $g(t) = e^{-t}$ ya benzemeye basladi. Bu sekilde devam ederek ilk 5 terim, ilk 10, 20,50 terim alarak fonksiyon sekil(xz51) de cizilmistir.



Sekil(xz49) $g(t) = e^{-t}$ isaretinin Furier Serisinden elde edilmesi.




Sekil(xz51) Furier Serisinde daha cok terim alarak $g(t) = e^{-t}$ nin elde edilmesi.
Ornek Problem Sekil(ref: cx1) deki dikdortgen darbe katarinin Furier serisi katsayilarini hesaplayin




Sekil(cx1) Dikdortgen darbe katari

Sekilden goruldugu gibi isaretin periyodu $T_0$ frekansi $f_0 = \frac{1}{T_0}$ acisal frekansi $w_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$ dir.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{-p/2} 0\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{-q/2}^{q/2} A\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{q/2}^{T_0/2} 0\,dt = 0 + \frac{1}{T_0}\int_{-q/2}^{q/2} A\,dt + 0$$

$$= \frac{1}{T_0} At|_{-q/2}^{q/2} = \frac{Aq}{2}$$

Benzer sekilde

$$a_p = 0 + \frac{2}{T_0}\int_{-q/2}^{q/2} A\cos pw_0 t dt + 0 = \frac{2}{T_0}\frac{1}{p} A\sin pt|_{-q/2}^{q/2} = \frac{2A}{p\pi}\sin\frac{p\pi q}{T_0}$$

$$b_p = \frac{2}{T_0}\int_{-q/2}^{q/2} A\sin pw_0 t dt = 0$$

veya (ref: a214) deki formda yazarsak

$$d_0 = \frac{Aq}{T_0}$$

$$d_n = \frac{2a}{\pi p}\sin\frac{p\pi q}{T_0}$$

$$\theta_n = \begin{cases} 0 & n: \ cift \\ \pi & n: \ tek \end{cases}$$

Ve g(t) isareti

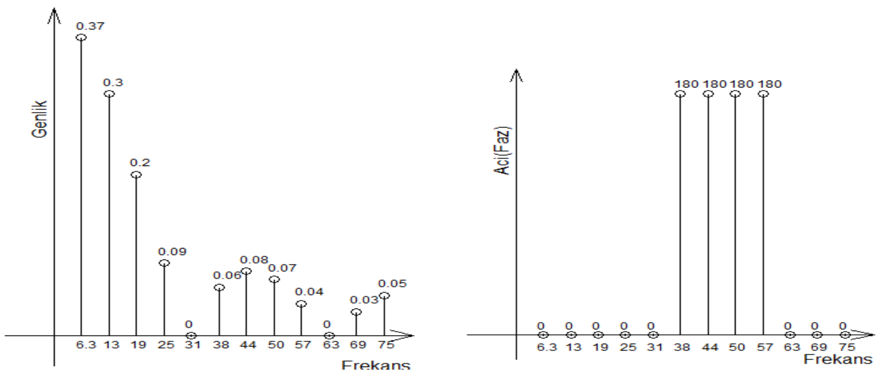
$$g(t) = \frac{Aq}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{\pi p}\sin\frac{p\pi q}{T_0}\cos(pw_0 t) \qquad z11$$

seklinde yazilabilir.

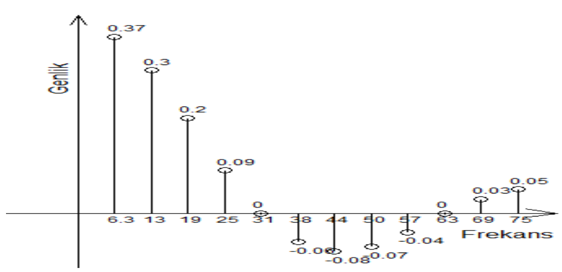
$q = 0.2, T_0 = 1$ haline iliskin degisik p degerleri icin $a_p, d_p, \theta_p$ degerleri tablo(ref: xt65)da verilmistir.

| $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_p$ | 0.2 | 0.37 | 0.30 | 0.20 | 0.09 | 0 | -0.06 | -0.08 | -0.07 | -0.04 | 0 | 0.03 | 0.05 |
| $d_p$ | 0.2 | 0.37 | 0.30 | 0.20 | 0.09 | 0 | 0.06 | 0.08 | 0.07 | 0.04 | 0 | 0.03 | 0.05 |
| $\theta_p$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 180 | 180 | 180 | 180 | 0 | 0 | 0 |

Tablo(xt65) Dikdortgen darbe katarina iliskin Furier serisi katsayilari

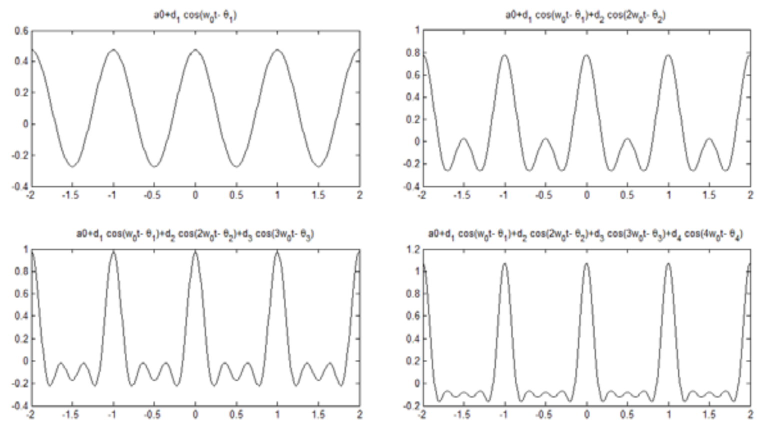



Sekil(xz21)Dikdortgen darbe katarina iliskin genlik ve faz spektrumu

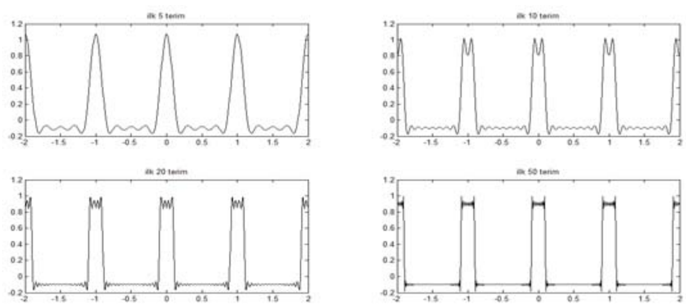



Sekil(xz22) (Genlik ve faz beraber) tek eksende cizilmis spektrum

Goruldugu gibi $g(t)$ nin fazi $\theta_n$ ya sifir veya $180^0$ olmaktadir. Bu gibi durumlarda $g(t)$ nin genligini ve fazini ayri ayri grafiklerde gostermek yerine tek grafikte gosterilebilir. Yani $a_p$ nin p ye gore degisimi cizilerek $g(t)$ nin spektrumu incelenebilir. Sekil(ref: xz21) genlik ve faz spektrumu ayri ayri cizilmis. Sekil(ref: xz22) de $g(t)$ nin spektrumu tek grafikte gosterilmistir.




Sekil(xz56)Dikdortgen darbe katarinin furier serisinden elde edilmesi q=0.2, T0=1




**Sekil(xz57)Dikdortgen darbe katarinin furier serisinden elde edilmesi**

Ozel Durumlar

**1.) $\mathbf{g(t)}$ tek fonksiyon ise**:

Eger $g(t)$ tek fonksiyon ise yani

$$g(t) = -g(-t) \qquad \#$$

ozelligini sagliyorsa

$$\int_{-x}^{x} g(t) = 0$$

olur ve (ref: s57) ile verilen integral sifir olur. Ayrica (ref: s26) integralini $0-2\pi$ araliginda hesaplamak yerine $0-\pi$ araliginda hesaplayip iki kati alinarak basitlestirme yapilabilir.

**Ozetle**:

$$g(t) = -g(-t) \;\; ise \;\; a_p = 0, \qquad b_p = \frac{4}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T_0}{2}} g(t)\sin(pw_0t)\,dt \qquad \text{xq1e26}$$

**2.) $\mathbf{g(t)}$ cift fonksiyon ise**:

Eger $g(t)$ cift fonksiyon ise yani

$$g(t) = g(-t) \qquad \#$$

ozelligini sagliyorsa

$$\int_{-x}^{x} g(t) = 2\int_{0}^{x} g(t)$$

olur. Yukaridaki gibi burada da

$$g(t) = g(-t) \;\; ise \;\; b_p = 0, \qquad a_p = \frac{4}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T_0}{2}} g(t)\cos(pw_0t)\,dt \qquad \text{xq1e28}$$

seklinde basitlestirmeler yapilir.

$g(t)$ fonksiyonu $g(t+\frac{T}{2}) = -g(t)$ seklinde bir simetriye sahipse yukaridaki formuller daha da basitlesir.

10 **3**.) $\mathbf{g(t) = -g(-t)}$ **ve** $\mathbf{g(t+\frac{T}{2}) = -g(t)}$ **ise**: Sinus teimlerine iliskin cift katsayilar sifir olur.

$$\left.\begin{array}{l} g(t) = -g(-t) \\ ve \\ g(t+\frac{T}{2}) = -g(t) \end{array}\right\} ise : \begin{cases} a_p = 0 \\ b_{2p} = 0 \\ b_{2p-1} = \frac{4}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T_0}{2}} g(t)\sin[(2p-1)w_0 t]\,dt \\ p = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{xq1e30}$$

10 **4**.) $\mathbf{g(t) = g(-t)}$ **ve** $\mathbf{g(t+\frac{T}{2}) = -g(t)}$ **ise**: kosinus teimlerine iliskin cift katsayilar sifir olur.

$$\left.\begin{array}{l} g(t) = -g(-t) \\ ve \\ g(t+\frac{T}{2}) = -g(t) \end{array}\right\} ise : \begin{cases} b_p = 0 \\ a_{2p} = 0 \\ a_{2p-1} = \frac{4}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T_0}{2}} g(t)\cos[(2p-1)w_0 t]\,dt \\ p = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{xq1e32}$$

## Komplex Furier Serisi Katsayilarinin Hesabi

$g(t)$ isareti (ref: xA1) esitligi ile

$$g(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{k}[a_p\cos(pw_0t) + b_p\sin(pw_0t)] \tag{r1}$$

olarak verilmisti

$$\cos(pw_0t) = \frac{e^{jpw_0t} + e^{-jpw_0t}}{2} \qquad \sin(pw_0t) = \frac{e^{jpw_0t} - e^{jpw_0t}}{2j}$$

bagintilari kullanilarak (ref: r1) esitligi asagidaki sekilde yazilabilir.

$$g(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{k}\left[a_p\left\{\frac{e^{jpw_0t} + e^{-jpw_0t}}{2}\right\} + b_p\left\{\frac{e^{jpw_0t} - e^{-jpw_0t}}{2j}\right\}\right]$$

$$= a_0 + \sum_{p=1}^{k}\left[\left(\frac{a_p}{2} + \frac{b_p}{2j}\right)e^{jpw_0t} + \left(\frac{a_p}{2} - \frac{b_p}{2j}\right)e^{-jpw_0t}\right] \tag{r3}$$

$$c_p = \frac{a_p}{2} + \frac{b_p}{2j} \quad ve \quad c_{-p} = \frac{a_p}{2} - \frac{b_p}{2j}$$

tanimlari yapilarak (ref: r3) esitligi

$$g(t) = c_0 + \sum_{p=1}^{k}[c_pe^{jpw_0t} + c_{-p}e^{-jpw_0t}] \tag{rx5}$$

seklinde yazilabilir. Dolayisi ile reel periyodik bir $g(t)$ fonksiyonu kompleks ustel fonksiyonlarin toplami seklinde yazilabilir.

$$\begin{aligned} g(t) &= c_0 + c_1e^{jw_0t} + c_{-1}e^{-jw_0t} + c_2e^{j2w_0t} + c_{-2}e^{-j2w_0t} \\ &+ c_3e^{j3w_0t} + c_{-3}e^{-j3w_0t} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_ke^{jkw_0t} + c_{-k}e^{-jkw_0t} \end{aligned} \tag{r7}$$

$$g(t) = \sum_{p=-k}^{k} c_pe^{jpw_0t} \tag{r12}$$

$g(t)$'nin icinde sonsuz sayida terim varsa toplam'in alt ve ust sinirlari da sonsuz ($k = \infty$) olacagi aciktir. Yukaridaki bagintilardan acikca goruldugu gibi

$$c_p = \frac{a_p}{2} + \frac{b_p}{2j} = \frac{1}{2}\left(a_p + \frac{b_p}{j}\right) = \frac{1}{2}(a_p - jb_p) \tag{\#}$$

$$c_{-p} = \frac{a_p}{2} - \frac{b_p}{2j} = \frac{1}{2}(a_p + jb_p) \qquad \#$$

$$c_0 = a_0 \qquad \#$$

$$a_p = c_p + c_{-p} \qquad b_p = j(c_p - c_{-p}) \qquad \#$$

$$d_p = 2|c_p| \qquad \theta_p = \angle c_p \qquad \#$$

$c_p, c_{-p}$ katasayilari $a_p, b_p$ katsayilarindan yukaridaki bagintilar yardimiyla hesaplanabilir. Ancak direk olarak $g(t)$ fonksiyonundan hesaplamak daha kolaydir. Once asagidaki belirli integrallerin hesaplanmmasi gerekir. (Bkz. C.P.ref: xp571)

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-p)w_0t}dt = \begin{cases} 0 & k \neq p \\ T_0 & k = p \end{cases} \qquad \text{r16}$$

(ref: r7) esitliginin her iki tarafini $e^{jpw_0t}$ ile carpip $t_0, t_0 + T_0$ arasi integre edelim.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_0e^{-jpw_0t}dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_1e^{jw_0t}e^{-jpw_0t}dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_{-1}e^{-jw_0t}e^{-jpw_0t}dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_2e^{j2w_0t}e^{-jpw_0t}dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_{-2}e^{-j2w_0t}e^{-jpw_0t}dt + \ldots\ldots.$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_pe^{jpw_0t}e^{-jpw_0t}dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_{-p}e^{-jpw_0t}e^{-jpw_0t}dt + \ldots\ldots\ldots.$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_ke^{jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt + \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_{-k}e^{-jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt \qquad \text{r20}$$

Esitligin sag tarafindaki integraller $c_pe^{jpw_0t}e^{-jpw_0t}dt$ terimli haric digerleri (ref: r16) bagintisi geregi sifirdir.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} c_pe^{jpw_0t}e^{-jpw_0t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} c_pe^{0}dt = c_pT_0$$

Bu sartlarda (ref: r20) esitligi yeniden yazilirsa

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt = c_pT_0$$

$$\boxed{c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt} \qquad \text{rx45}$$

olarak bulunur.

Ornek Problem: Sekil (ref: xz45) daki $g(t) = e^{-t}$ isaretinin Kompleks Furier serisi katsayilarini hesaplayin

$$g(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_pe^{jpw_0t} \qquad c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt$$

Sekilden goruldugu gibi isaretin periyodu $T_0 = \frac{1}{2}$ frekansi $f_0 = \frac{1}{T_0} = 2$ acisal frekansi $w_0 = 2\pi f = 4\pi$ dir.

$$c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} e^{-t}e^{-jpw_0t}dt = 2\int_0^{1/2} e^{-(1+jpw_0)t}dt$$
$$= 2\left[\frac{1}{-(1+jpw_0)}e^{-(1+jpw_0)t}\right]_0^{1/2} = 2\frac{1}{-(1+jpw_0)}\left(e^{-(1+jpw_0)\frac{1}{2}} - e^0\right)$$
$$= 2\frac{-1}{1+jpw_0}(e^{-1/2}e^{jpw_0/2)} - 1) = 2\frac{-1}{1+jp4\pi}(e^{-1/2}e^{jp2\pi)} - 1)$$

$$= 2\frac{-1}{1+j4p\pi}(e^{-1/2} - 1) = \frac{0.79}{1+j4p\pi}$$

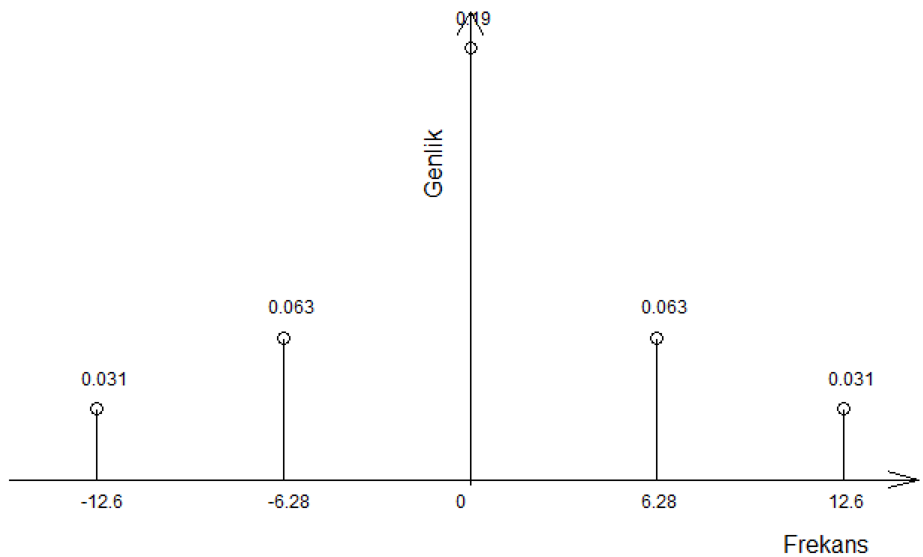
Genlik ve faz (Ek-ref: appx31) de gosterildigi gibi hesaplanabilir.

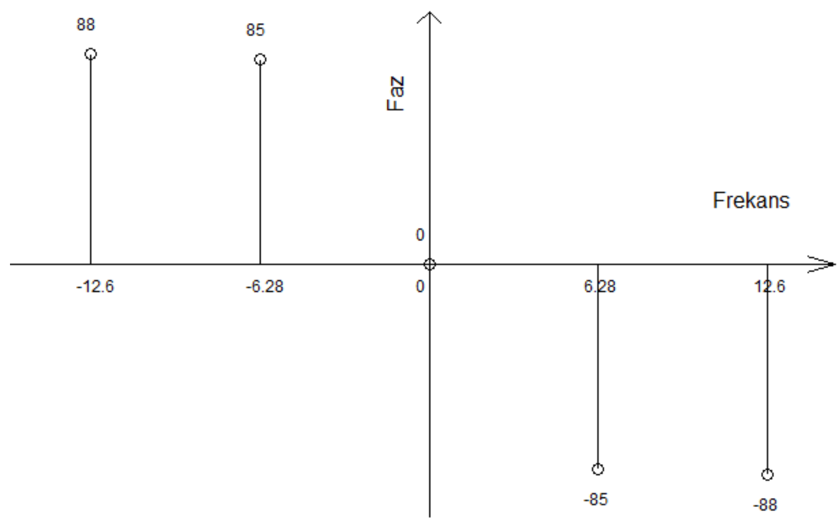
$$|c_p| = \frac{0.79}{\sqrt{1+16p^2\pi^2}} \qquad \angle c_p = argtg\frac{0}{0.79} - argtg\frac{4p}{\pi} = -4p\pi$$ #

Degisik p degerleri icin $c_p$ nin genligi ve fazi tablo(ref: xz32) da gosterilmistir.

| $p$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c_p$ | 0.001 +j 0.03 | 0.005 + j0.06 | 0.79 | 0.005 -j 0.06 | 0.001 -j 0.03 |
| $\|c_p\|$ | 0.0314 | 0.0627 | 0.79 | 0.0627 | 0.0314 |
| $\angle c_p$ | 87.72 | 85.45 | 0 | -85.45 | -87.72 |

Tablo(xz32) $g(t) = e^{-t}$ ye ait Komplex Furier serisi katsayilari






“xz62 g(t)=e$^{-t}$ ye iliskin cift tarafli spektrum

sekil(ref: xz62) de $g(t) = e^{-t}$ ye iliskin cift tarafli spektrum gorulmektedir.

Ornek Problem Sekil(ref: cx1) deki dikdortgen darbe katarinin kompleks Furier serisi katsayilarini hesaplayin. Sekilden goruldugu gibi isaretin periyodu $T_0$ frekansi $f_0 = \frac{1}{T_0}$ acisal frekansi $w_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$ dir.

$$c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t)e^{-jpw_0t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{-q/2}^{q/2} Ae^{-jpw_0t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}A\frac{1}{-jpw_0}e^{-jpw_0t}|_{-q/2}^{q/2} = A\frac{1}{-jpT_0w_0}[e^{-jpw_0q/2} - e^{jpw_0q/2}]$$

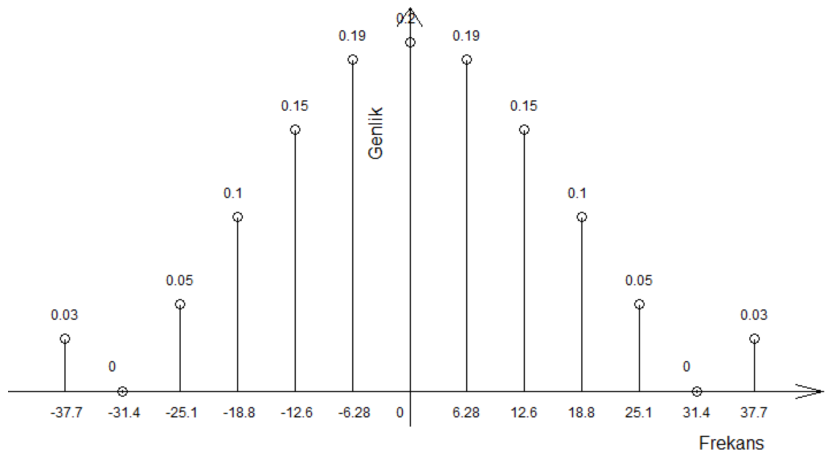
$$= A\frac{1}{-jp2\pi}2j\frac{1}{2j}(-1)[e^{jpw_0q/2} - e^{-jpw_0q/2}] = A\frac{1}{j2p\pi}2jsin(pw_0q/2) = A\frac{1}{p\pi}sin(p\pi q/T_0) + j0$$

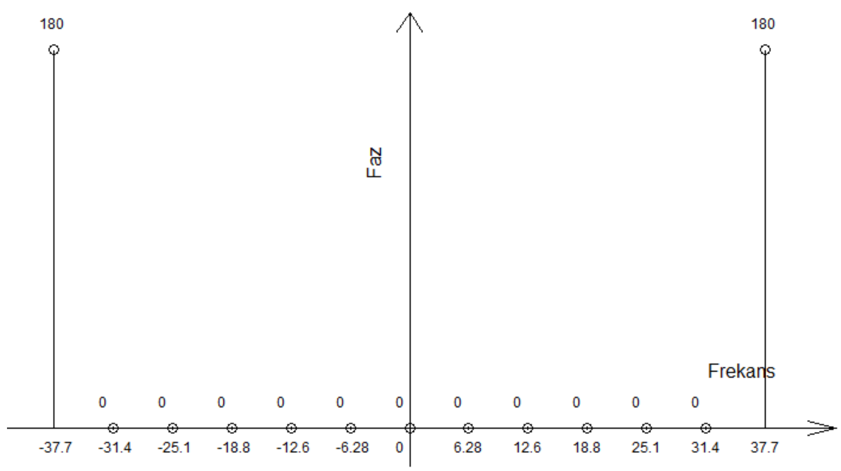
$$|c_p| == \sqrt{\left(A\frac{1}{p\pi}sin(p\pi q/T_0)\right)^2 + 0^2} = A\frac{1}{p\pi}sin(p\pi q/T_0)$$

$$\angle c_p = argtg\frac{0}{A\frac{1}{p\pi}sin(p\pi q/T_0)} = \begin{cases} 0 & sin(p\pi q/T_0) \geq 0 \\ \pi & sin(p\pi q/T_0) < 0 \end{cases}$$

Cesitli p degerleri icin $c_p$ nin genligi ve fazi tablo(ref: xt35) da gosterilmistir.

| $p$ | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_p$ | -0.03 | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.19 | 0.2 | 0.19 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0 | -0.03 |
| $\|c_p\|$ | 0.03 | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.19 | 0.2 | 0.19 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0 | 0.03 |
| $\angle c_p$ | 180 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 180 |




Sekil(xz63) dikdortgen darbeye iliskin cift tarafli spektrum

sonuc: Furier serisinden maksat bir isaretinin icindeki sinuzoidsal isaretlerin ortaya cikmasidir. gerek $a_p$, $b_p$ katsayilarinda gerek $d_p$, $\theta_p$ katsayilarinda gerekse $c_p$ katsayilarindaki bilgiler ozdes bilgillerdir. Herhangi birisi varsa digerleri hesaplanabilir. $a_b$ ve $b_p$ katsayilari tek baslarina fiziksel yorumdamlama zorlugundan $d_p$ ve $t\theta_p$ katsayilari hesaplanarak yorum yapilir. ote yandan $c_p$ katsayilari kompleks oldugundan onda da yorum yapmma zorlugu vardir. $c_p$ nin genlik ve faz spektrumu cizilerek yorum daha kolay yapilir.

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt}$$

$$\boxed{a_p = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\cos(pw_0 t)\, dt}$$

$$\boxed{b_p = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\sin(pw_0 t)\, dt}$$

$$\boxed{c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0 t}dt}$$

$$c_p = \frac{1}{2}(a_p - jb_p)$$
$$c_{-p} = \frac{1}{2}(a_p + jb_p)$$
$$c_0 = a_0$$
$$a_p = c_p + c_{-p} \qquad b_p = j(c_p - c_{-p})$$
$$d_p = 2|c_p| \qquad \theta_p = \angle c_p$$

# Cozumlu Problemler

C.P(xd58) $g(t) = \cos at$ fonksiyonunun periyodunu bulun. Burada

$$\cos(a(t+T)) = \cos(at)$$

esitligini saglayan T degerini ariyoruz. $\cos(a(t+T))$ ifadesini acik olarak yazalim.

$$\cos(a(t+T)) = \cos(at+aT) = \cos(at)\cos(aT) - \sin(at)\sin(aT)$$

Buradan acikca goruldugu gibi esitligin ikinci tarafinin $\cos(at)$ ye esit olmasi icin

$$\cos(aT) = 1 \qquad \sin(aT) = 0$$

olmasi gerekir. Bu durum da ancak

$$aT = 0, \quad aT = 2\pi, \quad aT = -2\pi, \quad aT = 4\pi, \quad aT = -4\pi, \ldots..$$

veya en genel halde $k$ tamsayi olmak uzere

$$aT = 2k\pi \qquad T = \frac{2k\pi}{a}$$

olmasi hallerinde saglanir. $g(t+T) = g(t)$ esitligini saglayan sifirdan farkli en kucuk deger periyod kabul edildiginden $k = 1$ haline karsilik gelen

$$T = \frac{2\pi}{a}$$

degeri $\cos(at)$ nin periyodudur,

C.P(xd61) $\cos 7t, \quad \cos 0.5t, \quad \cos \frac{1}{3}t, \quad \cos(2+\pi)t, \quad 10 + \cos 7t, \quad \sin 7t$ fonksiyonlarinin periyodunu bulun. (C.P.ref: xd58)'den

$\cos 7t$ nin peryodu $T = \frac{2\pi}{7} = 0.28\pi = 0.89$

$\cos 0.5t$ nin peryodu $T = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi = 12.56$

$\cos \frac{2}{3}t$ nin peryodu $T = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi = 9.42$

$\cos(2+\pi)t$ nin periyodu $T = \frac{2\pi}{2+pi} = 1.222$

$10 + \cos 7t$ nin periyodu $\cos 7t$ nin periyodu ile aynidir. ($g(t) = g(t+T)$ ise $A + g(t) = A + g(t+T)$ olacagi aciktir.)

$\cos(7t+20)$ nin periyodu $\cos 7t$nin periyodu ile aynidir.

$\sin 7t$ nin periyodu $\cos 7t$nin periyodu ile aynidir.

C.P(xd63) $g(t) = \cos at + \cos bt$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz. (C.P.ref: xd58)'den

$$\cos(at) = \cos(a(t+T_1))$$

esitligini saglayan $T_1$ degeri, $k$ tamsayi olmak uzere

$$T_1 = \frac{2k\pi}{a}$$

olarak verilmisti. Benzer sekilde $m$ tamsayi olmak uzere

$$\cos(bt) = \cos(b(t+T_2))$$

esitligini saglayan $T_2$ degeri

$$T_2 = \frac{2m\pi}{b}$$

olacaktir. Eger

$$T = T_1 = T_2$$

esitligini saglayan bir T degerleri varsa $\cos at + \cos bt$ nin periyodu bu $T$ degerlerinin en kucugu olacaktir.

C.P(xd65) $g(t) = \cos 4t + \cos 5t$ fonksiyonunun periyodunu bulun. (C.P.ref: xd63)'den

$$T_1 = \frac{2m\pi}{4} \qquad T_2 = \frac{2k\pi}{3}$$

olarak bulunur. $T_1 = T_2$ olmasi icin

$$\frac{1}{2}m\pi = \frac{2}{3}k\pi \quad \rightarrow \quad m = \frac{4}{3}k$$

olmalidir. Bu esitligi saglayan $m, k$ tamsayilari deneme ile bulunabilir. Yukaridaki esitligi saglayan $k, m$ degerlerinin en kucugu $k = 3 \;\; m = 4$ olarak bulunur. O halde periyot $T_1 = T_2 = 2\pi$ dir.

C.P(xd67) $g(t) = \cos 5t + \cos(6+\pi)t$ fonksiyonunun periyodunu bulun. $\frac{2k\pi}{5} = \frac{2m\pi}{6+\pi}$ esitligini saglayacak $k, m$ tamsayilari bulunamayacagi icin bu $g(t)$ fonksiyonu periyodik degildir.

C.P(xp113) $g(t) = 22\cos(4t) + 15\sin(10t+110) + 4.5\sin(13t+30) + 8\cos(25t+40)$ isaretinin tek tarafli spektrumunu cizin.

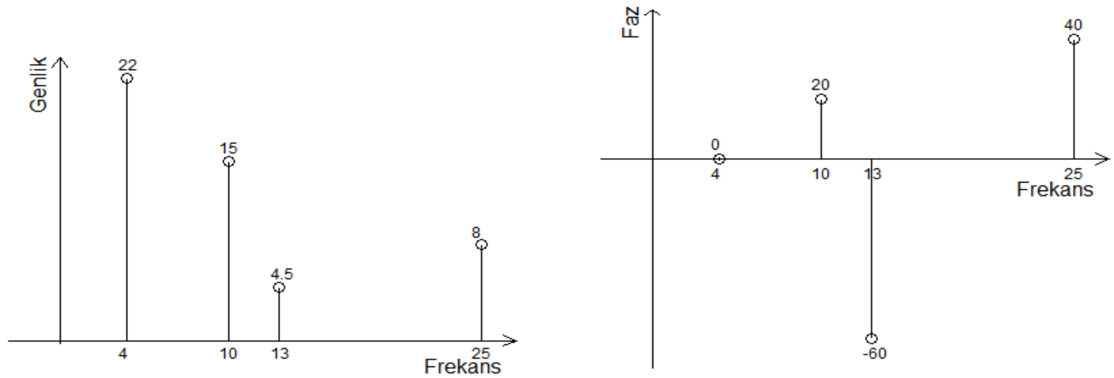
$$\sin(10t+110) = \cos[90-(10t+110)] \;\; = \cos(90-10t-110) = \cos(-10t-20) = \cos(10t+$$

$$\sin(13t+30) = \cos[90-(13t+30)] \;\; = \cos(90-13t-30) = \cos(-13t+60) = \cos(13t-60$$

esitlikleri kullanilarak $g(t)$ fonksiyonu

$$g(t) = 22\cos(4t) + 15\cos(10t+20) + 4.5\cos(13t-60) + 8\cos(25t+40)$$

haline getirilir ve spektrum cizilir. Istenen spektrum sekil(ref: xz24)de gosterilmistir.




S(xz24) $g(t) = 22\cos(4t) + 15\sin(10t + 110) + 4.5\sin(13t + 30) + 8\cos(25t + 40)$ isaretinin tek tarafli spektrumu.

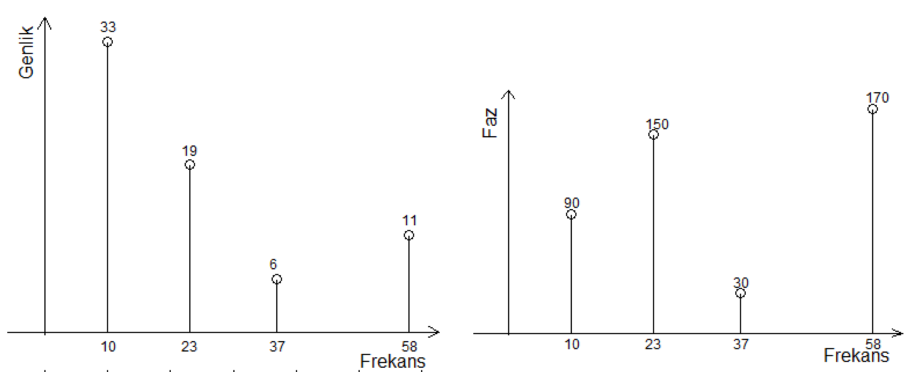
C.P(xp115) $g(t) = -33\sin(10t) - 19\cos(23t + 30) - 6\sin(37t - 60) - 11\cos(58t - 10)$ isaretinin spektrumunu cizin.

$$-\sin(10t) = \cos(10t + 90)$$
$$-\cos(23t + 30) = \cos(23t + 30 - 180) = \cos(23t + 150)$$
$$-\sin(37t - 60) = \cos(37t - 60 + 90) = \cos(37t + 30)$$
$$-\cos(58t - 10) = \cos(58t - 10 + 180) = \cos(58t + 170)$$

bagintilari kullanilarak

$$g(t) = 33\cos(10t + 90) + 19\cos(23t + 150) + 6\cos(37t + 30) + 11\cos(58t + 170)$$

elde edilir. Bu isaretin spektrumu oncekilere benzer sekilde cizilir. Spektrum sekil(ref: xz25)de gosterilmistir.



S(xz25) $g(t) = -33\sin(10t) - 19\cos(23t + 30) - 6\sin(37t - 60) - 11\cos(58t - 10)$ isaretinin tek tarafli spektrumu

C.P(xp117) Ornek problem $g(t) = 2\cos(10t + 30) + 3\cos(10t - 45) + 5\sin(10t - 80)$ ifadesini tek terime indirgeyiniz. (Ek-ref: appx11) de verilen $\cos(a + b)$ ve $\sin(a + b)$ acilimlari kullanilarak

$$\begin{aligned} g(t) &= 2\cos(10t + 30) + 3\cos(10t - 45) + 5\sin(10t - 80) \\ &= 2[\cos(10t)cos(30)] \ - \sin(10t)\sin(30)] \\ &\quad + 3[\cos(10t)cos(45)] \ + \sin(10t)\sin(45)] \\ &\quad + 5[\sin(10t)cos(80)] \ - \cos(10t)\sin(80)] \\ &= -1.07\cos(10t) + 1.98\sin(10t) = 2.259\cos(10t - 118.28) \end{aligned}$$

bulunur.

P(xz761) $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ve $k, n$ birer tamsayi olduguna gore asagidaki integralleri hesaplayin.

$$M_1 = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(kw_0t)\ dt \qquad M_2 = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(kw_0t)\ \cos(nw_0t)\ dt$$

$k$ tamsayi olmak uzere $\cos(2k\pi) = 1$ ve $\sin(2k\pi) = 0$ oldugu gozonune alinirsa $M_1$ integralini kolayca hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(kw_0t)\ dt = -\frac{1}{kw_0}[\cos(kw_0t)]_{t_0}^{t_0+T_0} \\ &= -\frac{1}{kw_0}[\cos(kw_0(t_0 + T_0)) \ - \cos(kw_0(t_0))] \\ &= -\frac{1}{kw_0}[\cos(kw_0t_0 + 2k\pi) - \cos(kw_0t_0)] \\ &= -\frac{1}{kw_0}[\cos(kw_0t_0)\cos(2k\pi) - \sin(kw_0t_0)\sin(2k\pi) - \cos(kw_0t_0)] \\ &= -\frac{1}{kw_0}[\cos(kw_0t_0) - 0 - \cos(kw_0t_0)] \ = 0 \end{aligned} \qquad \text{xq1fw101}$$

olarak bulunur. Ayni yontemle

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(kw_0t) = 0 \qquad \text{xq1fw103}$$

oldugu kolayca gosterilebilir.

$M_2$ integali icin $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$ bagintisi ve yukaridaki tanimlar gozonune alinir.

$$M_2 = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(kw_0t)\ \cos(nw_0t)\ dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{1}{2}[\cos(kw_0t + nw_0t) + \ \cos(kw_0t - nw_0t)]\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T_0}[\cos(kw_0t + nw_0t)\ dt + \ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(kw_0t - nw_0t)]\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{kw_0 + nw_0} \sin(kw_0t + nw_0t)\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{kw_0 - nw_0} \sin(kw_0t - nw_0t)\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} \qquad \text{xd54}$$

$w_0T_0 = 2\pi$ ve $k$ tamsayi olmak uzere $sin(X + 2k\pi) = sin(X)$ oldugu dikkate alinirsa

$$\sin(kw_0t + nw_0t)|_{t_0}^{t_0+T_0} \ = \sin(kw_0(tt + TT) + nw_0(tt + TT))\ - \sin(kw_0t_0 + nw_0t_0)$$

$$= \sin(kw_0tt + kw_0TT + nw_0tt + nw_0T_0))\ - \sin(kw_0t_0 + nw_0t_0)$$

$$= \sin(((k+n)w_0t_0 + (k+n)w_0T_0))\ - \sin((k+n)w_0t_0)$$

$$= \sin(((k+n)w_0t_0) - \sin((k+n)w_0t_0) = 0$$

elde edilir. Benzeri yontemle

$$\sin(kw_0t - nw_0t)_{t_0}^{t_0+T_0} = 0$$

oldugu da gosterilebilir. Dolayisiyla (ref: xd54) un iki terimi de sifir oldugundan $k \neq m$ hali icin $M2 = 0$ olarak bulunur.

$k = m$ icin $M_2$ integrali

$$M_2 = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos^2(kw_0t)dt$$

haline gelir. $\cos^2 X = \frac{1}{2}(1 + cos2X)$ bagintisini kullanarak ve yukaridaki islemlere benzer islemlerle

$$M_2 = \int_{t_0}^{t_0+T_0}(\frac{1}{2}(1 + \cos 2kw_0t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2kw_0}\sin 2kw_0t)\right]_{t_0}^{t_0+T_0}$$

$$= \frac{T_0}{2}$$

bulunur.

C.P(xp571) $k, p$ birer tamsayi $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ olduguna gore

$$M = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt$$

integralinin degerini hesaplayin. $k \neq p$ ve $k = p$ halleri ayri ayri ele aalinacaktir. Once $k \neq p$ halini ele alalim.

$$M = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(kw_0-pw_0)t}dt$$

$$= \frac{1}{j(kw_0-pw_0)}e^{j(kw_0-pw_0)t}\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{j(kw_0-pw_0)}\left[e^{j(kw_0-pw_0)(t_0+T0)} - e^{j(kw_0-pw_0)t_0}\right]$$

Not $k = p$ olsa idi bu integral alma islemi gecersiz olurdu. $w_0T_0 = 2\pi$ ve $k-p$ tamsayi olmak uzere $e^{j(k-p)2\pi} = 1$ oldugunu gozonune alarak koseli parantez icindeki ilk terimi hesaplayalim.

$$\begin{aligned} e^{j(kw_0-pw_0)(t_0+T0)} &= e^{j(kw_0t_0+kw_0T_0-pw_0t_0-pw_0T_0)} = e^{j(k-p)w_0t_0+j(k-p)w_0T_0} \\ &= e^{j(k-p)w_0t_0}e^{j(k-p)w_0T_0} = e^{j(k-p)w_0t_0}e^{j(k-p)2\pi} \\ &= e^{j(k-p)w_0t_0} \end{aligned}$$

olur. Bu deger yukarida yerine konursa koseli parantezin ici sifir olur. Dolayisiyla $k \neq p$ icin $M = 0$ olur.

Simdi $k = p$ veya $k-p = 0$ durumunu gozonune alalim. Bu durumda $M$ integrali

$$M = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-p)w_0t}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^0dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} 1.dt = t|_{t_0}^{t_0+T_0} = (t_0+T_0)-t_0$$

$$= T_0$$

olur. sonuc olarak

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jkw_0t}e^{-jpw_0t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-p)w_0t}dt = \begin{cases} 0 & k \neq p \\ T_0 & k = p \end{cases} \qquad \text{xqf367}$$

C.P(p448) $g(t) = cos^3(t)$ fonksiyonunun Furier serisi katsayilarini komplex Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

Problem normal yollarla cozulebilir. Yani $a_0 \;\; a_p \;\; b_p$ icin gerekli integraller yazilir integraller hesaplanir ve $a_0 \;\; a_p \;\; b_p$ katsayilari bulunur. Ancak Burada daha kolay bir yol izlenecektir.

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$$

bagintilari kullanilarak $g(t)$ fonksiyonu

$$g(t) = \cos^3(t) \;= \cos(t)\cos^2(t) = \cos(t)\tfrac{1}{2}(1+\cos(2t))$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos(t) + \tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}(\cos(3t)+\cos(t))$$

$$= \tfrac{3}{4}\cos(t) + \tfrac{1}{4}\cos(3t)$$

haline getirilir. Yukaridaki esitligi (ref: xA1) esitligi ile karsilastirdigimizda acikca goruldugu gibi

$$b_p = 0 \quad a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{3}{4} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{1}{4} \;\; ve \;\; p > 0 \;\; icin \;\; a_p = 0$$

bulunur.

$c_p = \frac{1}{2}(a_p - jb_p)$ bagintisindan

$$c_0 = 0 \;\; c_{-1} = \frac{3}{8} \qquad c_1 = \frac{3}{8} \qquad c_{-2} = 0 \;\; c_2 = 0 \qquad c_{-3} = \frac{1}{8} \qquad c_3 = \frac{1}{8}$$

ve

$$|p| > 0 \;\; icin \;\; c_p = 0$$

olacaktir.

C.P(p385) Sekil(ref: cx2) deki impuls darbe katarinin kompleks Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

Sekil(cx2) Impuls Darbe katari

$$c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-jpw_0t}g(t)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-q/2}^{q/2} \delta(t)e^{-jpw_0t}\,dt$$

(Ek-ref: appx51)de verilen bagintilar geregi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) = f(0)$$

oldugundan

$$\int_{-q/2}^{q/2} \delta(t)f(t) = f(0)$$

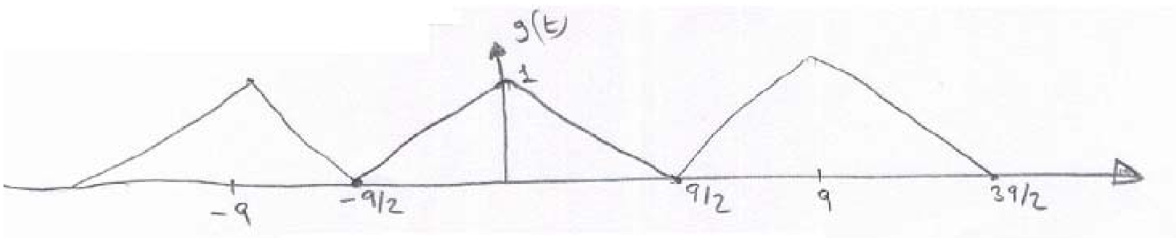
olacagi aciktir. dolayisiyla

$$c_p = \frac{1}{T_0}e^{-jpw_00} = \frac{1}{T_0}$$



olarak bulunur.

C.P(x448) Sekil(ref: xz76) da gosterilen ucgen dalganin Furier serisi katsayilarini hesaplayin.




S(xz76) ucgen dalga

acikca goruldugu gibi $g(t)$ isaretinin periyodu $T_0 = q$ dur. $g(t)$ isareti analitik olarak

$$g(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{q} & -\frac{q}{2} \leq t < 0 \\ \\ 1 - \frac{4t}{q} & 0 \leq t < \frac{q}{2} \end{cases}$$

seklinde ifade edilebilir. Furier serisi katsayilari bilinen yontemle hesaplanir.

$$a_0 = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} g(t)dt = \int_{-\frac{q}{2}}^{0} \left(1 + \frac{4t}{q}\right)dt + \int_{0}^{\frac{q}{2}} \left(1 - \frac{4t}{q}\right)dt$$

$$= \left[t + \frac{2t^2}{q}\right]_{-\frac{q}{2}}^{0} + \left[t - \frac{2t^2}{q}\right]_{0}^{\frac{q}{2}} = 0 + 0 = 0$$

Benzer sekilde

$$a_p = \frac{2}{T_0}\left\{\int_{-\frac{q}{2}}^{0}\left(1 + \frac{4t}{q}\right)\cos(pw_0t)dt + \int_{0}^{\frac{q}{2}}\left(1 - \frac{4t}{q}\right)\cos(pw_0t)dt\right\}$$

$$= \frac{2}{T_0}\left\{\int_{-\frac{q}{2}}^{0}\cos(pw_0t)dt + \int_{0}^{\frac{q}{2}}\cos(pw_0t)dt + \int_{-\frac{q}{2}}^{0}\frac{4t}{q}\cos(pw_0t)dt + \int_{0}^{\frac{q}{2}}\frac{-4t}{q}\cos(pw_0t)dt\right\}$$

$$= \frac{2}{T_0}\left\{\int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}}\cos(pw_0t)dt\right\} + \frac{8}{T_0q}\left\{\int_{-\frac{q}{2}}^{0} t\cos(pw_0t)dt - \int_{0}^{\frac{q}{2}} t\cos(pw_0t)dt\right\}$$

(ref: xq1fw101) esitligi geregi birinci integral sifira esittir. ote yandan

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax)$$

bagintisindan faydalanarak ikinci parantezin icindeki integraller hesaplanirsa.

$$a_p = \frac{4}{n^2\pi^2}(1 - cosn\pi)$$

bulunur.$b_p$ katsayisi benzeri yontemler kullanilarak ve

$$\int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$$

bagintisinddan faydalanilarak $b_p = 0$ oldugu kolayca gosterilebilir.

kommpleks Furier katsayilari da

$$c_p = \frac{1}{2}(a_p - jb_p) = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - cosn\pi)$$

olarak hesaplanir.

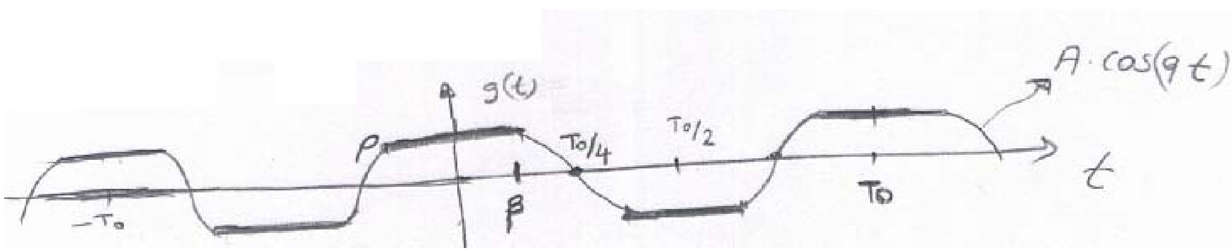
C.P(x457) Sekil(ref: xq1f161)deki alttan ve ustten kirpilmis kosinus dalgasi goruluyor.

**a**) Verilen isaretin Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

**b**) $\beta = 0.6\ T_0 = 4,\ A = 5$ icin $a_p$ katsayilarinin numerik degerlerini hesaplayin.

**c**) $p > 8$ icin $a_p$ katsayilarini ihmal ederek $g(t)$ isaretini sinuzoidal terimlerin toplami cinsinden yaziniz.

**d**) Elde ettiginiz $g(t)$ isareti ile asil $g(t)$ isaretini karsilastirin.




Sekil(xq1f161)

**a**)Sekildeki dalga acikca goruldugu gibi

$$g(t + \frac{T}{2}) = -g(t)$$

$$g(t) = g(-t)$$

ozelliklerini saglamaktadir. O halde (ref: xq1e32) geregi Furier serisi katsayilari

$$b_p = 0, \quad a_p = \frac{8}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T_0}{4}} g(t)\cos(pw_0t)\,dt \qquad \#$$

$$p = 1,3,5,7,9\ldots\ldots$$

bagintilari yardimiyla hesaplanabilir. $a_0$ katsayisi normal yolla hesaplanir. $g(t)$ $t$ eksenine gore simetrik oldugundan $a_0 = 0$ olur. Ote yandan $0 - \frac{T_0}{4}$ araliginda $g(t)$

fonksiyonu

$$g(t) = \begin{cases} Q & 0 < t < \beta \\ A\cos(qt) & \beta < t < \frac{T_0}{4} \end{cases}$$

seklindedir ve $Q = A\cos(w_0\beta)$'dir. O halde

$$a_p = \frac{8}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T_0}{4}} g(t)\cos(pw_0t)\,dt$$

$$= \frac{8}{T_0}\int_0^{\beta} Q\cos(pw_0t)\,dt + \frac{8}{T_0}\int_{\beta}^{\frac{T_0}{4}} A\cos(w_0t)\cos(pw_0t)\,dt$$

$$\cos(A)\cos(B) = 0.5[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$\cos(w_0t)\cos(pw_0t) = 0.5[\cos\{(p-1)w_0t\} + \cos\{(p+1)$$

$$= \frac{8}{T_0}\frac{Q}{pw_0}\sin(pw_0\beta) + \frac{8A}{T_0}\left\{\frac{1}{2(p-1)w_0}\sin\frac{(p-1)\pi}{2} + \frac{1}{2(p+1)w_0}\sin\frac{(p+1)\pi}{2}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2(p-1)w_0}\sin[(p-1)w_0\beta] - \frac{1}{2(p+1)w_0}\sin[(p+1)w_0\beta]\right\}$$

Ote yandan $w_0T_0 = 2\pi$ ve $p = 1,3,5,7,\ldots$ icin

$$\sin\frac{(p-1)\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{(p+1)\pi}{2} = 0$$

oldugu gozonune alinirsa $p = 1,3,5,7,\ldots$ icin.

$$a_p = \frac{4Q}{p\pi}\sin(pw_0\beta) + \frac{4A}{\pi}\left\{-\frac{1}{2(p-1)}\sin[(p-1)w_0\beta] - \frac{1}{2(p+1)}\sin[(p+1)w_0\beta]\right\}$$

arak $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ katsayilari hesaplanir. $p = 1$ icin $a_1$ katsayisi limit alinarak bulunur.

$$a_1 = \frac{4Q}{\pi}\sin(w_0\beta) + A\left(1 - \frac{4\beta}{T_0} - \frac{1}{\pi}\sin(2w_0\beta)\right)$$

**b**) Bulunan bagintida

$$\beta = 0.6\ T_0 = 4,\ A = 5, w_0 = 1.57, Q = A * cos(w_0 * beta) = 3.53$$

degerleri konularak

$$a_1 = 4.73, \quad a_3 = -0.5, \quad a_5 = -0.16, \quad a_7 = 0.09$$

bulunur.

**c**) Dolayisiyla $g(t)$ isarti

$$g(t) = 4.73\cos(1.57t) - 0,5\cos(4.71t) + 0.16\cos(7.85t) + 0.09\cos(11.0t)$$

seklinde yazilabilir.

**d**) Elde edilen $g(t)$ isareti sekil(ref: xq1f163)'de gosterilmistir.

S(xq1f163) Furier serisinden elde edilen $g(t)$ isareti

C.P(xqp321) Kompleks Furier Serisi katsayilari

$$c_n = \frac{1+jn}{n^2+1}$$

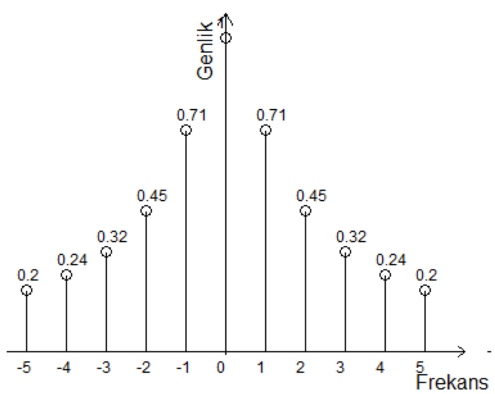
seklinde verilen bir isaretin spektrumunu cizin. $n=0$ icin

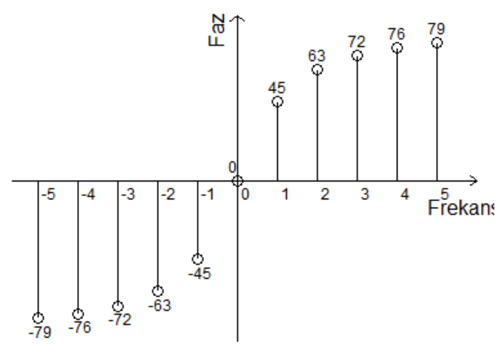
$$c_0 = \frac{1+j0}{0^2+1} = 1, \quad |c_n| = 1 \qquad \angle c_n = 0$$

$n=1$ icin

$$c_1 = \frac{1+j1}{1^2+1} = 0.5+j0.5, \quad |c_n| = \sqrt{0.5} \qquad \angle c_n = \frac{\pi}{4}$$

Benzer sekilde $n = 0,1,2,3,\ldots -1,-2,-3\ldots$ degerleri icin $c_n$ degerleri hesaplanir, daha sonra $|c_n|$ ve $\angle c_n$ hesaplanir sekil(refxq1s71)de oldugu gibi spektrum cizilir.




S(xq1s71) $c_n = \frac{1+jn}{n^2+1}$ ifadesinin genlik ve faz spektrumu

P(xqp322) Kompleks Furier Serisi katsayilari

$$c_0 = 10, \quad c_1 = 2-3j, \quad c_{-1} = 2+3j \quad , c_2 = 7, \quad c_{-2} = 7,$$

$$c_3 = 11j, \quad c_{-3} = -11j$$

$$|n| > 3 \quad icin \quad c_n = 0$$

seklinde verilen ve periyodu $T = 0.1$ saniye olan bir $f(t)$ isaretinin zamana bagli ifadesini yazin. $t = 0,\ \ t = 1,\ \ t = 1.01$ icin $f(t)$ nin degerini bulun.

Isaretin acisal frekansi

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = 20\pi = 62.8$$

olacaktir. (ref: r12) bagintisi geregi

$$g(t) = -11j(e^{-j3w_0t} + 7e^{-j2w_0t} + (2+3j)e^{-jw_0t} + 10 + (2-3j)e^{jw_0t}$$
$$+ 7e^{j2w_0t} + 11je^{j3w_0t}$$

yazilabilir. Benzer terimler ayni parantezde toplanirsa

$$g(t) = 10 + 2(e^{jw_0t} + e^{jw_0t}) - 3j(e^{jw_0t} - e^{jw_0t}) + 7(e^{j2w_0t} - e^{-j2w_0t})$$
$$+ 11j(e^{j3w_0t} - e^{-j3w_0t})$$

olarak yazilabilir. (Ek-ref: appx11)'de verilen baginilar yardimiyla gerekli sadelestirmeler yapilirsa.

$$g(t) = 10 + 4\cos(w_0t) + 6\sin(w_0t) + 14\cos(2w_0t) - 22\sin(3w_0t)$$

elde edilir. $w_0 = 62.8$ konulursa.

$$g(t) = 10 + 4\cos(62.8t) + 6\sin(62.8t) + 14\cos(125.6t) - 22\sin(188.4t)$$

elde edilir.
Bulunan ifadede $t = 0$ konursa $g(0) = 28$, $t = 1$ konursa $g(1) = 29$, $t = 1.01$ konulursa $g(1.01) = 0.37$ elde edilir.

*****************************************************************

"xp1 Asagidaki ifadeleri sadelestirerek her bir frekansdaki bileseni tek terim halinde yazin.

$$sin(10t + 45) + cos(10t + 45)$$
$$cos(10t) + cos(10t + 45) + sin(10t) + sin(10t + 60)$$
$$cos(20t) + sin(20t + 60) + sin(20t + 90)$$
$$sin^2(10t) + cos10t + cos(20t)$$

P.P(xp2) $g(t) = \cos 3t + \cos 4t + \cos 5t$ fonksiyonunun periyodunu bulun.

P.P(xp3) $g(t) = \cos 3t + \cos 3\pi t$ fonksiyonunun periyodunu bulun.

P.P(xp32) $g(t) = \cos^5(wt)$ isaretinin Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

P.P(Sekil(ref: xs81)'deki yarim sinus isaretinin Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

S(xs81) Kirpilmis sinus dalgasi

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T_0}{2} < t < 0 \\ A\sin w_0 t & 0 < t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$g(t+T_0) = g(t) \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

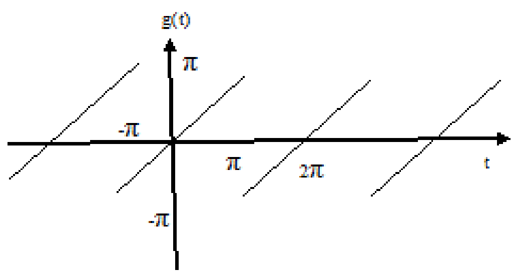
Cevap:

$$a_0 = \frac{2\pi}{A} \qquad a_1 = 0$$

$$p > 1 \;\; icin \quad a_p = \begin{cases} 0 & p \; tek \;\; ise \\ \frac{2A}{(p-1)(p+1)p} & p \; cift \;\; ise \end{cases}$$

$$b_p = 0$$

P.P(xp5) Sekil(ref: xs82)'deki $g(t) = t$ isaretinin Furier serisi katsayilarini ve kompleks Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

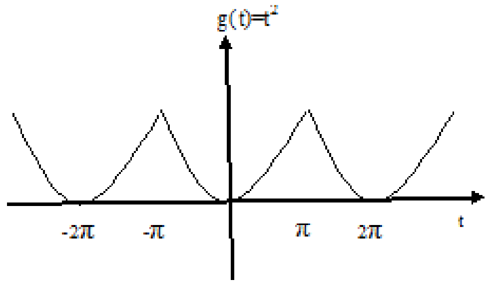



S(xs82) Periyodik g(t)=t isareti

Cevap:

$$a_p = 0 \qquad b_p = 2\frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

P.P(xp6) Sekil ref: xs83'deki $g(t) = t^2$ isaretinin Furier serisi katsayilarini ve kompleks Furier serisi katsayilarini hesaplayin.

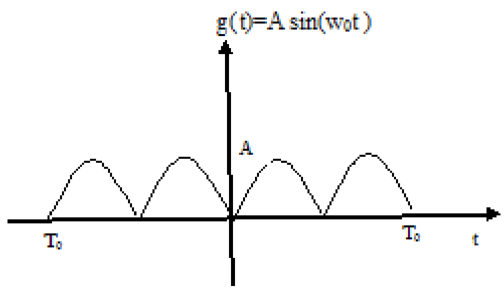



S(xs83) $g(t) = t^2$ isareti

Cevap:

$$a_0 = \frac{1}{3}\pi^2 \qquad a_p = 4\frac{(-1)^p}{p^2} \qquad b_p = 0$$

P.P(xp7) Sekil ref: xs84'deki $g(t) = |A\sin(w_0 t)|$ isaretinin Furier serisi katsayilarini ve kompleks Furier serisi katsayilarini hesaplayin.




S(xs84) $g(t) = |A\sin(w_0 t)|$ isareti

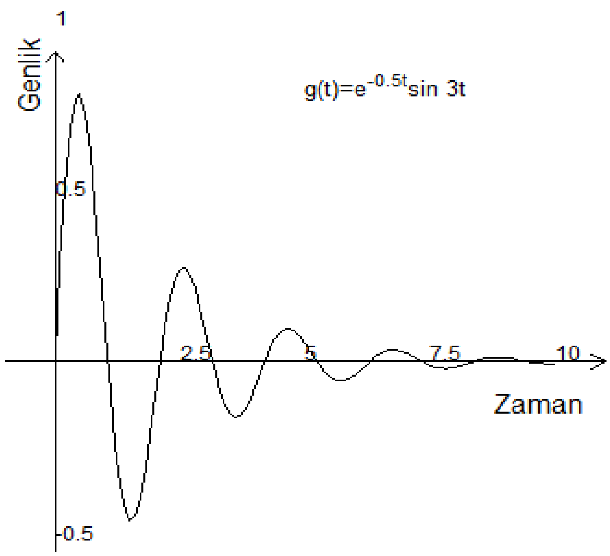
Cevap:

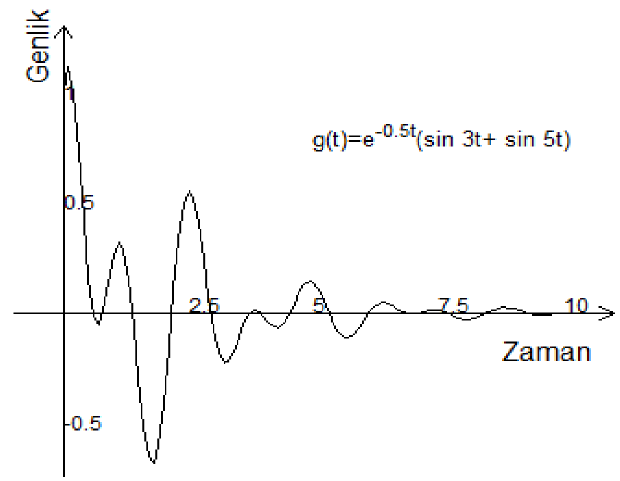
$$a_0 = \frac{2A}{\pi} \qquad a_p = \frac{4A}{\pi}\frac{1}{1-p^2} \qquad b_p = 0$$

cos7t cos5t, sin7t cos5t, sin7t sin5t deki harmonikleri bulu. tektarafli spektrumunu cizin tek teraflispektrumu ver cifttarfli spektrum iste cift tarfli spektum ver tek tarafli iste.

**FURIER DONUSUMU**

Periyodik isaretleri Furier serisine acarak isaretin hangi sinuzoidal bilesenlerden meydana geldigini bulabiliyoruz. Simdi sekil(ref: xdd1)'de gosterilen $g(t) = e^{-0.1t}(\sin(3t) + \cos(5t))$ isaretini ele alalim.






S(xdd1) a) $e^{-0.5t}(\sin 3t)$ b) $e^{-0.5t}(\sin(3t) + \cos(5t))$ isaretleri

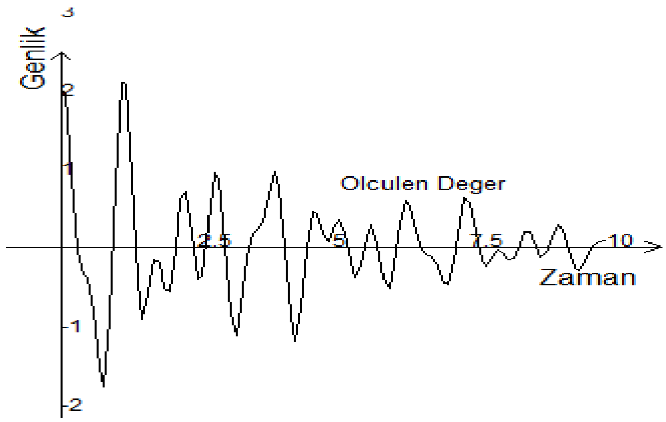
$g(t)$ isareti $e^{-0.5t}$ ve $\sin(3t) + \cos(5t)$ isaretlerinin carpimidir. Yani $g(t)$ isaretinin icinde saklanmis olarak sinuzoidal isaretler mevcuttur. Ancak $g(t)$ isareti periyodiklik sartini saglamaz, dolayisiyla Furier serisine acilamaz.

Bilgisayarda bir diskette veya grafik olarak elimizde $g(t)$ isareti varken, $\sin(3t)$ ve $\cos(5t)$ isaretini $g(t)$ isaretinin icinden nasil cekip cikaracagiz? Daha acik bir ifade ile grafigi inceleyerek bu isaret $\sin(3t)$'li $\cos(5t)$'li terimler barindiriyor diyebililecegimiz bir yontem varmidir.

Elektrik devrelerinde bir koldan gecen akim, bir robot kolundaki titresim asagidaki gibi olabilir.

$$g(t) = F_1 e^{-q_1 t}\cos(w_1 t + \theta_1) + F_2 e^{-q_2 t}\cos(w_2 t + \theta_2) + F_3 e^{-q_3 t}\cos(w_3 t + \theta_3) \qquad \text{xfdd2}$$

Akimi olctugumuzde Sekil(ref: xdd2)'deki gibi bir grafikle karsilasabiliriz. Olcum sonuclarina bakarak (Grafigi inceleyerek) $F_1, F_2, F_3, w_1, w_2, w_3, q_1, q_2, q_3$ degerleri hesaplanmak istenmektedir.




Sekil(xdd2) Fiziksel olarak olculen deger.

Gercek dunyadan fiziksel olcumlerle elde edilen isaretler cogu kere periyodik degildir, fakat icerisinde yukaridaki ornekte oldugu gibi sinuzoidal terimler bulundururlar. Furier donusumu bu gibi periyodik olmayan isaretlerin iclerindeki sinuzoidal terimlerin frekanlarini ve genliklerini ($F_1, F_2, F_3, w_1, w_2, w_3, q_1, q_2, q_3$ katsayilarini) hesaplamak icin kullanilan bir alettir. Furier serisi acilimi sadece periyodik isaretler icin olmasina karsilik Furier donusumu ile periyodik olmayan bir isaretin genlik ve faz spektrumu elde edilebilir. Bununla beraber Furier donusumu periyodik isaretlerin spektrumunu elde etmek icin de kullanilabilir.

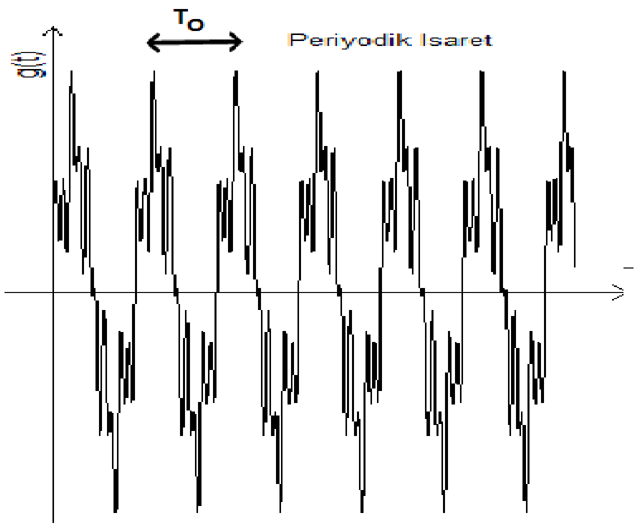
**Furier Serisinden Furier Donusumunun Hesaplanmasi**

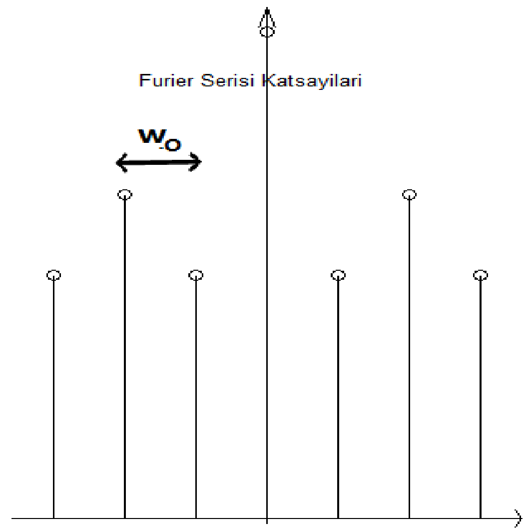
Periyodik olmayan bir isaretin spektrumunu elde etmek icin once periyodik isaretin spektrumuna kisa bir goz atalim. Kompleks Furier serisi bagintisi (ref: xq1b71) bolumden

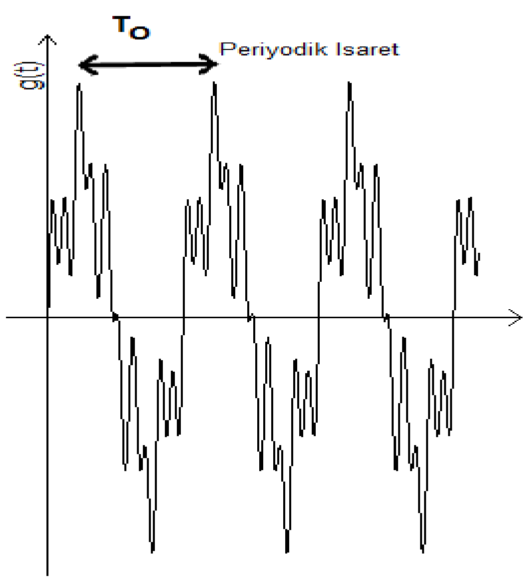
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jnw_0 t} \qquad \text{a12}$$

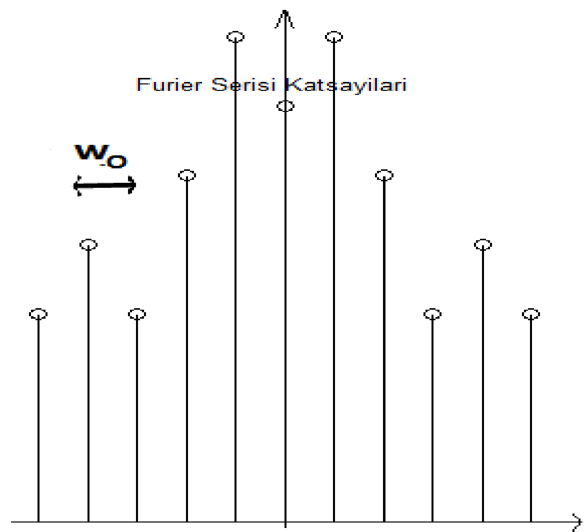
$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-jnw_0 t} dt \qquad \text{a13}$$

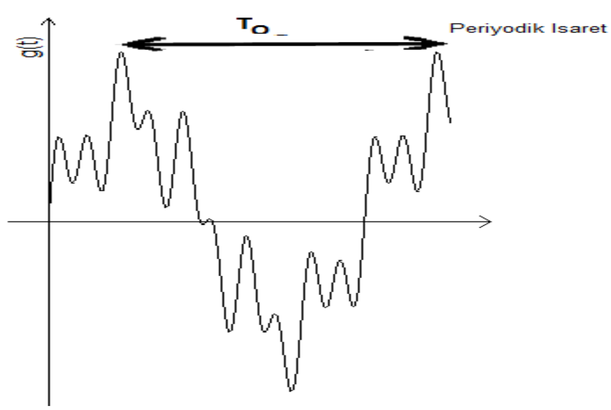
olarak verilmisti. ($t_0$ rin secimi keyfi oldugundan $t_0 = \frac{T_0}{2}$ olarak alinmistir.)
Sekil(ref: xfur1)'den goruldugu gibi $T_0 \to \infty$ oldugunda $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to 0$ gider. Bu hali $\Delta w$ ile gosterelim.

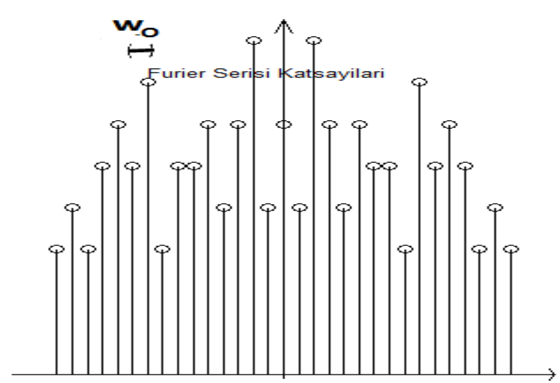

g(t)
To
Periyodik Isaret


Furier Serisi Katsayilari
wo


g(t)
To
Periyodik Isaret


Furier Serisi Katsayilari
wo


g(t)
To
Periyodik Isaret


wo
Furier Serisi Katsayilari

Sekil(xfur1) FurierSerisinden Furier

donmusumunun elde edilmesi

$$T_0 \to \infty \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \Delta w \qquad \frac{1}{T_0} = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{\Delta w}{2\pi}$$

(ref: a13) esitligini yeniden duzenleyelim.

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t)e^{-jnw_0 t}dt = \frac{\Delta w}{2\pi}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t)e^{-jn\Delta w t}dt \qquad \text{a14}$$

(ref: a14) deki $C_n$ degerini (ref: a12) de yerine yazalim.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jnw_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[\frac{\Delta w}{2\pi}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t)e^{-jn\Delta t}dt\right]e^{jn\Delta t} \qquad \text{a15}$$

$n\Delta w$ degiskeni yerine surekli degisken olarak yeni $w$ tanimi koyalim. ve esitligi yeniden duzenleyelim.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t)e^{-jwt}dt\right]e^{jwt}\Delta w \qquad \text{a16}$$

Simdi $T_0 \to 0$ oldugunda, $\Delta w$ cok kuculecek ve esitligin basindaki toplam isareti integrale donusecektir. Integral degiskeni olarak $\Delta w$ yerine geleneklere uygun olarak $dw$ yazarak esitlik yeniden duzenlenirse.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jwt}dt\right]e^{jwt}dw \qquad \text{a17}$$

Koseli parantez ici $G(w)$ olarak tanimlanirsa (ref: a17) esitligi .

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{jwt}dw \qquad \text{a18}$$

haline gelir.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jwt}dt \qquad \text{a19}$$

olarak tanimlanmistir. (ref: a18) ve (ref: a19) esitlikleri Furier donusumu ve ters Furier donusumu olarak adlandirilir. Furier ve ters Furier donusumleri

$$g(t) \leftrightarrow G(w) \qquad \#$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(w) \qquad \mathcal{F}^{-1}\{G(w)\} = g(t) \qquad \text{a20}$$

sembolleri ile gosterilir.

Bir periyodik isaretin Furier serisine aciliminda ayrik degerlerde frekans bilesenleri vardir. Periyodik olmayan isaretin Furier donusumu sonucu isaretin ayrik dedgil butun frekans araliginda bilesenleri vardir.

## Furier Transformu alinabilen fonksiyonlar:

Furier donusumunun tanimina gore Furier donusumunun olabilmesi icin

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{jwt}dt$$

integralinin hesaplanabilmesi gerekir. $|e^{jwt}| = 1$ oldugundan ucgen esitsizligi ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{jwt}dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)e^{jwt}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt \qquad \text{g211}$$

yazilabilir. Ayrica eger

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty \qquad \text{g212}$$

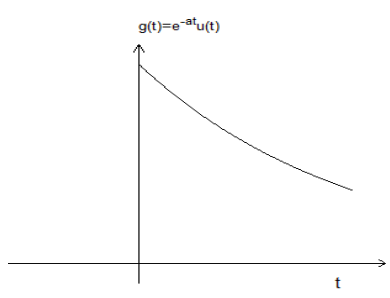
ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \qquad \text{g213}$$

sarti da saglanir. Dolayisiyla (ref: g212) veya (ref: g213) sartlarindan birisi saglanirsa $g(t)$ nin Furier donusumu alinabilir. Bunun anlami ise $g(t)$ nin $-\infty < t < \infty$ araliginda $t$ ekseni ile arasinda kalan alanin sinirli olmasi sonsuz olmamasidir. Bu sarti $g(t) = e^{-at}u(t)$ gibi fonksiyonlar saglar. Fakat $g(t) = u(t)$, birim basamak fonksiyonu, gibi bazi fonksiyonlar bu sarti saglamadiklari halde Furier donusumleri vardir. Bu tip ozel fonksiyonlarin Furier donusumleri genellestirilmis fonksiyonlar kullanilarak bulunur[ref44??]. Fiziksel isaretlerin Furier donusumleri vardir.

Ornek Problem

$u(t)$ birim basamak fonksiyonu olmak uzere $g(t) = e^{-at}u(t)$ fonksiyonunun Furier donusumunu bulun




Sekil(xq2sq10) $g(t) = e^{-at}u(t)$ fonksiyonu

(ref: a19) bagintisi geregi

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-jwt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-jwt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t}dt$$

$$= \frac{1}{-(a+jw)}[e^{-(a+jw)t}]_0^{\infty} = \frac{-1}{a+jw}[e^{-\infty} - e^0]$$

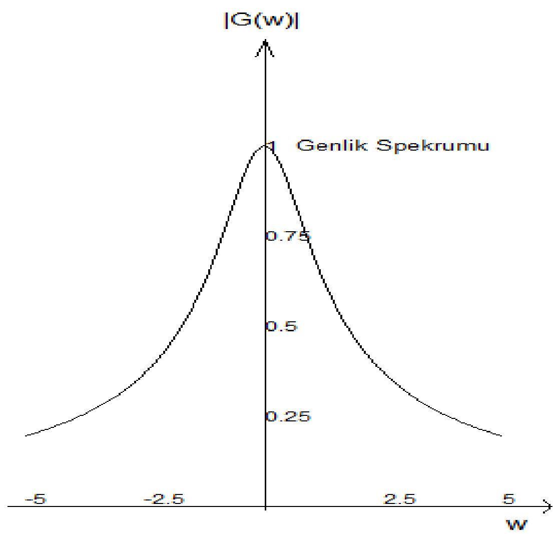
$$= \frac{1}{a+jw} \qquad a > 0 \;\; icin \;\; gecerli$$

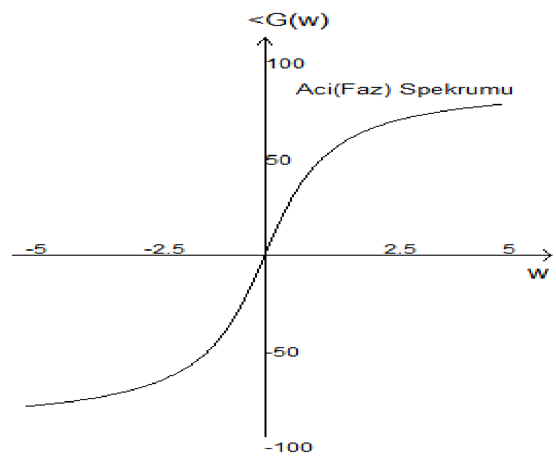
$a < 0$ icin integral yakinsamaz. $G(w)$ nin genligi ve fazi (Ek-ref: appx31)'de verilen yontemle hesaplanir.

$$|G(w)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}$$

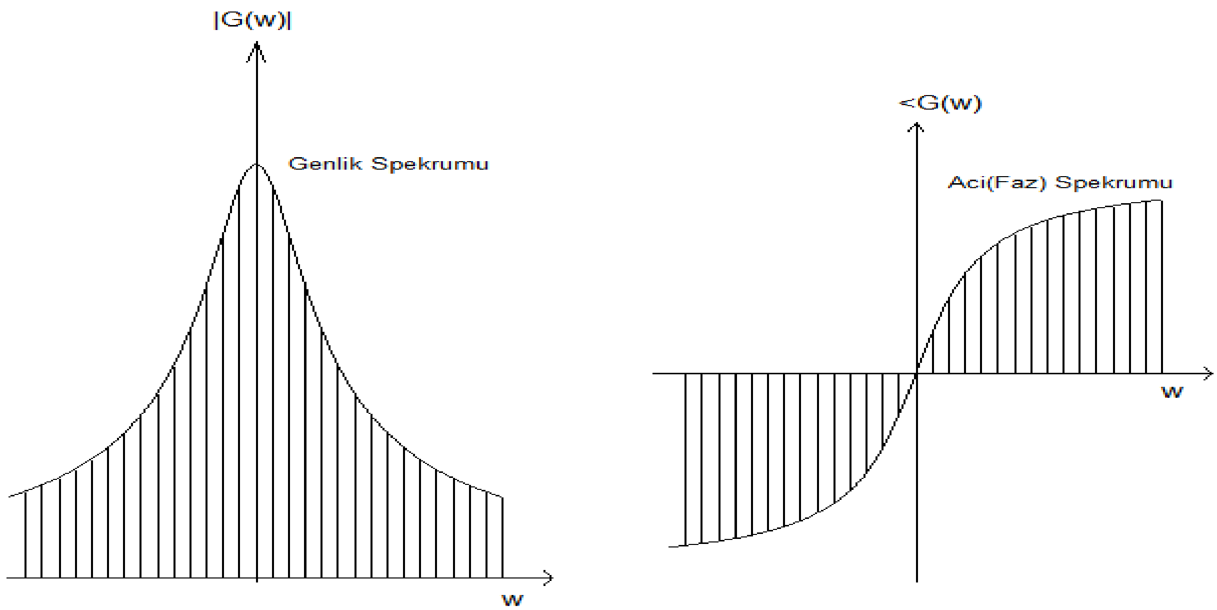
$$\angle G(w) = argtg\frac{0}{1} - argtg\frac{w}{a} = -argtg\frac{w}{a}$$

$w$'ya cesitli degerler vererek $|G(w)|$ ve $\angle G(w)$ degerlei hesaplanir ve grafik cizilir. Verilen $g(t)$ fonksiyonuna iliskin genlik ve faz spektrumu a=1 icin sekil(ref: xq2sq11)'de goruluyor.



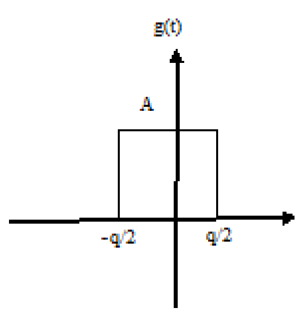

Sekil(xq2sq11) $g(t) = e^{-t}u(t)$'nin genlik ve faz spektrumu.




Sekil(xq2sq51) $g(t) = e^{-t}u(t)$'nin genlik ve faz spektrumunu komplex furier katsayilari gibi temsil edilmesi .

Ornek Problem: $\prod(\frac{t}{q})$ olarak gosterilen Sekil(ref: xsx21)deki darbenin Furier Donusumunu bulun.

$$g(t) = \prod\left(\frac{t}{q}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < q \\ 0 & |t| > q \end{cases}$$




Sekil(xsx21) Dikdortgen darbe fonksiyonu

Isaretin $-\infty < t < -q$ ve $q < t < \infty$ araliklarindaki degeri sifir oldugundan Furier donusumu icin gerekli integrali sadece bu aralikta hesaplamak yeterlidir.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jwt}dt = \int_{-q}^{q} Ae^{-jwt}dt = A\frac{1}{-jw}[e^{-jwt}]_{-q}^{q}$$

$$= A\frac{-1}{jw}(e^{-jwq} - e^{jwq}) = A\frac{1}{jw}2j\frac{1}{2j}(e^{jwq} - e^{-jwq})$$

$$= \frac{2A}{w}\sin(wq) = 2Aq\frac{\sin(wq)}{wq} = 2Aq\frac{\sin(\pi\frac{wq}{\pi})}{\pi\frac{wq}{\pi}}$$

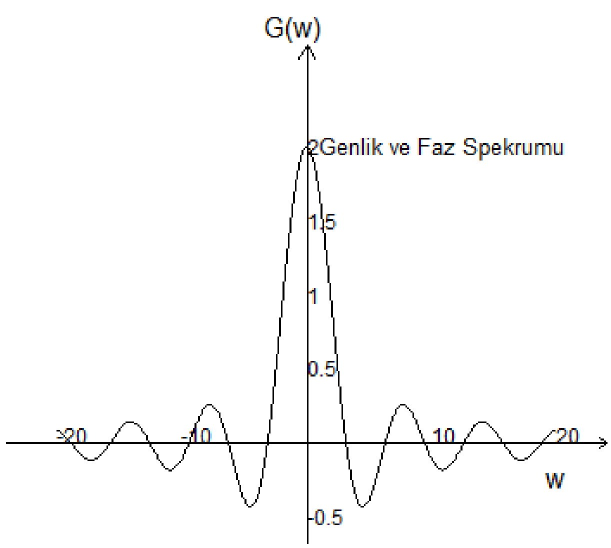
$$= 2Aq\, sinc(\frac{wq}{\pi})$$

*sinc* fonksiyonu

$$sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x} \qquad \#$$

olarak tanimlanmistir. Genlik fonksiyonu reeldir (komlex degildir). Bu nedenle faz spektrumunu ayri bir grafik olarak cizmeye gerek kalmamistir.

Odev Problem: Genlik ve faz spektrumunu ayri ayri cizin.




Sekil(xsx21) Dikdortgen darbe fonksiyonunun genlik ve faz spektrumu.

Ozel Durumlar

Eger $g(t)$ reel ve cift fonksiyon ise ( $g(t) = g(-t)$ ise)

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(wt)dt \qquad \text{j332}$$

Eger $g(t)$ reel ve tek fonksiyon ise ( $g(t) = -g(-t)$ ise)

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(wt)dt \qquad \text{j333}$$

bagintilari ile hesaplanabilir.

Furier serisi katsayilari ile Furier Donusumu arasindaki baginti

(ref: rx45) de verilen kompleks Furier serisi Katsayisi ile (ref: a19) da verilen Furier Donusum formulunu tekrar yazalim.

$$c_p = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)e^{-jpw_0t}dt \qquad \text{xqx357}$$

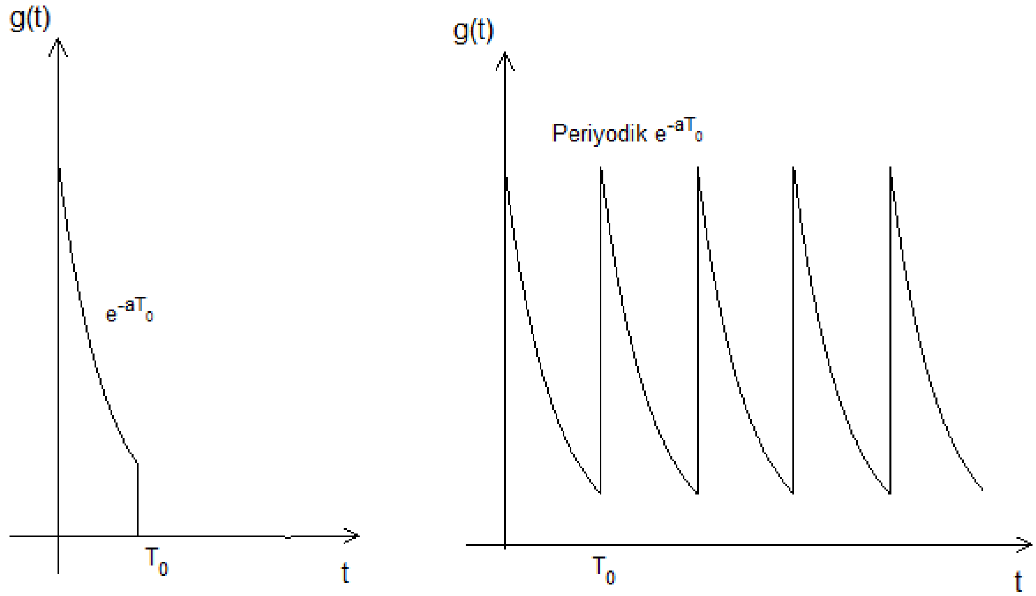
$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jwt}dt \qquad \text{xqx358}$$

iki esitlige dikkat edilirse

$$c_p = \frac{1}{T_0}G(pw_0) \qquad \text{xqx766}$$

bagintisi hemen goze carpar. Yani periyodik bir isaretin kompleks serisi katsayilari ile o isaretin bir periyodunun Furier donusumu arasinda ref: xqx766 bagintisi mevcuttur.

Sekil(ref: xqs391) deki $g(t)$ isaretinin Furier donusumunu $G(w)$'yi bulun. Buldugunuz $G(w)$'dan faydalanarak Sekil(ref: xqs392) deki periyodik isaretin kompleks Furier Serisi katsayilarini hesaplayin




Sekil(xqs391) a) $g(t) = e^{-at}$ , $t > T_0$ icin $g(t) = 0$ b) periyodik $g(t) = e^{-at}$ , $T_0$ ile periyodik

Once sekil ref: xqs391.a)'in Furier donusumunu bulalim.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-jwt}dt = \int_{0}^{T_0} e^{-at}e^{-jwt}dt$$

$$= \left| \frac{1}{-(a+jw)} e^{-(a+jw)t} \right|_0^{T_0} = \frac{-1}{a+jw}[e^{-(a+jw)T_0} - e^0]$$

$$= \frac{-1}{a+jw}[e^{-(a+jw)T_0} - 1]$$

Simdi de komplex Furier serisi katsayilarini (ref: xqx766) bagintisi ile hesaplayalim.

$$c_p = \frac{1}{T_0}\left\{\frac{-1}{a+jpw_0}[e^{-(a+jpw_0)T_0} - 1]\right\}$$

$w_0 T_0 = 2\pi$ oldugu dikkate alinirsa

$$c_p = \frac{-1}{aT_0 + jp2\pi}[e^{-aT_0} - 1]$$

olarak bulunur.

Odev Problem: komplex Furier serisi katsayilarini () bagintisi ile hesaplayin ve sonuclari karsilastirin.

Furier Donusumunun Ozellikleri

## Lineerlik

$$\mathcal{F}[g_1(t)] = G_1(w) \qquad \mathcal{F}[g_2(t)] = G_2(w)$$

olmak uzere

$$\mathcal{F}[g_1(t) + g_2(t)] = G_1(w) + G_2(w)$$

dir.

Isbat:

$$\mathcal{F}[g_1(t) + g_2(t)] = \int_{\infty}^{\infty} [g_1(t) + g_2(t)] e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} g_1(t) e^{-jwt} dt + \int_{\infty}^{\infty} g_2(t) e^{-jwt} dt = \mathcal{F}[g_1(t)] + \mathcal{F}[g_2(t)]$$

## Simetri

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad ise \quad \mathcal{F}[G(t)] = 2\pi g(-w)$$

ozelligi vardir.

Isbat: (ref: a18) esitlikte $w$ yerine $x$ sonra da $t$ yerine $-w$ koyalim.

$$g(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-jxw} dx$$

simdi de $x$ yerine $t$ koyalim.

$$g(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-jwt} dt$$

veya

$$2\pi g(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-jwt} dt = \mathcal{F}[G(t)]$$

Ornek Problem $g(t) = \frac{1}{a+jt}$ nin Furier donusumun bulun.

$$\mathcal{F}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a + jw}$$

oldugundan simetri prensibine gore

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi e^{aw} u(-w)] = \frac{1}{a + jt}$$

olacaktir. yani

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a + jt}\right] = 2\pi e^{aw} u(-w)$$

## Olcekleme

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad ise \quad \mathcal{F}[g(at)] = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{w}{a}\right)$$ s65

Isbat:

$$\mathcal{F}[g(at] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-jwt} dt$$

$x = at \quad t = \frac{x}{a} \quad dt = \frac{dx}{a}$ koyarak $t > 0$ icin

$$\mathcal{F}[g(at] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jwx/a}\frac{dx}{a}$$

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jx(w/a)}dx = \frac{1}{a}G\left(\frac{w}{a}\right)$$

elde edilir. $t < 0$ icin

$$\mathcal{F}[g(at] = \int_{\infty}^{-\infty} g(x)e^{-jwx/a}\frac{dx}{a}$$

$$-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jx(w/a)}dx = -\frac{1}{a}G\left(\frac{w}{a}\right)$$

elde edilir. Dolayisiyla teorem isbatlanmis olur.

Ornek Problem $\mathcal{F}[g(-t)] = G(-w)$ oldugunu gosterin.
(ref: s65) de $a = -1$ konarak problem cozulur.

## Zaman ekseninde Kaydirma

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad ise \quad \mathcal{F}[g(t-a)] = G(w)e^{-jwa}$$ s66

Isbat:

$$\mathcal{F}[g(t-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-a)e^{-jwt}dt$$

$x = t - a \quad dt = dx$ koyarak

$$\mathcal{F}[g(t-a] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jw(x+a)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jwx}e^{-jwa}dx$$

$$= e^{-jwa}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jwx}dx = e^{-jwa}G(w)$$

bulunur.

Ornek Problem $g(t) = [e^{-a|t-t_0|}]$ isaretinin Furier Donusumunu hesaplayin.

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

oldugu (C.P.ref: s443) den biliniyordu. O halde kaydirma teoremi geregi

$$\mathcal{F}[e^{-a|t-t_0|}] = \frac{2a}{a^2 + w^2}e^{-jwt_0}$$

olacaktir.

## Frekans Ekseninde kaydirma

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad ise \quad \mathcal{F}[g(t)e^{jat}] = G(w-a)$$ s341

Isbat:

$$\mathcal{F}[g(t)e^{jat}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{jat}e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(w-a)t}dt = G(w-a)$$

Ornek Problem $[g(t)\cos(at)]$ nin Furier donusumunu hesaplayin.

$$\cos(at) = \frac{1}{2}(e^{jat} - e^{-jat})$$

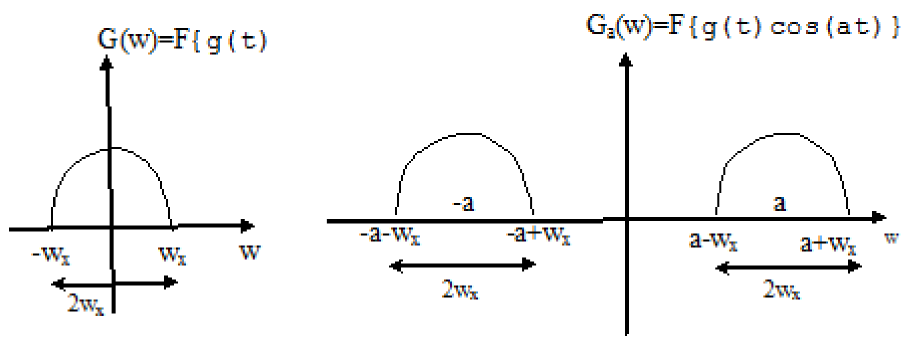
yazilabilir. Frekans domeninde kaydirma teoremine gore

$$\mathcal{F}[g(t)e^{jat}] = G(w+a) \qquad \mathcal{F}[g(t)e^{-jat}] = G(w-a)$$

yazilarak.

$$\mathcal{F}[g(t)\cos(at)] = \frac{1}{2}[G(w-a) + G(w+a)] \qquad \text{s211}$$

elde edilir. Sekil(ref: x2.24) de $g(t)$ ve $g(t)\cos(at)$ isaretine iliskin spektrumlar goruluyor.




Sekil(x2.24) g(t) ve g(t)cos(at) nin fur donusumleri

Odev Problem: g(t)=10 cos(2t)+5 cos(5t)+8 cos(7t), m(t)=cos(60t), h(t)=g(t) m(t) isaretleri veriliyor. g(t) ve h(t) nin tek tarafli ve cift tarafli spektrumlarini cizin. yukaridaki teoremin sonuclari ile karsilastirin.

Not: cos(A)cos(B)=0.5[ cos(A+B) + cos(A-B)] bagintisini kullanin.

Konvolusyon

Tanim :

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z)f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-x)f_2(z)dx$$

bagintisi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarinin konvolusyonu olarak adlandirilir. Konvolusyon bagintisi birim impuls cevabi bilinen sistemlerin cevaplarini bulmada kullanilir. Ornek olarak birim impuls cevabi $h(t)$ olarak verilen bir sistemin girisine $f(t)$ isareti uygulansa sistem cikisi $y(t) = h(t) * f(t)$ seklinde hesaplanabilir. Ayrica $H(w)$ sistemin transfer fonksiyonu olmmak uzere $\mathcal{F}[h(t)] = H(w)$ dir. Dolayisiyla konvolusyon integrali bir sistemin herhangibir girise karsi sistemin cikisini hesaplamak icin kullanilir.

$$\mathcal{F}[g_1(t)] = G_1(w) \qquad \mathcal{F}[g_2(t)] = G_2(w)$$

olmak uzere

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= G_1(w)G_2(w) \\ \mathcal{F}[g_1(t)\, g_2(t)] &= \frac{1}{2\pi} G_1(w) * G_2(w) \end{aligned}$$

Isbat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(t-x) dx \right] e^{-jwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x) g_2(t-x) e^{-jwt}] dx\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-x) e^{-jwt} dt \right) dx \end{aligned}$$

icerideki integralde zaman domeninde kaydirma teoremi uygulanirsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-x) e^{-jwt} dt = G_2(w) e^{-jwx}$$

elde edilir. Dolayisiyla

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) G_2(w) e^{-jwx} = G_2(w) \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) e^{-jwx} \\ &= G_2(w) G_1(w) \end{aligned}$$

elde edilir.

Konvolusyon integralini normal integral alarak analitik yontemlerle hesaplamak cok zor, cogu kere imkansizdir. Bu teorem konvolusyon integrali hesaplanmadan konvolusyon sonucunu elde etmeye yarar. Yani $g_1(t)$ ve $g_(t)$ fonksiyonlarinin konvolusyonunu hesaplamak icin $g_1(t)$ ve $g_(t)$ fonksiyonlarinin Furier donusumlerini carpip ters Furier donusumlerini bulmak yeterlidir.

Ornek Problem

$g_1(t) = e^{-at} u(t), \quad g_2(t) = u(t)$ olduguna gore $g_3(t) = g_1(t) * g_2(t)$ konvolusyonunu hesaplayin.

Bu durumda

$$g_1(x) = e^{-ax} u(x), \quad g_2(x) = u(x) \qquad g_2(t-x) = u(t-x)$$

olacak ve $g_3(t)$ fonksiyonu

$$g_3(t) = g_1(t) * g_2(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-ax} u(x) u(t-x) dx$$

seklinde yazilacaktir. Ote yandan

$$x < 0 \;\; icin \;\; u(x) = 0$$

ve

$$x > t \;\; icin \;\; u(t-x) = 0$$

oldugundan $u(x)\ u(t-x)$ carpimi

$$u(x)\ u(t-x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < t \\ 0 & x > t \ \ ve \ \ x < 0 \end{cases}$$

olacaktir. Dolayisiyla

$$g_3(t) = g_1(t) * g_2(t) = \int_{\infty}^{0} e^{-ax}\, 0\, dx \int_{0}^{t} e^{-ax} dx + \int_{t}^{\infty} e^{-ax}\, 0\, dx$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-ax} dx = 1 - e^{-at} \qquad t > 0$$

$$t < 0 \quad icin \quad e^{-ax} u(x) u(t-x) = 0$$

oldugundan bulunan

$$g_3(t) = 1 - e^{-at}$$

degeri sadece $t > 0$ icin gecerlidir. $t < 0$ icin $g_3(t) = 0$ dir.
Sekil(ref: x2.29) ?????da bu durum gosterilmistir.

Sekil(x2.29)????

## Zaman domeninde turev

$$\mathcal{F}[g(t)] \ = G(w) \quad ve \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad ise$$

$$\mathcal{F}[\frac{dg(t)}{dt}] = jwG(w) \qquad \#$$

Isbat:

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-jwt} dt$$

kismi integrasyon ile ikinci tarafin integrali alinirsa.

$$u = g(t) \quad dv = e^{-jwt} dt \ \longrightarrow \ du = \frac{dg(t)}{dt} dt \qquad v = \frac{1}{-jw} e^{-jwt}$$

$$G(w) = \frac{1}{-jw} e^{-jwt} g(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{-jw} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} e^{-jwt} dt$$

$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ oldugundan ilk terim sifirdir ve

$$jwG(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} e^{-jwt} dt = \mathcal{F}\left[ \frac{dg(t)}{dt} \right]$$

elde edilir.

## Frekans Domeninde turev

$$\mathcal{F}[g(t)] \ == G(w) \quad ve \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad ise$$

$$\mathcal{F}[-jtg(t)] = \frac{dG(w)}{dw}$$

Isbati zaman domeninde turevde oldugu gibi yapilabilir.

## Zaman domeninde integral

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} g(x)dx\right] = \frac{1}{jw}G(w) + \pi G(0)\delta(w)$$

Isbat:konvolusyon tanimina gore:

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)u(t-x)dx$$

ote yandan

$$u(t-x) = \begin{cases} 1 & x \le t \\ 0 & x > t \end{cases}$$

oldugundan

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx$$

konvolusyon teoremine gore

$$\mathcal{F}[g(t) * u(t)] = G(w)U(w) = G(w)\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right]$$

veya

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} g(x)dx\right] = G(w)\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right]$$

$$= \frac{G(w)}{jw} + \pi G(w)\delta(w) = \frac{G(w)}{jw} + \pi G(0)\delta(w)$$

not: $\delta(w)$ $t = 0$ haric heryerde sifir oldugundan $G(w)\delta(w) = G(0)\delta(x)$ olacaktir. (Bkz. Ek-ref: appx51) Boylece teorem isbatlanmis olur.

$\mathcal{F}[\delta(w)] = 1$ olduguna gore $\mathcal{F}[u(t)]$ yi hesaplayin.

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(x)dx = u(t) \ \ ve \quad \mathcal{F}[\delta(t)] = \Delta(w) = 1$$

oldugundan

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{\Delta(w)}{jw} + \pi\Delta(0)\delta(w) = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$$

olarak bulunur.

## Parseval Teoremi

Parseval teoremi $g(t)$ isaretinin tasidigi gucu bulmada faydali olur. $g(t)$ real ise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 dw$$

esitligi vardir.

Isbat Konvolusyon teoreminden

$$\mathcal{F}[g_1(t)g_2(t)] = \frac{1}{2\pi}G_1(w) * G_2(w)$$

yazilabilir. Esitligin her iki tarafini acik yazalim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)e^{-jwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(u)G_2(w-u)du$$

Esitligin her iki yaninda $w = 0$ kayalim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(u)G_2(-u)du$$

Sag taraftaki integral degiskeni olarak $u$ yeerine $w$ kullanabiliriz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(w)G_2(w)dw$$

$G_1(w) * G_2(w) = G_2(w) * G_1(w)$ oldugundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(w)G_2(-w)dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(-w)G_2(w)dw$$

elde edilir. $g_1(t) = g_2(t) = g(t)$ olsa.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(w)G(-w)dw$$

Eger $g(t)$ reel ise (pratikte boyledir.) $G(-w) = G^*(w)$ olacak bunun sonucuda $G(-w)G^*(w) = |G(w)|^2$ olacaktir. Dolayisiyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(w)|^2dw$$

elde edilir.

$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$ integrali $g(t)$ isaretinin tasidigi enerji miktarini verir. Ancak integrali hesaplamak cogu kere pratik degildir. Yukaridaki teorem vasitasiyla isaretin Furier donusumu yardimiyla isaretin tasidigi enerji hesaplanabilir. pratikte $G(w)$ sinirli oldugundan $\int_{-\infty}^{\infty}|G(w)|^2dw$ integralini hesaplamak $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$ integralini hesaplmaktan daha kolaydir.

**Autocorrelasyon fonksiyonu**

*********************************************************

Neden sinuzoidal Muhendislikteki mekanik hareketlerin hemen tamamina duzgun sinuzoidal hareketler hakimdir (sabit hizda donen bir motor gibi). Tam duzgun sinuzoidal olmayan hareketler isesinuzoidal hareketlerin birlesimi imis gibi dusunulerek analiz edilir. Diferansiyel denklemlerin cozumunde sinuzoidal bilesenlerin bulunmasi bu yuzdendir.

Bir mikrofondaki zarin hareketini ele alalim.Sekilde goruldugu gibi zar bir uca varirken hizi yavaslar, varma noktasinda hiz sifir olur, donuste zarin hizi yavas yavas artar, obur uca yaklastiginda tekrar yavaslar. Esasen zar hizli olarak kiyilara carparak hareket yapsa mikrofondan bozuk ugultular gelir. (Agiza cok yakin tutulan mikrofonlardaki durum gibi). insan sesinin girtlakta olusmasindada ses telleri cok hassas ayarli bir mikrofon zarindan daha nazik hareketler yapar, kiyilara vurarak hareket yapmis olsa insan sesi anlasilmaz olur.

Dunya yuvarlak. Yuvarlak harekette bir ahenk var. Dunmyanin koseli oldugunu dusunun. Veya dunyanin yorungesi kare seklinde olsa.?? Dolayisiyla Kainatta ekseriya dairesel harekler vardir.

Yukaridaki anlatildigi gibi dinamik hareketlerin incelenmesi isareti sinuzoidal bilesenlere ayrilmis oldugu dusunulerek yapilir. (Dinamik bir olcu aletinin katalogu aletin degisik frekanslardaki davranisini gosteren tablolar icerir).

Sinusun Tarihcesi: Sinusle ilgili islem yapan Furierin adi varda sinusu bulan endulus emevilerinin adi yok

*************************************************

Problemin tam cozumu icin sistem dinamigi ve sistem kestirimi konularina vakif olmak gerekir. Biz basitlik icin sistemin tamamen lineer oldugu, olcmenin hassas oldugu, gurultuden arindirilmis oldugunu ve $F_1 = F_2 \quad F_3 = 0$ oldugunu varsayalim.

Once $g(t)$ isaretinin spektrumunu hesaplamamiz lazim. Su ana kadarki bilgilerimizle $g(t)$'nin spektrumunu hesaplayamayiz. Fakat simdilik spektrum bulma isleminin (ref: xAq1) de verilen $d_p$ ve $\theta_p$ katsayilarinin hesabi oldugunu varsayin. $g(t)$nin genlik spektrumu sekil(ref: xs71) deki gibi cikmistir.

f?igure “xs71 $g(t) = F_1 e^{-q_1 t}\cos(w_1 t) + F_2 e^{-q_2 t}\cos(w_2 t)$

Bu spektrumu ileride verilecek olan $e^{-at}\cos(wt)$ nin spektrumu ile karsilastirdigimizda hemen $w_1 = ??? \quad w_2 = ????$ oldugunu kolayca goruruz. Ote yandan $\alpha_1 > \alpha_2$ ise $e^{-\alpha_1}\cos(w_1 t)$ fonksiyonu $e^{-\alpha_2}\cos(w_2 t)$ fonksiyonuna gore daha cabuk sonumlenir. $w_1$ frekansindaki tepe, $w_2$ frekansindaki tepeden daha kucuk oldugundan $a_1 > a_2$ oldugunu da soyleyebiliriz.

$a_1$ ve $a_2$nin kesin degerlerinin hesabi oldukca zordur. Ayrica ve $F_1 \neq F_2$ olmama durumunda hesaplarin daha da zorlasacagi aciktir. Dikkati dagitmamak icin biz bu konuyu burada noktaliyoruz. Ilgilenen okuyucularin system dinamigi ve system kestirimi gibi kitaplara muracaat etmelerini tavsiye ederiz.

C.P.2.1 Sekil(ref: xs127)deki ucgen darbenin Furier Donusumunu bulun.

$$g(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{q} & |t| < q \\ 0 & |t| > q \end{cases}$$

Sekil(xs127) Ucgen darbe Fonksiyonu

Cozum:

Bir onceki problemde oldugu gibi integrali $-q < t < q$ araliginda hesaplamak yeterlidir.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jwt}dt = \int_{-q}^{0}\left(1 + \frac{t}{q}\right)e^{-jwt}dt + \int_{0}^{q}\left(1 - \frac{t}{q}\right)e^{-jwt}dt$$

$$= q sinc^2\left(\frac{wq}{2\pi}\right)$$

Integral alinirken islemler gosterilmemistir. (ek-??) deki integral tablosundan yararlanilmistir.

C.P.2.2 Impuls fonksiyonunun Furier Donusumunu bulun.

Impuls fonksiyonu tanimi geregi (Ek-ref: appx51) de verilen ozellikleri saglar. (ref: s223) bagintisi kullanilarak istenen Furier donusummunu bulabiliriz

$$\mathcal{F}[\delta t] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-jwt}dt = e^{-jw0} = 1 \qquad \text{xqg301}$$

C.P.2.3 $g(t) = A$ seklinde verilen sabit sayinin Furier Donusumunu Bulun.

(C.P.ref: s22)'den

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

oldugu hesaplanmisti. Ters Furier donusumu tanimmindan

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{-jwt}dt$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{jwt}dw$$

yazilabilecegi aciktir. Son integralde $w = -p$ donusumu yaparak.

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-jpt}dp \qquad \text{s125}$$

yazilabilir. Simdi 1 sayisinin Furier donusumunu alalim.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-jwt}dt \qquad \text{sx125}$$

(ref: s125) de $t$ yerine $w$, ve $p$ yerine $t$ harfleri kullanilarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-jwt}dt = \delta(w) \qquad \text{s126}$$

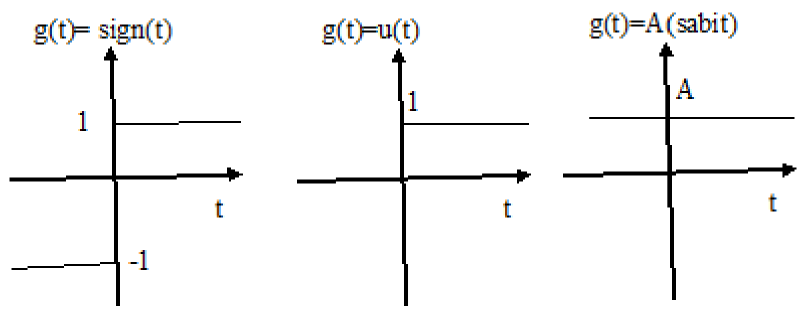
yazilir ve (ref: s125) den yararlanarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-jwt}dt = 2\pi\delta(w) \qquad \text{s127}$$

bulunur. yazilabilir. Dolayisiyla Sabit sayinin Furier donusumu impuls fonksiyonunun $2\pi$ ile carpilmisidir.

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(w)$$

C.P.2.5




Sekil(xsx81) Degisik fonksiyonlar

$$g(t) = sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

seklinde tanimlanan isaret fonksiyonunun Furier donusumunu bulun.

Verilen isaret fonksiyonu

$$sgn(t) = \lim_{a\to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

seklinde yazilabilir. Esitligin her iki tarafinin Furier donusumu alinirsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[sgn(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\lim_{a\to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]\right\}e^{-jwt}dt \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-jwt}dt - \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-jwt}dt \\
&= \lim_{a\to 0}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-jwt}dt - \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-jwt}dt\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{a+jw} - \frac{1}{a-jw}\right] = \frac{2}{jw}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

C.P.2.6 $g(t) = u(t)$ birim basamak fonksiyonunun Furier donusumunu bulun.
Cozum: $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t))$ oldugundan her iki tarafin Furier donusumu alinarak

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}sgn(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}2\pi\delta(w) + \frac{1}{2}\frac{2}{jw} = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$ s232

elde edilir.

C.P.2.7 $g(t) = \frac{j}{\pi t}$ nin Furier donusumunu hesaplayin.
Cozum: $\mathcal{F}[sgn(t)] = \frac{2}{jw}$ oldugu (ref: s136)de gosterilmisti. O halde simetri ozelligi geregi.

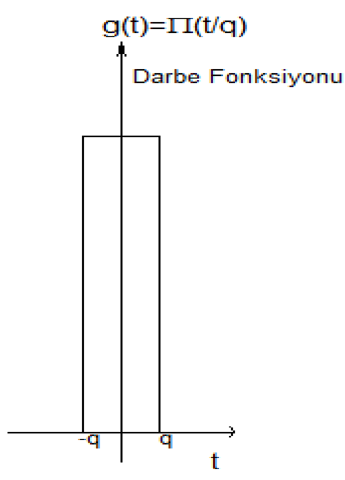
$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{jt}\right] = 2\pi sgn(-w) = -2\pi sgn(w)$$

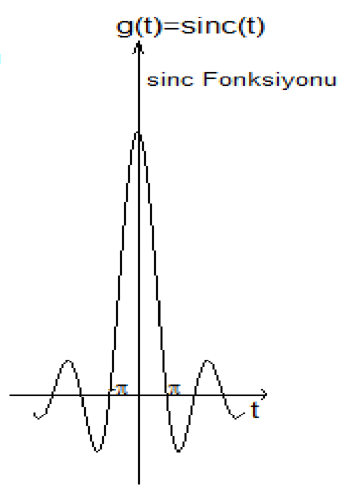
veya

$$\mathcal{F}\left[\frac{j}{\pi t}\right] = 2\pi sgn(-w) = sgn(w)$$

elde edilir.

C.P.2.8 $g(t) = sinc(at)$ nin Furier donusumunu elde edin.




Cozum .(ref: xpo34) den goruldugu gibi

$$\prod\left(\frac{t}{q}\right) \leftrightarrow 2q sinc\left(\frac{wq}{\pi}\right)$$

simetri prensibine gore

$$2q\,sinc\left(\frac{qt}{\pi}\right) \leftrightarrow 2\pi \prod\left(\frac{-w}{q}\right)$$

ote yandan $\prod(\frac{-w}{q}) = \prod(\frac{w}{q})$ oldugu dikkate alindiginda

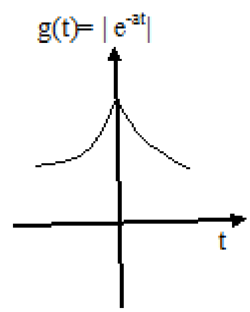
$$sinc\left(\frac{qt}{\pi}\right) \leftrightarrow \frac{\pi}{q} \prod\left(\frac{w}{q}\right)$$

veya

$$sinc(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \prod\left(\frac{w}{a\pi}\right)$$

elde edilir.

C.P.2.9 $g(t) = [e^{-a|t|}]$ isaretinin Furier Donusumunu hesaplayin.




$|e^{-a|t|}| = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$dir. ote yandan

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+jw}$$

oldugundan olcekleme bagintisi geregi

$$\mathcal{F}[e^{at}u(-t)] = \frac{1}{a-jw}$$

olacaktir. Dolayisiyla

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{1}{a+jw} + \frac{1}{a-jw} = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

C.P.2.10 $g_1(t)$ isaretin Furier donusumu $G_1(w)$ dir. $g_2(t) = 2g_1\left(-\frac{t}{1.5}\right)$ isaretin Furier donusumunu $G_1(w)$ cinsinden bulun.

. $\mathcal{F}[g_1(t)] = G_1(w)$ oldugundan olcekleme teoremine gore

$$\mathcal{F}\left[2g_1\left(-\frac{t}{1.5}\right)\right] = 2\frac{1}{\frac{1}{1.5}}G_1\left(\frac{w}{-\frac{1}{\frac{1}{1.5}}}\right) = 3G_1(-1.5w)$$

$$G_2(w) = 3G_1(-1.5w)$$

C.P.2.11 $g(t) = e^{jat}$ ise $G(w)$ yi hesaplayin.

Cozum: ref: s76) dan $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(w)$ oldugu bulunmustu. Frekans domeninde kaydirma teoremmini uygulayarak.

$$\mathcal{F}[1e^{jat}] = 2\pi\delta(w-a)$$

C.P.2.12 $[g(t)\cos(at+\phi)]$ nin Furier donusumunu hesaplayin.

Cozum: $\cos(at+\phi)$ terimi ustel formda yazilip frekans domeninde kaydirma teoremi uygulanirsa.

$$\mathcal{F}[g(t)\cos(at+\phi)] = \frac{1}{2}[G(w-a)e^{j\phi} + G(w+a)e^{-j\phi}] \qquad \text{s165}$$

elde edilir.

C.P.2.12 $[g(t)\sin(at)]$'nin Furier donusumunu hesaplayin.

Cozum: (ref: s55) de $\phi = -\pi/2$ konarak

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t)\cos(at-\pi/2)] &= \mathcal{F}[g(t)\sin(at)]\\ &= \tfrac{1}{2}[G(w-a)e^{-j\pi/2} + G(w+a)e^{j\pi/2}]\\ &= \tfrac{j}{2}[G(w+a) - G(w-a)]\end{aligned}$$

C.P.2.13 $g(t) = \cos(at+\phi)$ ise $G(w)$ yi hesaplayin.

Cozum: de $g(t) = 1$ koyup. $1$ rin Furier donusumunun $2\pi\delta(w)$ oldugu dusunulurse.

$$\mathcal{F}[\cos(at+\phi)] = \pi[\delta(w+a)e^{-j\phi} + \delta(w-a)e^{j\phi}] \qquad \text{xqfq357}$$

elde edilir.

C.P.2.14 $g(t) = \cos(at)u(t)$ ise $G(w)$ yi hesaplayin.

Cozum $u(t)$ nin Furier donusumu (ref: s232) den

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

idi. (ref: s221) de $g(t) = u(t)$ konulursa.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)\cos(at)] &= \frac{1}{2}[\pi\delta(w-a) + \frac{1}{j(w-a)} + \pi\delta(w+a) + \frac{1}{j(w+a)}]\\ &= \frac{\pi}{2}[\delta(w-a) + \delta(w+a)] + \frac{jw}{a^2-w^2}\end{aligned}$$

sekil(ref: xs2.26) da $g(t) = \cos(at), \quad g(t) = \cos(at)u(t)$ isaretlerinin spektrumlari goruluyor.

Sekil(xs2.26)??? $g(t) = \cos(at), \quad g(t) = \cos(at)u(t)$ isaretlerinin furier spektrumlari.

C.P.2.15 $g(t) = \sin(at)u(t)$ ise $G(w)$ yi hesaplayin

Cozum: (ref: s155) de $g(t) = u(t)$ yazilip yukaridaki islemlere benzer islemler yapilirsa.

$$\mathcal{F}[g(t)\sin(at)] \;=\; \frac{\pi}{2j}[\delta(w-a)-\delta(w+a)]+\frac{a}{a^2-w^2}$$

bulunur. sekil(ref: xs2.262) da $g(t) = \sin(at)$ $\quad g(t) = \sin(at)u(t)$ isaretlerinin spektrumlari goruluyor.

Sekil(xs2.262) $g(t) = \sin(at)$ $\quad g(t) = \sin(at)u(t)$ isaretlerinin furier spektrumlari.

C.P.2.16 $g(t)$ periyodik bir isaret olduguna gore $g(t)$ nin Furier donusumunu bulun.

Cozum (ref: r12) den goruldugu gibi $T_0$ peryotlu bir isaret kompleks furier serisi formunda

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_0t} \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

seklinde yazilabilir. Dolayisiyla

$$\mathcal{F}[g(t)] \;=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_0t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[c_n e^{jnw_0t}]$$

(ref: s341) den

$$\mathcal{F}[c_n e^{jnw_0t}] = c_n 2\pi\delta(w-w_0)$$

oldugundan.

$$\mathcal{F}[g(t)] \;= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(w-w_0)$$

olarak bulunur.

C.P.2.16 sekil(ref: cx2) de gosterilen impuls dizisinin Furier donusumunu bulun.

Cozum (ref: s63) den impuls dizisi

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jnw_0t}$$

seklinde yazilabilir. (ref: s341) den

$$\mathcal{F}[g(t)] \;= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jnw_0t}\right] = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[e^{jnw_0t}]$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w-nw_0) = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w-nw_0)$$

olrak bulunur.

Odev Proplemler

O.P 21 ref: j332 ve ref: j333 bagintilarini ispatlayin.

O.P 22 $g(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ nin Furier donusumunu Bulun.

*Yol gosterme:* Problem (ref: s443)'e simetri ozelligini uygulayin.

*Cevap:* $G(w) = \frac{\pi}{a} e^{-} a|w|$

O.P 23

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| < q \\ 0 & |t| > q \end{cases}$$

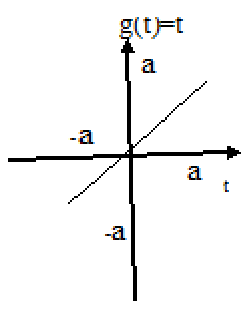
olmak uzere $g(t) = p(t)\cos(w_0 t)$ fonksiyonunun Furier donusumunu bulun.

*Yol gosterme:* $p(t)$'darbe fonksiyonudur. problem s55 den yaralaniniz.

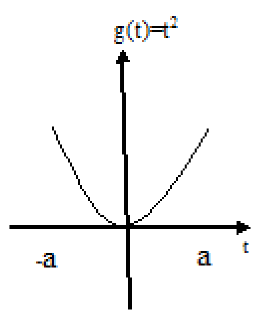
*Cozum:* $G(w) = \frac{\sin q(w-w_0)}{w-w_0} + \frac{\sin q(w+w_0)}{w+w_0}$

O.P 24 $p(t)$ problem O.P.23 de tanimlandigi gibi olmasi durumunda $g(t) = p(t)\sin(w_0 t)$ ve $g(t) = p(t)\sin(w_0 t + \phi)$ fonksiyonlarinin Furier donusumlerini bulun.

O.P 25 (ref: xqx766) bagintisindan faydalanarak sekil(ref: xqs387) deki isaretin Furier donusumunu bulun.




Sekil(xqs387) g(t)=t isareti




Sekil(xqs388) $g(t) = t^2$ isareti

O.P 26 (ref: xqx766) bagintisindan faydalanarak sekil(ref: xqs388) deki isaretin Furier donusumunu bulun.

O.P 27 $g(t) = \sum_{p=0}^{p=k-1} \delta(t - nT_0)$ seklinde tanimmlanan birim impuls treninin Furier donusumunu bulun.

*Cevap:* $G(w) = e^{-j(k-1)wT_0/2} \frac{\sin(kwT_0/2)}{\sin(wT_0/2)}$

O.P 28 $\mathcal{F}[\frac{1}{t}] = -\pi j\, sgn(w) = \pi j - 2\pi ju(w)$ oldugunu gosterin.

O.P 29 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 3\delta(t)$ diferansiyel denkleminin ozel cozumunu Furier donusumu yardimiyla bulun.

*Yol gosterme:*Her iki tarafin Furier donusumunu alin, $X(w)$ yi cekin, $x(t) = \mathcal{F}^{-\infty}[X(w)]$ yi elde edin.

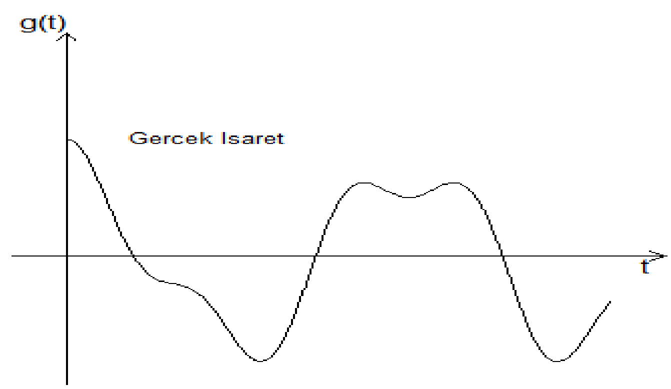
*Cevap*: $x_o(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

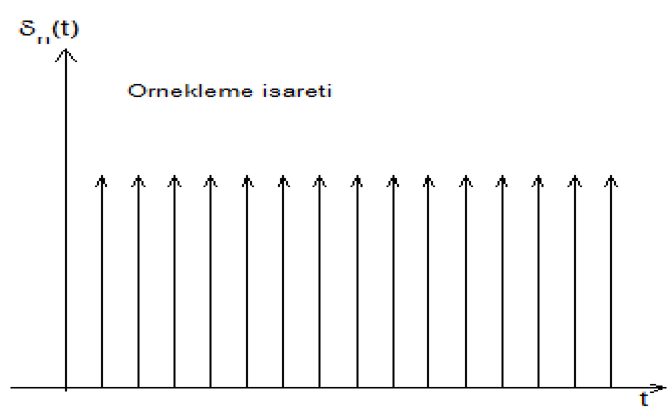
## Ayrik Isaretlerin Furier Donusumu

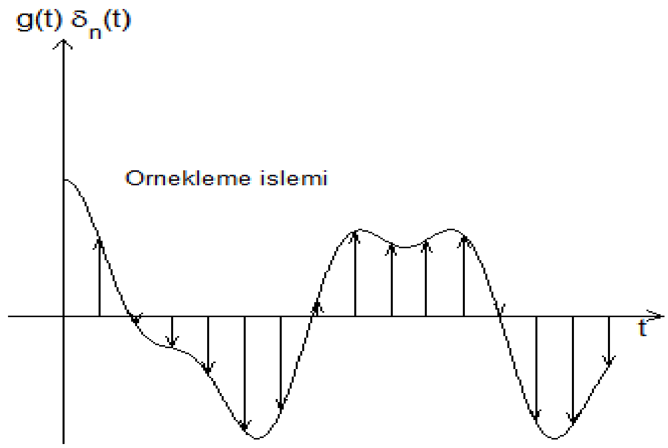
Isaretlerin bilgisayarda analizi icin isaretin bilgisayara nasil aktarilacagi bolum(ref: xq1bp11) de aciklanmisti. Bu bolumde isarette bilgi kaybi olmamasi icin iki ornekleme arasinda gecen zamanin minimum degeri bulunacaktir. Sonraki kisimlarda ise ayik hale gelmis (bilgisayara aktarilmis) isaretin Furier Donusumu incelenecektir. Son kisimda Ayrik Furier donusumunun hizlandirilmis sekli olan Hizli Furier donsumu aciklanacaktir.

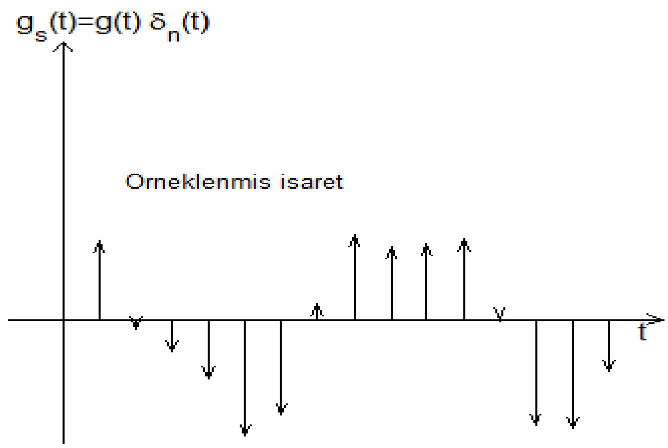
## Ornekleme Teoremi

Seki(ref: xqs331.a) daki $g(t)$ isaretini orneklemek (belirli anlardaki degerini bilgisayara aktarmak) icin sekil(ref: xqs331.b) deki gibi bir $\delta_h(t)$ impuls darbe dizisi tanimlanir. $g_n(t) = \delta_h(t)g(t)$ bilgisayara aktarilan isaret olacaktir.






Sekil(xqs33 a) analog $g(t)$ isareti. b) $\delta_h(t)$ : $g(t)$yi orneklemek icin impuls darbe katari. d) $g_s(t)$ : bilgisayara aktarilan isaret.

$$g_s(t) = \delta_h(t)g(t) \qquad \text{q12}$$

$\delta_h(t)$ impuls darbe dizisinin komplex Furier serisi katsayilari ref: p385'den

$$C_n = \frac{1}{T_s}$$

seklinde idi. $\delta_h(t)$ isaretini komplex furier serisi cinsinden yazarsak

$$\delta_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jnw_st} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{T_s} e^{jnw_st} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jnw_st} \qquad \text{xq144}$$

ref: xq144'de bulunan $\delta_h(t)$ degerini (ref: q12) de yerine koyalim.

$$g_s(t) = g(t)\delta_h(t) = g(t)\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jnw_st}\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t)e^{jnw_st} \qquad \text{q21}$$

Buldugumuz bu $g_s(t)$ isaretinin Furier donusumunu alalim.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g_s(t)\} &= \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t)e^{jnw_st} \right\} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathcal{F}\{g(t)e^{jnw_st}\} \end{aligned} \quad \text{q23}$$

Furier donusumunun toplam isaretinin icine girebilmesi Furier donusumunun lineerlik ozelliginden dolayidir. Toplamin Furier donusumu, her terimin ayri ayri Furier donusumunun toplamina esittir.

Ote yandan ref: s341 ile verilen Furier donusumunun frekans ekseninde kayma teoreminden

$$\mathcal{F}\{g(t)e^{jnw_st}\} = G(w - nw_s) \quad \text{xq351}$$

Yazilabilir. ref: xq351de bulunan deger ref: q23 de yerine konursa $g_s(t)$ in furier donusumu elde edilir.

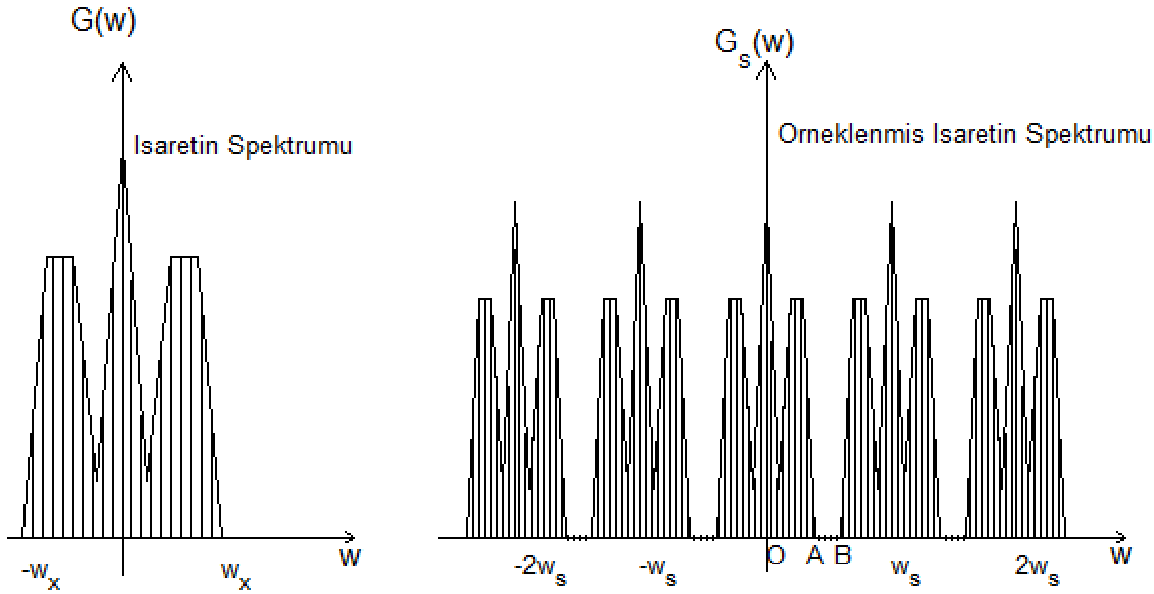
$$\mathcal{F}\{g_s(t)\} = G_s(w) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} G(w - nw_s) \quad \text{q25}$$

(ref: q25) de ki toplam terimini acik yazalim.

$$\begin{aligned} G_s(w) &= \frac{1}{T_s}[G(w) + G(w - w_s) + G(w + w_s) + G(w - 2w_s) \\ &+G(w + 2w_s) + G(w - 3w_s) + G(w + 3w_s) + \ldots.. \\ &..+G(w - kw_s) + G(w + kw_s) \ldots\ldots] \end{aligned} \quad \text{q30}$$

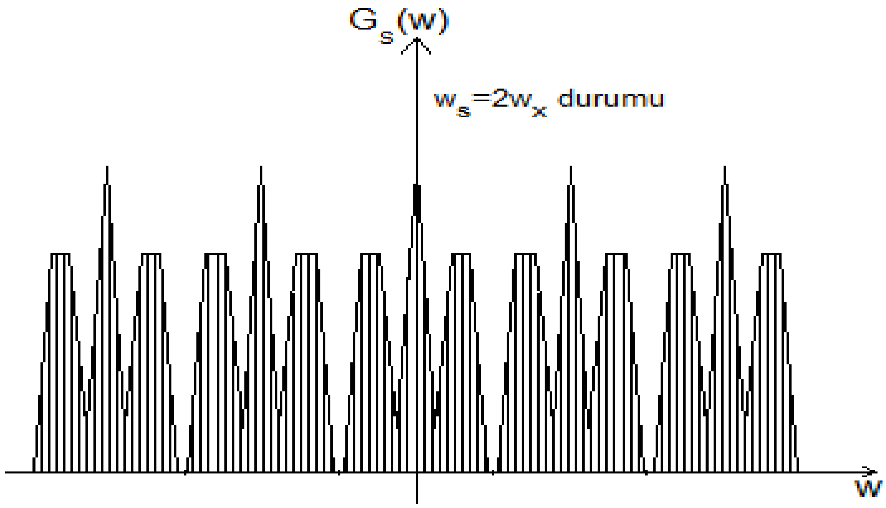
Goruldugu gibi $G_s(w)$ $G(w)$ yi ihtiva etmekte ilave olarak sagda ve sol tarafta $G(w)$ nin $w_s, 2w_s, 3w_s \ldots.$ kadar kaymis hallerini de icermektedir.

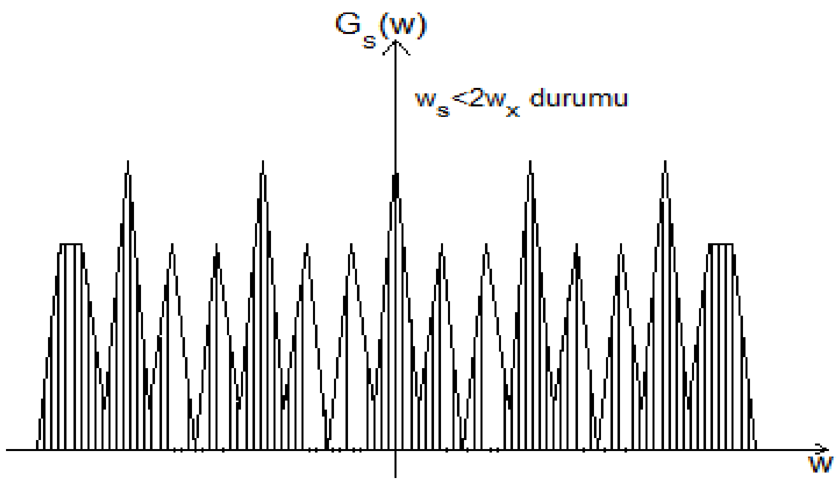
Ozetle $g(t)$ isaretini ornekledik (darbe dizisi ile carptik) $g_s(t)$ elde ettik. $g_s(t)$ $g(t)$ deki bilgileri aynen muhafaza ediyorsa isaret bozulmamis demektir. Isaretin bozulup bozulmadigini isaretin spektrumuna bakarak da anlayabiliriz. Isaretin bozulmamasi demek $G_s(w)$ dan $G(w)$ nin elde edilmesi demektir. Cunku $G(w)$ nin ters Furier donusumu alinarak $g(t)$ bulunabilir.




Sekil(xq384 a) $g(t)$ isaretinin spektrumu $G(w)$ b) $g_s(t)$ isaretinin spektrumu $G_s(w)$

Sekil(ref: xq384.b)da acikca goruldugu gibi eger A ve B noktalari arasinda mesafe varsa $G_s(w)$ dan $G(w)$ elde edilebilir. Bir alcak geciren filtre kullanarak bu is yapilir. Ancak O-A mesafesi O-B den buyuk ise spektrumlar birbirine girer ve $G_s(w)$ $G(w)$ yi artik icinde bulundurmaz. Isaretin ornekleme dolayisiyla bozulmamasi icin gerek sart OA mesafesinin OB den kucuk olmasidir. A noktasinin anlami $g(t)$ isaretinin icinde bulunan en yuksek frekansdir. $x = OA$ mesafesine $g(t)$ nin **bant genisligi** denir. Sekil(ref: xq385.a) ve (ref: xq385.b) de $w_s = 2x, \quad w_s < 2x$ halleri icin $G_s(w)$'ya iliskin spektrum cizilmistir.




Sekil(xq385) $g_s(t)$ isaretinin spektrumu $G_s(w)$ a) $w = 2x$ hali b) $w_s < 2x$
Buradan acikca goruldugu gibi $w_s > 2x$ hali icin $G_s(w)$'dan herhangibir filtre kullanarak $G(w)$'yi elde etmek mumkun degildir. $w_s < 2x$ olma durumuna Yani ornekleme frekansinin isaretin icinde bulundurdugu en yuksek frekans bileseninin iki katindan daha az oldugu duruma **frekans domeninde ortusme** denir. $2x$ degerine **Nyquist frekansi** denir.

Ozetle isaretin ornekleme dolayisi ile bozulmamasi (ortusme olmamasi) icin

$$w_s > 2x \quad \text{q33}$$

olmali. $w_s$ ornekleme frekansi idi. Sozlu ifade ile
**Bir isaretin ornekleme dolayisiyla bozulmamasi icin gerek ve yeter sart ornekleme frekansinin isaretin bant genisliginin iki katindan buyuk olmasidir**

Yukaridaki ifade **Shannon ornekleme teoremi** olarak da bilinir.

Ornek Problem 3.x1 $g(t) = 5 + cos(8t+20) + \cos(20t-70) - \sin(3\pi t + 120)$ isaretinin bilgi kaybi olmadan bilgisayara aktarilabilmesi icin ornekleme araligi ne olmalidir.

Cozum: Isaretin icinde $0, 8, 20, 12.56$ frekansli bilesenler vardir. Dolayisiyla isaret icindeki en yuksek frekans bileseni $w_s = 20$'dir. Ornekleme araligi en az $T_s = \frac{2\pi}{w_s} = 0.628$ saniye olmalidir.

Ornek Problem 3.x2 (O.P.ref: xpo34) deki dikdortgen dalganin Bu isaretin bilgisayara bilgi kaybi olmadan aktarilabilmesi icin orneklame araligi ne olmalidir.

Cozum: Spektrumdan goruldugu gibi dikdortgen dalga icindeki frekans bilesenlerinin en buyugu sonsuz olmaktadir. Benzer sekilde (C.P. ref: p338, ref: s22, ref: p137)'deki pratikte karsilasacagimiz isaretlerin spektrumlari da sonsuza uzanmaktadir. Ideal durum dusunuldugunde bu cesit isaretler hicbir zaman bilgi kaybi olmadan bilgisayara aktarilamaz. Pratikte ise bu cesit isaretlerde spektrumun ust bolgesi bir alcak geciren filtre ile atilir. Elde kalan kisim bilgisayar aktarilir. Aksi takdirde yani spektrumu sonsuza uzananan bir isareti filtresiz olarak bilgisayara aktarmaya kalkarsak isarette bozulmalar olacaktir. Bu tip bozulma olayina **zaman domeninde ortusme** olayi denir.

Ornek Problem 3.x14 $g(t) = 5 + cos(3t) + \cos(5t)$ veriliyor. a)g(t) nin Furier donusumunu bulun b)$w_s = 20$ c)$w_s = 8$ alarak her iki durum icin orneklenmis isaretin spektrumunu cizin

# Ayrik Furier Donusumu

ref: xqb3x1 bolumde gordugumuz gibi bir isareti bilgi kaybi olmadan bilgisayara aktardigimizi varsayalim. Simdi soru bilgiayardaki bu datalari kullanarak bu isaretin icindeki sinuzoidal bilesenleri nasil bulabiliriz. Baska bir deyisle ayrik degerler halinde bulunan isaretin Furier donusumunu nasil alinabilir. Bu kisimda bu parca arastirilacaktir.

Sekil (ref: xqs331.b) deki impuls katarini

$$\delta_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT) \qquad \text{xs379}$$

seklinde gosterebiliriz. Bu gosterim altinda sekil(ref: xqs331.c) de gosterilen $g_s(t) = \delta_h(t)g(t)$ isaretinin Furier Donusumunu alalim.

$$G_s(w) = \int_{n=-\infty}^{n=\infty} g_s(t)e^{-jwt}dt = \int_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t)\delta(t-nT)e^{-jwt}dt \qquad \text{xq381}$$

Toplam ve integral degiskenleri birbirinden bagimsiz oldugundan ref: xq381 esitliginde toplam ve integral yer degistirebilir.

$$G_s(w) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t)\delta(t-nT)e^{-jwt}dt \qquad \text{e11}$$

ref: s224 de verilen baginti geregi

$$\int_{n=-\infty}^{n=\infty}(g(t)e^{-jwt})\delta(t-nT)dt = g(nT)e^{-jwnT} \qquad \#$$

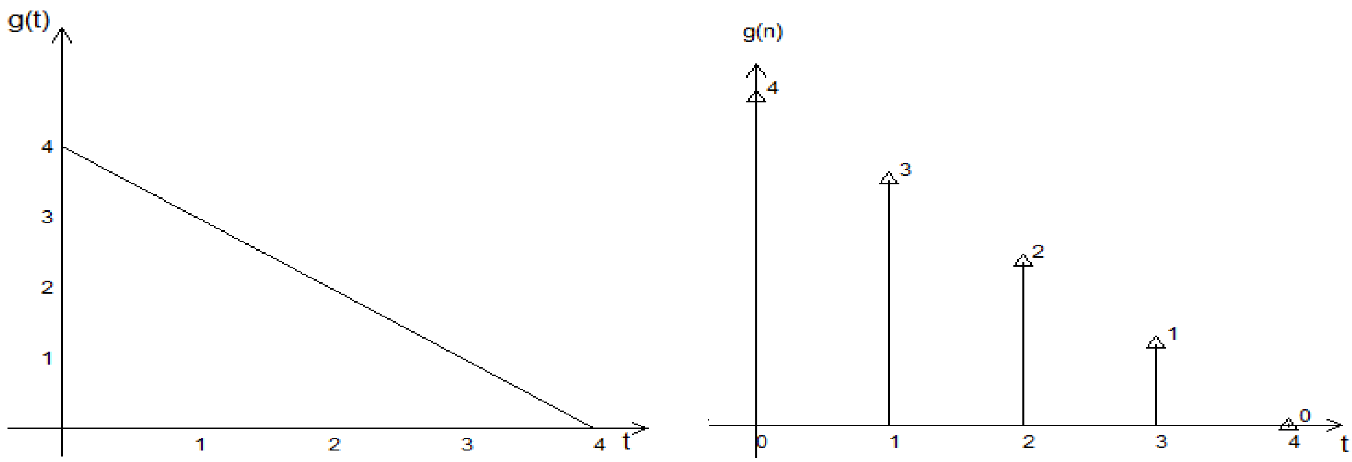
oldugu aciktir. Dolayisiyla (ref: e11) esitligi

$$G_s(w) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(nT)e^{-jwnT} = \overline{G(w)} \qquad \text{e20}$$

haline gelir. Burada $g(nT)$, $g(t)$ isaretinin $t = nT$ anindaki degeridir. $t = nT$ anlarinda $g_s(nT) = g(nT)$ olduguda aciktir. $\overline{G(w)}$ $g(t)$nin ayrik Furier donusumu $g_s(t)$ nin Furier donusumu anlaminda kullanilir. Boylece bilgisyarda Data dizisi halinde verilen bir isaretin (ref: e20) formulu ile Furier donusumunu alip icindeki sinuzoidal bilesenler hakkinda bilgi sahibi olabiliriz.

Sekil(ref: xqs381) deki isaret 1 saniye ara ile orneklenmistir. Orneklenmis isaretin ayrik Furier donusumunu bulun. $w = 1$ icin genlik ve fazini hesaplayin. c) $\overline{G(w)}$'nin genlik ve faz spektrumunu cizin.

Cozum




Sekil(xqs381) yarim ucgen darbe

Isaretin $t = 0, t = 1,\ \ t = 2, t = 3,\ \ t = 4$ anlarinda degeri vardir. diger $t$ degerleri icin sifirdir.

$$\overline{G(w)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(nT)e^{-jwnT} = \sum_{n=0}^{n=4} g(nT)e^{-jwnT}$$

$$= g(0)e^{-jwn0} + g(T)e^{-jwT} + g(2T)e^{-jw2T} + g(3T)e^{-jw3T} + g(4T)e^{-jw4T}$$

Ornekleme araligi $T = 1$ verildiginden g(0)=4, g(T)=3, g(2T)=2, g(3T)=1, $g(4T) = 0, \quad T = 1$ degerleri yukarida yerine konursa.

$$\overline{G(w)} = 4 + 3e^{-jw} + 2e^{-j2w} + e^{-j3w} \qquad \text{xqp308}$$

elde edilir. $w = 1$ icin

$$\begin{aligned} \overline{G(X)}1 &= 4 + 3(0.54 - j0.84) + 2(0.41 - 0.90) - 0.99 - 0.14 \\ &= 3.79 - j4.48 = 5.87e^{-j49.7} \end{aligned}$$

$|\overline{G(X)}1| = 5.87 \quad \angle \overline{G(X)}1 = -49.7$ elde edilir.

Degisik $w$ degerleri icin $\overline{G(w)}$'nin degeri hesaplanir ve bu degerden faydalanarak spektrum cizilir. sekil(ref: xqs377) de de isaretin genlik ve faz spektrumu goruluyor.

Sekil(xqs377) ucgen Darbenin Ayrik Furier Donusumu

$g(t)$ isareti belli bir zaman araliginda deger alacagindan (ref: e20) esitligindeki toplami $n = -\infty$, $n = \infty$ araligi yerine yukaridaki ornekte oldugu gibi $n = 0$ dan $n = N$ ye kadar hesaplamak yeterlidir. Ayrica $g(nT)$ gosterimi yerine $g(n)$ gosterimi kullanilir ve esitlik

$$\overline{G(w)} = \sum_{n=0}^{n=N} g(n)e^{-jwnT} = \qquad \text{xqf384}$$

haline gelir. Hesap kolayligi icin $T = 1$ alinir. $T = 1$ den farkli oldugu durumlarda (ref: s65) de verilen zaman ekseninde olcekleme teoreminden faydalanilarak bulunan $\overline{G(w)}$ degeri olceklenir.

# Ayrik Furier Donusumunun Ozellileri

Ayrik Furier donusumu Furier donusumunun sagladigi ozellikleri saglarlar. Ancak isaret belli bir zaman araliginda sifirdan farkli kabul edildiginden bu noktaya dikkat etmek gerektir.

1) Lineerlik $\mathcal{F}_a[g(nT)] = \overline{G(w)} \qquad \mathcal{F}_a[f(nT)] = \overline{F(w)}$ olmak uzere

$$\mathcal{F}_a[g(nT) + f(nT)] = \overline{G(w)} + \overline{F(w)}$$

dir.

2) Frekans ekseninde kaydirma

$$\mathcal{F}_a[g(nT)e^{jkn}] = \overline{G(X)}w - k$$

3)Zaman ekseninde kaydirma

$$\mathcal{F}_a[g((n-p)T)] = \overline{G(w)}e^{-jpw}$$

4) simetri

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}_a[g(nT)] = \overline{G(X)}-w$$

5)Frekans domeninde turev

$$\mathcal{F}_a[ng(nT)] \ = j\frac{d\overline{G(w)}}{dw}$$

6)Parseval teoremi

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|g(nT)|^2 \sum_{m=-N}^{N-1}|G(mw)|^2$$

7)Ayrica normal Furier donusumunde olmayan fakat Ayrik Furier donusumunde olan periyodiklik ozelligi vardir.

$m$ tamsayi olmak uzere

$$\overline{G(w)} = \overline{G(X)}(w + mw_0) \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{xqf337}$$

7.uncu ozeeligin ispati:

$$\overline{G(X)}w + mw_0 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(nT)e^{-j(w+mw_0)nT}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(nT)e^{-jnwT}e^{-jmw_0nT} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(nT)e^{-jnwT}$$

$$= \overline{G(w)}$$

## Degisik Formda Ayrik Furier Serisi

(ref: xqf384) esitligini acik olarak yazalim.

$$\overline{G(w)} = g(0)e^{-j0wT} + g(T)e^{-jwT} + g(2T)e^{-j2wT} + g(3T)e^{-j3wT} + \ldots\ldots\ldots\ldots g(NT)e^{-jNwT} \qquad \#$$

Simdi elimizde $g(0), g(T), g(2T), \ldots\ldots\ldots g(NT)$ seklinde $N$ tane data var.
$w = \Omega_0, w = \Omega_1, w = \Omega_2, w = \Omega_3, \ldots\ldots\ldots w = \Omega_N$ degerleri icin $\overline{G(w)}$ yi hesaplayalim ve sonucu bir matris formunda yazalim.

$$\begin{bmatrix} \overline{G(X)}(\Omega_0) \\ \overline{G(X)}(\Omega_1) \\ \overline{G(X)}(\Omega_2) \\ .. \\ .. \\ \overline{G(X)}(\Omega_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0j\Omega_0 T} & e^{-j\Omega_0 T} & e^{-2j\Omega_0 T} & \ldots & \ldots & e^{-jN-1\Omega_0 T} \\ e^{-0j\Omega_1 T} & e^{-j\Omega_1 T} & e^{-2j\Omega_1 T} & \ldots & \ldots & e^{-jN-1\Omega_1 T} \\ e^{-0j\Omega_2 T} & e^{-j\Omega_2 T} & e^{-2j\Omega_2 T} & \ldots & \ldots & e^{-jN-1\Omega_2 T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-0j\Omega_{N-1} T} & e^{-j\Omega_{N-1} T} & e^{-2j\Omega_{N-1} T} & \ldots & \ldots & e^{-j\Omega_{N-1} T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(T) \\ g(2T) \\ \ldots \\ .. \\ g((N-1)T) \end{bmatrix} \qquad \text{xqf386}$$

Buradan goruldugu gibi$N$ adet $g(0), g(1), g(2)\ldots. g(N-1)$ datalarindan N tane frekansda $\overline{G(w)}$ degerini hesaplayabiliriz. Hesaplayacagimiz yeni bir $\overline{G(X)}(\Omega)$ degeri oncekilerin lineer kombinezonu olacaktir. Yani $k_0, k_2, k_3, \ldots. k_{N-1}$ sabit sayilar olmak uzere

$$\overline{G(X)}(\Omega_N) = k_0\overline{G(X)}(\Omega_0) + k_1\overline{G(X)}(\Omega_1) + k_2\overline{G(X)}(\Omega_3) + \ldots\ldots\ldots + k_{N-1}\overline{G(X)}(\Omega_{N-1}) \qquad \#$$

seklinde olacaktir. Dolayisiyla $\overline{G(w)}$ nin degerini $N$ adet noktada hesaplamak yeterlidir. Herhangibir noktadaki $\overline{G(w)}$ degeri hesaplanan N adet $\overline{G(w)}$ nin lineer kombinezonu olarak yazilabilir. $N$ adet $\overline{G(w)}$ degerini en uygun olani esit araliklarla hesaplamaktir. $\overline{G(w)}$ $w_0$ periyodu ile periyodik oldugundan bir peryot boyunca hesaplamak yeterlidir. O halde bir peryot olan $w_0$ ri esit araliklara bolup $w_0 = N\Omega_0$ $\Omega_0 = \frac{w_0}{N} = \frac{2\pi}{TN}$ olmak uzere

$$\Omega_1 = \Omega_0, \quad \Omega_2 = 2\Omega_0, \quad \Omega_3 = 3\Omega_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\Omega_{N-1} = (N-1)\Omega_0$$

noktalarinda $\overline{G(w)}$ degerini hesaplamak en uygun olanidir.

$$\overline{G(X)}(m\Omega_0) = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nT)e^{-jnm\Omega_0 T} = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nT)e^{-jnmT\frac{2\pi}{NT}} \qquad \text{e42}$$

Boylece AFD bagintisi

$$\overline{G(X)}(m\Omega_0) = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nT)e^{-j2\pi nm/N} \qquad \text{e43}$$

haline gelir. (ref: e43) bagintisinin icinde ornekleme araligi yoktur. Ornekleme araligi frekans eksenini olceklerken ise dahil olur.

Sekil(ref: xqs381) daki isaretin AFD'nu (ref: e43) den faydalanarak hesaplayin. Buldugunuz sonuclari (ref: xqp308) esitligi ile verilen formulle karsilastirin.

Cozum: Toplam data sayisi N=5 dir.
g(0)=4 , g(T)=3, g(2T)=2, g(4T)=1, g(4T)=0
(ref: e43) esitligi N=5 icin.

$$\overline{G(X)}(m\Omega_0) = \sum_{n=0}^{n=4} g(nT)e^{-j2\pi mn/5}$$

haline gelir. $m = 0,1,2,3,4$ icin hesaplanirsa.
$\overline{G(X)}0$=10, $\overline{G(X)}\Omega_0$=2.5–$j$3.44 , $\overline{G(X)}2\Omega_0$=2.5– $j$0.81, $\overline{G(X)}3\Omega_0$=2.5+ $j$0.81
$\overline{G(X)}4\Omega_0$=2.5+$j$3.44 , bulunur.

Ote yandan $N\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \rightarrow \Omega_0 = 1.256$ dir.
(ref: xqp308)esitligindeki $\overline{G(w)}$ ifadesi $w = 0$, $w = \Omega_0 = 1.256$
$w = 2\Omega_0 = 2.512$, $w = 3\Omega_0 = 3.768$, $w = 4\Omega_0 = 5.024$ icin hesaplanirsa.
$\overline{G(X)}0$=10, $\overline{G(X)}1.256$=2.5–$j$3.44, $\overline{G(X)}2.512$=2.5–$j$0.81,
$\overline{G(X)}3.768$=2.5–$j$0.81, $\overline{G(X)}5.024$=2.5+$j$3.44 bulunur.

Burada akla hemen su soru takilir. (ref: xqp308) bagintisi ile AFD'nu istedigimiz frekans araliginda hesaplayabiliriz. (ref: e43) bagintisi ile sadece belli frekans degerlerindeki AFD'nu bulabiliriz. (ref: xqp308) bagintisi elimizde iken (ref: e43) bagintisina ne gerek var. Sorunun cevabi bir sonraki kisimda islenecek olan Hizli Furier Donusumu ile ilgilidir. (ref: e43) bagintisi sinirli frekanslarda hesaplamayi yapiyor. Ornekleme periyodu yeteri kadar kucukse (ki oyle olmak zorundadir) bu frekanslardaki AFD degerleri cogu kere isaret hakkinda yeterli bilgiyi verir. Halbuki (ref: e43) bagintisi ile yapilacak hesaplamalar (ref: xqp308) ile yapilacak hesaplamalardan cok daha hizlidir.

## Ayrik Ters Furier Donusumu

AFD u belli olan bir isaretin $g(nT)$ degerleri

$$g(nT) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1} G(m\Omega_0)e^{j2\pi nm/N} \qquad \text{e51}$$

seklinde hesaplanabilir.

**Ispat**: (ref: e43) esitligi (ref: e51) de yerine konursa

$$g(nT) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1}\left[\sum_{k=0}^{k=N-1} g(kT)e^{-j2\pi km/N}\right]e^{j2\pi nm/N}$$

$$g(nT) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1}\sum_{k=0}^{k=N-1} g(nT)e^{j[2\pi m(n-k)/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1} g(kT)\sum_{k=0}^{k=N-1} e^{j[2\pi m(n-k)/N} \qquad \text{e54}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{k=N-1} e^{j[2\pi m(n-k)/N} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ N & k = n \end{cases}$$

oldugu gozonune alinip bu (ref: e54) de yerine konulursa.

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1} g(kT)\left[\sum_{k=0}^{k=N-1} e^{j[2\pi m(n-k)/N}\right] = Ng(nT) \qquad \text{e543}$$

elde edilir ve boylece (ref: e54) esitligi

$$g(nT) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1}\sum_{k=0}^{k=N-1} g(nT)e^{j[2\pi m(n-k)]/N} = \frac{1}{N}Ng(nT) = g(nT) \qquad \text{e57}$$

haline gelir ve teorem ispatlanmis olur.

Ayrik Furier donusum formullerini toplu halde yazarsak

$$\overline{G(X)}(m\Omega_0) = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nT)e^{-j2\pi nm/N} \qquad \text{xqe317}$$

$$g(nT) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{m=N-1} G(m\Omega_0)e^{j2\pi nm/N} \qquad \#$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{NT}$$

haline gelir.

## Ayrik Furier donusumu ile Furier serisi arasindaki baginti

(ref: rx45) bagintisi geregi periyodu $P_0$ olan periyodik $g(t)$ isaretinin Furier serisi katsayilari

$$c_k = \frac{1}{P_0}\int_{t_0}^{t_0+P_0} g(t)e^{-jkw_0t}dt \qquad \text{xqe61}$$

seklinde hesaplanabilir. $w_0 = \frac{2\pi}{P_0}$ $g(t)$ isaretinin bir periyodunun AFD sini alalim. Ornekleme araligi $S$ olsun. Bunun icin $g(t)$ isaretini $S$ araliklarla impulslardan ibaret olan $\delta_h(t)$ ile carpalim.

$$\delta_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(t-nS) \qquad \text{xqe62}$$

$$c_k = \frac{1}{P_0}\int_{t_0}^{t_0+P_0} g(t)\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(t-nS)e^{-jkw_0t}dt \qquad \text{f11}$$

$$c_k = \frac{1}{P_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{t_0}^{t_0+P_0}\delta(t-nS)g(t)e^{-jkw_0t}dt \qquad \text{f12}$$

(ref: s224) bagintisi kullanilarak.

$$c_k = \frac{1}{P_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(nS)e^{-jknw_0S}dt \qquad \text{f13}$$

$g(t)$ isaretinin bir peryot boyunca AFD sini hesaplayacagimiz icin $t_0 = 0$ alalim ve Bir periyotta $N$ adet ornekleme olsun. $N = \frac{P_0}{S}$ $\qquad P_0 = NS$ olsun. Bu sartlar altinda

$$c_k = \frac{1}{P_0}\sum_{n=0}^{n=N-1} g(nS)e^{-jknw_0S}dt \qquad \text{f14}$$

(ref: e42) esitligini ornekleme araligi $S$ olmasi hali icin yeni notasyona gore yeniden yazalim.

$$\overline{G(X)}(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nS)e^{-jnk\Omega_0S} \qquad \#$$

Acikca goruldugu gibi

$$c_k = \frac{1}{P_0}\overline{G(X)}(k\Omega_0) \qquad \#$$

Dolayisiyla AFD si alinan bir isaretten kompleks Furier serisi katsayilari hesaplanabilir.

Bu sekilde hesaplanan (kompleks) Furier serisi katsayilarina **ayrik** (**kompleks**) **Furier serisi katsayilari** denir Ornekleme periyodunun onemi burada da kendini gosterir. Ornekleme periyodu yeteri kadar kucuk degilse ayrik (kompleks) Furier serisi katsayilari ile (ref: rx45) bagintisi ile hesaplanan analog Furier serisi katsayilari farklilik gosterir.

Ornek Problem 3.x5 g(t)=[1 -3 6 1 -2] T=0.1 saniye olduguna gore isaretin AFD'nu hesaplayip genlik ve faz spektrumunu cizin.

Cozum: (ref: e43) bagintisinda $N = 5$ alarak $m = 0, 1, 2, 3, 4$ icin $G_m$ degerleri

$$G_0 = 3 \quad G_1 = -6.2 - j1.9 \quad G_2 = 7.2 + j5.3 \quad G_3 = 7.2 - j5.3 \quad G_4 = -6.2 + j1.98$$

olarak hesaplanir. AFD'nun periyodikligi geregi $G_m = G_{m+N} = G_{m-N}$dir. (ref: e43) de $m$ ye degisik degerler vererek bu durum gozlenebilir.

$N\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \Omega_0 = 12.56$ rad/s oldugu gozonune alinarak Tablo(ref: xqt359) deki listeyi cikarabiliriz. $G_{-1}$ ve $G_5$ degerleri periyodikligi gostermek icin ilave edilmistir.

Isaretin Genlik ve faz spektrumu sekil(ref: xqs376) dedir.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| $w$ | 12.56 | 0 | 12.56 | 25.12 | 37.68 | 50.24 | 62.8 | |
| $G_m$ | -6.2+j1.98 | 3 | -6.2-j1.9 | 7.2+j5.3 | 7.2-j5.3 | -6.2+j1.98 | 3 | |

Tablo(xqt359) $g(nT)$nin AFD katsayilari

Sekil(xqs376) rakamlarin AFD sinin genlik ve faz spektrumu

Hizli Furier Donusumu

# Giris

Hizli Furier donusumu (HFD), (Fast Fourier Transform,(FFT)) prensip olarak ayrik furier donusumunun cok az islem sayisi ile hesaplanmasi teknigidir. (ref: xqe317) bagintisi $e^{-j2\pi nm/N}$ seklinde ustel terimlerden meydana gelmistir. Ornek olarak $N = 6$ durumunda $\overline{G(X)}3\Omega_0$ yi hesaplamak icin $e^{-j\pi},\ e^{-j2\pi},\ ,e^{-j3\pi},\ ,e^{-j4\pi},\ ,e^{-j5\pi}$ terimlerinin hesaplanmasi gerekir. Ustel terimler bilgisayarda hesaplanirken cok sayida carpma yapmak gerekir. Halbuki $e^{-j2\pi} = (e^{-j\pi})^2$ ve $e^{-j4\pi} = (e^{-j2\pi})^2$ oldugu dikkkate alindiginda ustel terim yerine kare alma islemi ile bazi terimler kolayca hesaplanabilir. Hizli Furier donusumu gereksiz yere ustel terim hesabininin tekrar tekrar yapilmasini onler.

# Hizli Furier Donusumu

$\overline{G(X)}(m\Omega_0)$ terimini kisaltarak $G_m$ ile gosterelim

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad \text{xqf351}$$

tanimini yapalim. $W_N^{nm} = (W_N)^{nm} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}})^{nm}\right) = e^{-j\frac{2\pi nm}{N}}$ olacaktir. Bu tanimlarin isiginda (ref: e43) bagintisi

$$G_m = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(n) W_N^{mn} \qquad \text{r11}$$

olacaktir. Ayrica

$$W_N^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}})^2\right) = e^{-j\frac{4\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}}$$

oldugundan

$$W_N^2 = W_{N/2} \qquad \#$$

Benzer sekilde asagidaki esitlikler de gosterilebilir.

$$\begin{array}{lll} W_N^K = W_N^{K+N} & W_N^N = 1 & W_{N/2}^{N/2} = 1 \\ W_N^K = -W_N^{K+N/2} & W_N^0 = 1 & \end{array} \qquad \#$$

(ref: r11) esitligini acik olarak yazalim.

$$G_m = g(0)W_N^0 + g(1)W_N^m + g(2)W_N^{2m} + g(3)W_N^{3m} + \ldots\ldots\ldots\ldots + g(n)W_N^{nm} \qquad \#$$

Tek ve cift indisli terimleri guruplandirarak yazalim.

$$\begin{aligned} G_m &= g(0)W_N^0 + g(2)W_N^{2m} + g(4)W_N^{4m} + \ldots\ldots\ldots \\ &\quad g(1)W_N^m + g(3)W_N^{3m} + g(5)W_N^{5m} + \ldots\ldots\ldots + g(n)W_N^{nm} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r)W_N^{2rm} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r+1)W_N^{(2r+1)m} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r)(W_N^2)^{rm} + W_N^m \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r+1)(W_N^2)^{rm} \end{aligned} \qquad \text{rx21}$$

Notasyonlari kisaltmak icin

$$P_m = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r)(W_N^2)^{rm} \qquad Q_m = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r+1)(W_N^2)^{rm} \qquad \text{xr9}$$

tanimlari yapilarak. (ref: rx21) bagintisi

$$G_m = P_m + W_N^m H_m \qquad \text{r56}$$

seklinde yazilabilir.

Ornek Problem 3.x76 $g(n) = [-1 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 6 \;\; 12 \;\; 9 \;\; -2 \;\; 5]$ olduguna gore $P_m, Q_m$ katsayilarini hesaplayin. Bu katsayilardan faydalanarak $G_m$ katsayilarini hesaplayin.

Cozum: N=8 dir. (ref: xr9) bagintisindan

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r)W_{N/2}^{rm} = g(0)W_{N/2}^0 + g(2)W_{N/2}^m + g(4)W_{N/2}^{2m} + g(6)W_{N/2}^{3m} \\ &= g(0) + g(2)e^{-j\frac{2\pi}{N/2}m} g(4)e^{-j\frac{2\pi}{N/2}2m} + g(6)e^{-j\frac{2\pi}{N/2}3m} \\ &= (-1) + (7)e^{-j\frac{\pi}{2}m} + (12)e^{-j\pi m} + (-2)e^{-j\frac{3\pi}{2}m} \end{aligned}$$

buradan $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ icin $P_m$ degerleri hesaplanirsa

$$\begin{array}{llll} P_0 = 16 & P_1 = -13 - 9j & P_2 = 6 & P_3 = -13 + j9 \\ P_4 = 16 & P_5 = -13 - 9j & P_6 = 6 & P_7 = -13 + j9 \end{array}$$

(ref: xr9) bagintisi ile verilen

$$Q_m = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r+1)(W_N^2)^{rm}$$

esitliginde $m = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ icin $Q_m$ degerleri hesaplanirsa

$$Q_0 = 28 \quad Q_1 = -1-j \qquad Q_2 = 6 \quad Q_3 = -13+j9$$
$$Q_4 = 16 \quad Q_5 = -13-9j \quad Q_6 = 6 \quad Q_7 = -1+j$$

Bu degerleri (ref: r56) esitliginde yerine koyarak $G_m$ degerlerini hesaplayabiliriz.

$$G_0 = 44 \quad G_1 = -14.41-9j \quad G_2 = 6-6j \quad G_3 = -11.58+9j$$
$$G_4 = 12 \quad G_5 = -11.58-9j \quad G_6 = 6+6j \quad G_7 = -14.41+9j$$

Yukarida goruldugu gibi $P_0 = P_4 \quad P_1 = P_5 \quad P_2 = P_6 \quad P_3 = P_7$
$Q_0 = Q_4 \quad Q_1 = Q_5 \quad Q_2 = Q_6 \quad Q_3 = Q_7$ olmmasi tesadufu degildir. $P_m$ ve $Q_m$ lerin yapisi tipki $G_m$ lerin yapisi gibidir. $W_N^2 = W_{N/2}$ oldugunu gozonune alarak (ref: r11), (ref: xr9) esitliklerini yeniden yazalim.

$$G_m = \sum_{n=0}^{n=N-1} g(n)W_N^{mn} \qquad P_m = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r)(W_{N/2})^{rm} \qquad Q_m = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2r+1)(W_{N/2})^{2rm}$$

$G_m$ tanimindaki $N$ yerine $P_m$ ve $Q_m$ tanimlarinda $N/2$ gelmektedir. ref: xqf337 ile verilen AFD'nun periyodikligi geregi

$$G_m = G_{m+N} \qquad \#$$

oldugundan $P_m$ ve $Q_m$ ifadeleri de

$$P_m = P_{m+N/2} \qquad Q_m = Q_{m+N/2} \qquad \#$$

ozelliklerini saglamak zorundadirlar.

## Islem Sayisi Hesabi

Simdi yukaridaki esitliklerin hesaplanmasi icin gereken islem sayisini hesaplyalim. $G_m$'i (r11) den hesaplayalim. Bir eleman (ornek olarak $G_1$'i hesaplamak icin $N$ adet terimin toplanmasi lazim. Her terim icin de bir us alma ve bir de carpma gerekir. $G_0, G_1, G_2, \quad \ldots . G_{N-1)}$ rin tamaminin hesabi icin $NxN = N^2$ adet carpma ve us alma islemi gerekir.

Bunun gibi butun $P_m$ leri hesaplamak icin toplam $(\frac{N}{2})^2$ islem gerekir. $Q_m$ leri hesaplamak icin yine $(\frac{N}{2})^2$ adet carpma ve us almam islemi gerekir.

Sonuc olarak eger $G_m$i (ref: r11) den hesaplarsak $N^2$ adet (ref: r56) dan hesaplarsak $(\frac{N}{2})^2 + (\frac{N}{2})^2 + N + N = \frac{N^2}{2} + N + N \cong \frac{N^2}{2}$ adet carpma ve us alma islemi gerekir. (Ilave gelen ve ihmal edilen $N+N$ terimi $G_m$'yi hesaplarken $W_N^m$'yi ve $W_N^m P_m$ hesabindan dolayidir)

Goruldugu gibi $G_m$ terimlerini tek ve cift guruba ayirarak carpma ve us alma islem sayisini $N^2$ den yaklasik olarak $\frac{N^2}{2}$ e indirgemis olduk.

Simdi $G_m$ ifadesini ayirdigimiz gibi $P_m$ ve $Q_m$ ifadelerini de yeniden tek ve cift guruplara ayiralimm.

$$P_m = R_m + W_{N/2} S_m \qquad Q_m = T_m + W_{N/2} U_m \qquad \text{r71}$$

Burada yine $P_m \quad Q_m$ iffadelerini (ref: r56) den hesaplamak $\frac{N^2}{2}$ islem yapmak gerektiriyordu. (ref: r71) formulunden hesaplamak ise

$$\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \left(\frac{N}{4}\right)^2 + \left(\frac{N}{4}\right)^2 + \left(\frac{N}{4}\right)^2 = \frac{N^2}{4}$$

islem gerektirir. ($W_N^m$ ile yapilan carpma dahil edilirse islem sayisi $\frac{N^2}{4} + N + \frac{N}{2}$ olur) Hesaplar normal yolla yapilirsa $N^2$ adet islem gerektirdigi halde iki tane $\frac{N}{2}$'lik guruplara bolundugunde yaklasik $\frac{N^2}{2}$ adet islem gerektiriyor. Demek ki her ikiye bolumde toplam islem sayisi da oncekine gore yaklasik ikiye bolunecektir.

Eger n tamsayi olmak uzere $N = 2^n$ ise Bu bolme islemi iki terim kalana kadar devam eder.

Bu durumda gerekli toplam islem sayisi yaklasik olarak $2N$ olacaktir. Ornek olarak $N = 4096$ olsa normal yolla AFD hesap yapildiginda 16777216 islem gerektirdigi halde yukaridaki HFD yontemiyle 8192 islem gerektirir. Ayrica $G_m^* = G_{N-m}$ ve $n > \frac{N}{2}$ icin $W_N^n = -W_N^{n-N/2}$ oldugu dikkate alinarak islem sayisi daha da azaltilir. HFD isaret isleme tekniginde cok kullanildigindan konu ile ilgili cesitli optimum algoritmalar gelistirilmistir.

## $N = 3n$ durumu

Eger $N = 3n$ ise HFD formu degisik sekilde duzenlenebilir.

$$\begin{aligned} G_m &= g(0)W_N^0 + g(3)W_N^{3m} + g(6)W_N^{6m} + \ldots\ldots\ldots \\ &\quad + g(1)W_N^m + g(4)W_N^{4m} + g(7)W_N^{7m} + \ldots\ldots\ldots \\ &\quad + g(2)W_N^m + g(5)W_N^{5m} + g(8)W_N^{8m} + \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \#$$

$$G_m = \sum_{r=0}^{\frac{N}{3}-1} g(3r)W_N^{3rm} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{3}-1} g(3r+1)W_N^{(3r+1)m} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{3}-1} g(3r+2)W_N^{(3r+2)m} \qquad \#$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{3}-1} g(3r)W_N^{3rm} + W_N^m \sum_{r=0}^{\frac{N}{3}-1} g(3r+1)W_N^{3rm} + W_N^{2m} \sum_{r=0}^{\frac{N}{3}-1} g(3r+2)W_N^{3rm} \qquad \#$$

Burada da onceki duruma benzer sekilde kisaltmalar yapilir. Eger $N = n3x2$ ise isaret onde 2 ye sonra uce bolunerek HFD hesaplanabilir.

## Zaman domenindeki datanin sonuna sifir ilave etmek

HFD'nun en hizli hesaplama teknigi $N = 2^n$ oldugu zamandir. Dolayisiyla $N = 2^n$ yapilmaya calisilir. $N \neq 2^n$ ise $g(nT)$ data vektorunun boyu $N = 2^n$ olana kadar sifir ilave edilerek artirilir. $g(nT)$nin sonuna sifirlar ilave edilerek HFD degerleri hesaplanir.

$g(nT)$nin sonuna sifirlar ilave etmek AFD degerini degistirmez. Bunu gormek icin $g(nT)$nin sonuna K adet sifir ilave ederek $N + K$ boyunda yeni bir $g_x(nT)$ vektoru olusturalim.

$$g_x(nT) = [g(nT)\ |0\ \ 0\ \ 0\ \ \ 0] \qquad \#$$

$g_x(nT)$nin (ref: e43) bagintisina gore AFD'nu alalim.

$$\begin{aligned}(G_x)_m &= \sum_{n=0}^{n=K+N-1} g_s(nT)e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nT)e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=N}^{n=K} 0e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \sum_{n=0}^{n=N-1} g(nT)e^{-j2\pi nm/N} \\ &= G_m\end{aligned} \qquad \#$$

Datanin sonuna sifir ilave etmek AFD degerlerini degistirmez fakat degisik frekanslarda AFD hesaplanmasina neden olur. Bu durumda frekans ekseninin olceklemesini ayarlamak gerektir.

Ornek Problem (ref: xqp311) deki $g(t)$ isaretinin sonuna a)5 adet sifir b)3 adet sifir ilave edilirse yeni AFD degeerleri ne olur. sonuclari yorumlayin.

Cozum: a) Yeni data dizisi $g(nT) = [1\ \ -3\ \ 6\ \ 1\ \ -2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ seklinde olacaktir. (ref: e43) bagintisinda $T = 0.1$ ve $N = 10$ koyarak AFD'nu alalim. $\Omega_0 = \frac{2\pi}{NT} = 6.28$ oldugu gozonune alinirak AFD sonuclari Tablo(ref: xqt363) da gosterilmistir.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $w$ | -12.56 | -6.28 | 0 | 6.28 | 12.56 | 18.84 | 25.12 |
| $G_m$ | -6.2+j1.9 | 1.7+j3.7 | 3 | 1.7-j3.7 | -6.2-j1.9 | -2.7+j8.8 | 7.2+j5.3 |
| | | | | | | | |
| $m$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $w$ | 31.4 | 37.6 | 43.96 | 50.24 | 56.52 | 62.8 | 69.08 |
| $G_m$ | 7 | 7-j5.3 | -2.7-j8.8 | -6.2+j1.9 | 1.7+j3.7 | 3 | 1.7-j3.7 |

Tablo(xqt363) $g(nT)$nin sonuna 5 sifir ilave edildiginde AFD

b)Bu durumda $T = 0.1$ ve $N = 8$ alinirsa $\Omega_0 = \frac{2\pi}{NT} = 7.85$ elde edilir. a) daki gibi islemler yapilirsa Tablo(ref: xqt364) deki degerler elde edilir.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $w$ | -7.85 | 0 | 7.85 | 15.7 | 23.55 | 31.4 |
| $G_m$ | 0.17+j4.5 | 3 | 0.17-j4.5 | -7.+j4. | 5.8+j7.4 | 7 |
| | | | | | | |
| $m$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $w$ | 39.25 | 47.1 | 54.95 | 62.8 | 70.65 | 78.5 |
| $G_m$ | 5.8-j7.4 | -7-j4 | 0.17+j4.5 | 3 | 0.17+j4.5 | -7-j4 |

Tablo(xqt364) $g(nT)$nin sonuna 3 sifir ilave edildiginde AFD

Datanin sonuna data sayisi kadar sifir ilave etmekle temel frekanslardaki bilgiler de kaybolmuyor.

(ref: xqs345.a) orneginde ilave edilen sifir sayisi data sayisi kadardir. Eski AFD katsayilarinin hesaplandigi tum frekanslarda yeni AFD de hesaplanmistir. Ilave olarak ara frekanslarda da AFD hesaplanmistir.

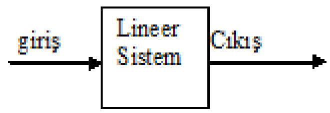
(ref: xqs345.b) orneginde ise AFD katsayilari sifir ilave edilmemis haldeki AFD katsayilarindan tamamen farkli frekanslarda hesaplaniyor.

Ilk anda bu bir kayip gibi gozuksede gercekte kayip degildir. Cunku AFD'den beklenen genis bir frekans araligindaki genlik ve faz spektrumunu vermesidir. Ornekleme araligi yeteri kadar kucuk secilmisse sifir ilave edilerek elde edilen genlik ve faz spektrumu sifir ilave edilmemis haldekinin aynisidir.

Dolayisiyla sifir ilave edilerek hesaplarin hizlandirilmasi cogu kere kullanilabilecek bir tekniktir.

# LINEER SISTEMLER

Muhendislikte herhangibir sistem sekil(ref: xqs402) deki gibi dikdortgen blok icinde gosterilir. Sisteme disaridan etki eden faktorler **giris**, sistemin bu girislere karsi gosterdigi tepki **cikis** olarak adlandirilir. Sisteme birden fazla giris olursa **cokgirisli**, sistemin bu girislere gosterdigi tepki birden fazla degisken uzerinden disaridan gozleniyorsa **cokcikisli** sistem olarak adlandirilir.




xqs402 Fiziksel Sistem semasi

## lineerlik ve nonlineerlik

Lineerlik (dogrusallik) prensip olarak giris ile cikisin orantili olmasidir. Sistem girisi $x$ ve cikisi $y$ olsun. Matematiksel olarak lineerlik asagidaki gibi tarif edilir.

giriste $x_1$ uygulandiginda cikis $y_1$

giriste $x_2$ uygulandiginda cikis $y_2$

olsun. Sisteme

$$x_3 = ax_1 + bx_2$$

girisi uygulandiginda $a, b$ herhangi sabitler olmak uzere, sistem cikisi

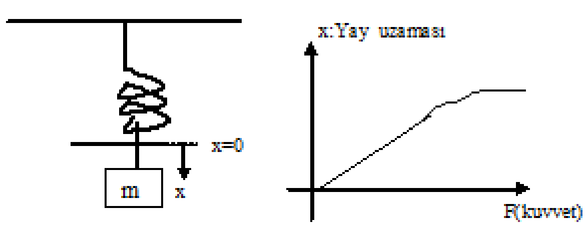
$$y_3 = ay_1 + by_2$$

oluyorsa sistem lineerdir denir.

sekil(ref: xqs401) de gorulen yay sisteminde $k$ yayin uzama katsayisi,$F$ uygulanan kuvvet, $x$ uygulanan kuvvet sonucu yayin uzamasidir. Sistemin giris cikis bagintisi

a) $x = \frac{F}{k}$ b) $x = \frac{F^2}{k}$

olarak veriliyor. Her iki durum icin sistemin lineer olup olmadigini arastirin.




xqs401 a)Yay ve kuvvet sistemi b)Kuvvet-yerdegistirme grafigi

**cozum**:**a**) Sisteme giris $F$, cikis ise $x$'dur. Sistem modeli yukaridaki notasyonla $y = \frac{x}{k}$

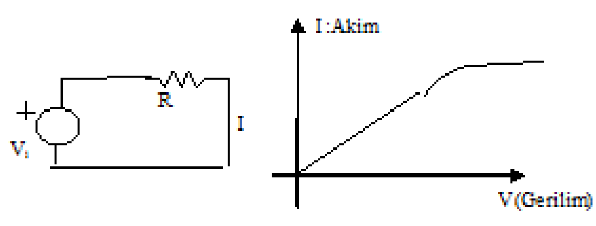
olur.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1 & &\Rightarrow & y_1 &= \frac{F_1}{k} \\
x_2 &= F_2 & &\Rightarrow & y_2 &= \frac{F_2}{k} \\
x_3 &= aF_1 + bF_2 & &\Rightarrow & y_3 &= \frac{aF_1+bF_2}{k} = a\frac{F_1}{k} + b\frac{F_2}{k}
\end{aligned}
$$

$y_3 = ay_1 + by_2$ oldugundan sistem lineerdir.
**b**)Yukaridaki islemler aynen burada da yapilir.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1 & &\Rightarrow & y_1 &= \frac{F_1^2}{k} \\
x_2 &= F_2 & &\Rightarrow & y_2 &= \frac{F_2^2}{k} \\
x_3 &= aF_1 + bF_2 & &\Rightarrow & y_3 &= \frac{(aF_1+bF_2)^2}{k} = a^2\frac{F_1^2}{k} + b^2\frac{F_2^2}{k} + \frac{+2abF_1F_2}{k}
\end{aligned}
$$

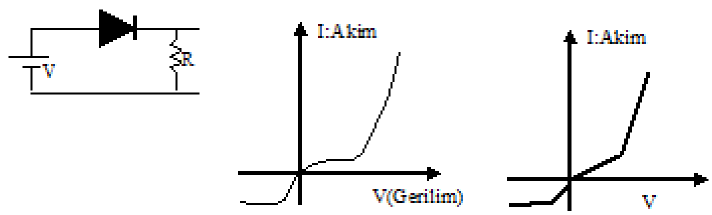
$y_3 \neq ay_1 + by_2$ oldugundan sistem lineer degildir.
Fiziksel sistemlerin hicbirisi ideal anlamda lineer degildir. Ornek olarak O.P(ref: xqp401) deki yay kutle mekanizmasini ele alalim. Kucuk yerdegistirmeler icin yayin kuvvet-yerdegistirme bagintisi $x = \frac{F}{k}$ seklindedir. Fakat yay belli bir miktar uzadiktan sonra giris cikis bagintisi $x = \frac{F^2}{k}$, yay asiri uzatilip sinira dayanirsa $x = l$ olur. Yani giris $F$ ne olursa olsun cikis $x$ sabit kalir. Bu durum sekil(ref: xqs401.b) de gosterilmistir.
Baska bir ornek olarak sekil(ref: xqs405) deki direnc ve gerilim kaynagindan devreyi ele alalim . Devreden gecen akim $I = \frac{V}{R}$ dir. Fakat direncden gecen akim direnci bir miktar isitir. Isinan direncin $R$ direnc degeri degisir. Dolayisiyla gecen akim degisir. Bu ise uygulanan $V$ gerilimi ile gecen $I$ akimi arasindaki iliskinin lineer olmamasi(nonlineer olmasi) anlamina gelir.




Sekil(xqs405 a)Direncli devre b)gercekte ve pratikteki akim-gerilim grafigi
Lineerligi kisaca giris cikis bagintisi orijinden gecen bir dogru ise o sistem lineerdir diye tanimlayabiliriz. Sekil(ref: xqt401)de pratikte raslanan bazi nonlineerlikler gosterilmistir.

xqt401 Pratikte raslanan nonlineerlikler ??athertondan aktar.
Fiziksel dunyada hicbir sistem ideal anlamda lineer olmamasina karsilik kullanim

sinirlari icinde lineer kabul etmekte buyuk bir hata yoktur. Nonlineerligin ihmal edilemeyecek boyutlarda oldugu cogu durumlardada sistem belli lineer bolgelere ayrilir. Ornek olarak Sekil(ref: xqs407.a) deki diyodun karakteristigini ele alalim. Diyodun akim-gerilim karakteristigi analiz edilirken diyot Sekil(ref: xqs407.b) deki gibi varsayilir. Boylece lineer bolgeler elde edilerek analiz yapilir.

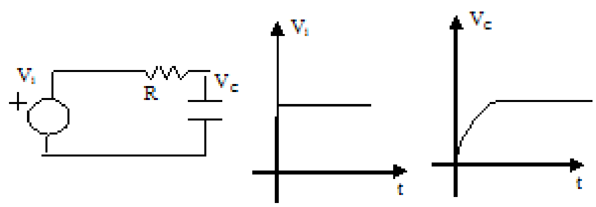



Sekil(xqs407) a)Diyodun akim-gerilim karakteristigi b)lineer bolgelere ayrilmis (lineerlestirilmis karakteristik

## Sistem Dinamigi

Fiziksel sistemlerin az veya cok ataletleri(tembellikleri) vardir. Yani sisteme etkiyen etken ile sistemin verdigi tepki arasinda belli bir sure gecer.

Mesela sekil(ref: xqs411.a) de elektrik devresinde de kondansator elemaninin ataletinden dolayi uygulanan gerilim etkisini zamana yayilarak gosterir.
sekil(ref: xqs411.b) de uygulanan gerilim ve sekil(ref: xqs411.c) de uygulanan gerilimin etkisi ile kondansator geriliminin degisimi gosterilmistir.




sekil(xqs411) a)Kondansatorlu devre b)$u(t)$ uygulanan gerilim c)Gerilimin etkisi ile gecen akim.

Benzer sekilde sekil(ref: xqs401.a) daki yay sisteminde yaya etkiyen kuvvet etkisini hemen gosteremez. Kuvvetin etkisi yayin kutlesi ve hava surtunmesinden dolayi zamana yayilarak etkisini gosterir.

Bu sekildeki sistem ataleti matematik modellemede diferansiyel denklemler olarak karsimiza cikar. Lineer sistemlerin modelleri

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = b_n\frac{d^n r}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots b_1\frac{dr}{dt} + b_0 r \qquad \text{xqe401}$$

seklinde lineer diferansiyel denklemlerle ifade edilir.

# Zamanla Degismeme

Dinamik sistemin modeli zamandan bagimsiz ise, zamanla degismiyorsa sistem zamanla degismeyen sistemdir. Matematiksel olarak zamanla degismeme su sekilde tanimlanir.
$x(t)$ girisine karsi $y(t)$ cikisini veren bir sistem
eger $x(t-p)$ girisine karsi $y(t-p)$ cikisini veriyorsa
sistem zamanla degismeyen sistem olarak adlandirilir.
Butun sistemlerin modelleri sicaklik basinc gibi etkenler altinda degismekle beraber pratik anlamda cogu sistemler zamanla degismez kabul edilir. Zamanla degismesi dikkate alinmasi gereken sistemlere ornek olarak bir savas ucaginin veya roketin yakiti azaldikca kutlesinin azalmasi ve sistemin matematik modelinin degismesini ornek olarak gosterebiliriz. Sistem lineerse ve zamanla degisiyorsa (ref: xqe401) deki $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ katsayilari $a_1(t), a_2(t), \ldots a_n(t), b_1(t), b_2(t), \ldots b_n(t)$ seklinde zamana bagli olarak degisir.

# Lineer Sistemlerin Analizi

Yukarida bahsedildigi gibi mekanik hidrolik, elektrik sisteemler cogu kere lineer kabul edilerek liner zamanla degismeyen diferansiyel denklemlerle modellenebilir. Bu yuzden Lineer zamanla degismeyen diferansiyel denklemlerin cozumlerini kisaca incelemek gerekir.

(ref: xqe401) ile verilen diferansiyel denklemin homojen ve ozel cozum olarak adlandirilan iki cozumu vardir. Toplam cozum iki cozumun toplamidir.

## Homojen (Oz) Cozum

Diferansiyel denklemin homojen(oz) cozumunun $\alpha$ sabit bir sayi olmak uzere

$$x(t) = ce^{\alpha t} \qquad \text{xqe461}$$

formunda oldugu gosterilebilir. (ref: xqe461)'deki $x(t)$ degeri

$$\frac{dx(t)}{dt} = c\alpha e^{\alpha t}, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = c\alpha^2 e^{\alpha t} \quad \ldots\ldots. \quad \frac{dx^n(t)}{dt^n} = c\alpha^n e^{\alpha t}$$

seklinde turetilerek (ref: xqe401)'de yerine konulursa

$$c\alpha^n e^{\alpha t} + a_{n-1}c\alpha^{n-1}e^{\alpha t} + a_{n-2}c\alpha^{n-2}e^{\alpha t} + a_1 c\alpha e^{\alpha t} + a_0 ce^{\alpha t} \qquad \text{xq4e472}$$

elde edilir. (ref: xq4e472)'in her iki yani $(\frac{1}{c}e^{-\alpha t})$ ile ‡arplrsa. $(c \neq 0)$

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots. a_1\alpha + a_0 \qquad \text{xqe403}$$

elde edilir. (ref: xqe403) polinomunun kokleri $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\alpha_{n-1},\ \alpha_n$ olsun. Eger butun kokler birbirinden farkli ise (ref: xqe401) dif denkleminin cozumu de

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 e^{\alpha_3 t} + \ldots\ldots c_n e^{\alpha_n t}$$

seklindedir. Burada $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_n$ tamamen keyfi sabitlerdir. Yani $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_n$ katsaylar $-\infty$ , $+\infty$ arasnda herhangibir degeri alabilirler. Btn aldklar de§erler i‡in dif denklem saglanr.

### Katli kokler hali

(ref: xqe403) polinomunun kokleri katli ise cozume $t$ carpan olarak gelir. Ornek olarak $\alpha_p$ koku $p$ katli $\alpha_s$ koku $s$ katli diger koklerin tamami tek katlli olsun. Bu durumda cozum.

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 e^{\alpha_3 t} + \ldots\ldots\ldots \; + [c_{p1} + c_{p2}t + c_{p3}t^2 + \ldots\ldots + c_{pp}t^{p-1}]e^{\alpha_p t}$$

$$+ [c_{s1} + c_{s2}t + c_{s3}t^2 + \ldots\ldots + c_{ss}t^{s-1}]e^{\alpha_s t} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{n-p-s+2}\; e^{q_{n-p-s+2}t}$$

seklinde olacaktir. (Bkz. C.P. ref: katlikok1)

## Ozel Cozum

Dif denklemin ozel cozumu ise dif denklemin sag tarafindaki terimlere baglidir. Ozel cozumu bulmak icin $x(t)$'ye denklemin sag tarafindaki fonksiyonlarin integralleri ve turevleri cinsinden tahmini fonksiyonlar verilir. Bu $x(t)$ degeri dif denklemde yerine konularak ozel cozum ile ilgili katsayilar bulunur.

Ornek Problem:

$$4\frac{dx}{dt} + 6x = 60\cos(3t) \qquad \text{xqe417}$$

dif denkleminin
a)homojen (oz) cozumunu bulun.
b)ozel cozumunu bulun.
c)Toplam cozumu bulun
d) $t = 0$ aninda $x(0) = 10$ olduguna gore $x(t)$nin $t$'ye gore degisimini gosteren grafigi cizin.

Cozum **a**)**Oz cozum**: Karakteristik polinom ve koku

$$4q + 6 = 0 \rightarrow q = -\frac{3}{2} = -1.5 \qquad \#$$

Dolayisiyla cozum

$$x(t) = ce^{-1.5t} \qquad \text{xqf431}$$

seklindedir.

**Ozel Cozum**:dif denklemin ikinci tarafini verebilecek $x(t)$, ifadesi $A,B$ birer sabit olmak uzere $x = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ seklinde olmalidir.

$$x = A\cos(3t) + B\sin(3t)$$
$$\frac{dx}{dt} = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)$$

degerleri (ref: xqe417) de yerine konulursa

$$4(-3A\sin(3t)+3B\cos(3t)) \ +6(A\cos(3t)+B\sin(3t)) \ = 60\cos(3t) \qquad \#$$

elde edilir. Esitligin her iki tarafindaki benzer terimler birbirine esitlenirse

$$-12A+6B = 0 \qquad 12B+6A = 60$$

Bu denklemler cozulerek. $A = 2, \ B = 4$ bulunur. Sonuc olarak ozel cozum.

$$x = 2\cos(3t)+4\sin(3t) \qquad \text{xqf433}$$

d)(ref: xqf431) ve (ref: xqf433) dan tam cozum.

$$x(t) = ce^{-1.5t}+2\cos(3t)+4\sin(3t) \qquad \text{xqf435}$$

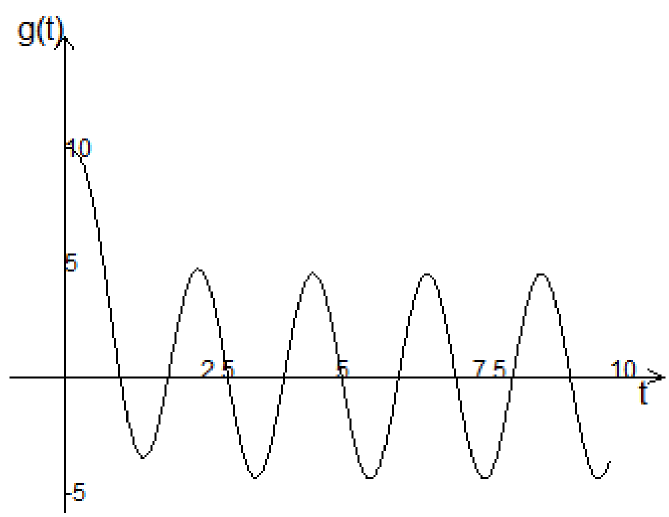
olarak bulunur. $t = 0$ icin $x(0) = 10$ konulursa

$$10 = c+2 \rightarrow c = 8 \qquad \#$$

olarak bulunur. Dolayisiyla cozum

$$x(t) = 8e^{-1.5t}+2\cos(3t)+4\sin(3t) \qquad \#$$

$x(t)$'nin $t$ ye gore degisimi sekil(ref: xqs413) de gosterilmistir.




Sekil(xqs413) $x(t) = 8e^{-1.5t}+2\cos(3t)+4\sin(3t)$ grafigi

# Kararlilik Analizi

Lineer dif denklemin cozumu iki ayri cozumun toplanmasiyla bulunuyor. sekil(ref: xqs413) den goruldugu gibi oz cozumunun etkisi belli bir zaman sonra ortadan kayboluyor ve

$$\mathbf{tamcozum} \cong \mathbf{ozelcozum} \qquad \text{xqp448}$$

haline gegliyor. Baslangictan *tam cozum*≅ *ozel cozum* olana kadar gecen zamana **gecici rejim cevabi** ve *tam cozum*≅ *ozel cozum* oldugu andan sonraki kismada

**surekli rejim cevabi** denir. (ref: xqp442)deki ifadeden cikan sonuc sudur sistemin surekli haliyle ilgilenen bir kimsenin oz cozumle ugrasmasina gerek yoktur.

Fakat burada onemli bir nokta vardir. O.P (ref: xqp401) deki dif denklem

$$4\frac{dx}{dt} - 6x = \ldots\ldots$$

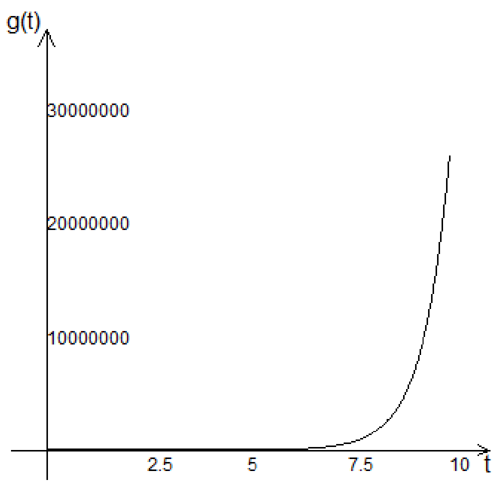
seklinde olsa idi dif denklemin cozumu de

$$x(t) = ce^{1.5t} + \ldots\ldots\ldots$$

seklinde olacakti. Bu durumda diferansiyel denklemin ikinci tarafi ne olursa olsun $e^{1.5t}$ terimi baskin terim olacak ve belli bir zaman sonra ilk durumun tersine

$$\textbf{tamcozum} \cong \textbf{ozcozum} \qquad \text{xqp442}$$

olacaktir. Bu durum diferansiyel denklemin (ve bu diferansiyel denklem modeli olan dinamik sistemin) **kararsizligi**(**dengesizligi**) olarak bilinir.




Sekil(xqs419)i Karasiz bis sistemin cikis grafigi

Kararlilik dinamik sistemlerin analizinin temel konusudur. Kararsiz bir sistemin pratik kullanimi hemen hemen hic yoktur. Kararlilik cok genis kapsamli incelenmesi gereken bir konudur. Burada kisaca asagidaki kriterle yetinecegiz.

(ref: xqe401) ile verilen lineer diferansiyel denkleminin (bu diferansiyel denklemin temsil ettigi lineer sistemin) kararli olmasi icin gerek ve yeter sart bu diferansiyel denklemin (ref: xqe403 ile verilen karakteristik polinomunun koklerinin reel kisminin sifir veya sifirdan kucuk olmasi, reel kismi sifir olan koklerin cakisik olmamasidir. (Bkz. O.P ref: xq4p263)

Serbest Kararli Sistemler

Sistem e herhangibir giris uygulanmadigi zaman sistem kararli oldugu halde bazi ozel giris fonksiyonlarina kararsizlik gosterebilir.

() ile verilen karakteristik polinomun koklerinin reel kisminin sifir olmasi hali bu duruma en carpici ornektir. Konuyu basit olarak aciklayabilmek icin asagidaki basit diferansiyel denklemi ele alalim.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = \cos(pt) \qquad p > 0 \tag{xq4f691}$$

Homojen cozum

$$x(t) = c_1e^{jpt} + c_2e^{-jpt} = A\cos(pt) + B\sin(pt) \tag{xq4f781}$$

seklinde olacaktir.

Ozel cozum icin tahmini cozumun su ana kadarki bilgilerimizle

$$x_o(t) = E\cos(pt) + F\sin(pt) \tag{xq4f695}$$

seklinde olmasi gerekir. Ancak bu tahmini cozum ile (ref: xq4f781) ile verilen oz cozum aynidir. Dolayisiyla (ref: xq4f781) ile verilen cozumde $A$ ve $B$ ne olursa olsun $x(t)$ (ref: xq4f691) diferansiyel denklemin oz cozumudur. Yani (ref: xq4f781) ile verilen cozum

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = 0 \qquad p > 0 \tag{xq4f693}$$

diferansiyel denkleminin cozumudur. Ayni durum (ref: xq4f693) ile verilen $x_o(t)$ icin gecerlidir. Yani $E$ ve $F$ ne olursa olsun $x_o(t)$ (ref: xq4f693) ile verilen tek tarafli diferansiyel denlemi saglar. Diger bir ifade ile $E$ ve $F$ ne olursa olsun $x_o(t)$ (ref: xq4f691)'de yerine konulsa ikinci tarafi devamli sifir cikar.

O halde tahmini cozumumuz dogru degildir. Baska tahmini cozumler aramaliyiz. Gercekte boyle durumlarda ozel cozum

$$x_o(t) = t(E\cos(pt) + F\sin(pt)) \tag{xq4f785}$$

seklinde olacaktir.

Sisteme herhangibir giris yokken sistemin (ref: xq4f781) ile verilen cozumu $t \to \infty$ icin $x(\infty) < \infty$'dir yani sistem kararlidir. Halbuki sisteme $\cos(pt)$ girisi uygulandiginda (ref: xq4f785) ile verilen cozum $t \to \infty$ icin $x(\infty) = \infty$'dur yani sistem kararsizdir. Bu tip sistemler **serbest kararli** (**dogal kararli**) sistem olarak adlandirilir.

# Lineer Sistemlerin Frekans Cevabi

Frekans cevabi kararli sistemlerin surekli rejim cevabidir. Degisik frekanslarda sinuzoidal isaretler sisteme giris olarak uygulandiginda sistemin bu girislere karsi verdigi cevabi inceleme teknigidir.

$x(t)$ ve $r(t)$nin Furier donusumlerinin alinabildigini varsayarak (ref: xqe401) denkleminin her iki tarafinin Furier donusumunu alalim.

$$
\begin{aligned}
&(jw)^n x((jw)) \; + a_{n-1}(jw)^{n-1}x((jw)) \; +\ldots\ldots\ldots+(jw)a_1 x((jw)) \; + a_0 x((jw)) \\
&= (jw)^n r((jw)) \; + b_{n-1}(jw)^{n-1}r((jw)) \; +\ldots\ldots\ldots+(jw)b_1 r((jw)) \; + b_0 r((jw))
\end{aligned} \qquad \#
$$

Denklemi duzenlersek

$$
\frac{x(jw)}{r(jw)} = \frac{(jw)^n + a_{n-1}(jw)^{n-1} +\ldots\ldots\ldots+a_1(jw) + a_0}{(jw)^n + b_{n-1}(jw)^{n-1} +\ldots\ldots\ldots+b_1(jw) + b_0} \qquad \text{xqf432}
$$

elde edilir. Buradaki $\frac{x(jw)}{r(jw)}$ ifadesine sistemin **transfer fonksiyonu** denir.

$$
H(jw) = \frac{x(jw)}{r(jw)} \qquad \text{xqg432}
$$

Transfer fonksiyonu tanim olarak sistem cikisinin Furier donusumunun sistem girisin Furier donusumune oranidir. Dolayisiyla (ref: xqe401) dif denklemleri ile verilen sistemin transfer fonksiyonu

$$
H(jw) = \frac{(jw)^n + a_{n-1}(jw)^{n-1} +\ldots\ldots\ldots+a_1(jw) + a_0}{(jw)^n + b_{n-1}(jw)^{n-1} +\ldots\ldots\ldots+b_1(jw) + b_0} \qquad \text{xqf434}
$$

olarak elde edilir.

Simdi giris isareti $r(t) = A\cos(pt+\phi)$ olmasi durumunda $x(t)$ ne olur onu hesaplayalim. (ref: xqg432) den acikca goruldugu gibi

$$
x(jw) = H(jw)R(jw) \qquad \text{xqf437}
$$

(ref: xqf437) esitliginde $w$ reel bir sayidir, $H(jw)$ belli bir $w$ degeri icin kompleks bir sabit olarak dusunulebilir. $r(w)$ ise $r(t) = A\cos(pt+\phi)$ nin Furier donusumudur. (ref: xqfq357) den

$$
r(w) = \mathcal{F}[A\cos(pt+\phi)] \; = A\pi[\delta(w+p)e^{-\phi} + \delta(w-p)e^{\phi}] \qquad \text{xqf439}
$$

oldugundan $r(w)$ nin bu degeri (ref: xqf437) de yerine koyalim.

$$
\begin{aligned}
x(jw) \; &= H(jw)A\pi[\delta(w+p)e^{-\phi} + \delta(w-p)e^{\phi}] \\
&A\pi[H(jw)\delta(w+p)e^{-\phi} + H(jw)\delta(w-p)e^{\phi}]
\end{aligned} \qquad \text{xqf443}
$$

Esitligi elde edilir. Ote yandan

$$
\delta(x-a)f(x) = \delta(x-a)f(a) \qquad \#
$$

oldugundan (ref: xqf443) esitligi

$$
x(jw) = A\pi[H(-jp)\delta(w+p)e^{-\phi} + H(jp)\delta(w-p)e^{\phi}] \qquad \text{xqf445}
$$

haline gelir. $H(-jp)$ ve $H(jp)$ ifadelerini

$$
H(-jp) = |H(-jp)|e^{j\angle H(-jp)} \qquad H(jp) = |H(jp)|e^{j\angle H(jp)}
$$

seklinde yazip

$$
|H(-jp)| = |H(jp)| \qquad \angle H(-jp) = -\angle H(jp)
$$

oldugu dikkate alinirsa ref: xqf445 esitligi

$$x(jw) = A\pi|H(jp)|\left[\delta(w+p)e^{-j(\phi+\angle H(jp))} + \delta(w-p)e^{j(\phi+\angle H(jp))}\right] \qquad \text{xqf447}$$

(ref: xqf447) esitliginin her iki tarafinin Ters Furier donusumunu alalim.

$$x(t) = A|H(jp)|cos(pt+\phi+\angle H(jp)) \qquad \text{xqf449}$$

elde edilir. Dolayisiyla (ref: xqe401) ile verilen diferansiyel denklemin giris fonksiyonu $r(t) = A\cos(pt+\phi)$ seklinde bir sinuzoidal fonksiyon ise sistemin cikis fonksiyonu $x(t)$ de bir sinuzoidal fonksiyondur. $x(t)$ nin genligi $H(jp)$ ile carpilmis, acisina da $\angle H(jp)$ kadar bir deger ilave edilmistir.

Ornek Problem: $4\frac{dx}{dt} + 6x = r(t)$ dif denkleminde $r(t) = 60\cos(3t)$ olduguna gore dif denklemin ozel cozumunu bulun.

Cozum: ref: xqf434 den sisteme iliskin transfer fonksiyonu

$$H(jw) = \frac{1}{4jw+6} \qquad \#$$

Burada $p = 3$ icin

$$H(j3) = \frac{1}{4j3+6}$$

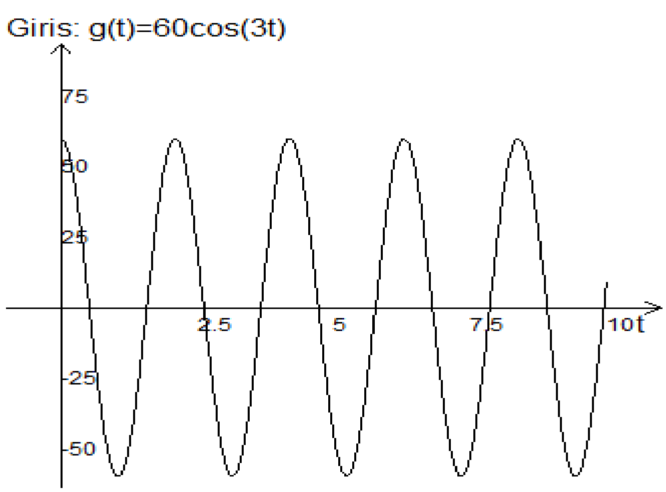
$$|H(j3)| = |\frac{1}{12j+6}| = \frac{|1|}{|12j+6|} = \frac{1}{13.41} = 0.0745 \qquad \#$$

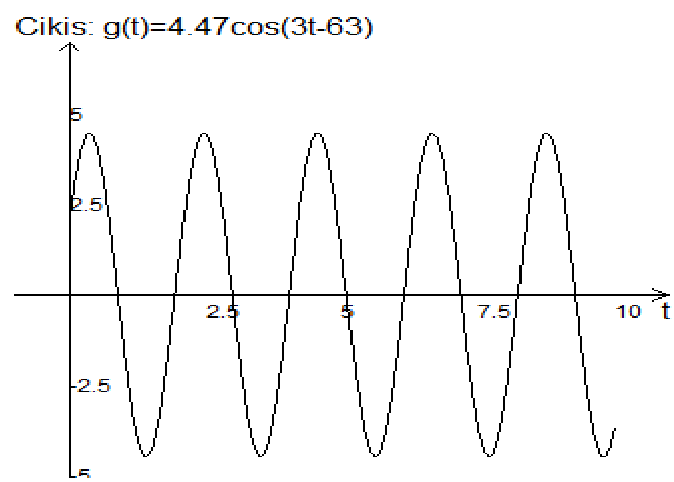
$$\angle H(j3) = \angle 1 - \angle(12j+6) = 0 - 63.4 = -63.4$$

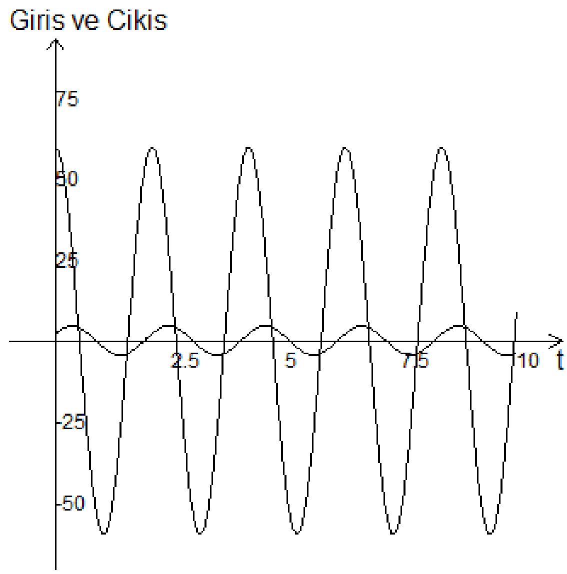
elde edilir. Boylece

$$x(t) = 60 \ \ 0.0745\cos(3t-63.4) = 4.47\cos(3t-63.4) = 2\cos(3t) + 4\sin(3t)$$

bulunur.






Sekil(xqs717) Lineer sistemin cikis ve girisi

Cikista sinuzoidal isaretin genligi artacak (veya azalacak) ve isaret bir miktar saga kayacaktir. Genlikteki artma(azalma) miktari ve isaretin kayma miktari lineer sistem parametrelerine ($|H(w)|, \phi$) baglidir. Isaretin saga kaymasi gercekte isaretin girisi ile cikisi arasindaki zaman gecikmesini verir. Yani lineer sistem degisik frekanslardaki ( $w$'lardaki) isaretleri degisik miktarda gecikmelerle cikisa yansitacaktir. Sistem lineer oldugundan birden fazla giris olursa toplam cikis cikislarin ayri ayri toplamina esit olacaktir. Diger bir ifade ile $r(t)$ farkli sinuzoidal bilesenlerden meydana gelmis ise her bilesenin ayri ayri cikisi hesaplanir ve ve butun cikislar toplanarak toplam cikis hesaplanir. Yani giris fonksiyonu

$$r(t) = a_1 \cos(w_1 t + \theta_1) + a_2 \cos(w_2 t + \theta_2) + a_3 \cos(w_3 t + \theta_3) + \ldots\ldots + a_n \cos(w_n t + \theta_n)$$

ise cikis

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 |G(jw_1| \cos(w_1 t + \theta_1 + \angle G(jw_1)) + a_2 |G(jw_2| \cos(w_2 t + \theta_2 + \angle G(jw_2)) \\ &\quad + a_3 |G(jw_3| \cos(w_3 t + \theta_3 + \angle G(jw_3)) + \ldots\ldots + a_n |G(jw_n| \cos(w_n t + \theta_n + \angle G(jw_n)) \end{aligned}$$

sekinde olacaktir.

## Birim Impuls Girisi

Sistem giris fonksiyonu birim impuls olursa durum ne olur onu inceleyelim. Impuls fonksiyonunun Furier donusumu (ref: xqg301)'den

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

olarak bulunmustu. O halde giris birim impuls ise cikisin Furier donusumu

$$X(w) = H(jw)\, 1 \; = H(w) \qquad \text{xqf476}$$

olur. Yani sisteme birim impuls uygulandiginda cikisin Furier donusumu sistemin transfer fonksionunu verir. Bu sonuc transfer fonksiyonlari bilinmeyen sistemlerin transfer fonksiyonlari hakkinda bilgi elde etmek icin kullanilir.

Bu buldugumuz sonuc gercekte konvolusyon teoreminin bir sonucudur. lineer sistem teorisinden gore $g(t)$ lineer sistemin birim impuls cevabi olmak uzere

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(p) r(t-p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-p) r(p) dp \qquad \text{xqf471}$$

bagintisi vardir. Ote yandan konvolusyon teoremine gore (ref: xqf471) esitligi saglanirsa (ref: xqf476) bagintisi da saglanir.

Ornek Problem $4\frac{dx}{dt} + 6x = r(t)$ dif denkleminde $r(t) = 5\cos(0.1t) + 4\cos(3t+40) + 12\cos(5t-25) + 30\cos(10t)$ olduguna gore dif denklemin ozel cozumunu bulun.

Cozum: Sistemin transfer fonksiyonu (ref: xqp413) deki ile aynidir.

$$\begin{array}{ll} |H(j0.1)| = 0.166, & \angle H(j0.1) = -3.8 \\ |H(j3)| = 0.0745, & \angle H(j3) = -63.4 \\ |H(j5)| = 0.047, & \angle H(j5) = -73 \\ |H(j10)| = 0.024, & \angle H(j10) = -81 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 * 0.166\cos(0.1t - 3.8) + 4 * 0.074\cos(3t + 40 - 63.4) \\ &+ 12 * 0.047\cos(5t - 25 - 73) + 30 * 0.024\cos(10t - 81) \end{aligned}$$

$$x(t) = 0.83\cos(0.1t - 3.8) + 0.298\cos(3t - 23) + 0.57\cos(5t - 98) + 0.74\cos(10t - 81$$

Goruldugu gibi giris sinuzoidal terimler ise cikis ifadesi bu yontemle kolayca hesaplanmaktadir.

## $H(jw)$ Transfer Fonksiyonunun Ozellikleri

(ref: xqf434)'de verilen transfer fonksiyonunu $(jw)$ nin tek ve cift terimlerini bir gurupta toplayarak yazalim.

$$H(jw) = \frac{(a_0 - a_2w^2 + a_4^4 - a_6w^6 + \ldots\ldots) \; + jw(a_1 - a_3w^2 + a_5w^4 - a_7w^6\ldots\ldots)}{(b_0 - b_2w^2 + b_4w^4 - b_6w^6\ldots\ldots) \; + jw(b_1 - b_3w^2 + b_5w^4 - b_7w^6\ldots\ldots)} \qquad \text{xqfc26}$$

$H(jw)$nin pay ve paydasi reel ve sanal kisimlarina ayirip

$$\begin{array}{ll} A = a_0 - a_2w^2 + a_4^4 - a_6w^6\ldots\ldots & B = a_1 - a_3w^2 + a_5w^4 - a_7w^6\ldots\ldots \\ C = b_0 - b_2w^2 + b_4w^4 - b_6w^6\ldots\ldots & D = b_1 - b_3w^2 + b_5w^4 - b_7w^6\ldots\ldots \end{array}$$

tanimlari yapilirsa (ref: xqfc26) esitligi

$$H(jw) = \frac{A + jwB}{C + jwD} \qquad \text{xqfc28}$$

seklinde yazilabilir. Ote yandan $w$ yerine $-w$ yazilirsa

$$H(-jw) = \frac{A - jwB}{C - jwD} \qquad \text{xqfc30}$$

olacagi aciktir. $H(jw)$ ve $H(-jw)$ nin genlikleri hesaplandiginda

$$|H(jw)| = |H(-jw)| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

oldugu acikca gorulur. Ote yandan

$$\begin{aligned} \angle H(jw) &= argtg\frac{B}{A} - argtg\frac{D}{C} \\ \angle H(-jw) &= -argtg\frac{B}{A} + argtg\frac{D}{C} \end{aligned} \qquad \#$$

olduguda aciktir. Sonuc olarak

$$|H(jw)| = |H(-jw)| \qquad \angle H(jw) = -\angle H(-jw) \qquad \text{xqfc36}$$

Yani lineer sistemin genlik fonksiyonu $w$'nin cift fonksiyonu, faz fonksiyonu ise $w$'nin tek fonksiyonudur.

# Frekans Spektrumu

Sisteme giren frekanslardaki $H(jw)$ degeri cikisi hesaplamak icin yeterli. Isaret analizi ve otomatik kontrol alanlarinda sistemin degisik frekanslardaki davranisinin bilinmesi cok fayda saglar. Sisteme iliskin $|H(jw)|$ ve $\angle H(jw)$ degerlerinin $w = 0$ $w = \infty$ arasi degerleri bir tablo ve grafik halinde duzenlenir

$|H(jw)|$'nin $w$'yagore degisimini gosteren grafige sistemin **genlik spektrumu** $\angle G(jw)$, $w$ grafigine sistemin **aci** (**faz**) **spektrumu** denir. Iki grafik beraberce **sistemin frekans spektrumu** olarak adlandirilir.

Ornek Problem: $\frac{dx}{dt} + 2x = r(t)$ diferansiyel denklemi ile verilen sistemin genlik ve faz spektrumunu cizin.

Cozum: iki tarafin Furier donusumunu alarak Transfer fonksiyonu

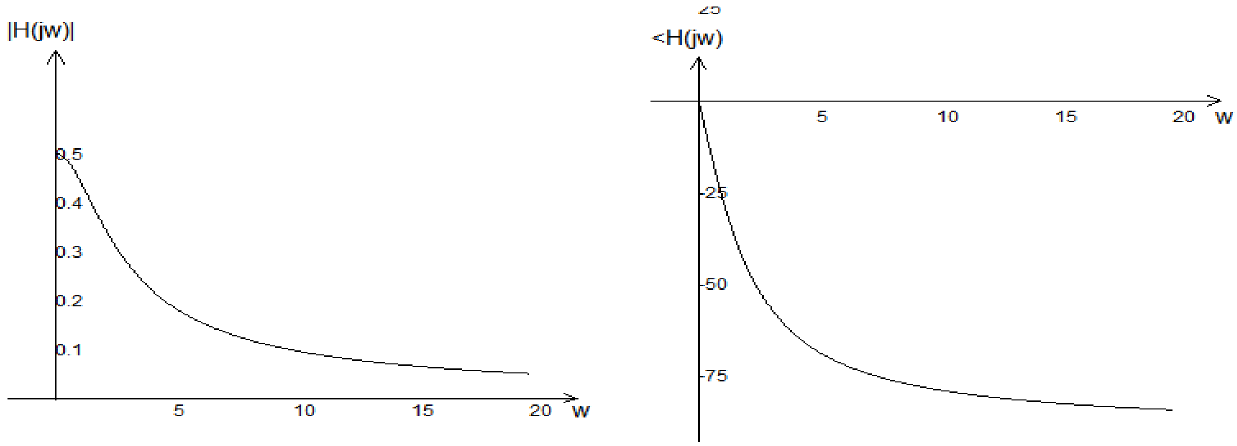
$$H(jw) = \frac{1}{jw + 2}$$

olur. Genlik ve faz ifadeleri de

$$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{w^2 + 4}} \qquad \angle G(jw) = -arg\tan\frac{w}{2}$$

olacaktir. Degisik $w$ degerleri icin $|H(jw)|$ ve $\angle G(jw)$ degerleri Tablo(ref: xqt421) de gosterilmistir. Sisteme iliskin genlik ve spektrumu sekil(ref: xqs435) de gosterilmistir. Genlik ve faz spektrumu cizilirken $|H(jw)|$ ve $\angle H(jw)$ nin degisim gosterdigi aralik gosterilmelidir. Mesela sekil(ref: xqs435)de $w = 0$ ile $w = 5$ arasindaki degisim oldukca fazla iken $w > 10$ icin spektrumda fazla bir degisklik yoktur.

| $w$ | 0 | 0.1 | 0.4 | 1 | 1.5 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2 | 2.5 | 5 | 10 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|H(jw)\|$ | 0.5 | 0.49 | 0.49 | 0.44 | 0.4 | 0.38 | 0.37 | 0.36 | 0.35 | 0.31 | 0.18 | 0.09 | 0.00 |
| $\angle H(jw)$ | 0 | -2.86 | -11.3 | -26.6 | -36.9 | -40.4 | -42 | -43.5 | -45 | -51.3 | -68.2 | -78.7 | -88. |




Sekil(xqs435) $H(jw) = \frac{1}{jw+2}$ transfer fonksiyonuna iliskin genlik ve fasz spektrumu.

Genlik spektrumunda genligin maximum degerinin $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sine dustugu $w$ degeri **kesim frekansi**(**cutt off frequency**) olarak adlandirilir ve $w_c$ ile gosterilir. Ornek olarak sekildeki spektrumda genligin maximum degeri $w = 0$ icindir ve degeri $0.5$ dir. Genligin $|H(jw)| = \frac{0.5}{\sqrt{2}} = 0.35$ oldugu $w$ degeri kesim frekansidir.

$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{w^2+4}} = 0.35 \qquad \sqrt{w^2+4} = \frac{1}{0.3536} \qquad w^2 + 4 = 8 \qquad w = 2$ olarak bulunur.

Yani bu sistemin kesim frekansi $w_c = 2$ dir. $H(jw)$ burada oldugu gibi birinci dereceden basit fonksiyonlar ise kesim frekansi kolayca hesaplanabilir. Ancak cogu kere $G(jw)$in derecesi birden buyuktur ve analitik hesaplama mumkun olmaz. Bu durumda genlik spektrumunun grafigi incelenerek kesim frekansi tahmin edilir.

## Bode Diyagrami

Sistemlerin spektrumlari her zaman sekil(ref: xqs435) deki gibi basit degildir. Genis bir $w$ araliginda $H(jw)|$ ve $\angle H(jw)$ buyuk degisimler gosterebilir. Boyle durumlarda w ve H(jw)| eksenleri logaritmik olarak alinir. Spektrumun bu sekilde logaritmik olarak gosterilmesine **Bode diyagrami** denir.

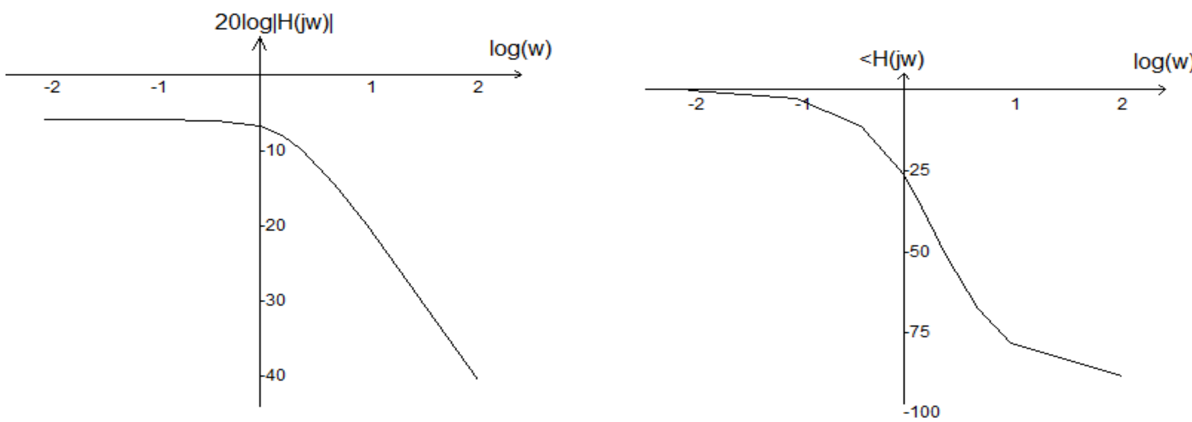
Ornek Problem: $H(jw) = \frac{1}{jw+2}$ transfer fonksiyonu ile verilen sistemin Bode diyagramini cizin.

Cozum:w nin cesitlidegerlerine karsilikgelen genlik ve faz degerlerini bir tabloda gosterelim.

| $w$ | 0 | 0.1 | 0.4 | 1 | 1.5 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert H(jw)\rvert$ | 0.5 | 0.499 | 0.490 | 0.447 | 0.4 | 0.380 | 0.371 | 0.362 | 0.353 | 0.312 |
| $\angle H(jw)$ | 0 | -2.862 | -11.31 | -26.57 | -36.87 | -40.36 | -41.99 | -43.53 | -45 | -51.34 |
| $log(w)$ | $-\infty$ | -1 | -0.39 | 0 | 0.176 | 0.230 | 0.255 | 0.278 | 0.301 | 0.397 |
| $20log(\lvert H(w)\rvert)$ | -6.021 | -6.031 | -6.191 | -6.99 | -7.959 | -8.382 | -8.597 | -8.814 | -9.031 | -10.11 |

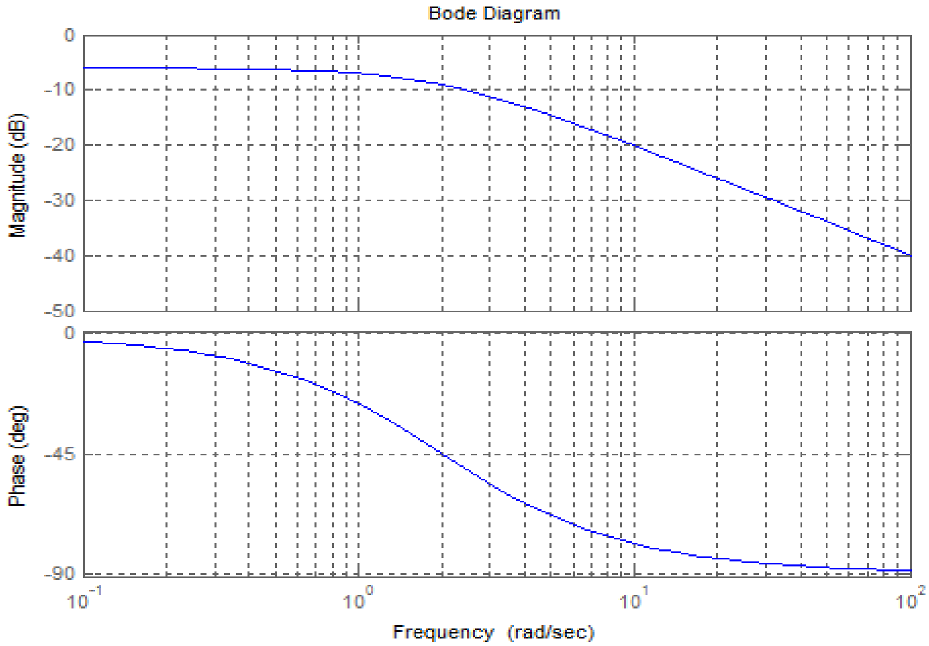
Tablo(xqt483) $H(jw) = \frac{1}{jw+2}$ transfer fonksiyonu ile verilen sisteme ait

Bode diyagraminin tablosu




Sekil(xqs483) $H(jw) = \frac{1}{jw+2}$ transfer fonksiyonu ile verilen sisteme ait

Bode diyagrami grafigi




Sekil(xqs484) $H(jw) = \frac{1}{jw+2}$ MATLAB da cizilmis Bode diyagrami grafigi

Rezonans olayi

Rezonans olayi elektrik ve mekanik sistemlerde cok raslanan ve normalde istenmeyen hatta bazan tehlikeler doguran bir olaydir. 1932 yilinda insa edilen Meshur Tacoma Narrow koprusu trafige acildiktan kisa sure sonra cokmustur. Cokme nedeni ruzgar dolayisiyla etki eden kuvvetin koprunun rezonans frekansinda olmasidir.

Asagidaki dif denklemi gozonune alalim.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = r(t) \qquad \text{xqf481}$$

Sisteme iliskin transfer fonksiyonu

$$H(jw) = \frac{X(jw)}{R(jw)} = \frac{1}{w^2 - p^2} \qquad \#$$

Simdi sisteme $A\cos(pt)$ seklinde bir giris isareti gelsin $x(t)$ cikisinin ne olacagini hesaplayalim. (ref: xqf449) dan $x(t)$ isareti

$$x(t) = A|H(jp)|\cos(pt + \angle H(jw)) \qquad \#$$

seklinde olacaktir. Fakat $H(jp) = \infty$ dir. Yani giris $r(t) = A\cos(pt)$ oldugunda cikisin genligi asiri buyumekte ve sonsuz olmaktadir. Halbuki giris $r(t) = A\cos(qt) \quad q \neq p$ olsa cikis sonsuz degildir. (ref: xqf481)de verilen sistemin $cos(pt)$ seklindeki bir girise karsi duyarliligi vardir. Iste bu sistemin rezonans frekansi $p$ dir.

Rezonans olayini fiziksel olarak soyle aciklayabiliriz. Sekil(ref: xqs481) deki gibi bir noktaya bagli ve bu nokta etrafinda gidip gelen bir sarkac dusunun. Surtunmesiz varsayilan ortamda cisme herhangibir kuvvet gelmedikce sarkac sabit bir hizla gidip gelir. Sarkacin gidip gelme zamani sarkacin boyuna ve agirligina baglidir yani sabittir ve bu sarkacin periyodunu(T) verir. (salinim frekansi $\frac{1}{T}$ )

Simdi sarkac tam O noktasindan gecerken $+x$ yonunde bir kuvvet uygulansin. Bu kuvvet sarkacin salinim genligini bir miktar artirir. Salinim frekansinin degismedigini varsayarak arasira $+x$ yonunde kuvvet uygulayalim. Kuvvetin uygulama anlari ile sarkacin OA dan gecme ani hep cakisik olursa sarkacin genligi gittikce artacaktir.

f?igure “xqs481 a)surtunmesiz sarkac

f?igure “xqs482 Sarkacin rezonans frekansinda kuvvet uygulanma durumu. a)sarkacin serbest olarak yapacagi hareketi, b)Sarkaca uygulanan kuvvet c)Sarkacin kuvvet etkisinde yaptigi hareket.

f?igure “xqs483 Sarkacin rezonans frekansindan farkli frekansda kuvvet uygulanma durumu. a)sarkacin serbest olarak yapacagi hareketi, b)Sarkaca uygulanan kuvvet c)Sarkacin kuvvet etkisinde yaptigi hareket.

Konuyu biraz daha derinlestirelim, sarkacta sallanan cismin icinde bir motor bulunsun ve motor Hem $+x$ hem de $-x$ yonunde kuvvet uygulayabilsin. Eger motor A dan B ye giderken hep $+x$ ve sarkac B den A ya giderken hep $-x$ yonunde kuvvet uygulanirsa sarkacin genligi surekli olarak artar. sekil(ref: xqs482) de bu durum gisterilmistir. Ote yandan Motorun sarkaca uyguladigi kuvvet ile sarkacin hareketi esit peryotlu olmazsa sekil(ref: xqs483) deki gibi bir durum ortaya cikar. Sarkacin salinim genligi bazan artarken bazanda azalir,fakat hicbir zaman genlik rezonans halindeki gibi sonsuza gitmez.

Gercek sarkac modelinde surtunme kuvveti de modellemeye dahil edilir. Bu durumda $c$ surtunme katsayisi olmak uzere sarkaca iliskin transfer fonksiyonu

$$H(jw) = \frac{1}{w^2 - p^2 + jwc} \qquad \#$$

sekline gelir. Bu halde $w = p$ frekansinda uygulanan isaret yine kuvvetlendirilerek cikisa tasinir fakat genlik sonsuza gitmez. Bu durumda $w = p$ frekansina literaturde sistemin **kritik frekansi**, **kritik hizi** denir.

Mekanik sistemlerin birden fazla hatta sonsuz sayida kritik frekansi vardir. Ancak mekanik sistemlere sisteme uygulanacak kuvvetlerin frekanslari yuksek olamayacagindan yuksek frekanslardaki kritik hizlarin pratikte bir degeri yoktur.

Pervane, mil gibi donen cisimlerin kritik frekanslarda calismalari cok tehlikelidir. Bu yuzden bu gibi cisimler dizayn edilirken sistemin kritik frekqanslari normal calismadaki devir sayilarindan uzakta olacak sekilde ayarlanir.

Kritik frekans kavraminin birbaska uygulama alani otomobil dizayninda karsimiza cikar. Yolda giden otomobile yolun bozuklugu dolayisiyla uygulanan kuvvetlerin spektrumu sekil() deki gibi olsun. Sekil() de kotu dizany edilmis bir araba ve sekil() de iyi dizanyn edilmis arabalarin transfer fonksiyonlari goruluyor. Sekil() deki araba kendine gelen bir kuvveti yolcuya iletirken Sekil() ve () deki arabalar zayiflatarak iletecektir.

*************************************

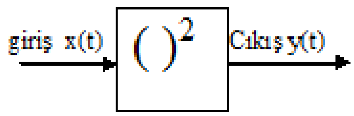
Haliyle boyle bir duzenekte $m$ kutlesinin hareketi ile, bu hareket neticesi olusan $V_{AB}$ geriliminin orantili olmasi istenir.

yapilacak isler 1)sistem tarifi giris cikis kavrami linnerlik ve nonlineerlik(saturasyon) kareselik vs lineer ve nonlineer sistemin ayristirilabilirligi dinamik sistemlerin analizi anolog ve ayrik sistemler

****************************************************************** lineer dinemik sisteme iki giris var lineerlik sagla?

# Cozumlu Problemler

C.P.4.1 Sekil(ref: xq4s506) deki sistemin girisine $x(t) = a\cos(pt) + b\cos(qt)$ isareti uygulaniyor. a) $y(t)$ cikisini hesaplayiniz. b)Isaretin giriste ve cikista tek tarafli spektrumunu (a=4, p=5, b=3, q=7 icin ) cizin. c)Sistem lineermidir, spektrumlari yorumlayarak cevaplayin.




Sekil(xq4s506)

Cozum: Sistem girisin karesini alarak cikisa vermektedir. O halde

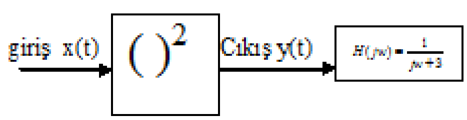
$$y(t) = [x(t)]^2 = [a\cos(pt) + b\cos(qt)]^2$$

$$= a^2\cos^2(pt) + b^2\cos^2(qt) + 2ab\cos(pt)\cos(qt)$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2pt) + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2}\cos(2qt) + ab\ \cos((p+q)t) + ab\ \cos((p-q)t)$$

olacaktir.

C.P.4.2 Sekil(ref: xq4s507) deki sistemin girisine $x(t) = 2\cos(7t) + 3\cos(11t)$ isareti uygulaniyor. $y(t)$ cikisini hesaplayiniz.




Sekil(xq4s507) giris x(t)=2cos 7t+3cos 11t sistem $()^2$ ve $G(s) = \frac{1}{s+3}$ seri bagli cikis z(t)

Cozum (C.P.ref: xq4p506)'den $a = 2,\ b = 3,\ p = 7,\ q = 11$ koyarak

$$y(t) = 6.5 + 2\cos(14t) + 4.5\cos(22t) + 6\cos(18t) + 6\cos(4t)$$

olarak bulunur. Lineer sisteme giren $\cos(wt)$ isareti cikista $|G(jw)|\cos(wt + \angle G(jw))$ seklinde olacakir. O halde

$$z(t) = 2.17 + 0.139\cos(14t - 77) + 0.202\cos(22t - 82) + 0.32\cos(18t - 80)$$
$$+ 1.2\cos(4t - 53)$$

seklindedir.

C.P.4.3 Sekil(ref: xq4s607)'de pratikte cok raslanan bir kuvvetlendiricinin giris-cikis bagintisi verilmistir. Sistemin girisine $x(t) = \cos(w_0 t)$ isareti giriyor. δ

$= 3.53 \;\; T_0 = 4, \;\; \alpha = 0.706$ olduguna gore Cikisdaki isareti sinuzoidal terimlerin toplami formunda yazin.

```
           ro |  _______          ro      -----        ----       ---
    -alpha       | / alpha                 *      *      *    *     *
     ----|----|/-|-----------      -*--|---|-*----*------*---*------
               /|                          beta   ----        ---
    ______ /   |-ro
```

f?igure[hbt]   “xq4s607 giris $x(t) = \cos(w_0 t)$ saturasyon sistemi
  Nonlineer elemanin giris cikis bagintisi

$$m = \frac{\delta}{\alpha}$$

olmak uzere,

$$y = \begin{cases} -\delta & x < -\alpha \\ \\ mx & -\alpha < x < \alpha \\ \delta & x > \alpha \end{cases} \tag{\#}$$

Seklindedir. Buna gore cikis isareti sekil(ref: xq4s617)'deki gibi olacaktir. Burada

$$\alpha = \cos(w_0\beta) \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{1}{w_0} argcos(\alpha)$$

oldugu aciktir.

f?igure[hbt]   “xq4s617 giris $x(t) = A\cos(w_0 t)$ saturasyon sistemi
  (C.P.ref: xq1p761)'de bu isareti Furier serisine acmis ve Furier serisi katsayilari

$$b_p = 0$$

$$a_p = 0, \quad p = 0, 2, 4, 6, 8 \ldots icin$$

$$a_1 = \frac{4\delta}{\pi}\sin(w_0\beta) + m\left(1 - \frac{4\beta}{T_0} - \frac{1}{\pi}\sin(2w_0\beta)\right)$$

ve $p = 3, 5, 7, 9, \ldots$ icin

$$a_p = \frac{4\delta}{p\pi}\sin(pw_0\beta) + \frac{4m}{\pi}\left\{-\frac{1}{2(p-1)}\sin[(p-1)w_0\beta] - \frac{1}{2(p+1)}\sin[(p+1)w_0\beta]\right\}$$

olarak bulunmustu.

$$\delta = 3.53 \;\; T_0 = 4, \;\; \alpha = 0.706, \;\; m = \frac{\delta}{\alpha} = 5, \;\; \beta = \frac{1}{w_0} argcos(\alpha) = 0.5$$

koyup $a_1, a_3, a_5, \ldots\ldots$ katsayilari hesaplanirsa cikis isareti

$$g(t) = 4.73\cos(1.57t) - 0,5\cos(4.71t) + 0.16\cos(7.85t)0 + 0.09\cos(11.0t)$$

seklinde yazilabilir.

$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0$ dif denklemini $x(0) = 1$ ve $\dot{x}\ (0) = 10$ Ÿartlar i‡in ‡”znz.

Karakteristik denklem ve k”kleri $q^2 - 6q + 9 = 0 \quad \rightarrow q_1 = 3\ \ q_2 = 3$ yani k”kler birbirine eŸit (katl k”k). €”zm $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{3t}$ Ÿeklinde de§il, fakat $x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$ Ÿeklindedir. Yani ilave olarak bir $t$ ‡arpan gelmiŸtir.

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1e^0 + c_20e^0 = 1 \rightarrow c_1 + 0 = 1 \rightarrow c_1 = 1$$

$$\dot{x}\ (t) = 3c_1e^{3t} + c_2e^{3t} + 3c_2te^{3t} = e^{3t}(3c_1 + c_2) + 3c_2te^{3t}$$

$$\dot{x}\ (0) = 10 \Rightarrow e^0(3c_1 + c_2) + 3c_20e^0 \Rightarrow c_2 = 7$$

Dolaysyla ‡”zm

$$x(t) = e^{3t} + 7te^{3t}$$

Ÿeklinde olacaktr.

Asagidaki sistemlerin karali olup olmadigini belirtiniz.

**1**. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$

**2**. $\frac{d^4x}{dt^4} + 18\frac{d^2x}{dt^2} + 81 = 0$

**3**. $\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = \cos 5x$

**4**. $\frac{d^2x}{dt^2} - 25x = 0$

**5**. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$

**6**. $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

**7**. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 13 = 0$

**8**. $\frac{d^4x}{dt^4} - 8\frac{d^3x}{dt^3} + 42\frac{d^2x}{dt^2} - 104\frac{dx}{dt} + 169 = 0$

**9**. $\frac{d^4x}{dt^4} + 8\frac{d^3x}{dt^3} + 42\frac{d^2x}{dt^2} + 104\frac{dx}{dt} + 169 = 0$

**10**. $\frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 1 = 0$

**11**. $\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 1 = 0$

Katrakteristik denklemin kokleri ve kararlilik analizi asagidaki gibi olacaktir.

**1**. $\alpha_1 = -3j,\ \ \alpha_2 = 3j,$ kararli.

**2**. $\alpha_1 = 3j,\ \ \alpha_2 = 3j,\ \ \alpha_3 = -3j,\ \ \ \alpha_4 = -3j$ kararsiz.

**3**. $\alpha_1 = -5j,\ \ \alpha_2 = 5j,$ kararsiz($\cos(5t)$ girisinden dolayi.

**4**. $\alpha_1 = -5,\ \ \alpha_2 = 5,$ kararsiz.

**5**. $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,$ kararli.

**6**. $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,$ kararsiz (diferansiyel denklemi cozerek arastiriniz).

**7**. $\alpha_1 = 2+3j,\ \alpha_2 = 2-3j$ kararsiz.

**8**. $\alpha_1 = 2+3j,\ \alpha_2 = 2+3j,\ \alpha_3 = 2-3j,\ \ \alpha_4 = 2-3j$ kararsiz.

**9**. $\alpha_1 = -2+3j,\ \alpha_2 = -2+3j,\ \alpha_3 = -2-3j,\ \ \alpha_4 = -2-3j$ kararli.

**10**. $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = -1,\ \ \alpha_4 = -1$ kararli.

**11**. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1,\ \ \alpha_4 = 1$ kararsiz.

$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 12\cos(3t) + 15\sin(3t)$ diferansiyel denkleminin tam cozumunu bulun.
Homojen cozum:Karakteristik polinom ve kokleri

$$q^2 + 9q = 0 \quad\rightarrow\quad q_1 = 3j,\ q_2 = -3j$$

oldugundan homojen cozum

$$x_h(t) = c_1e^{3jt} + c_2e^{-3jt} = A\cos(3t) + B\sin(3t)$$

seklinde olacaktir. Burada $A, B$ keyfi sabitlerdir.
Homojen cozum ikinci taraftaki terimi icinde bulundurdugundan Ozel cozum icin tahmini cozum

$$x_o(t) = t(C\cos((3t) + D\sin(3t))$$

seklinde olacaktir.

$$\frac{dx_o}{dt} = C\cos((3t) + D\sin(3t) + t(-3C\sin(3t) + 3D\cos(3t))$$

$$\frac{d^2x_o}{dt^2} = \ldots\ldots$$

degeri hesaplanip diferansiyel denklemde yerine konulup gerekli sadelestirmeler yapilirsa

$$6D\cos(3t) - 6C\sin(3t) = 12\cos(3t) + 15\sin(3t)$$

elde edilir. Buradan

$$C = -2.5, \quad D = 2$$

bulunur. Dolayisiyla diferansiyel denklemin tam cozumu

$$x_t(t) = x_h(t) + x_o(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + t(-2.5\cos(3t) + 2\sin(3t)$$

olarak elde edilir.

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 52x = 0$$ xqe411

sabit katsayl dif denkleminin homojen(oz) ‡”zmn bulunuz. Karakteristik polinom

$$q^3 - 8q^2 + 29q - 52 = 0$$

olup bu polinomun kokleri $q1 = 4,\ \ q_2 = 2+3j,\ \ q_3 = 2-3j$ dir. Dolayisiyla (ref: xqe411) dif denkleminin oz (homojen) €”zmu

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{(2+3j)t} + c_3 e^{(2-3j)t} \\ &= c_1 e^{4t} + e^{2t}(c_2 e^{3jt} + c_3 e^{-3jt}) \\ &= c_1 e^{4t} + e^{2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) \end{aligned} \qquad \text{xqe412}$$

seklindedir.

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 52x = 386e^{5t} - 104t + 6 \qquad \text{xqe413}$$

dif denkleminin ozel cozumunu bulun. Dif denklemin ikinci tarafini verebilecek $x(t)$, ifadesi $d, a, b$ birer sabit olmak uzere

$$x(t) = de^{5t} + at + b \qquad \#$$

seklinde olmalidir. O halde

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 5de^{5t} + a \\ \tfrac{d^2x}{dt^2} &= 25de^{5t} \\ \tfrac{d^3x}{dt^3} &= 125de^{5t} \end{aligned}$$

ifadeleri (ref: xqe413) de yerine konursa

$$\begin{aligned} &125de^{5t} - 25de^{5t} + 29(de^{5t} + a) - 52(de^{5t} + at + b) = 386e^{5t} - 104t + 6 \\ &193de^{5t} - 52at + 29a - 52b = 386e^{5t} - 104t + 6 \end{aligned} \qquad \#$$

Buradan $d = 2,\ a = 2,\ b = 1$ olarak bulunur, boylece ozel cozum

$$x(t) = 2e^{5t} + 2t + b \qquad \text{xqe415}$$

olarak bulunur.

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 52x = 386e^{5t} - 104t + 6 \qquad \#$$

dif denkleminin tam cozumunu bulun. (ref: xqe412) ve (ref: xqe415) de verilen cozumlerin toplami tam cozumu verir.

$$x(t) = c_1 e^{4t} + e^{2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + 2e^{5t} + 2t + b \qquad \text{xqe418}$$

$\frac{dx}{dt} + 2x = 3\frac{dr}{dt} + r$ dinamik sisteminin frekans spektrumunu cizin, kesim frekansini bulun. $G(s) = \frac{3s+1}{s+2} \quad G(jw) = \frac{3jw+1}{jw+2}$

$$|G(jw)| = \frac{\sqrt{9w^2+1}}{\sqrt{w^2+4}} \qquad \angle G(jw) = arg\tan\frac{3w}{1} - arg\tan\frac{w}{2}$$

| $w$ | 0 | 0.10 | 0.2 | 0.5 | 1. | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 5 | 10. | 100. | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert H(w)\rvert$ | 0.5 | 0.52 | 0.58 | 0.87 | 1.4 | 1.84 | 2.15 | 2.36 | 2.51 | 2.79 | 2.94 | 2.99 | 3 |
| $\angle G(w)$ | 0 | 13.8 | 25.2 | 42.2 | 45 | 40.6 | 35.5 | 31 | 27.3 | 17.9 | 9.4 | 0.9 | 0 |

Sistemin mmaksimum genligi $w = \infty$ icin $|G(jw)| = 3$ olmaktadir. Kesim frekansi genligin $\frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12$ e esit oldugu frekansdir.

$|G(jw)| = \frac{\sqrt{9w^2+1}}{\sqrt{w^2+4}} = 2.12$ esitligi cozulerek bulunabilir. Tabloya bakilirsa genligin 2.12 oldugu deger $w = 1.5$ ile $w = 2$ arasinda olacagi kolayca gorulebilir. $w = 1.8$ icin $|G(j1.8)| = 2.04$ dir. Benzer sekilde denemelerle $|G(j1.9)| = 2.09$ ve $|G(j1.95)| = 2.12$ hesaplanarak $w_c = 1.95$ olarak bulunur.

*********************************************************************************

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 16\frac{d^3x}{dt^3} + 96\frac{d^2x}{dt^2} + 256\frac{dx}{dt} + 256x = 0$$

diferansiyel denleminin cozumunu bulunuz.

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t} + c_3t^2e^{-4t} + c_4t^3e^{-4t}$$

$$\frac{d^5x}{dt^5} - 4\frac{d^4x}{dt^4} + 10\frac{d^3x}{dt^3} + 64\frac{d^2x}{dt^2} + -247\frac{dx}{dt} + 676x = 0$$

diferansiyel denkleminin homojen cozumunu bulun.

$$x(t) = c_1e^{-4t} + e^{2t}(A_1\cos(3t) + B_1\sin(3t)) + te^{2t}(A_2\cos(3t) + B_2\sin(3t))$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 18\frac{d^2x}{dt^2} + 81x = 0$$

diferansiyel denkleminin homojen cozumunu bulun.

$$x(t) = A_1\cos(3t) + B_1\sin(3t) + t\left( A_2\cos(3t) + B_2\sin(3t) \right)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 12\cos(3t) + t\cos(3t)$ diferansiyel denkleminin tam cozumunu bulun.

AYRIK SISTEMLER

Ayrik sistemler de girisi cikisi ayrik isaretler olan sistemlerdir. Analog (surekli) sistemlerin diferansiyel denklemler ile modellenmesi gibi ayrik sistemler de fark denklemleri ile modellenir. Sekil (ref: xq4s541’de gosterilen girisi $x(n)$ cikisi $y(n)$ olan ayrik sistemin modeli

$$y(n) = f(y(n-1), y(n-2), \ldots . y(n-p), x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots . x(n-k) \qquad \#$$

seklinde **fark denklemleri** ile verilir. Burada $x(n)$ o anki giris, $y(n)$ o anki cikis, $x(n-1), y(n-1)$ bir onceki giris ve cikis, $x(n-2), y(n-2)$ iki zaman birimi oncesine ait giris ve cikistir.

```
                      ___________
           x(n)  | Ayrik      |  y(n)
----------------| Sistem     |----------
                 |___________|
```

f?igure[hbt]   “xq4s541 Ayrik sistem modeli

$y(n) = x(n) + x(n-1)y(n-1)$ fark denklemleri ile verilen ayrik sistemde $y(0) = 4,\ x(0) = 2,\ x(1) = 10,\ x(2) = 20,\ x(3) = -100$ olarak veriliyor. $y(1), y(2), y(3)$ degerlerini hesaplayin. Fark denklemlerinde $n = 1$ koyarak

$$y(1) = x(1) + x(0)y(0)$$
$$y(1) = 10 + 2\ \ 4$$
$$y(1) = 18$$

Benzer sekilde $n = 2,\ \ n = 3$ koyarak

$$y(2) = x(2) + x(1)y(1) = 20 + 10\ \ 18 = 200$$
$$y(3) = x(3) + x(2)y(2) = -100 + 200\ \ 20 = 3900$$

elde edilir.

Ayrik sistem temelde bir bilgisayar programidir. Surekli isaretler bolum (ref: xq1b52)’de anlatildigi gibi A/D cevirici vasitasiyla ayrik hale getirilir ve ayrik sisteme giris olarak verilir. Ayrik sistem sekil(ref: xq4s544)’de oldugu gibi otomatik kontrol sisteminde kontrolor olarak kullanildiginda ayrik sistemin cikisini surekli hale getirmek gerekir. Bu is D/A ceviriciler vasitasiyla yapilir.

```
surekli                  ___________              surekli isaret
isaret      r(t)  | Analog     |  u(t)
| ----------------| Sistem     |------------------- |
|                 |___________|                     |
|                                                   |
|               ___________             ____        |
|  ____   y(n)  | Ayrik      |  x(n)    |    |      |
---|D/A|--------| Sistem     |----------|A/D |-------
   |___| ayrik  |___________|    ayrik |____|
         isaret                  isaret
```

f?igure[hbt] “xq4s544 Ayrik sistemin otomatik kontrol sisteminde kullanimi

Ayrik sistemlerin lineerlik ve zamanla degismeme tanimi bolum(ref: xqb401) de tanimlanan analog sistemlerin lineerlik tanimi gibidir. Lineer zamanla degismeyen ayrik bir sistemin modeli en genel halde

$$\begin{aligned} y(n) &= a_{n-1}y(n-1) + a_{n-2}y(n-2) + \ldots . a_{n-p}y(n-p) \\ &\quad + b_n x(n) + b_{n-1}x(n-1) + b_{n-2}x(n-2) + \ldots . + b_{n-k}x(n-k) \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{n-p}y(n-p) + \sum_{j=0}^{k} b_{n-p}x(n-j) \end{aligned} \quad \text{xqf503}$$

seklindeki fark denklemleri ile verilir.

# Fark Denklemlerinin Cozumu

(ref: xqf503) ile verilen lineer zamanla degismeyen fark denklemlerinin cozumu lineer zamanla degismeyen diferansiyel denklemlerin cozumu gibi homojen ve ozel cozumlerden meydana gelir. Toplam cozum iki cozumun toplamidir. Simdi homojen ve ozel cozumu teker teker inceleyelim.

## Homojen Cozum

Homojen cozum fark denklemlerinde giris fonksiyonu $x(k)$ yok varsayilarak ($x(k) = 0$) bulunan cozumdur. Burada aranan

$$y(n) + a_{n-1}y(n-1) + a_{n-2}y(n-2) + \ldots . a_{n-p}y(n-p) = 0 \quad \#$$

seklindeki fark denklemini saglayan $y(n) = f(n)$ fonksiyonu nedir. Fark denkleminin bu ozel durum icin cozumu

$$y(n) = cq^n \quad \text{xq5fg01}$$

seklinde olacagi gosterilebilir. Bu durumda

$$y(n-1) = cr^{n-1}, \quad y(n-2) = cr^{n-2}, \quad y(n-3) = cr^{n-3}, \ldots\ldots \quad \text{xq5fg03}$$

olacagi aciktir. $x(n) = 0$ alip, (ref: xq5fg01) ve (ref: xq5fg03) tanimlari (ref: xqf503 )de yerine konursa

$$cq^n + ca_{n-1}q^{n-1} + ca_{n-2}q^{n-2} + \ldots c . a_{n-p}q^{n-p} = 0 \quad \#$$

veya esitligin her iki tarafini $q^{p-n}$ ile carparak

$$q^p + a_{n-1}q^{p-1} + a_{n-2}q^{p-2} + \ldots . a_{n-p+1}q + a_{n-p} = 0 \quad \text{xq5fg09}$$

elde edilir. (ref: xq5fg09) esitligi $p$'inci dereceden bir polinomdur. Bu polinomun kokleri ise bilgisayar tarafindan kolayca cozulebilir. Koklerin tek katli kok veya cok katli kok olmasina gore cozum degisik sekil alir.

Polinomun kokleri hepsi birbirinden farkli $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots\ldots .\ q_p$ seklinde olsun. Bu durumda homojen cozum $c_1, c_2, c_3, \ldots . c_p$ keyfi sabitler olmak uzere

$$y(n) = c_1\ q_1^n + c_2\ q_2^n + c_3\ q_3^n + \ldots\ldots\ldots + c_p\ q_p^n \quad \#$$

seklindedir.

polinomunun kokleri katli ise cozume $n$ carpan olarak gelir. $q_1$ koku $r$ katli, $q_2$ koku $s$ katli diger kokler tek katli ise cozum

$$\begin{aligned} y(n) = \; & [c_{11} + c_{12}\, n + c_{13}\, n^2 + \ldots.. c_{1r}\, n^{r-1}]q_1^n \\ & +[c_{21} + c_{22}\, n + c_{23}\, n^2 + \ldots.. c_{1s}\, n^{s-1}]q_2^n \\ & +c_3\, q_3^n + c_4\, q_4^n + \ldots\ldots\ldots + c_{p-r-s+2}\, q_{p-r-s+2}^n \end{aligned} \qquad \#$$

seklinde olacaktir.

Polinomun katsayilari reel oldugundan kompleks kok varsa o kokun eslenigi de kokdur. Bu durumda cozumde sinuzoidal terimler bulunur. (Bkz. C.P.(ref: komplexskoklufarkdenklemi))

## Ozel Cozum

Ozel cozum giris fonksiyonuna baglidir. Lineer diferansiyel denklemlerde oldugu gibi giris fonksiyonu cinsinden tahmini cozumler yapip gercek cozum ile ilgili katsayilar hesaplanir.

$y(k) + 3y(k-1) = 8\cos(5k)$ fark denkleminin ozel cozumunu bulun.

$$y(k) = A\cos(5k) + B\sin(5k) \qquad \text{xq5fg41}$$

seklinde olacagi aciktir. Dolayisiyla

$$\begin{aligned} y(k-1) &= A\cos(5(k-1)) + B\sin(5(k-1)) \\ &= A[\cos(5k)\cos(5) + \sin(5k)\sin(5)]B[\sin(5k)\sin(5) + \cos(5k)\sin(5)] \end{aligned}$$

olacagindan $y(k)$ ve $y(k-1)$ degerleri (ref: xq5fg41)de yerlerine konup gerekli duzenlemeler yapilirsa

$$\cos(5k)[A + 3A\cos(5) - 3B\sin(5)] + \sin(5k)[B + 3A\sin(5) + 3B\cos(5)] = 8\cos(5k)$$

elde edilir. Esitligin her iki tarafindaki sinuslu ve kosinuslu terimler esitlenirse

$$\begin{aligned} A + 3A\cos(5) - 3B\sin(5) &= 8 \\ B + 3A\sin(5) + 3B\cos(5) &= 0 \end{aligned} \qquad \#$$

Buradan $A$ ve $B$ cozulurse

$$A = 1.265, \qquad B = 1.966$$

olarak bulunur. (Acilarin radyan cinsinden olduguna dikkat ediniz) Sonuc olarak ozel cozum

$$y(k) = 1.265\cos(5k) + 1.966\sin(5k)$$

seklinde olacaktir.

Fark denklemleri $Z$ donusumleri kullanilarak daha kolay cozulur. $Z$ donusumleri konusunda ayrintili olarak islenecektir.

# Ayrik Sistemlerin Kararliligi

Ayrik sistemlerde kararlilik tanimi surekli sistemlerin kararlilik tanimina benzer.

((ref: xqf503) ile modellene ayrik bir sistemin kararli olmasi demek $y(n)$ cikisinin

$$lim_{n\to\infty} y(n) < \infty$$

olmasi demektir. Kararlilik icin gerek ve yeter sartlari incelemeden once kararlilik probleminin analasilmasi icin asagidaki ornegi inceleyelim.

$y(n) = ay(n-1) + x(n)$ fark denklemleri ile verilen sistemde $x(n) = \delta(n)$ olduguna gore $y(1), y(2), y(3) \ldots$ degerlerini hesaplayin. Sistemin kararli olmasi icin $a$ ne olmalidir. $x(n) = \delta(n)$ oldugundan tanim geregi $x(0) = 1$ ve diger butun $x(n)$ degerleri sifirdir. $y(-1) = 0$ oldugunu kabul ederek $y(1), y(2), y(3) \ldots$ degerleri hesaplanirsa

$$y(0) = 1, \quad y(1) = a, \quad y(2) = a^2, \quad y(3) = a^3, \ldots\ldots \quad y(k) = a^k, \quad y(\infty) = a^\infty$$

olarak bulunur. Acikca goruldugu gibi eger $|a| > 1$ ise $y(\infty) = a^\infty$ oldugundan $y(\infty) = \infty$ olacaktir. Ote yandan eger $|a| < 1$ ise $y(\infty) = 0$ olacaktir.

(ref: xqf503) ile verilen ayrik sisemin (ref: xq4f642) ile verilen cozumu inceledigimizde acikca goruldugu gibi eger

$$|q_1| < 1, \quad |q_2| < 1, \quad |q_3| < 1, \ldots\ldots \quad |q_p| < 1 \qquad \#$$

sarti saglaniyorsa sistem kararlidir. Aksi halde sistem kararsizdir. Kokler genel halde reel veya kompleks olabileceginden kararlilik sartini su sekilde ozetleyebiliriz.

(ref: xqf503 ) **ile modellenen lineer zamanla degismeyen ayrik bir sistemin kararli olmasi icin gerek ve yeter sart** (ref: xq4f642) **ile verilen koklerin kompleks duzlemde birim daire icinde veya uzerinde olmasidir**. **Ayrica birim daire uzerinde cakisik kok olmamalidir**. Sekil(ref: xq4s662)'de kompleks duzlemde kararli bolge gosterilmisir.

f?igure[hbt] "xq4s662 kompleks duzlemde kararli bolge

Dikkat edilirse sistemin girisi olan $x(n), x(n-1), \ldots$ ifadelerinin katsayilarinin kararliliga bir etkisi yoktur. Sistemin kararli olup olmamasi tamamaen $y(n), y(n-1), \ldots$ terimlerinin katsayilari tarafindan belirlenmektedir. Ozel olarak

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3) + \ldots\ldots \qquad \#$$

seklindeki bir sistem daima kararlidir. Asagidaki degisik sistemlere iliskin kokler ve kararli olup olmadigi gosterilmistir.

**1**. $y(n) - y(n-1) = 0 \quad q = 1$ kararli

**2**. $y(n) + y(n-1) = 0 \quad q = -1$ kararli

**3**. $y(n) + 0.5y(n-1) = 0 \quad q = -0.5$ kararli

**4**. $y(n) + 1.1y(n-1) = 0 \quad q = -1.1$ kararsiz

**5**. $y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 0 \quad q_1 = -1, \quad q_2 = -1,$ kararsiz

**6**. $y(n) - 1.2y(n-1) + 0.72y(n-2) = 0 \quad q_1 = 0.6 + j0.6, \quad q_2 = 0.6 - j0.6,$

kararli

**7**. $y(n) - 1.2y(n-1) + y(n-2) = 0 \quad q_1 = 0.6 + j0.8, \quad q_2 = 0.6 - j0.8,$
kararli

**8**. $y(n) - 1.4y(n-1) + 1.13y(n-2) = 0 \quad q_1 = 0.7 + j0.8, \quad q_2 = 0.7 - j0.8,$
kararsiz

**9**. $y(n) - 2.4y(n-1) + 3.44y(n-2) - 2.4y(n-3) + y(n-4) = 0$
$q_1 = 0.6 + j0.8, \quad q_2 = 0.6 + j0.8, \quad q_3 = 0.6 - j0.8, \quad q_4 = 0.6 - j0.8$ kararsiz

**10**. $y(n) + y(n-2) = 0 \quad q_1 = j, \quad q_2 = -j,$ kararli

**11**. $y(n) + 2y(n-2) + y(n-4) = 0 \quad q_1 = j, \quad q_2 = j, \quad q_3 = -j, \quad q_4 = -j$
kararsiz

# Ayrik sistemlerin Frekans Spektrumu

(ref: xqf503) esitliginiasagidaki formda yazalim.

$$\begin{aligned} & y(n) + a_{n-1}y(n-1) + a_{n-2}y(n-2) + \ldots a_{n-p}y(n-p) \\ & = b_n x(n) + b_{n-1}x(n-1) + b_{n-2}x(n-2) + \ldots + b_{n-k}x(n-k) \end{aligned} \qquad \#$$

(ref: xqf611) esitliginde $y(n)$, $y(t)$ isaretinin $t = nT$ anindaki degeridir. Benzer sekilde $y(n-1)$, $y(t)$ isaretinin $t = nT - T$ anindaki degeri $y(n-2)$, $y(t)$ isaretinin $t = nT - 2T$ anindaki degeridir. $x(n), x(n-1), x(n-2)\ldots$ terimlerinin anlamlarida benzer sekildedir.

$y(n)$ ve $x(n)$ isaretlerinin Furier donusumunun alinabildigini varsayarak (ref: xqf611) esitliginin her iki tarafinin Furier donusumunu alalim. $y(n)$'nin Furier donusumune $\overline{Y(jw)}$, $x(n)$'nin Furier donusumune $\overline{X(jw)}$ dersek,
$y(n-1), y(n-2), \ldots, x(n-1), x(n-2), \ldots$'nin Furier donusumlerini (ref: s66)da verilen zaman ekseninde kaydirma teoremine gore alabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y(n-1)] &= \overline{Y(jw)}e^{-jwT} \qquad \mathcal{F}[Y(n-2)] = \overline{Y(jw)}e^{-2jwT} \qquad \ldots.. \\ \mathcal{F}[x(n-1)] &= \overline{X(jw)}e^{-jwT} \qquad \mathcal{F}[x(n-2)] = \overline{X(jw)}e^{-2jwT} \qquad \ldots.. \end{aligned}$$

Bu bilgiler isiginda ref: xqf503) esitliginin Furier donusumu

$$\begin{aligned} & \overline{Y(jw)} + a_{n-1}\overline{Y(jw)}e^{-jwT} + a_{n-2}\overline{Y(jw)}e^{-2jwT} + \ldots a_{n-p}\overline{Y(jw)}e^{-pjwT} \\ & = b_n\overline{X(jw)} + b_{n-1}\overline{X(jw)}e^{-jwT} + b_{n-2}\overline{X(jw)}e^{-2jwT} + \ldots + b_{n-k}\overline{X(jw)}e^{-jkwT} \end{aligned} \qquad \#$$

Gerekli duzenlemeler yapilirsa

$$\frac{\overline{Y(jw)}}{\overline{X(jw)}} = \frac{1 + a_{n-1}e^{-jwT} + a_{n-2}e^{-2jwT} + \ldots a_{n-p}e^{-pjwT}}{b_n + b_{n-1}e^{-jwT} + b_{n-2}e^{-2jwT} + \ldots + b_{n-k}e^{-jkwT}} \qquad \text{xqfg613}$$

elde edilir. $\frac{\overline{Y(jw)}}{\overline{X(jw)}} = \overline{H(jw)}$ oranina **ayrik sistemin transfer fonksiyonu denir**.

$$\overline{H(jw)} = \frac{1 + a_{n-1}e^{-jwT} + a_{n-2}e^{-2jwT} + \ldots a_{n-p}e^{-pjwT}}{b_n + b_{n-1}e^{-jwT} + b_{n-2}e^{-2jwT} + \ldots + b_{n-k}e^{-jkwT}} \qquad \text{xqfg615}$$

Bu transfer fonksiyonun anlamli olabilmesi icin $y(n)$ nin Furier donusumunun alinabilmesi gerekir baska bir ifadeyle $lim_{n\infty}|y(n)| < \infty$ olmalidir. Bu da (ref: xqf611) de verilen fark denklemlerinin kararli olmasi anlamina gelir. Eger fark denklemleri kararsiz ise bu sekilde bulunan transfer fonksiyonunun bir anlami yoktur.

$\overline{H(jw)}$ fonksiyonunun genlik fonksiyonu $|\overline{H(jw)}|$ cift bir fonksiyon, ve faz fonksiyonu $\angle\overline{H(jw)}$ tek bir fonksiyondur, Yani

$$|\overline{H(jw)}| = \overline{H(-jw)} \qquad \angle\overline{H(jw)} = -\angle\overline{H(-jw)} \qquad \#$$

bagintilari vardir. Bu bagintilar $e^{-njwT}$ terimini sinuzoidal terimler cinsinden yazip reel ve sanal kisimlari ayri ayri yazmakla kolayca isbat edilebilir. Ayrica

$$e^{-jnwT} = e^{-j(nwT+2\pi)} = e^{-jnT(w+2\pi/(nT))}$$

oldugundan

$$\overline{H(jw)} = \overline{H(j(w+\frac{2\pi}{nT})}$$

olacaktir. Yani $\overline{H(jw)}$, $w_0 = \frac{2\pi}{nT}$ periyodu ile periyodiktir.

Analog sistemlerde oldugu gibi giris

$$x(n) = A\cos(pn)$$

olmasi durumunda cikis

$$y(n) = A|\overline{H(jw)}|\cos(pn + \angle\overline{H(jw)})$$

seklinde olacaktir.

$x(n) = -2x(n-1) + 2r(n) + 2r(n-1)$ fark denklemleri ile verilen ayrik sistemin genlik ve faz spektrumlarini cizin.

$$r(nT) = 7\cos(0.5nT + 20) + 2\cos(2nT - 30) + 3\cos(6nT + 40)$$

icin $x(nT)$ yi hesaplayin. $T = 1$ dir. Fark denklemlerinin Furier donusumunu alip transfer fonksiyonunu bulalim.

$$\overline{H(jw)} = \frac{2+2e^{-jwT}}{1+2e^{-jwT}} = \frac{2+2\cos(wT) - 2j\sin(wT)}{1+2\cos(wT) - 2j\sin(wT)}$$

$T = 1$ koyup $w$ ya degisik degerler vererek $\overline{H(jw)}$, $|\overline{H(jw)}|$, $\angle\overline{H(jw)}$ hesaplayalim.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | 0 | 0.1 | 0.5 | 1. | 1.57 | 2 | 2.5 | 5 | 6 | 6.28 | 6.38 | 6.78 | |
| $\|\overline{H(jw)}\|$ | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.26 | 1.18 | 0.9 | 1.29 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | |
| $\angle\overline{H(jw)}$ | 0 | 0.9 | 4.8 | 10.3 | 18.4 | 27 | 45 | -14 | -2 | 0 | 0.9 | 4.8 | |

Sistem cikisi da analog sistemlerde oldugu gibi hesaplanir.

$$\begin{aligned} x(nT) = {} & 7\ \ 1.32\cos(0.5nT + 20 + 4.8) + 2\ \ 1.18\cos(2nT - 30 + 27) \\ & +3\ 1.33\cos(6nT + 40 - 2) \end{aligned}$$

$$x(nT) = 9.24\cos(0.5nT + 24.8) + 2.36\cos(2nT - 3) + 3.99\cos(6nT + 38)$$

Sisteme iliskin genlik ve faz spektrumu sekil(ref: xqs643) de gosterilmistir.

f?igure[hbt]   “xqs643 genlik ve faz spektrumu.

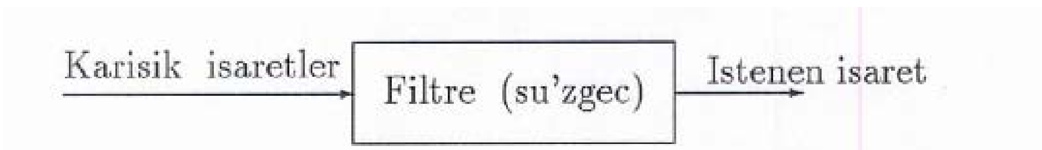
Filtre(suzgec) Kavrami

Filtre kendisine giren isaretlerin bir kismini cikisa aynen veya kuvvetlendirerek iletirken diger bir kisim isaretleri cikisa zayiflatarak ileten veya hic iletmeyen devrelerdir.

f?igure[hbt] “xqs502 basit bir elektrik filtresi (RC) devresi b)Sayisal filtre (A/D) bilgisayar prog (D/A) c)mekanik filtre yaya damper sisitemi

Klasik anlamda filtre bir elektrik devresi olmasina karsin, filtrenin yaptigi isi yapan mekanik, hidrolik veya pnumatik devrelerde vardir. Bilgisayarlarin gelismesiyle sayisal filtreler analog filtrelerin onune gecmistir. Sayisal filtreler analog/dijital donusturucu, bilgisayar programi, ve dijital/analog donusturucuden olusur.

arabalarda kullanilan aksesuar sonumleyici... esasen rahatsiz edici kuvvetleri yolcuya iletmeyen hidro-mekanik bir filtredir.




Filtreyi kullanacak kisinin istegi genelde frekansi $w_a$ $w_b$ arasinda olan isaretleri gecirmesi diger butun isaretleri gecirmemesidir.

Ornek olarak sekil(ref: xqs501)de donen bir milin titresiminin genligini olcen sensor sistemi goruluyor. 50 devir/saniyede Olculen isaretin icinde $f = 50 \quad w = 2\pi f = 314$ frekansinda bir temel isaret ve buna ilave olarak milin kritik frekanslari olan $w_1 = 290 rad/s$, $w_1 = 340 rad/s$ de iki isaret ve olcme sisteminden veya diger sebeplerden kaynaklanan parazit terimler olacaktir. Sekil(ref: xqs503) de boyle bir isaret goruluyor.

f?igure[hbt] “xqs501 Donen bir milde titresim olcumu.

f?igure[hbt] “xqs503 Milden olcuken titresim isareti

Bizden istenen motorun devir sayisi olan $w = 290, w = 314, w = 340$ civarindaki isaretlerin genlik ve fazlarinin hesabidir. Isaret gercekte

$$\begin{aligned} r(t) &= 0.2\cos(100t - 20) + 0.3\cos(150t + 50) + 6\cos(290t + 40) \\ &+4\cos(314t + 50) + 9\cos(340t - 45) + 0.6\cos(580t + 85) \end{aligned} \quad \text{xqf501}$$

seklindedir. (haliyle bunu onceden bilmeye imkan yoktur, biz burada biliniyor varsaydik.) Bizden istenen asagidaki degerlerdir.

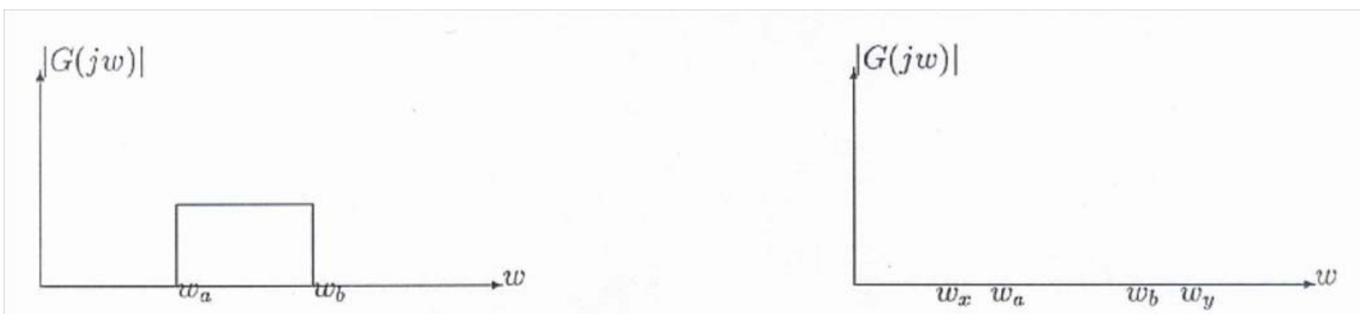
$$|R(290)| = 6 \quad \angle R(310) = 40$$
$$|R(314)| = 4 \quad \angle R(314) = 50$$
$$|R(340)| = 9 \quad \angle R(340) = -45$$

Daha once gordugumuz gibi isaretin Furier donusumunu (HFD,FFT) alarak bu sayilari bulabiliriz. Isaret bir bilgisayar diskinde veye teypde ise en kolay yol budur. Ancak bu isaret o anda hemen lazimsa mesela bir kontrol sisteminde geribeslemede kullanilacaksa Furier donusumunu almak icin bir kac periyotluk data lazimdir. Bir kac peryot beklemek ise geribesleme sistemine uygun dusmez. Ayrica diskteki veya teypdeki data cok uzunsa datanin tamamminin Furier donusumunu almak filtre kullanmaktan daha pahali (zaman ve isgucu) olabilir. Bu sebeple real-time?? sistemlerde filtrelere ihtiyac vardir.

Tekrar problemimize donersek $r(t)$ isaretinden gercek isaret olan

$$r(t) = 6\cos(290t + 40) + 4\cos(314t + 50) + 9\cos(340t - 45) \qquad \#$$

isaretini sececek lineer sistemin (filtrenin) genlik karakteristiginin sekil(p32) deki gibi olmasi gerektigi aciktir. Burada $w_a = 290 \quad w_b = 340$ secilebilir.




**Sekil** 1.4: ideal ve gercek filtreler.

f?igure[hbt] “xqs507 ideal ve gercek filtreler.

Filtreyi kullanacak kisinin istegi genelde frekansi $w_a \ \ w_b$ arasinda olan isaretleri gecirmesi diger butun isaretleri gecirmemesidir.

## Fiziksel Sinirlamalar

Filtre elektrik (nadir olarak mekanik, elektromekanik, hidrolik, pnumatik) bir elemandir. Sayisal filtreler ise bir bilgisayar programidir.

Filtre lineer bir sistem olmak zorundadir. Nonlineer bir sistem giriste olmayan ilave frekanslar uretir. (Bkz.C.P.ref: xq4p506, ref: xq4p586, ref: xq4p604)

Bu ise filtre icin kabul edilemeyecek bir durumdur.
(Bkz.C.P.ref: nolineer:harmoniksecemiyor)

Filtre kararli bir sistem olmak zorundadir. Karasiz bir sistemin genlik spektrumunu anlamsizdir.

Filtre gerceklenebilir fiziksel bir sistemdir. Fiziksel bir sistemin genlik spektrumu sekil(ref: xqs507)deki gibi keskin koseli olamaz. Sekil(ref: xqs507.b) deki gibi olabilir. Bu da filtreden cikan isarette istenen isaret bilesenlerinin degisik oranlarda zayiflatilmis olarak cikmasina sebep olur ki bu da isaretin aslinin bozulmasi anlamina gelir. Mesela (ref: xqf501)deki filtre cikisi

$$x(t) = 6\cos(290t + 40) + 4\cos(314t + 50) + 9\cos(340t - 45) \qquad \#$$

olacak yerde

$$x(t) = 5.5\cos(290t + 40) + 4.6\cos(314t + 50) + 8.6\cos(340t - 45) \qquad \#$$

olarak olculur. $x(t)$ $r_g(t)$ ye benzemekle beraber biraz bozulmus olur.

# Filtrenin Genlik ve Faz Spektrumu

Ideal filtre pratikte mumkun olmadigindan filtrenin toleranslarinin bir standartta belirtilmesi lazimdir.

Ideal filtrede genlik spektrumu

$$\begin{array}{lll} |H(jw)| = 0 & w < w_x & w > w_y \\ |H(jw)| = A & w_x < w < w_y & \end{array} \qquad \#$$

Ideal filtreden cikan istenen isaret $x(t) = Ar(t)$ seklinde bir katsayi ile carpilarak cikar, istenmeyen parazitlerde tamamen ortadan kaldirilir.

Filtre dinamik bir sistem oldugundan giris etkisini hemen gosteremez, yani $x(t) = Ar(t)$ seklinde verilen baginti gercekci degildir. girisin etkisi belli bir zaman sonra cikisa yansir. O halde filtre karakteristigi

$$x(t) = Ar(t - q)$$

ozelligini saglarsa isaret bir miktar gecikerek cikisa yansir, fakat bozulmaz. Mesela

$$r(t) = d_1cos(w_1t + \theta_1) + d_2cos(w_2t + \theta_2) + \ldots\ldots\ldots + d_ncos(w_nt + \theta_n) \qquad \#$$

seklindeki bir $r(t)$ giris isareti cikisa

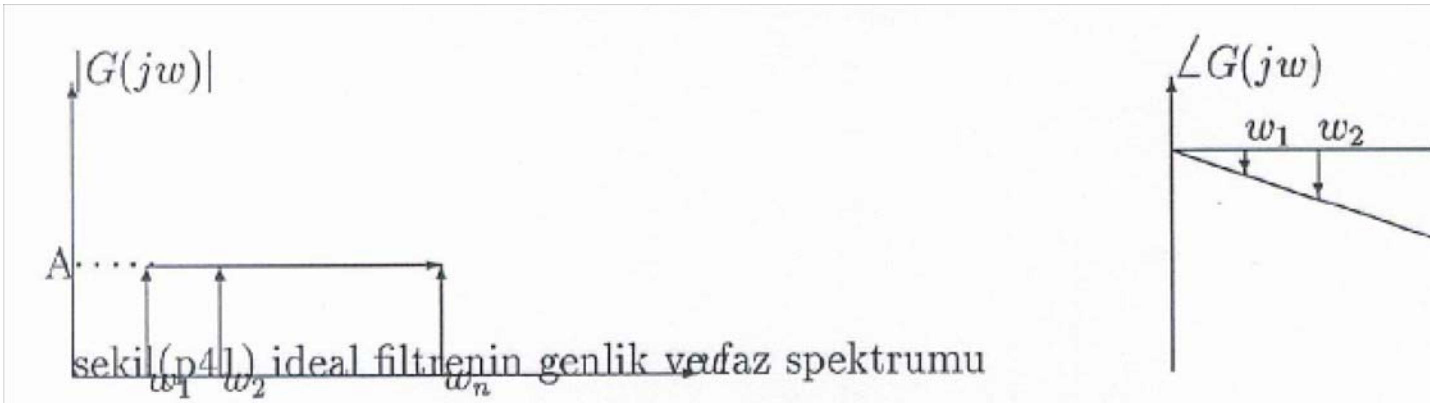
$$\begin{aligned} x(t) &= Ar(t - p) = d_1Acos(w_1(t - p) + \theta_1) + Ad_2cos(w_2(t - p) + \theta_2) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots + Ad_ncos(w_n(t - p) + \theta_n) \end{aligned} \qquad \text{xqf521}$$

seklinde yansiyorsa bu filtreden gecen isaretlerin bozulmadigi anlamina gelir.
(ref: xqf521) esitligi

$$\begin{aligned} x(t) &= Ad_1Acos(w_1t - w_1p + \theta_1) + Ad_2cos(w_2t - w_2p + \theta_n) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots + Ad_ncos(w_nt - w_np + \theta_n) \end{aligned} \qquad \#$$

seklinde yazilsin.

Simdi filtrenin girisi $r(t)$ ve cikisi $x(t)$ den hareketle bu filtrenin genlik ve faz spektrumunu cizelim. ornek olarak $w = w_1$ frekansinda genlik k kat artmis yani $|G(jw_1)|= A$ faz da $-w_1 p$ kadar degismis, Yani $\angle H(jw) = -w_1 p$. Bu sekilde butun frekanslar icin spektrumu cizersek.




sekil(p41) ideal filtrenin genlik ve faz spektrumu

Sekil(p41) den de goruldugu gibi ideal filtrenin frekans spektrumu isaretin gecmesi gereken frekanlarda $w$ eksenine parael sabit bir dogru olmali. Ideal faz spektrumu ise originden gecen $\angle G(jw) = -wp$ dogrusu olmalidir. Haliyle $p = 0$ icin $\angle G(jw) = 0$ olmasi da isareti bozmayacaktir. Ancak bu durum gercekci degildir. Cunku isaretin filtreye girmesi ile cikmasi arasinda mutlaka cok kucuk de olsa $p$ kadar bir sure gerekir.

Gercek filtrenin genlik spektrumunda keskin koseler olamayacagindan, gercek filtrenin genlik spektrumunda

$$\begin{aligned} &|H(jw)| \leq B \qquad w < w_x \qquad w > w_y \\ &|H(jw)| \geq A \qquad w_a < w < w_b \\ &A >> B \end{aligned} \qquad \text{xqf531}$$

sartlari saglanmalidir. Seklinde olmalidir. Burada $w_a < w < w_b$ bolgesine **gecirme bandi**, $w < w_x \quad w > w_y$ bolgesine **sondurme bandi** denir. $w_x < w < w_a$ ve $w_b < w < w_y$ bolgesine **gecis bandi** denir.

Filtre dizany ederken $|H(jw)|$ ile calismak yerine $|H(jw)|^2$ ile calismak daha kullanislidir. Filtre karakteristikleri (ref: xqf531) deki formdan ziyade $|H(jw)|^2$ yi kullanarak asagidaki formda verilir.

$$\begin{aligned} &|H(jw)|^2 \leq B \qquad w < w_x \qquad w > w_y \\ &|H(jw)|^2 \geq A \qquad w_x < w < w_y \\ &A >> B \end{aligned} \qquad \text{xqf532}$$

Literaturde Filtrenin genlik spektrumunu belirlerken $A, B$ harfleri yerine

$$|H(jw)|^2 \leq \frac{1}{1+\lambda^2} \qquad w < w_x \qquad w > w_y$$
$$|H(jw)|^2 \geq \frac{1}{1+\epsilon^2} \qquad w_x < w < w_y$$ #

notasyonlari kullanilir.

# Filtrelerin Guruplandirilmasi

Filtre hakkinda epey soylememize ragmen mesela soyle bir cumleye raslasak "3. dereceden bant geciren sayisal Buttterworth filtre" su ana kadarki yazilanlarla bu cumle hala anlmasiz. Filtreler imal edilis sekline gore, gecirdigi bant araligina gore, dizayn edilis sekline gore degisik guruplara ayrilir. Bu bolumde filtre ile ilgili terminolojisi verilecektir.

## Yapisina Gore Filtreler

Filtreler yapisina (imal edilis sekline) gore sekil(ref: xqs551)deki gibi guruplandirilabilir. ??[hbt]

| Filtreler | | | |
|---|---|---|---|
| Analog Filtreler | | Sayisal Filtreler | |
| Aktif Filtreler | Pasif Filtreler | Ardisil Filtreler<br>Rekursif(IIR) | Ardisil olmayan Filtreler<br>Nonrekursif (FIR) |

“xqs551 Filtrelerin Guruplandirilmasi

Bu filtre guruplarini kisaca anlatalim.

Analog filtre, elektrik ve elektronik elemanlardan meydana gelmis bir elektrik devresidir.

Pasif filtreler direnc, bobin, kondansator, (RLC) elemanlarindan meydana gelen devrelerdir. Calismalari icin disaridan enerji almaya ihtiyaci olmadigi icin pasif filtre olarak adlandirilir.

Aktif filtreler ise yariiletken teknolojisinin gelismesiyle ortaya cikmistir. Direnc kondansator, OPAM(islemsel kuvvetlendirici) ve tranzistorden meydana gelir. Aktif filtrelerde imalati pahali olan bobin kullanilmadigi icin dusuk frekanslarda pasif filtrelerin yerini almistir. Tranzuistor ve OPAM calisabilmeleri icin diasidan enerjiye ihtiyaclari vardir. Dusuk frekanslarda aktif filtreler pasif filtrelerden cok daha ucuzdur. Yuksek frekanslarda aktif filtrelerde doyma, gurultuye karsi duyarlilik gibi problemler vardir.

Sayisal filtreler temel itibariyle bir bilgisayar programidir. Analog filtrelerin girisleri analog (surekli) isaretler olmasina karsilik sayisal filtrelerin girisleri ve cikislari ayrik degerlerdir. Nonrekursif filtrelerde geribesleme yoktur, filtre cikisini filtre girisi olarak kullanmaz. Genel yapisi

$$y(n) = \sum_{j=0}^{p} b_j x(n-j)$$

seklindedir.

Rekursif filtrelerde filtre cikisi giris olarak kullanilir, bu yuzden kararsizlik ve yuvarlatma hatalarinin ardisil olarak buyumesi sozkonusu olabilir. Genel yapisi

$$y(n) = \sum_{j=1}^{k} a_j y(n-j) + \sum_{j=0}^{p} b_j x(n-j)$$

seklindedir.

Nonrekursif filtrelerin girislerine bir impuls uygulansa geribesleme olmadigi icin, impulsin etkisi belli bir zaman sonra biter ve cikis sifir olur. Bu yuzden Nonrekursif filtrelere **Sonlu impuls cevapli** (**Finite Impuls Response**(**FIR**))**filtreler** denir. Rekursif filtrede girise bir impuls uygulansa impulsin etkisi sonsuza kadar devam eder. Bu yuzden bu tip filtrelere **sonsuz impuls cevapli** (**Infinite Impuls Response**(**IIR**)) **filtreler** denir. Sayisal filtre dizayni konusunda bu konular genisce aciklanacaktir.

## Filtrenin derecesi

Filtrenin transfer fonsiyonu (ref: xqf434) esitligiyle verilmisti. $H(jw)$'nin pay ve paydasi $(jw)$'nin kuvvetlerine gore duzenlenmistir. paydadaki $(jw)$'nin en buyuk derecesi filtrenin derecesidir. (ref: xqf434) esitliginde filtrenin derecesi $n$ dir. filtrenin derecesi buyudukce filtrenin genlik karakteristigi ideal genlik karakteristigine yaklasir. Sekil(xqs537) de bu durum gosterilmistir.

f?igure[hbt] “xqs537 FIltrenin deresinin genlik spektrumuna etkisi

## Gecirdigi Frekans Araligina Gore

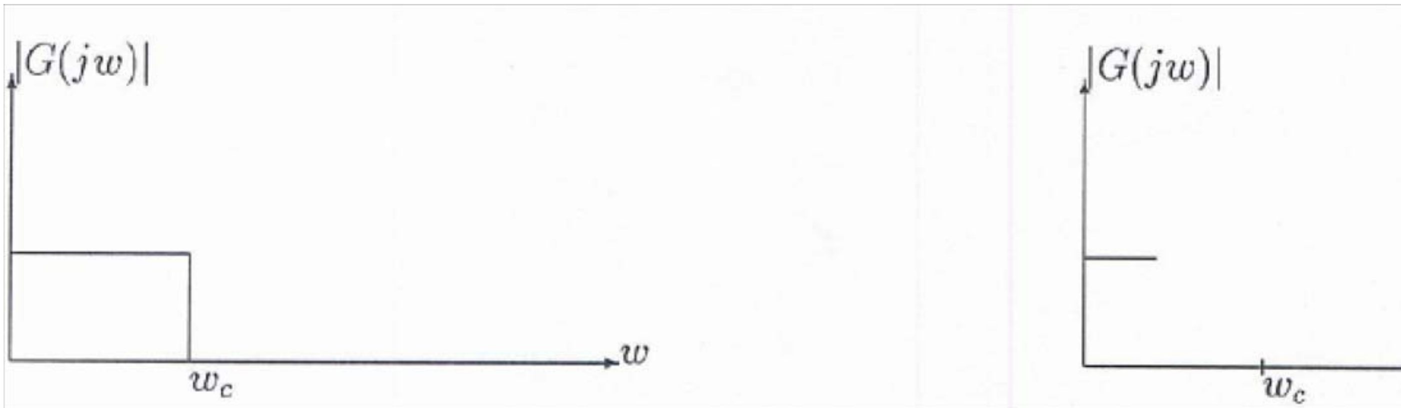
Filtreler gecirdigi frekans araligina gore asagidaki sekilde guruplandirilir. $w = 0$ ile bir $w = w_c$ arasindaki frekanslari gecirip diger butun frekanslari olduren filtre Alcak frekanslari geciren filtre veya kisaca **alcak geciren filtre** (AGF) olarak adlandirilir. Benzer sekilde

$w = 0$ ile bir $w = w_c$ arasindaki frekanslari oldurup diger butun frekanslari geciren filtre Yuksek frekanslari geciren filtre veya kisaca **yuksek geciren filtre** (YGF),

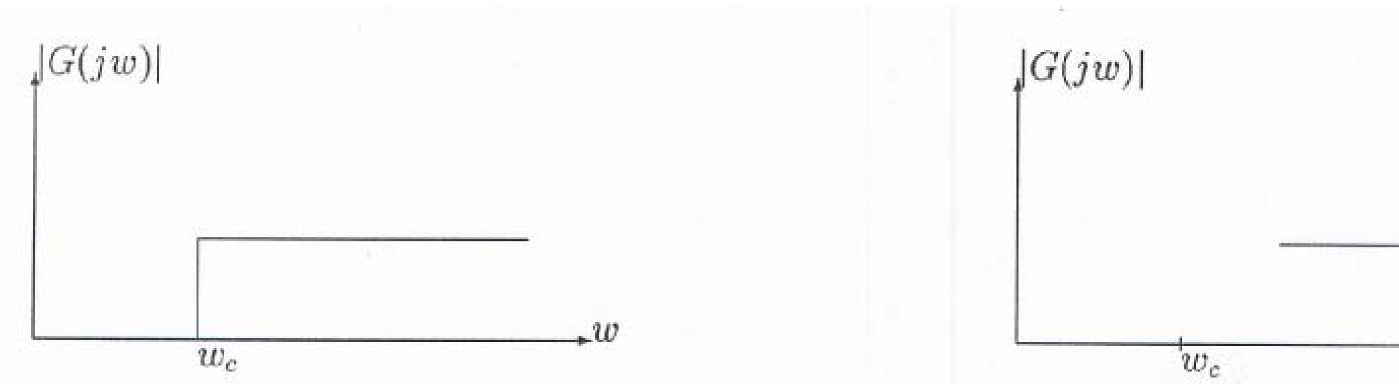
$w = w_a$ ile bir $w = w_b$ arasindaki frekanslari gecirip diger butun frekanslari olduren filtre **bant geciren filtre** (BGF),

$w = w_a$ ile bir $w = w_b$ arasindaki frekanslari oldurup diger butun frekanslari geciren filtre **bant sonduren filtre** (BSF),

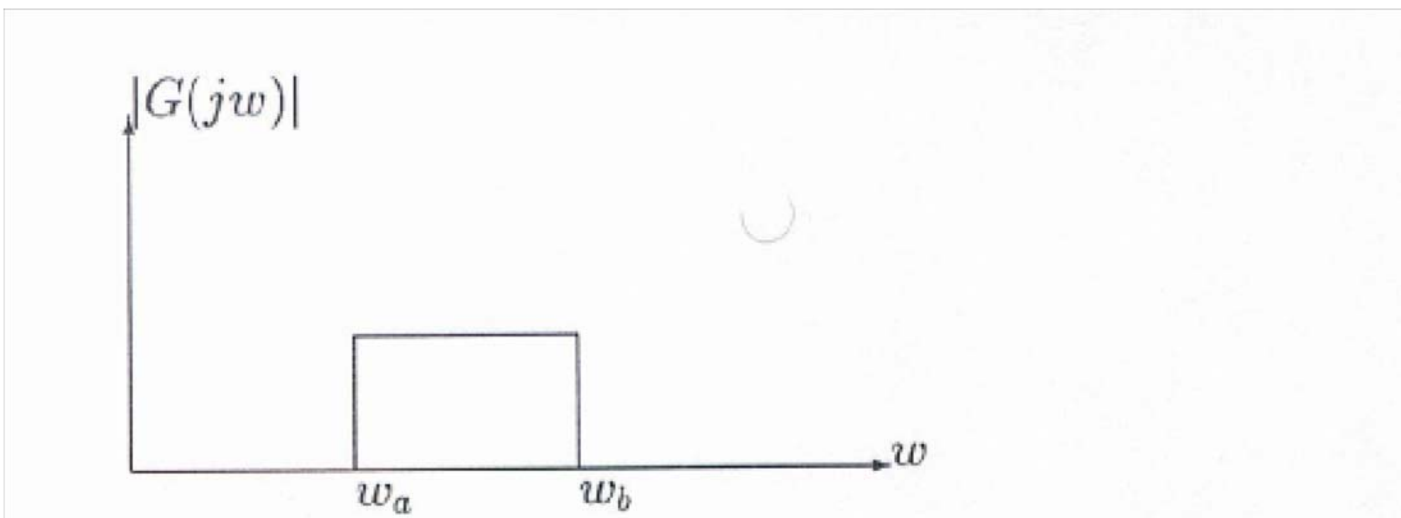
olarak adlandirilir.



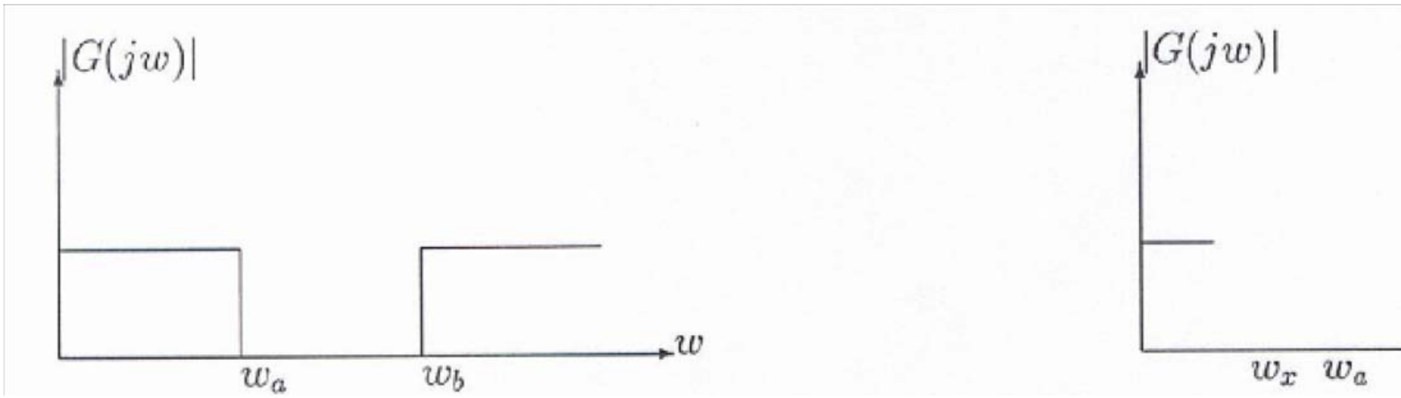

a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir alcak geciren filtre .




a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir yuksek geciren filtre.




a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir bant geciren filtre .




a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir bant sonduren filtre.

## Dizayn Edilme Sekline Gore Filtreler

Filtre dizayni temel itibariyle (ref: xqf434) esitligindeki $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots . b_n$ ve $n$ katsayilarinin hesabidir. Filtre dizayn problemini su sekilde ozetleyebiliriz: Bu katsayilari o sekilde hesapla ki elde edilen filtre karakteristigi ideal filtre karakteristigine benzesin. Bu katsayilari hesaplama teknigine gorede filtreler guruplandirilir.

Sekil (ref: xqs563.a) de genlik karakteristigi gorulen Butterworth filtrelerde gecirme ve sondurme bandinda dalgalanma yoktur.

1.tip Chebbshew filtrelerin genlik karakteristiginde gecirme bandinda esit genlikli dalgalanmaya musade edilir sondurme bandinda dalgalanma yoktur.

2.tip Chebbshew filtrelerin genlik karakteristiginde gecirme bandinda dalgalanma yoktur, sondurme bandinda esit genlikli dalgalanmaya musade edilir

Eliptik (Cauer) tipi filtrelerde hem gecirme hem sondurme bandinda esit genlikli dalgalanmaya musade edilir.

Sekil (ref: xqs563.b),(ref: xqs563.c),(ref: xqs563.d de Chebbshew.1, Chebbshew.2, Eliptik filtrelerin genlik karakteristigi goruluyor.

f?igure[hbt] “xqs563 Degisik tipde filtrelerin genlik karakteristigi. a)Butterworth b)Chebbshew.1, c)Chebbshew.2, d)Eliptik

Bessel tipi filtrelerin genlik spektrumlari Butterworth tipi filtrelerin genlik spwektrumlarina benzer fakat faz spektrumlari daha iyidir.

Kaliteli filtre karakteristigi ideal filtreye benzeyen ve maliyeti dusuk olan(derecesi dusuk olan) filtredir. Bu acidan baktigimizda filtrelerin hangisinin isimize daha iyi yaradigina karar verebiliriz. 9.derecedeki Butterworth filtrenin genlik spektrumu ile 5.dereceden chebbshhew filtrenin ve 3.dereceden eliptik filtrenin genlik spektrumlari birbirine cok yakindir. Ancak faz spektrumlari acisindan baktigimizda isareti en fazla bozan faz spektrumuna sahip filtre eliptik filtredir. Bu kriterler gozonunde tutularak kullanildig yere ve kullanma gayesine uygun olarak hangi filtrenin o is icin en iyi filtre olduguna karar verilir.

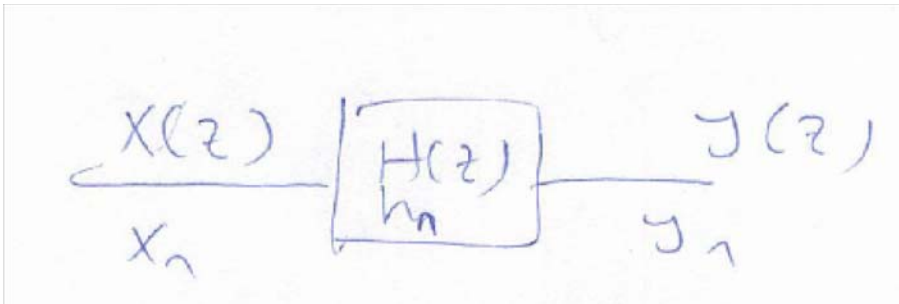
# Sonuclar

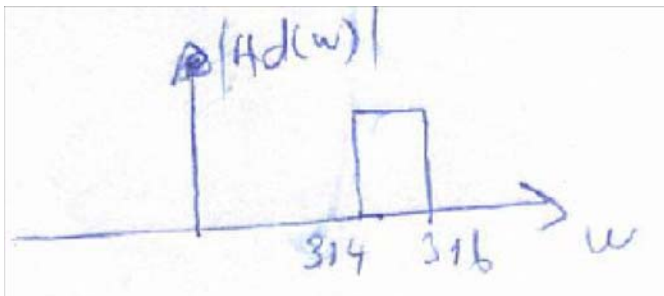
?????

**FIR filtre tasarimi**

**Digital Filtre kavrami**

onceki bolumde ayrik bir sistemin fark denklemleri ile ifade edildigini ve bu fark denklemlerinin Z donusumlerini alarak giris ve cikis arasinda bir transfer fonksiyonu tanimlamistik.




Ve yine gordukki sayisal bir sistemmin girisine Acos($wt$) seklinde bir giris uygulansa cikisinda $B\cos(wt+\alpha)$ seklinde olur. ve $B = A\,|H(z)|_{z=e^{jwT}}|$ ve $\alpha = \angle H(z)|_{z=e^{jwT}}$ seklinde hesaplanabilir.

Sistem cikisi $y(z) = H(z)r(z)$

Filtreyi kullanacak kisinin istegi genelde frekansi $w_a \;\; w_b$ arasinda olan isaretleri gecirmesi diger butun isaretleri gecirmemesidir. Ornek olarak ??.bolumden
$r(t) = 0.2\cos(100t-20) + 6\cos(230t+50) + 0.3\cos(250t+40) + 2.5\cos(310t+60) + 3.5\cos$
seklindeki bir isaretten

$r_g(t) = 2.5\cos(310t+60) + 3.5\cos(314t+40) + 2\cos(316t-50)$

isaretini cekip cikartan ideal filtrenin genlik ve faz karakteristiginin sekil (??) de oldugu gibi olmasi gerekiyordu.

Diger bir ifadeyle $H_d(w)$ filtresinin genlik ve faz spektrumu sekil() deki gibi olmali.

O halde soru $H_d(w)$ yi saglayan $H_d(z)$ veya fark denklemleri ne olmalidir sorusudur. $H_d(w)$ yi saglayan transfer fonksiyonu

$$H_d(w) = \frac{y(w)}{r(w)}$$

ve $H_d(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{z+b}{z+a}$ olsa buna iliskin fark denklemleri $\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{z+b}{z+a} = \frac{1+bZ^{-1}}{1+az^{-1}}$
$y(z)(1+az^{-1} = r(z)(1+bz^{-1})$ $\qquad$ $y(k) = -ay(k-1) + r(k) + br(k-1)$ seklinde olacagi aciktir.

$H_d(w)$ ayrik bir sistemin transfer fonksiyonudur. O halde $H_d(w)$periyodik bir fonksiyondur ve periyodu $w_s = \frac{2\pi}{T_p}$ dir. $T_p$ ornekleme araligidir.

?? bolumde goruldugu gibi periyodu $P_0$ olan periyodik bir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnz_0 x} \qquad c_n = \frac{1}{P_0}\int_{x_0}^{x_0+P_0} f(x)e^{-jnz_0 x}dx \qquad z_0 = \frac{2\pi}{P_0}$$

seklinde furier serisine acilabilir ve $c_n$ katsayilari da hesaplanabilir.

Periyodu $w_s$ olan periyodik $H_d(w)$ fonksiyonunu da furier serisine acabiliriz.

$$H_d(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jnv_0 w} \qquad c_n = \frac{1}{w_s}\int_{w_0}^{w_0+w_s} H_d(w)e^{jnv_0 w}dw \qquad v_0 = \frac{2\pi}{w_s}(t36)$$

Furier serisini acik yazalim.

$$H_d(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jnv_0 w} = \ldots c_{-N}e^{jNv_0 w} + c_{-(N-1)}e^{j(N-1)v_0 w} + \ldots\ldots c_{-2}e^{j2v_0 w} + c_{-1}e^{jv_0 w} + c_0 + c_1 e^{-jv_0 w} + c_2 e^{-j2v_0 w} +$$

$y(w) = H_d(w)r(w)$ esitliginde $H_d(w)$ yerine (t40) deki esdegerini koyalim.

$$y(w) == \ldots\ldots c_{-N}e^{jNv_0 w}r(w) + c_{-(N-1)}e^{j(N-1)v_0 w}r(w) + \ldots\ldots c_{-2}e^{j2v_0 w}r(w) + c_{-1}e^{jv_0 w}r(w) + c_0 r(w) + c_1 e^{-jv_0 w}r($$

$$\mathcal{F}[r(k)] \;= r(w)Llra\mathcal{F}[r(k-p)] \;= r(w)e^{-jpv_0 w}(t46)$$

bagintisini kullanarak (t44) un her iki tarafinin ters Furier donusumunu alalim.

$$y(n) == \ldots c_{-N}r(n+N) + c_{-(N-1)}r(n+N-1) + \ldots\ldots c_{-2}r(n+2) + c_{-1}r(n+1) + c_0 r(n) + c_1 r(n-1) + c_2 r(n$$

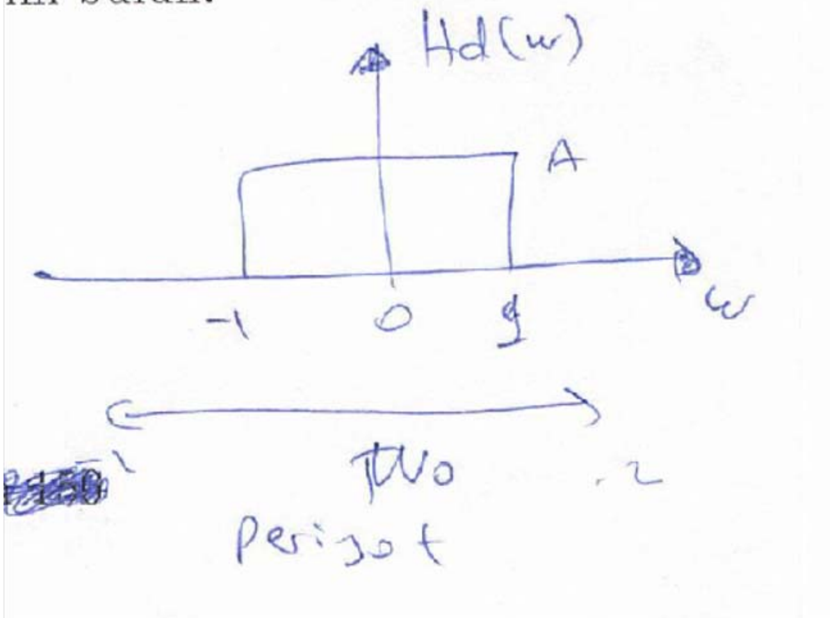
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k r(n-k)(t52)$$

Sonucta istedigimiz $H_d(w)$ filtresini gerceklestirecek algoritmayi bulduk. Goruldugu gibi $c_k$ katsayilari $H_d(w)$ nin kompleks Furier serisi katsayilaridir.

**Ornek**:

Ornekleme periyodu $T = \pi/2$, $A = 1$ olduguna gore sekildeki filtreyi gercekleyen $c_k$ katsayilarini bulun.

ini bulun.




$$H_d(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jnv_0 w} \qquad c_n = \frac{1}{w_s}\int_{w_0}^{w_0+w_s} H_d(w)e^{jnv_0 w}dw \qquad v_0 = \frac{2\pi}{w_s}(t36)$$

Ornekleme frekansi $w_s = \frac{2\pi}{T} = 4$ Dolayisiyla $H_d(w)$ nin periyodu $w_s = 4$ dur. $v_0 = \frac{2\pi}{w_s} = \frac{\pi}{2}$ baslangic yeri olarak $w_0 = -\frac{w_s}{2} = -2$ alalim.

$$c_n = \frac{1}{w_s}\int_{-\frac{w_2}{2}}^{\frac{w_s}{2}} H_d(w)e^{jnv_0 w}dw(t36)$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} H_d(w)e^{-jnv_0 w}dw = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{jnv_0 w}dw = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & n = 0 \\ \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} & n \neq 0 \end{array} \right\}(t56)$$

Dolayisiyla
$c_0 = 0.5 \;\; c_{-1} = c_1 = 0.3183, \quad c_{-2} = c_2 = 0, \quad c_{-3} = c_3 = -0.1061, c_{-4} = c_4 = 0, c_{-5} = c_5 = 0$
Filtrenin sekli de

$$y(n) = \ldots\ldots -0.0032r(n+99)\ldots\ldots +0.0637r(n+5) - 0.1061r(n+3) + 0.3183r(n+1) + 0.5r(n) + 0.3183$$

Goruldugu gibi filtreyi ideal olarak elde edebilmek icin filtreye dahil edilecek data sayisi sonsuz olmalidir. Bu durum gercekci olmadigindan pratikte sinirli sayida terim alinir ve filtre sinirli sayida elemanla gerceklestirilir.

$$y(n) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k r(n-k)(t52)$$

Fakat bu durumda filtre karakteristiginde bir miktar bozulma olacaktir.

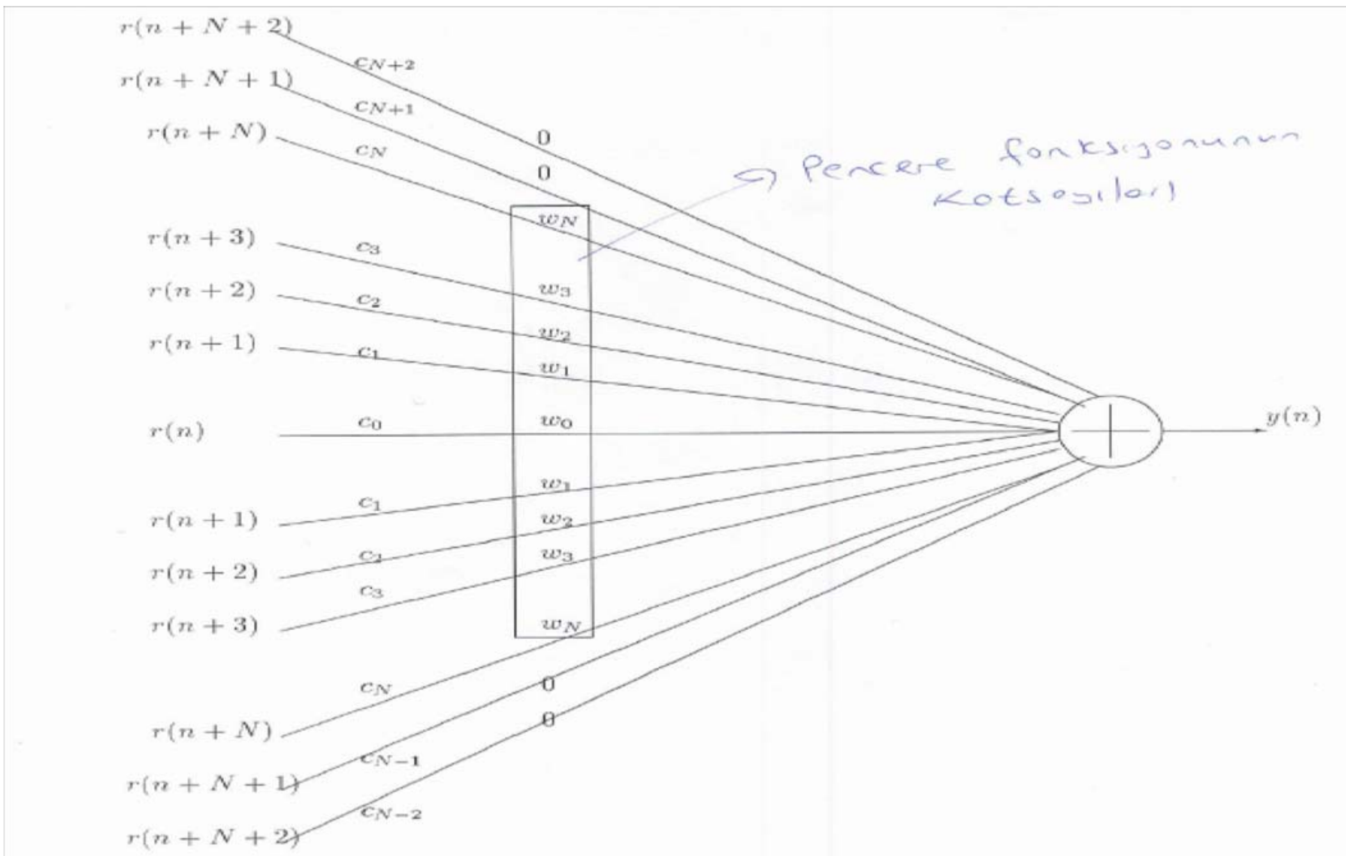
$N = 3, N = 5, N = 10, N = 100$ alinarak gerceklestirilen filtrelere iliskin transfer fonksiyonlarinin genlik karakteistigi sekil(t27)?? de gosterilmistir.

Goruldugu gibi ideal filtre karakteristiginin elde edilebilmesi icin $N$ cok buyultulmelidir. Esasen ideal filtre karakteristiginde koseler oldugundan $N$ cok buyuk olsa dahi dalgalanmalar kaybolmaz. Buna Gibbs olayi denir. ????

**Pencere fonksiyonlari**

Bir onceki bolumden goruldukі $H_d(w)$ yi elde etmek icin sonsuz tane $c_k$ katsayisi almak gerekir. Sinirli sayida $c_k$ alinca bu defa $H_d(w)$ elde edilemiyor.

Bu durumda ya elde edilen $H_(w)$ karakteristigine razi olunacak veya baska careler aramak gerekir. Iste bu carelerden birisi $c_k$ katasayilarini pencere fonksiyonlari ile carpmaktir. Sekil(t65)i izleyin.




anals09

Bu durumda $c_k$ katsayilari $w_n$ katsayilari ile carpilarak yeni filtre katsayilari elde edilir. $w_n$ katsayilari $n > |N|$ icin sifirdir. Dolayisiyla yeni filtre katsayilari

$$h_n = c_n\, w_n \qquad n = -N, -N+1, \ldots\ldots -1, 0, 1, \ldots\ldots N-1, N+1$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d_k r(n-k) \sum_{k=-N}^{k=N} h_k r(n-k) (t58)$$

Simdi $c_n$ katsayilarinin pencere fonksiyonu $w_n$ile carpildiktan sonra frekans spektrumunun ne hale gelecegini inceleyelim. $H_d(w)$ nin spektrumu sekil() de verilmisti. Pencere fonksiyonu $w_n$nin Furier spektrumu $W(w)$ olsun. Zaman domeninde carpma frekans domeninde konvolusyon demek oldugundan [onceki dersler??]

$$h_n = ??c_n\ w_n H(w) = h_d(w) * W(w)$$

olacaktir. (soru isareti yerine 1/T veya peryodun tersi gelecek)

Simdi degisik pencere fonmksiyonlari icin $H(w)$ yi inceleyelim.

**Dikdortgen Pencere Fonksiyonu**

Bu pencere fonksiyonunda

$$w_n = \begin{cases} 1 & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases} \quad (t81)$$

seklindedir. $w_n$ nin AFD'sini hesaplarsak. (??)den (AFD)nin ilk ham formulu $G(w) =..e^{jwP}$ formulunden

$$W_R(w) = \sum_{n=-N}^{N} e^{jwP}$$

seklinde yazilabilir. ??(P zaman domenindeki ayrik datalarin arasindaki mesafe(periyot)) Oteyandan bazi ara islemlerden sonra

$$W_R(w)\frac{\sin[(wt/2)(2N+1)]}{\sin(wt/2)}$$

oldugu gosterilebilir. $W_R(w)$nin ve $H(w) = W_R(w) * H_d(w)$ nin degisik N degerlei icin grafikleri sekil (t23) de verilmistir.

T=1; bir=2*pi/(2*N+1)*(2/T); iki=pi/(2*N+1)*(2/T); w1=[-pi/2:0.03:-bir -bir:0.01:-iki -iki:0.002:0]; w2=abs( sort(-w1)); w=[w1 w2]; qq=sin( (2*N+1)*w*T/2 )./sin(w*T/2);

w=-pi/2:0.01:pi/2; qq=sin( (2*N+1)*w*T/2 )./sin(w*T/2);

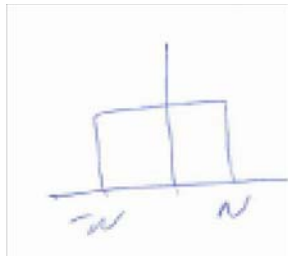
ss=size(qq); boy=max(ss); boy1=boy/2; ww=-1:1/boy1:(+1-1/boy1); sorta=boy1/(pi/2); sbas=boy1-sorta; hh=[zeros(1,sbas) ones(1,2*sorta) zeros(1,sbas)]; dd=conv(qq,hh); subplot(211); plot(w,qq); plot(dd) pause return

Gercek filtre $H(w)$ nin transfer fonksiyonu ideal filtre $H_d(w)$ ile pencere fonksiyonunun transfer fonksiyonu $W_R(w)$ nin konvolusyonu oldugu (t??) esitligi ile gosterilmisti. Buradan acikdir ki $H_d(w) = H(w)$ olmasi $W_r(w)$ nin birim impuls olmasi ile mumkundur. Impuls'in ters furier donusumu her yerde sabit sayidir. Yani pencere fonksiyonu $-\infty + \infty$ araliginda sabit bir sayi olmali. Bu da $c_n$ katsayilarinin $-\infty + \infty$ araligindakilerin tamaminin alinmamsi anlamina gelir. Bu sonucu daha onceden biliyorduk.

Grafikdedn goruldugu gibi bir ana tepecik ve onun yaninda da bircok kucuk tepecik vardir. Bu kucuk tepecikler buyuk N ler icin dahi etkindir. Bunun nedeni **Gibbs olayi** ile aciklanabilr. Grafiklerdedn gorulecegi gibi N buyudukce (daha cok terimm alindikca) $W_R(w)$ impulsa ve $H(w)$ da $H_d(w)$ ya benzeyecektir. Fakat $w = 1$ civarindaki tepeler ve cukurlar N'nin cok buyuk degerleri icin dahi vardir. Bu tepeciklerin sebebi yukarida anlatildigi gibi Gibbs olayi ile ilgilidir.

Gibs olayi dolayissi ile meydana gelen tepeciklerden kurtulmmak ve $H(w)$ gercek filtre karakteristigini daha iyi yapmak icin dikdortgen pencere fonksiyonu yerine daha degisik pencereler kullanilir. Bunlkar asagidda ozetlenmistir.

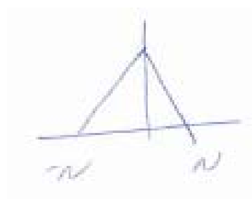
1. Dikdortgen




$$w_n = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ \\ 0 & digeryerlerde \end{cases}$$

$$W_R(w) \frac{\sin[(wt/2)(2N+1)]}{\sin(wt/2)}$$

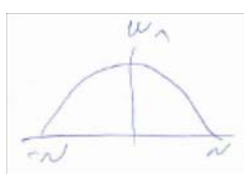
2. Barlet




$$w_n = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & |n| \leq N \\ \\ 0 & digeryerlerde \end{cases}$$

$$W_{BT}(w) \simeq \frac{\sin^2[\frac{N+1}{2} wT]}{\sin^2(wt/2)}$$

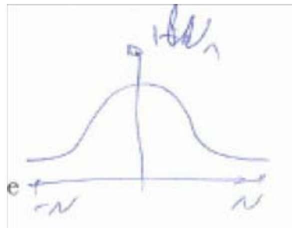
3. Hanning




$$w_n = \begin{cases} 0.5(1+\cos(\frac{\pi n}{N})) & |n| \leq N \\ \\ 0 & digeryerlerde \end{cases}$$

$$W_{HN}(w) = 0.5W_R(w) + 0.25W_R\left(w - \frac{\pi}{NT}\right)0.25W_R\left(w + \frac{\pi}{NT}\right)$$

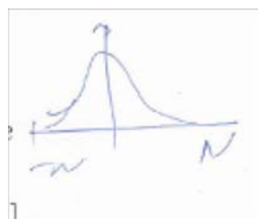
4. Hamming




$$w_n = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos(\frac{\pi n}{N}) & |n| \leq N \\ \\ 0 & digeryerlerde \end{cases}$$

$$W_{HM}(w) = 0.54W_R(w) + 0.23W_R\left(w - \frac{\pi}{NT}\right)0.23W_R\left(w + \frac{\pi}{NT}\right)$$

5. Blackman

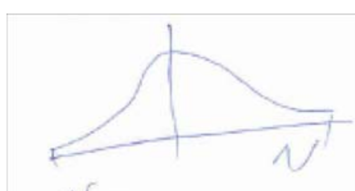



$$w_n = \begin{cases} 0.42 + 0.5\cos(\frac{\pi n}{N}) + 0.08\cos(\frac{2\pi n}{N}) & |n| \leq N \\ \\ 0 & digeryerlerde \end{cases}$$

$$W_{BK}(w) = 0.42W_R(w) + 0.25[W_R(w - \tfrac{\pi}{NT}) + (w + \tfrac{\pi}{NT})]$$

$$0.04[W_R(w - \tfrac{2\pi}{NT}) + (w + \tfrac{2\pi}{NT})]$$

5. Kaiser



$$w_n = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(n/N)^2}\right)}{I_0(\beta)} & |n| \leq N \\ \\ 0 & digeryerlerde \end{cases}$$

$$I_0(\beta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\beta/2)^k}{k!}\right)^2$$

# Laplas Donusumleri ve Z donusumler

Laplas Donusumleri ve Z donusumleri lineer analog ve sayisal sistemlerin analiz ve tasariminda buyuk kolayliklar saglayan birer alet olarak dusunulebilir. Bu tipki buyuk iki sayisi carpmak icin logaritmalarini toplayip ters logaritma ile carpimi bulmaya benzer. Burada maksat iki sayiyi carpmaktir, logaritmada bu is icin kullanilan bir alettir. Carpim bulunduktan sonra logartimanin isi bitmistir.

## Laplas Donusumleri

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplas donusumu

$$F(s) = L[f(t)] \quad = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad \text{xq7f01}$$

seklinde tanimlanir. Laplas doonusumu $t > 0$ icin tanimlidir. Dolyisiyla $f(t)$nin Laplas donusumunun anlamli olabilmsi icin $t < 0$ icin $f(t) = 0$ olmak zorundadir. Ayrica (ref: xq7f01)de verilen integralin degerinin sonsuz olmamasi gerekir. Yani

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt < \infty \qquad \text{xq7f03}$$

olmalidir. Eger

$$\lim_{t\infty} |f(t)|e^{-st} = 0 \qquad \#$$

oluyorsa (ref: xq7f03)sarti saglanir ve $f(t)$ isaretinin Laplas donusumu alinabilir. qw30

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$$

seklinde tanimlanan $f(t)$ fonksiyonunun Laplas donusumunu aliniz. **Cozum**: Tanim geregi

$$\begin{aligned} ss[f(t)] &= \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt \\ &= A\int_0^\infty Ae^{-(a+s)t}dt \\ &= \tfrac{A}{-(s+a)}(e^{-\infty} - e^0) \\ &= \tfrac{A}{s+a} \end{aligned}$$

elde edilir. qw 31

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

seklinde tanimlanan birim basamak fonksiyonunun Laplas donusumunu aliniz.
**Cozum**: Tanim geregi

$$ss[f(t)] = \int_0^\infty Ae^{-st}dt = \frac{A}{s}$$

qw32

$$f(t) = A\sin(pt)u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A\sin(pt) & t \geq 0 \end{cases}$$

seklinde tanimlanan fonksiyonun Laplas donusumunu aliniz.

$$\sin(pt) = \frac{1}{2j}(e^{jpt} - e^{jpt})$$

bagintisi kullanilarak

$$\begin{aligned} ss[f(t)] &= \int_0^\infty A\tfrac{1}{2j}(e^{jpt} - e^{jpt})e^{-st}dt \\ &= \tfrac{A}{2j}\left\{\int_0^\infty e^{(-s+jp)t}dt - \int_0^\infty e^{-(s+jp)t}dt\right\} \\ &= \tfrac{A}{2j}\left\{\tfrac{1}{s-jp} - \tfrac{1}{s+jp}\right\} \\ &= \tfrac{Ap}{s^2+p^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer sekilde diger fonksiyonlarin da Laslap donusumu alinir. Laplas donusumunun ozelliklerinden faydalanarak bazi fonksiyonlarin Laplas donusumu daha kolay alinabilir. anal7e1.tex Bu nedenle bir cok fonksiyonun Laplas donusumunu bir tablo halinde hazirlamak faydalidir. Tablo(ref: xq7t01) de boyle bir tablo verilmistir.

# Laplas Donusumunun Ozellikleri

Laplas donusumu Furier donusumune benzer, dolayisiyla Furier donusumunun sagladigi ozelliklerin hemen hepsi Laplas dosumunun de ozelligidir. Bu ozellikler Tablo(ref: xq7t03)de gosterilmistir. anal7e2.tex qw34

$$x(t) = [10e^{-7t} - 6t^3 + 2\sin(4t) + 3\cos(2t)$$

olduguna gore $X(s)$ ifadesini hesaplayin.

**Cozum**: Laplas donusumunun lineerlik ozelliginden faydalanarak her terimin ayri ayri Laplas donusumu alinir ve toplanir

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[10e^{-7t}] - \mathcal{L}[6t^3] + \mathcal{L}[2\sin(4t)] + \mathcal{L}[3\cos(2t)] \\ &= 10\frac{1}{s+7} - 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) + 2\frac{4}{s^2+16} + 3\frac{s}{s^2+4} \\ &= \frac{10}{s+7} - \frac{36}{s^4} + \frac{8}{s^2+16} + \frac{3s}{s^2+4} \end{aligned}$$

qw35 $f(t) = e^{-at}sin(pt)u(t)$ fonksiyonunun Laplas donusumunu aliniz.

**cozum**: O.P.(ref: xq7o05)den

$$ss[A\sin(pt)u(t)] \;=\; \frac{Ap}{s^2+p^2}$$

olarak bulunmustu. Bu sonuca $s$ domeninde kaydirma teoremi uygulayarak

$$ss[e^{-at}A\sin(pt)u(t)] \;=\; \frac{Ap}{(s+a)^2+p^2}$$

bulunur.

# Ters Laplas Donusumu

Ters Laplas donusumu

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi j}\int_{c-jw}^{c+jw} F(s)e^{st}ds \qquad \text{xq7f13}$$

bagintisindan hesaplanir. Burada $c$ reel bir sabittir ve $F(s)$'nin tekil noktalarinin reel kisimlarindan buyuk olarak secilmelidir. (ref: xq7f13)un isbati $F(s)$ yerine (ref: xq7f01) deki degeri konularak yapilir. (Bkz C.P.ref: terslaplasisbat) Ters Laplas donusumu

$$ss^{-1}[F(s)] \;=\; f(t) \qquad \#$$

olarak gosterilir. (ref: xq7f13) integrali rezidu teoremi kullanarak hesaplanabilir, ancak Laplas donusum tablolari kullanarak daha kolay cozulur. qw36

$$F(s) \;=\; \frac{7s+23}{s^2+7s+12}$$

**Cozum**: $F(s)$ basit kesirlere ayrilirsa,

$$F(s) \;=\; \frac{7s+23}{s^2+7s+12} \;=\; \frac{2}{s+3} + \frac{5}{s+4}$$

Laplas donusumunun lineerlik ozelliginden faydalanarak

$$f(t) \;=\; \mathcal{L}[F(s)] \;=\; \mathcal{L}\left[\frac{2}{s+3}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{5}{s+4}\right]$$

yazilir ve iki terimin Laplas donusumleri ayri ayri alinarak

$$f(t) \;=\; 2e^{-3t} + 5e^{-4t}$$

bulunur. $F(s)$'in basit kesirlere ayrilmasina iliskin pratik bir yontem Ek-ref: appx41 de gosterilmistir.

# Rezidu Teoremi Yardimiyla Ters Laplas Donusumu Hesabi

(ref: xq7f13) ile verilen ters Laplas donusum bagintisi kompleks duzlemde bir integraldir. Kompleks duzlemde integralin anlami (Ek-ref: app41)'de kisaca anlatilmistir. Sekil(ref: xq7s161) de verilen kompleks duzlemdeki $ABJPKQLA$ kapali cevresini gozonune f?igure[hbt] ) Kompleks duzlemde rezidu hesabi icin alinan kapali cevre alalim. Bu kapali cevre uzerinde

$$M = \oint_{ABJPKQLA} e^{st}X(s)ds$$

integralinin hesabi (Ek-ref: app41)'de verilen rezidu teoremi yardimiyla yapilabilir. Ote yandan (ref: xq7f181)'de verilen $M$ integrali

$$M = \oint_{ABJPKQLA} e^{st}X(s)ds = \oint_{BJPKQLA} e^{st}X(s)ds + \oint_{AB} e^{st}X(s)ds$$

seklinde hesaplanabilir. Eger $X(s)$ fonksiyonu $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ seklinde iki polinomun orani ve $P(s)$ polinomunun derecesi $Q(s)$ polinomunkinden kucuk ise

$$\oint_{BJPKQLA} e^{st}X(s)ds$$

integralinin degeri sifirdir. Bunun isbati kompleks degiskenli fonksiyonlarla ilgili kitablarda bulunabilir[ref: kompleksdegiskenlikitab-ideman] Bu durumda

$$M = \oint_{ABJPKQLA} e^{st}X(s)ds = \oint_{AB} e^{st}X(s)ds$$

olacagi aciktir. Esitligin ikinci tarafi $R \to \infty$ icin (ref: xq7f13) ile verilen ters Laplas donusum formuludur. Su halde $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ halinde verilen bir $X(s)$ fonksiyonunun ters Laplas donusumu $e^{st}X(s)$ fonksiyonunun $ABJPKQLA$ kapali cevresi icindeki kutuplarina iliskin residulerinin toplaminin bulunmasi ile hesaplanabilir. Ote yandan ters Laplas donusumu tanimi geregi $X(s)$'nin butun kutuplari $ABJPKQLA$ kapali cevresi icinde olmasi gerektiginden $x(t)$'nin hesabi icin $ABJPKQLA$ kapali cevresini dikkate almadan $X(s)$'nin kutuplarindaki residuleri hesaplayarak $x(t)$ bulunabilir. Diger bir ifadeyle

$$x(t) = e^{st}X(s)'ninkutuplarindakiresiduleritoplami$$

seklinde yazilabilir.

qw38 $X(s) = \frac{1}{s+10}$ ise $x(t)$'yi rezidu yontemiyle hesaplayin.

**Cozum**: $X(s)$ nin $s = -10$ da tek katli kutbu vardir. $s = -10$'daki rezidu (Ek-ref: app41) de verilen rezidu teoreminden

$$Res_{s=-10} = (s+10)e^{st}\frac{3}{s+10}\Big|_{s=-10} 3e^{st}|_{s=-10} = 3e^{-10t}$$

olarak hesaplanir. Su halde

$$x(t) = 3e^{-10t}$$

olacaktir.

qw40 $X(s) = \frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}$ ise $x(t)$'yi rezidu yontemiyle hesaplayin.

$e^{st}X(s)$ fonksiyonunun $s = -1$ de uc katli ve $s = 1$ de iki katli kutbu vardir.
$s = 1$ deki rezidu (Ek-ref: appx41)'deki (ref: xqek2f99) bagintisindan hesaplanir.

$$R_1 = \lim_{s\to 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds}\left[ (s-1)^2 \frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[ \frac{se^{st}}{(s+1)^3} \right]$$

$$= \left[ \frac{(e^{st}+ste^{st})(s+1)^3 - 3(s+1)^2\, se^{st}}{(s+1)^6} \right]_{s=1}$$

$$= (s+1)^2 \frac{(1+ts)(s+1)-3s}{(s+1)^6} \Bigg|_{s=1}$$

$$= (1+1)^2 \frac{(1+t)(1+1)-3}{(1+1)^6} \Bigg|_{s=1}$$

$$= \frac{1}{16} e^t(2t-1)$$

$s = -1$ deki rezidu benzer sekilde hesaplanir

$$R_{-1} = \lim_{s\to -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2}\left[ (s+1)^3 \frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{s\to -1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2}\left[ \frac{se^{st}}{(s-1)^2} \right]$$

Ara islemlerden sonra (iki defa turev alinmasi gerektigini unutmayiniz)

$$= \frac{1}{16} e^{-t}(1-2t^2)$$

elde edilir. Sonuc olarak $x(t)$ fonksiyonu rezidulerin toplamina esittir.

$$x(t) = R_1 + R_{-1} = \frac{1}{16} e^t(2t-1) + \frac{1}{16} e^{-t}(1-2t^2)$$

# Lineer Diferansiyel Denklemlerin Laplas Donusumu Yardimiyla Cozumu

Laplas donusumunun zaman domeninde turev ozelligi kullanilarak lineer diferansiyel denklemler kolayca cozulebilir.

$$3\frac{d^2x}{dt^2} + 12x = f(t)$$

Dif denkleminde $f(t) = u(t)$, birim basamak fonksiyonu, ve $x(0) = 2, x'(0) = 3$ olduguna gore $x(t)$yi hesaplayin.

**Cozum**: Dif denklemin er iki tarafinin Laplas donusumunu alalim.

$$\mathcal{L}\left[3\tfrac{d^2x}{dt^2} + 12x\right] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[3\tfrac{d^2x}{dt^2}\right] + \mathcal{L}[12x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

Terimlerin ayri ayri Laplas donusumunu alarak

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$
$$\mathcal{L}[x] = X(s)$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s}$$

degerlerini diferansiyel denklemde yerine koyarsak.

$$(3s^2 + 12)X(s) - 3sx(0) - 3x'(0) = F(s)$$

Buradan

$$X(s) = \frac{F(s)}{3s^2 + 12} + \frac{3sx(0) + 3x'(0)}{3s^2 + 12}$$

elde edilir. $F(s) = \frac{1}{s}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$ degerleri yerine konup

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s(3s^2+12)} + \frac{6s+9}{3s^2+12} = \frac{2s^2+3s+\frac{1}{3}}{s(s^2+4)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2j} + \frac{C}{s-2j} \end{aligned}$$

seklinde carpanlara ayrilir. $A, B, C$ katsayilari Ek-ref: appx41 deki gibi hesaplanirsa

$$A = 1.5, \quad B = 0.25 + 0.75j, \quad C = 0.25 - 0.75j$$

Bulunur. Sonuc olarak $F(s)$ fonksiyonu

$$\frac{1.5}{s} + \frac{0.25 + 0.75j}{s + 2j} + \frac{0.25 - 0.75j}{s - 2j}$$

olur. Ters Laplas donusumunu alarak,

$$f(t) = 1.5u(t) + (0.25 - 0.75j)e^{-2jt} + (0.25 + 0.75j)e^{2jt}$$

$$f(t) = 1.5u(t) + (0.25 - 0.75j)[\cos(2t) - j\sin(2t)] + (0.25 + 0.75j)[\cos(2t) + j\sin(2t)]$$

$$\begin{aligned} f(t) = 1.5u(t) \quad &+0.25\cos(2t) - j0.25\sin(2t) - 0.75j\cos(2t) - 0.75\sin(2t) \\ &+0.25\cos(2t) + j0.25\sin(2t) + 0.75j\cos(2t) - 0.75\sin(2t) \end{aligned}$$

$$f(t) = 1.5u(t) + 0.5\cos(2t) - 1.5\sin(2t)$$

elde edilir.

# Z donusumu, (™rneklenmiŸ iŸaretin Laplas d”nŸm)

Analog isaretlerin analizi Laplas donusumu ile kolayca yapilabildigi gibi ayrik isaretler de $z$ donusumu yardimiyla kolayca analiz yapilabilir. Ornekleme araligi $T$ olan sekil(ref: cx2)de verilen impuls darbe katarinin matematik modeli

$$\delta_h(t) = \delta(0) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \delta(t - 3T) \ldots\ldots$$

seklinde gosterilebilir. $x(t)$ fonksiyonu $\delta_h(t)$ ile ‡arparak $x^*(t)$ fonksiyonunu elde edelim.

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t)\delta_h(t) \\ &= x(t)\delta(t) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + x(t)\delta(t-3T) + \ldots\ldots \\ &= x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + x(3T)\delta(t-3T) + \ldots\ldots. \end{aligned} \qquad \text{xq7f21}$$

olacaktir.

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(s)$$

tanimini yapalim. Ote yandan tablo(ref: xq7t01)'den birim impulsin Laplas donusumu $1$ olarak verilmisti. Bu sonuca (ref: laplaskaydirma ile verilen zamanda kaydirma teoremi uygulayarak

$$\mathcal{L}\delta(t-pT) = 1e^{-pTs} dir. \qquad \#$$

elde edilir. Bu bilgiler isiginda (ref: xq7f21) esitliginin her iki tarafinin Laplas donusumunu alalaim.

$$\begin{aligned} x^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[x(t)\delta_h(t)] \\ &= \mathcal{L}[x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + x(3T)\delta(t-3T) + \ldots\ldots.] \\ &= x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(T)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + x(2T)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \ldots\ldots\ldots.. \qquad \# \\ &= x(0).1 + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + x(3T)e^{-3Ts}\ldots\ldots\ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \end{aligned}$$

$e^{Ts} = z \quad ve \quad X^*(s) = X(z)$ tanmlar yaplrsa.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \qquad \#$$

elde edilir. Dolayisiyla

$$X(z) = X^*(s)|_{s=\frac{1}{T}ln(z)} \qquad \#$$

yazlabilir. Zaman domenindeki ayrk datalar i‡in

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}}$$

-10mm

xq7f12

yazlabilir. Bir isaretin $Z$ donusumu ve ters $Z$ donusumu

$$\mathcal{Z}[x(kT)] = X(z) \qquad \mathcal{Z}^{-1}X(z) = x(kT)$$

seklinde gosterilir. Cogu kere ornekleme araligi olan $T$ esitlikten atilir fakat ornekleme araliginin devreye girdigi yerde $T$'nin esitlikte oldugu hatirlanmalidir.

$k < 0$ icin $x(kt) = 0$ kabul edildiginden yukarida gosterilen **tek tarafli Z donusumudur**. Fiziksel bir isarette $k < 0$ icin $x(kt) = 0$ dir. Ancak bazi hallerde fiziksel

$x(kT)$ isareti belli donusumler neticesinde $k < 0$ icinde degerler alir. Bu durumda

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k}}$$

-10mm

xq7f14

seklinde tanimlanan **cift tarafli Z donusumu** kullanilir. Bir $X(z)$ fonksiyonunun tek taraflimi yoksa cift tarafli $Z$ donusumu sonucu elde edildigi belirtilmelidir. Bu bolumde tek tarafli $Z$ donusumu anlatilacaktir. Cift tarafli $Z$ donusumu bolum (ref: cifttarafliZdonusumu'de ele alinacaktir. Bu kitapda aksi soylenmedikce tek tarafli $Z$ donusumu anlasilmalidir.

$x(0) = 12, \quad x(1) = -8, \quad x(2) = 20, \quad x(3) = 7$ ve $k > 3$ icin $x(k) = 0$ olan isaretin $\mathcal{Z}$ donusumunu alin.

**Cozum**:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{3} x(kT)z^{-k} = 12 - 8z^{-1} + 20z^{-2} + 7z^{-3} \\ &= \frac{12z^3 - 8z^2 + 20z + 7}{z^3} \end{aligned}$$

$x(kT) = \delta(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{array} \right\}$ fonksiyonunun $\mathcal{Z}$ d"nsmn bulun.

**Cozum**:

$$\begin{aligned} x(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + \ldots\ldots \\ &= 1z^0 + 0 + 0 + 0\ldots. = 1.1 = 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta(kT)\} = 1 \qquad \#$$

$x(kT) = U(kT) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & kT < 0 \\ 1 & kT > 0 \end{array} \right\}$ ise $x(z) = ?$

**Cozum**:

$$\begin{aligned} x(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + \ldots\ldots \\ &= 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \ldots\ldots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[u(kT)] = \frac{z}{z-1} \qquad \#$$

Not:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n + \ldots\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \qquad \#$$

ba§nts kullanld.

$x(kT) = e^{-akT}$ olduguna gore $X(z)$yi hesaplayin.

**Cozum**:

$$\begin{aligned} x(z) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + \ldots\ldots \\ &= e^0 z^0 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \ldots\ldots\ldots \\ &= \tfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \tfrac{z}{z-e^{-aT}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[e^{-akT}] = \frac{z}{z - e^{-aT}} \qquad \text{xq7f57}$$

**Not**:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n + \ldots\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

ba§ntsnn ge‡erli olmas i‡in $|a| < 1$ olmaldr. Bu noktadan hareketle yukardaki ”rneklerdeki $\mathcal{Z}$ d”nŸmlerinin ge‡erli olmas i‡in

O.P.(ref: xq7o63) ”rne§inde $|z| < \infty$

O.P.(ref: xq7o65) orne§inde $|z^{-1}| < 1 \quad |z| > 1$

O.P.(ref: xq7o67) orne§inde $|e^{-aT}z^{-1}| < 1 \quad |z| > e^{-aT}$

olmaldr. Bu b”lgelere **yaknsaklk b”lgesi** denir.

# Z Donusumunun Ozellikleri

## Lineerlik

$$\mathcal{Z}[ax(kT) + by(kT)] = a\mathcal{Z}[x(kT)] + b\mathcal{Z}[x(kT)] \qquad \#$$

Isbat:

$$\begin{aligned} [ax(kT) + by(kT)] &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} [ax(kT) + bx(kT)]z^{-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} [ax(kT)]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [by(kT)]z^{-k} \\ &= a\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} [x(kT)]z^{-k} b \sum_{k=0}^{\infty} [y(kT)]z^{-k} \\ &= aZ[x(kT)] + bZ[x(kT)] \\ &= aX(z) + bY(z) \end{aligned}$$

## Olcekleme

$$\mathcal{Z}[a^{kT}x(kT)] = X(a^{-T}z) \qquad \#$$

Isbat:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[a^{kT}x(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT}x(kT)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(a^{-T}z)^{-k} \\ &= X(a^{-T}z)\end{aligned}$$

## Zamanda ileri kaydirma teoremi:

$$Z[x(kT-nT)] = z^{-n}Z[x(kT)] \qquad \#$$

Isbat: a)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(kT-nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k}z^{n} \\ &= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-(k-n)}\end{aligned}$$

$q = k - n$ tanimi yapilirsa

$$\mathcal{Z}[x(kT-nT)] = z^{-n}\sum_{q=-n}^{\infty} x(qT)z^{-q}$$

$q < 0$ icin $x(qT) = 0$ oldugundan toplamin alt limiti sifir alinabilir.

$$\mathcal{Z}[x(kT-nT)] = z^{-n}\sum_{q=0}^{\infty} x(qT)z^{-q} = z^{-n}X(z)$$

$$x(k) = \begin{cases} a^{k-1} & k > 1 \\ 0 & k \le 0 \end{cases}$$

seklinde tanimlanan $x(k)$ isaretinin $Z$ donusumunu hesaplayin.

**Cozum**: $Z$ donusum tablosundan goruldugu gibi

$$\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$$

seklindedir. Zamanda kaydirma teoremi geregi

$$X(z) = \mathcal{Z}[a^{k-1}] = z^{-1}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}$$

elde edilir.

$y(k) = a^{k-1}$ seklinde tanimlanan $x(k)$ isaretinin $Z$ donusumunu hesaplayin.

**Cozum**: $Z$ donusumu tanimi geregi

$$Y(z) = a^{-1} + z^{-1} + az^{-2} + a^2z^{-3} + \ldots\ldots\ldots$$

olmalidir. Ilk terim haric diger terimlerin toplami (O.P.ref: xq7op15) ile verilen $x(k)$ isaretinin $Z$ donusumunu verir. O halde

$$\mathcal{Z}[a^{k-1}] = a^{-1} + \frac{1}{z-a} = a^{-1}\frac{z}{z-a}$$

olacaktir.
**not**: Problemi $a^{k-1} = a^k a^{-1}$ seklinde ele alip $Z$ donusumunun bulunmasiyla problemin daha basit olarak cozulebilecegini unutmayiniz.

## Zamanda geri kaydirma teoremi:

$$Z[x(kT+nT)] = z^n\left[ Z[x(kT)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \qquad \#$$

Isbat:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(kT+nT)] &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-(k+n)} \\ &= z^n \textstyle\sum_{q=n}^{\infty} x(qT)z^{-q} \\ &= z^n\left[\textstyle\sum_{q=n}^{\infty} x(qT)z^{-q} + \sum_{q=0}^{n-1} x(qT)z^{-q} - \sum_{q=0}^{n-1} x(qT)z^{-q}\right] \\ &= z^n\left[\textstyle\sum_{q=0}^{\infty} x(qT)z^{-q} - \sum_{q=0}^{n-1} x(qT)z^{-q}\right]\end{aligned}$$

$y(k) = a^{k+1}$ seklinde tanimlanan $x(k)$ isaretinin $Z$ donusumunu hesaplayin.

**Cozum**: $a^k$'nin $Z$ donusumune zamanda geri kaydirma teoremi uygulanirsa

$$\mathcal{Z}[a^{k+1}] = z\left[ \mathcal{Z}[a^k] - \sum_{k=0}^{0} a^k z^{-k} \right] = z\left[ \frac{z}{z-a} - 1 \right] = \frac{az}{z-a}$$

olarak elde edilir.
**not**: Problemi $a^{k+1} = a^k a$ seklinde ele alip $Z$ donusumunun bulunmasiyla problemin daha basit olarak cozulebilecegini unutmayiniz.

## Baslangic Deger Teoremi

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad \#$$

Isbat:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

$z \to \infty$ koyarsak $z$nin butun kuvetleri $z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}\ldots$ sifir olacaktir. Dolayisiyla $x(0)$ $X(z)$ nin $z \to \infty$ icin degeri olur.

## Son Deger Teoremi

Eger $\lim_{k\to\infty} x(k)$ var ise (sonsuz degilse) Bu deger asagidaki sekilde hesaplanabilir.

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$$

Isbat:

$$\mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$
$$\mathcal{Z}[x(kT-T)] = z^{-1}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-T)z^{-k}$$

esitlikler taraf tarafa cikarilirsa.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-T)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z)$$

Esitligin her iki tarafinin $z = 1$ icin limitini alalim

$$\lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-T)\right] = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]$$

Esitligin sol taraftaki terimini biraz acalim

$$\lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-T)\right] = \lim_{z\to 1} \sum_{k=0}^{\infty}[x(kT) - x(kT-T)]$$

$k < 0$ icin $x(k) = 0$ oldugu dusunulurse $z = 1$ icin yukaridaki ifade

$$\sum_{k=0}^{\infty}[x(kT) - x(kT-T)] = [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \ldots\ldots$$
$$= x(\infty) = \lim_{k\to\infty} x(k)$$

Seklinde gelir. Dolayisiyla

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$$

elde edilir.

## Konvolusyon

**Tanim**: $x(k)$ ve $y(k)$ ayrik zamanli datalari gostermek uzere

$$W(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} x(hT)y(kT-hT) = \sum_{h=0}^{\infty} x(kT-hT)y(hT) \qquad \#$$

ifadesine $x(kT)$ ve $y(kT)$ isaretlerinin konvolusyonu denir.

$$Z[x(kT)] = X(z) \quad Z[y(kT)] = Y(z)$$

olmak uzere.

$$W(z) = X(z)Y(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)y(kT-hT)\right] \qquad \#$$

**Isbat**:

$$W(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)y(kT-hT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)y(kT-hT)\right]z^{-k}$$

Toplamin yerini degistirerek.

$$W(z) = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x(hT)y(kT-hT)z^{-k} = \sum_{h=0}^{\infty} x(hT)\sum_{k=0}^{\infty} y(kT-hT)z^{-k}$$

$k - h = m$ tanimi yapilirsa

$$\begin{aligned} W(z) &= \textstyle\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)\left[\sum_{m=-n}^{\infty} y(mT)\right]z^{-m-h} \\ &= \textstyle\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)\left[\sum_{m=-n}^{\infty} y(mT)z^{-m}\right]z^{-h} \\ &= \left[\textstyle\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h}\right]\left[\sum_{m=-n}^{\infty} y(mT)z^{-m}\right] \end{aligned}$$

$m < 0$ icin $x(mT) = 0$ oldugundan

$$W(z) = \left[\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} y(mT)z^{-m}\right] = X(z)Y(z)$$

elde edilir.

## Z domeninde turev

$$\mathcal{Z}[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z) \qquad \#$$

Isbat:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Ifadesinin her iki tarafinin $z$'ye gore turevini $\mathcal{Z}$ alalim.

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dz}X(z) &= \tfrac{d}{dz}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{d}{dz}[x(k)z^{-k}] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(k)(-k)z^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-1}x(k)(-k)z^{-k} \\ &= -z^{-1}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(k)kz^{-k} = -z^{-1}Z[kx(k)] \end{aligned}$$

veya

$$\mathcal{Z}[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

elde edilir.

Benzer yolla devam edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[k^2x(k)] &= -z\tfrac{d}{dz}\left[-z\tfrac{d}{dz}X(z)\right] \\ \mathcal{Z}[k^3x(k)] &= -z\tfrac{d}{dz}\left\{-z\tfrac{d}{dz}\left[-z\tfrac{d}{dz}X(z)\right]\right\} \end{aligned}$$

oldugu kolayca gosterilebilir.

## $\mathcal{Z}$ domeninde integral

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^{\infty}\frac{X(q)}{q}dq + \lim_{k\to\infty}\frac{x(k)}{k} \qquad \#$$

Isbat: Tanim geregi

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{k} z^{-k}$$

olacaktir. Esitligin her iki tarafinin $z$'ye gore turevini alalaim.

$$\frac{d}{dz}G(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k-1} = -z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \frac{X(z)}{z}$$

Sindi de esitligin her iki tarafinin $z = z$'den $z = \infty$ kadar integralini alalim.

$$\int_z^{\infty} \frac{d}{dz}G(z) = G(\infty) - G(z) = -\int_z^{\infty} \frac{X(q)}{q} q$$

veya

$$G(z) = -\int_z^{\infty} \frac{X(q)}{q} q + G(\infty)$$

elde edilir. $G(\infty)$ yerine son deger teoremi ile verilen degeri konulursa teorem isbatlanmis olur.

## $Z$ domeninde konvolusyon

$x_1(k)$ nin yakinsaklik bolgesi $R_1$, $x_2(k)$ nin yakinsaklik bolgesi $R_2$ olmak uzere $x_1(k), x_2(k)$ ifadesinin $Z$ donusumu

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c v^{-1}X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)dv = \frac{1}{2\pi j}\oint_c v^{-1}X_2(v)X_1\left(\frac{z}{v}\right)dv \qquad \#$$

seklinde hesaplanabilir. $\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)]$'nin yakinsaklik bolgesi

$$R_1 < |v| < \frac{|z|}{R_2} \qquad veya \qquad R_2 < |v| < \frac{|z|}{R_1}$$

seklinde olacaktir. Burada $\oint_c$ kompleks duzlemde $c$ bolgesi uzerinde alinan integral anlamina gelir. Kompleks duzlemde integralin alinisi (Ek-ref: appx31) de verilmistir. Teoremin isbati ters $Z$ donusumlerini anlattiktan sonra verilecektir.

## Parseval Teoremi

Eger $x(k)$ sinirli ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) == \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}X_2(z)X_1(z^{-})dz \qquad \#$$

Teoremin isbati (ref: ) ile verilen $Z$ domeninde konvolusyon teoreminde $z = 1$ konarak yapilabilir.

# Cift Tarafli $Z$ Donusumu

Cift tarafli $Z$ donusumu (ref: xq7f14) bagintisi ile verildigi gibi

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

-8mm (ref: xq7f14) seklinde tanimlanir. Bagintiyi acik yazalim

$$X(z) = x(0) + x(-1)z + x(-2)z^2 + x(-3)z^3 + \ldots\ldots\ldots x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots\ldots\ldots \qquad \text{xq7g21}$$

Goruldugu gibi $X(z)$ iki ayri sonsuz serinin toplami seklindedir. $a, b$ pozitif sayilar olmak uzere $x(k)$ dizisi asagidaki sekilde olsun.

$$x(k) = \begin{matrix} a^k & k \geq 0 \\ b^k & k < 0 \end{matrix}$$

(ref: xq7g21) bagintisini bu $x(k)$ icin yazalim.

$$X(z) = 1 + bz + b^2z^2 + b^3z^3 + \ldots\ldots\ldots az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots\ldots\ldots \qquad \#$$

$$X(z) = 1 + bz + (bz)^2 + (bz)^3 + \ldots\ldots\ldots az^{-1} + (az^{-1})^2 + (az^{-1})^3 + \ldots\ldots\ldots \qquad \text{xq7g23}$$

Eger $|bz| < 1$ ve $|az^{-1}| < 1$ sartlari saglanirsa (EK-ref: seritoplami) geregi (ref: xq7g23) bagintisi

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz} + \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad \text{xq7g25}$$

seklinde yazilabilir. $X(z)$ nin (ref: xq7g25)'deki gibi kapali formda yazilabilmesi icin gerekli sartlar bu $X(z)$ icin yakinsaklik bolgesini verir. Su halde (ref: xq7g25)de verilen $X(z)$ icin yakinsaklik bolgesi

$$a < |z| < \frac{1}{b} \qquad \#$$

olarak elde edilir. Burada eger $a < \frac{1}{b}$ ise $a < |z| < \frac{1}{b}$ araligi $X(z)$ dizisinin yakinsak oldugu araligi verir. eger $a > \frac{1}{b}$ ise bu $X(z)$ hic bir yerde yakinsamaz ve $X(z)$ anlamsiz olur.

Lineer sisitemlere iliskin tek tarafli $Z$ donusumlerinde $|z| > a$ seklinde yakinsaklik bolgesi daima vardir. Cift tarafli $Z$ donusumlerinde yukaridaki ornekte oldugu gibi yakinsaklik bolgesi her zaman olmayabilir. Bu yuzden cift tarafli $Z$ donusumlerinde Yakinsaklik bolgesi verilmeyen bir $X(z)$ fonksiyonu anlamsizdir. Cift tarafli $Z$ donusumlerinde bir $X(z)$ fonksiyonuna iliskin $x(k)$nin bulunabilmesi icin yakinsaklik bolgesi de mutlaka belirtilmelidir.

# Cift Tarafli $Z$ Donusumunun Ozellikleri

Cift tarafli $Z$ donusumu tek tarafli $Z$ donusumu ile birkac nokta haric ayni ozelliklere sahiptir. Herseyden once eger $k < 0$ icin $x(k) = 0$ ise tek ve cift tarafli $Z$ donusumu tamamen aynidir.

??[hbt]

| $f(k)$ | $\mathcal{Z}[f(k)]$ | $Yakinsaklik Bolgesi$ |
|---|---|---|
| $x(k)$ | $X(z)$ | $R_{x-} < \lvert z\rvert < R_{x+}$ |
| $y(k)$ | $Y(z)$ | $R_{y-} < \lvert z\rvert < R_{y+}$ |
| $ax(k)+by(k)$ | $aX(z)+bY(z)$ | $max[R_{x-},R_{y-}] < \lvert z\rvert < min[R_{x+},R_{y+}]$ |
| $x(k+q)$ | $z^{q}X(z)$ | $R_{x-} < \lvert z\rvert < R_{x+}$ |
| $x(k-q)$ | $z^{-q}X(z)$ | $R_{x-} < \lvert z\rvert < R_{x+}$ |
| $q^{k}x(k)$ | $X(\frac{z}{a})$ | $\lvert a\rvert R_{x-} < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert R_{x+}$ |
| $kx(k)$ | $-z\frac{dX(z)}{dz}$ | $R_{x-}\lvert z\rvert < R_{x+}$ |
| $x(-k)$ | $X(\frac{1}{z})$ | $\frac{1}{R_{x+}} < \lvert z\rvert < \frac{1}{R_{x-}}$ |
| $x(k)y(k)$ | $\frac{1}{2\pi j}\oint_{c} v^{-1}X(v)Y(\frac{z}{v})dv$ | $R_{x-}R_{y-} < \lvert z\rvert < R_{x+}R_{y+}$ |
| $\sum_{q=-\infty}^{q=\infty} x(q)y(k-q)$ | $X(z)Y(z)$ | $max[R_{x-},R_{y-}] < \lvert z\rvert < min[R_{x+},R_{y+}]$ |

Cift tarafli $Z$ donusumunun Ozellikleri

Cift tarafli $Z$ donusumunun tek tarafli $Z$ donusumunden ayrildigi onemli ozelliklerden biri zamanda geri kaydirma teoremidir. cift tarafli $Z$ donusumunde zamanda geri kaydirma teoremi

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^{n}X(z) \qquad \#$$

seklindedir. Zamanda ileri kaydirma teoremi her iki donusumde de aynidir.

Cift tarafli $Z$ donusumunde baslangic deger teoremi ve son deger teoremi de tek tarafli $Z$ donusumunde oldugu gibi hesaplanamaz.

Cift tarafli $Z$ donusumunde herhangibir islem sonucu elde edilen yeni $X(z)$ isaretininde yakinsaklik bolgesi verilmelidir. Tablo(ref: xq7t21)'de cift tarafli $Z$ donusumunun ozellikleri ve yakinsaklik bolgeleri liste halinde verilmistir.

# Ters Z donusumleri

Ters Z donusumleri

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)z^{k-1}dz \qquad \text{xq7f71}$$

(ref: xq7f71) verilen integralin hesabi kompleks sayilarla ugrasan kisi icin basit olmakla birlikte ters Z donusumunu bu integrali almadan hesaplayan basit yontemlerde vardir.

*5mm Ters Z donusumunu alma yontemleri:

*10mm 1) Basit kesirlere ayirma

*10mm 2) Payi paydaya bolme

*10mm 3) Numerik Metodlar

*10mm 4) Ters Integral alma(rezidu teoremi yardimiyla)

Simdi Bu yontemleri teker teker kisaca inceleyelim.

## Basit Kesirlere Ayirma

$x(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ seklinde iki polinomun orani olarak yazilabilen bir $X(z)$ ifadesi basit kesirlere ayrilabilir. Ancak

$$M(z) = \frac{x(z)}{z} = \frac{A(z)}{zB(z)}$$

seklinde tanimlanan terimi carpanlara ayirmak ters Z donusumunu hesaplamak icin daha elverislidir. $M(z)$ ifadesi en genel halde asagidaki sekilde basit kesirlere ayrilir.

$$M(z) = \frac{x(z)}{z} = \frac{A(z)}{zB(z)} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \frac{a_3}{z-p_3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{c_1}{z-p_{c1}} + \frac{c_1^*}{z-p_{c1}^*}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + \frac{b_1}{(z-p_k)^3} + \frac{b_2}{(z-p_k)^2} + \frac{b_3}{(z-p_k)^1}$$

Seklinde yazilabilir. Burada pratikte raslanabilecek en genel hal gosterilmistir. $p_1, p_2, p_3$ birbirinden farkli uc kok. $p_{c1}, p_{c1}^*$ komplex eslenik kokler. $p_k$ da katli kok var (uc tane). $a_1, a_2, a_3, \ldots . b_1, b_2, b_3, \ldots c_1, c_1^*, \ldots .$ katsayilarinin basit olarak nasil hesaplanabilecegi Ek-ref: appx41 de verilmistir. sekillerde hesaplanabilir. Her bir basit kesire karsilik gelen $x(k)$ ifadesi Tablodan bulunur.

Asagidaki orneklerde aksi soylenmedikce T=1 alinacaktir. $X(z) = \frac{z}{z-2}$ ise $x(k) = ?$ Tablodan

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-p}\right\} = p^k$$

oldugundan $x(k) = 2^k$ bulunur.

$X(z) = \frac{z}{z+2}$ ise $x(k) = ?$
$Z$ donusum tablosunu kullanarak

$$X(z) = \frac{z}{z+2} = \frac{z}{z-(-2)} \quad \rightarrow \quad x(k) = (-2)^k$$

bulunur.

$X(z) = \frac{1}{z-2}$ ise $x(k) = ?$
Burada $Y(z) = zX(z)$ tanimi yapilir. $Y(z) = \frac{z}{z-2}$ olur. Tablodan $y(k) = 2^k$ bulunur.

Zamanda kaydirma teoremine gore :

$$\mathcal{Z}[f(k-n)] = z^{-n}F(z)$$

olacaktir. $X(z) = z^{-1}Y(z)$ oldugundan kaydirma teoremi geregi $x(k) = y(k-1)$ olacaktir. Dolayisiyla

$$x(k) = y(k-1) = 2^{k-1}$$

Olacaktir. Fakat burada dikkat edilmesi gereken bir husus vardir. ??[hbt]

| $k$ | $y(k) = 2^k$ | $x(k) = y(k-1) = 2^{k-1}$ |
|---|---|---|
| $-2$ | 0 | 0 |
| $-1$ | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 3 | 8 | 4 |
| 4 | 16 | 8 |
| .. | .. | .. |

5mm $y(k)$ isareti ve bir adim saga kaydirilmis $x(k)$ isareti

y(k) isareti $k < 0$ icin sifira esit olan bir isarettir. y(k) isaretinin bir adim saga kaydirilmis sekli y(k-1) isaretidir. Yukaridaki bagintiya gore

$$x(0) = 2^{0-1} = 0.5$$

olmalidir. Halbuki Tablo(ref: xq7t57) $y(k)$den goruldugu gibi $y(k)$nin bir adim saga kaydirilmis seklinden hesaplanan $x(0) = 0$ dir, ve dogrusu da budur. Dolayisiyla $x(k)$ bagintisini yazarken

$$x(k) = y(k-1) = 2^{k-1} \quad k > 0 \quad icingecerli$$

seklinde belirtilmelidir.

# Payi paydaya bolme

$Z$ domenindeki bir ifade genelde iki polinomun orani seklinde verilir. Pay polinomu paydaya bolunup bolum $z^{-1}$rin kuvvetleri cinsinden elde edilirse ters $Z$ donusumu icin yeni bir yontemi uygulayabiliriz. Bir ornek uzerinde bu yontemi aciklayalim.

$$X(z) = \frac{10z + 5}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

Payi paydaya asagidaki sekilde bolelim.

$$X(z) = \frac{10z + 5}{z^2 - 1.2z + 0.2} = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + 18.68z^{-4} + \ldots\ldots +$$

$Z$ donusum formulu

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \ldots\ldots$$

idi. Ornekteki degerleri formuldeki degerlere benzetirsek.

$$x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \ldots\ldots\ldots =$$
$$0\ z^0 \ + \ 10\,z^{-1} \ + \ 17z^{-2} \ + \ 18.4z^{-3} \ + \ 18.68z^{-4} + \ldots\ldots$$

Buradan

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 10, \quad x(2T) = 17, \quad x(3T) = 18.4, \quad x(4T) = 18.68\ldots\ldots\ldots\ldots$$

elde edilir.
Bu sekilde hesaplanan terim sayisinin bolumun devam ettigi yere kadar olacagi aciktir.

# Numerik Yontemler

$X(z)$ genellikle iki polinomun orani seklinde verildiginden $X(z)$ ifadesi fark denklemleri haline getirilip numerik cozum yapilarak $x(k)$ hessaplanabilir.

$$x(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots\ldots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \ldots\ldots\ldots} \qquad \text{xq7f77}$$

Seklinde verilsin.

$$\mathcal{Z}[\delta(t)] \ = 1 = \Delta(z)$$

oldugundan (ref: xq7f77) esitliginin her iki tarafini $\Delta(z)$ (1) ile carpalim.

$$x(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots\ldots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \ldots\ldots\ldots}\Delta(z)$$

veya

$$b_0 x(z) + b_1 z x(z) + b_2 z^2 x(z) + b_3 z^3 x(z) + \ldots\ldots$$
$$= a_0\delta(z) + a_1 z\delta(z) + a_2 z^2\delta(z) + a_3 z^3\delta(z) + \ldots\ldots$$

seklinde yazilabilir. Her iki tarafin terz Zx donusumu alinirsa:

$$b_0 x(kT) + b_1 x(kT+T) + b_2 x(kT+2T) + b_3 x(kT+3T) + \ldots\ldots$$
$$= a_0\delta(kT) + a_1\delta(kT+T) + a_2\delta(kT+2T) + a_3\delta(kT+3T) + \ldots\ldots$$

Tanim geregi $\delta(1) = 0 \quad \delta(2) = 0 \quad \delta(3) = 0 \quad \ldots.\delta(n) = 0$ dir.
Tek tarafli $Z$ donusumu ele alindigindan $k < 0$ icin $x(kT) = 0$ olmak zorundadir.
Yukaridaki sartlar kullanilarak denklem adim adim cozulur.

$$X(z) = \frac{10z + 5}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

$$X(z) = \frac{10z + 5}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{10z + 5}{z^2 - 1.2z + 0.2}\delta(z)$$

$$x(z)(z^2 - 1.2z + 0.2) = (10z + 5)u(z)$$

$$x(kT + 2T) = 1.2x(kt + T) - 0.2x(kT) + 10\delta(kT + T) + 5\delta(kT)$$

**Not**: **Kolaylik icin $\mathbf{T} = \mathbf{1}$ alinacak**. **Eger $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$ ise o zaman t ekseni olceklenerek sonuclar bulunur**. Denklemde $x(0)$ degerini bulmak icin $k = -2$ koymaliyiz. $k = -2$

koyarsak

$$x(-2+2) = 1.2x(-2+1) - 0.2x(-2) + 10\delta(-2+1) + 5\delta(-2) \Rightarrow$$

$$x(0) = 1.2x(-1) - 0.2x(-2) + 10\delta(-1) + 5\delta(-2)$$

$x(-2) = 0 \quad x(-1) = 0 \quad \delta(-1) = 0 \quad \delta(-2) = 0$ oldugundan degerler yerine konulursa

$$x(0) = 0$$

bulunur. Denklemde $k = -1$ konursa

$$x(1) = 10$$

elde edilir. Benzer sekillerde $k = 0, \quad k = 1, \quad k = 2, \quad \ldots..$ koyarak $x(2) = 17, \;\; x(3) = 18.4 \;\; x(4) = 18.68\ldots..$ degerleri hesaplanabilir. Basit bir bilgisayar programi ile $x(k)$'nin istenildigi kadar terimi hesaplanabilir.

# Rezidu Yontemi

Rezidu yontemi $X(z)$ herhangibir formda olmasi halinde gecerlidir. (ref: xq7f71) de verilen ters $Z$ donusum formulu

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz \qquad\qquad \text{ref: xq7f71}$$

seklinde idi. Burada $C$ bolgesi $X(z)$nin yakinsaklik bolgesi icinde bulunan merkezi orijinde olan bir cemberdir. Kompleks duzlemde integralin anlami ve integralin rezidu yontemiyle hesabi Ek-ref: appx31 de verilmistir. Buna gore yukaridaki integralin degeri

$$x(k) = [z^{n-1}X(z)]'$$

bagintisi ile hesaplanir.

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 0.5z + 0.06}$$

gore bu $x(k)$ isaretini bulun.

**Cozum**:

$$Y(z) = z^{k-1}X(z) = \frac{z^{k-1}z}{z^2 + 0.5z + 0.06} = \frac{z^k}{(z+0.3)(z+0.2)}$$

$k/geq0$ icin $Y(z)$nin iki kutbu var. Iki kutbun rezidulerini hesaplayalim.

$$R_1 = (z+0.3)\frac{z^k}{(z+0.3)(z+0.2)}\Bigg|_{z=-0.3} = \frac{z^k}{(z+0.2)}\Bigg|_{z=-0.3} = -10(-0.3)^k$$

$$R_2 = (z+0.2)\frac{z^k}{(z+0.3)(z+0.2)}\Bigg|_{z=-0.2} = \frac{z^k}{(z+0.3)}\Bigg|_{z=-0.2} = 10(-0.2)^k$$

O halde

$$x(k) = R_1 + R_2 = -10(-0.3)^k + 10(-0.2)^k \qquad k/geq0 \; icingecerli$$

# Fark Denklemlerinin $Z$ donusumu Yardimiyla Cozumu

dddd

# Laplas Donusumu ve Furier Donusumu Arasindaki Bagintilar

Laplas ve Furier donusumleri arasindaki bagintiya girmeden once bir konunun kisaca aydinlatilmasi faydalidir.

$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ terimi bir sisteme iliskin transfer fonksiyonu olabilecegi gibi bir isaretin Laplas donusumu de olabilir. Eger $X(s)$ bir isarete ait ise $X(s)$'nin ters Laplas donusumu alinarak elde edilen $x(t)$ isaretin zaman domenindeki karsiligidir. Eger $X(s)$ bir sisteme ait transfer fonksiyonu ise $x(t)$ o sistemin girisine birim impuls uygulandiginda sistemin cikisinin zaman domenindeki ifadesini verir. Bunun gibi bir $X(jw)$ ifadesi bir isaretin Furier donusumu olabilecegi gibi bir sisteme ait frekans domenindeki transfer fonksiyonu da olabilir.

Laplas donusumu ve Furier donusumu arasindaki baginti en kolay olarak (ref: sss) ile verilen ters Laplas ve (ref: fff) ile verilen ters Furier donusum bagintilarini inceleyerek bulunabilir.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st}X(s)ds \qquad \text{xq7fw11}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jwt}X(jw)dw \qquad \text{xq7fw13}$$

(ref: xq7fw11) bagintisinda $s$ yerine $s = jw$ koyalim. Bu durumda $ds = j\,dw$ ve integral sinirlari da

$$c - j\infty = jw \longrightarrow w = \frac{c}{j} - \infty \qquad c + j\infty = jw \longrightarrow w = \frac{c}{j} + \infty$$

seklinde olacaktir.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\frac{c}{j}-\infty}^{\frac{c}{j}+\infty} e^{jwt}X(jw)jdw \qquad \text{xq7fw15}$$

(ref: xq7fw15) bagintisinda eger $c = 0$ alinirsa (ref: xq7fw15) ile (ref: xq7fw13) ayni olmaktadir. Su halde bir $X(s)$ fonksiyonunun ters Laplas donusumu alinirken eger $c = 0$ alinabiliyorsa boyle bir fonksiyon sonucu elde edilecek $x(t)$'nin Furier donusumunu bulmak icin $X(s)$ fonksiyonunda $s$ yerine $jw$ koymak yeterlidir. Ote yandan (ref: jjjj)'inci bolumde incelendigi gibi $c$ keyfi sabittir, saglamasi gereken sart ise $X(s)$ fonksiyonunun butun kutuplarinin tamaminin sekil(ref: xq7fsw53) de gosterilen $c$ dogrusunun sol tarafinda kalmasidir.

f?igure[hbt]   reel-sanal eksen X(s)nin butun kutuplari solda

$c = 0$ olma sarti $X(s)$ transfer fonksiyonunun kutuplarinin tamaminin sanal eksenin solunda kalmasi anlamina geldigi aciktir. Yani $X(s)$ ile verilen sistemin (isaretin) asimtotik kararli olmasi demektir. Kisaca Eger bir sistem asimtotik kararli ise ( bir isaret sonumlu ise) o sisteme (o isarete) iliskin $X(s)$ fonksiyonunda $s = jw$ konarak O sisteme (o isarete) iliskin Furier donusumu elde edilebilir. $X(s) = \frac{e^{-2s}(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+4)(s^2+2s+2)}$ fonksiyonunun kutuplarini kompleks duzlemde gosterin, $x(t)$'nin Furier donusumu $X(s)$ ifadesinde $s = jw$ konularak bulunabilirmi?

**Cozum**:: $X(s)$nin $s = -3, \quad s = -2, \quad s = -1 - j, \quad s = -1 + j$'de olmak uzere 4 kutbu vardir.

f?igure[hbt] $X(s)$nin $s = -3, \quad s = -2, \quad s = -1 - j, \quad s = -1 + j$'deki kutuplari
Sekil (ref: xq7fsw55)de gosterildigi gibi bu kutuplarin tamami sanal eksenin solundadir. Dolayisiyla bu sisteme ait Furier donusumu $X(jw) = \frac{e^{-2jw}(jw+1)(jw-2)}{(jw+3)(jw+4)((jw)^2+2jw+2)}$ seklinde olacaktir.

$X(s) = \frac{s)}{(s^2+4)}$ fonksiyonuna ait $x(t)$'nin Furier donusumu $X(s)$ ifadesinde $s = jw$ konularak bulunabilirmi?

**Cozum**:: $X(s)$nin $s = -2j, \quad s = 2j$'de iki kutbu vardir. Kutuplar sanal eksen uzerinde oldugundan (sanal eksenin solunda olmadiklarindan) $X(jw)$ $s = jw$ konarak hesaplanamaz.

Bir sistemin transfer fonksiyonu $X(s) = \frac{s)}{(s^2+4)}$ seklindedir. a)Bu sisteme iliskin birim impuls cevabini bulun. b) $\lim_{t\to\infty} x(t) = ?$ degerini hesaplayin. c)Giriste birim impuls verildigi halde cikisin $t \to \infty$ icin sifir olmamasinin nedeni nedir.

Su ana kadar, Furier donusumu, Laplas donusumu, Z donusumu konularini gorduk. Bu donusumler esasen birbiriyle iliskilidir. kutup ve sifir kavrami $z = e^{sT}$ bagintisindan $S$ nin negatif reel kismi briri mdaireye karsilik gelir.

Furier ile laplasin iliskisi .....integral

H(s),H(z),H(jw),H(e$^{jwT}$iliskileri.

ortak yonler hepsi lineer

hepsinin donusum ve ters donusum bagintilarini yaz

sistem kararli ise h(jw)=H(s) H(e$^{jwT}$=H(z)

H(z)=H(s)|z=e$^{sT}$fakat tersi her zaman olmayabilir. $H(s)$ kompleks cikar bir anlami olmaz

Furier donusumu sadece sinuzoidal girisler icin H(s) ve H(z) genel

*******************************************************************

qq11 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ise $\mathcal{L}[x(t)e^{at}] = X(s-a)$ oldugunu gosteriniz. (??.ozellik)

**Cozum**:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt = X(s)$$

oldugundan

$$\mathcal{L}[x(t)e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)e^{at}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}x(t)dt = X(s-a)$$

olacagi aciktir.

qq12 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ise $\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}$ oldugunu gosteriniz.

**Cozum**:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$$

oldugundan

$$\frac{dX(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}(e^{-st}x(t))dt$$

$$= \int_0^{\infty} -te^{-st}x(t)dt = -\int_0^{\infty} e^{-st}(tx(t))dt = -\mathcal{L}[tx(t)]$$

olacaktir.

qq13 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ise $\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$ oldugunu gosteriniz.

**Cozum**:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{dx(t)}{dt}dt = \lim_{P\infty}\int_0^{P} e^{-st}\frac{dx(t)}{dt}dt$$

$$u = e^{-st},\ \ du = -se^{-st},\quad dv = \frac{dx(t)}{dt}dt,\quad v = x(t)$$

tanimi yapip kismi integrasyon uygulanirsa

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] == \lim_{P\infty}\left(e^{-st}x(t)|_0^P - (-s)\int_0^{P} e^{-st}x(t)dt\right)$$

$$= \lim_{P\infty}\left(e^{-sP}x(P) - x(0) + s\int_0^{P} e^{-st}x(t)dt\right)$$

$e^{-\infty} = 0$ oldugundan Laplas donusumu alinabilen bir fonksiyon icin $\lim_{P\infty} e^{-sP}x(P) = 0$ olmak zorundadir. Dolayisiyla

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt - x(0) = sx(s) - x(0)$$

olarak elde edilir.

qs50 $x_1(t) = e^{-3t}\sin(5t), \quad x_2(t) = e^{-3t}\cos(5t), \quad x_3(t) = e^{-3t}(10\sin(5t) + 20\cos(5t))$ ifadelerinin Laplas donusumlerini bulun.

**Cozum**: Laplas donusum tablosundan

$$\mathcal{L}[\sin(5t)] = \frac{5}{s^2+25} \qquad \mathcal{L}[\cos(5t)] = \frac{s}{s^2+25}$$

olarak bulunur. (C.P.ref: xq7pc11)'den

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\sin(5t)] = \frac{5}{(s+3)^2+25} = \frac{5}{s^2+6s+34}$$

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\cos(5t)] = \frac{s+3}{(s+3)^2+25} = \frac{s+3}{s^2+6s+34}$$

olarak bulunur. Laplas donusumunun lineerlik ozelligi kullanilarak

$$\mathcal{L}[e^{-3t}(10\sin(5t)+20\cos(5t))] = 10\frac{5}{s^2+6s+34} + 20\frac{s+3}{s^2+6s+34} = \frac{20s+110}{s^2+6s+34}$$

bulunur.

qs51 $x(t) = t^2e^{8t}$ olduguna gore $X(s)$'yi hesaplayin.

**Cozum**: Tablodan $Z(s) = \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$ oldugu bulunarak,

$$X(s) = \mathcal{L}[t^2e^{8t}] = Z(s-8) = \frac{2}{(s-8)^3}$$

seklinde olacagi acikca gorulur.

$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ olduguna gore $\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$ oldugunu gosterin.

**Cozum**:

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_0^\infty e^{-st}x(at)dt$$

$t = u/a, \quad dt = du/a$ donusumu yaparak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(at)] &= \int_0^\infty e^{-s(u/a)}x(u)\frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su/a}x(u)du \\ &= \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

qs53 $\mathcal{L}[t\sin(at)]$'yi hesaplayin.

**Cozum**: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}$ ve $\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}$ oldugundan

$$[t\sin(at)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{s^2+a^2}$$

olarak eldeedilir.

$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5}$ ise $x(t)$ nedir.

**Cozum**: Payda polinomunun kokleri hesaplanirsa $s_1 = 1+2j, \quad s_2 = 1-2j$ olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5} = \frac{A}{s-(1+2j)} + \frac{B}{s-(1-2j)}$$

seklinde carpanlara ayrilabilir. $A$ ve $B$ katsayilari (Ek-ref: appx41) de gosterilen yontemlerle hesaplanirsa

$$A = 2+3j, \quad B = 2-3j$$

olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5} = \frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)}$$

olacaktir. Her terimin ayri ayri ters Laplas donusumu alinirsa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(S)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2+3j}{s-(1+2j)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2-3j}{s-(1-2j)}\right]$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= (2+3j)e^{(1+2j)t} + (2-3j)e^{(1-2j)t} \\
&= (2+3j)e^t e^{2jt} + (2-3j)e^t e^{-2jt} \\
&= e^t((2+3j)e^{2jt} + (2-3j)e^{-2jt}) \\
&= e^t(2e^{2jt} + 2e^{-2jt} + 3je^{2jt} - 3je^{-2jt}) \\
&= e^t(2(e^{2jt} + e^{-2jt}) + 3j(e^{2jt} - e^{-2jt})) \\
&= e^t\left(4\frac{e^{2jt}+e^{-2jt}}{2} + 3j\,2j\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}\right) \\
&= e^t(4\cos(2t) - 6\sin(2t))
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Simdi problemi baska bir yontemle cozelim. Payda polinomunun kokleri kompleks oldugundan $x(t)$'nin sinuzoidal terimler ihtiva edecegi aciktir.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s+a)^2+b^2}\right] = e^{-at}\sin(bt) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right] = e^{-at}\cos(bt)$$

oldugundan verilen ifadeyi bu formlara benzetmeye calisalim. $X(s)$'nin paydasinin yukaridaki forma benzemesi icin

$$(s+a)^2+b^2 = s^2+2as+a^2+b^2 = s^2-2s+5$$

olmalidir. Buradan acikca gorulecegi gibi

$$2a = -2 \ \longrightarrow a = -1, \quad ve \qquad a^2+b^2 = 5 \ \longrightarrow b = 2$$

olmalidir. $x(t)$ ifadesi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t\sin(2t) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t\cos(2t)$$

terimlerini icinde bulunduracaktir. O halde $X(s)$ ifadesini yukaridaki bilesenler cinsinden yazmak gerekir.

$$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5} = \frac{4s-4-12}{s^2-2s+5} = 4\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2} - 6\frac{2}{(s-1)^2+2^2}$$

$X(s)$'nin ters Laplas donusumu alinirsa

$$x(t) = e^t(4\cos(2t)-6\sin(2t))$$

olarak bulunur.

qq21 $x(s) = \frac{s}{s+a}$ ise $x(t) = ?$

**Cozum**: $\mathcal{L}[e^{-at} = \frac{1}{s+a}$ ve $s(X(s)-x(0) = \frac{d}{dt}x(t)$ bagintilari kullanilarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s\left(\frac{1}{s+a}\right)\right] - e^{-a\,0} = \frac{d}{dt}e^{-at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s\frac{1}{s+a}\right] = \frac{d}{dt}e^{-at}+1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+a}\right] = -ae^{-at}+1$$

olarak bulunur.

qq14 $X(s) = \frac{12s^3-14s^2+152s-294}{s^4-6s^3+42s^2-78s+145}$ ise $x(t)$ nedir.

**Cozum**: Payda polinomunun kokleri hesaplanirsa

$$s_1 = 1+2j, \quad s_2 = 1-2j, \quad s_3 = 2+5j, \quad s_4 = 2-5j$$

olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{12s^3-14s^2+152s-294}{s^4-6s^3+42s^2-78s+145}$$

$$= \frac{A}{s-(1+2j)} + \frac{B}{s-(1-2j)} + \frac{C}{s-(2+5j)} + \frac{D}{s-(2-5j)}$$

seklinde carpanlara ayrilabilir. $A,B,C,D$ katsayilari hesaplanirsa

$$A = 2+3j, \qquad B = 2-3j, \qquad C = 4-5j, \qquad ,D = 4+5j$$

olarak bulunur. Bu adimdan sonraki kisim (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi iki degisik yontemle yapilabilir.

Birinci yontemde (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi $A,B,C,D$ katsayilari yerine konur ve her terimin ayri ayri ters Laplas donusumu alinir.

$$X(s) = \frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)} + \frac{4-5j}{s-(2+5j)} + \frac{4+5j}{s-(2-5j)}$$

$$x(t) = (2+3j)e^{(1+2j)t} + (2-3j)e^{(1-2j)t} + (4-5j)e^{2+5j)t} + (4+5j)e^{2-5j)t}$$

Daha sonra reel ve sanal kisimlar uygun sekilde guruplandirilarak sinuslu ve kosinuslu terimler elde edilir.

$$x(t) = e^t(4\cos(2t) - 6\sin(2t)) \; + e^{2t}(8\cos(5t) + 10\sin(5t))$$

olarak bulunur

$X(s)$'nin payi ve paydasi reel katsayili oldugundan elde edilecek $x(t)$'deki kompleks degisken $j$ carpani daima yok edilir ve $x(t)$ hicbir zaman $j$ carpani bulundurmaz.

Ikinci yontemde kompleks eslenik kokler birlestirilerek $X(s)$ iki terim gibi dusunulur.

$$X(s) = \left(\frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)}\right) + \left(\frac{4-5j}{s-(2+5j)} + \frac{4+5j}{s-(2-5j)}\right)$$

$$= \frac{4s-16}{s^2-2s+5} + \frac{8s+34}{s^2-4s+29}$$

Tipki (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi iki terimin ters Laplas donusumleri alinir. birinci terim (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi Ikinci terim

$$8\frac{s-2}{(s-2)^2+5^2} + 10\frac{5}{(s-2)^2+5^2}$$

haline getirilir. Sonucta $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t) = e^t(4\cos(2t) - 6\sin(2t)) \; + e^{2t}(8\cos(5t) + 10\sin(5t))$$

olarak elde edilir.

qq15 $X(s) = \frac{20s^2+5s-2}{s^3(s+2)}$ ise $x(t)$ nedir.

**Cozum**: Payda polinomunun kokleri $s_1 = -1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 0$ seklindedir. Yani $s = 0$ da 3 katli kok vardir. O halde $X(s)$ ifadesi

$$X(s) = \frac{20s^2+5s-2}{s^3(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3}$$

seklinde basit kesirler halinde yazilabilir. $A, B, C, D$ katsayilari hesaplanirsa

$$A = -9, \quad ,B = 9 \quad ,C = 2, \quad D = 1$$

olarak bulunur. O halde $X(s)$ fonksiyonu

$$X(s) = \frac{-9}{s+2} + \frac{9}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

seklinde olacaktir. Laplas donusumleri tablosuna bakarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{t^2}{2}$$

oldugu gozonune alinip $X(s)$nin ters Laplas donusumu alinirsa

$$x(t) = -9e^{2t} + 9u(t) + 2t + \frac{1}{2}t^2$$

elde edilir.

qq16 $X(s) = \frac{7s^4+36s^3+41s^2-2s-1}{s^5+4s^4+s^3-10s^2-4s+8}$ ise $x(t)$ nedir.

**Cozum**: Onceki problemlere benzer sekilde $X(s)$ fonksiyonu

$$X(s) = \frac{7s^4 + 36s^3 + 41s^2 - 2s - 1}{s^5 + 4s^4 + s^3 - 10s^2 - 4s + 8}$$

$$= \frac{2}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{-1}{(s+2)^3} + \frac{5}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2}$$

seklinde yazilabilir. $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{s^3}$ fonksiyonlarinin ters Laplas donusumleri (C.P.ref: xq7pc171)de verilmisti.

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)] = X(s-a)$$

oldugu gozoune alinirsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = te^{-2t} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right] = \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$

olarak bulunur. Sonuc olarak $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t) = 2e^{-2t} + 4te^{-2t} + -\frac{1}{2}t^2e^{-2t} + 5e^t + 3te^t$$

seklinde elde edilir.

qq17 $X(s) = \frac{4s^3-16s^2-4s-64}{s^4-4s^3+14s^2-20s+25}$ ise $x(t)$ nedir.-

**Cozum**: Payda polinomunun kokleri hesaplanirsa

$$s_1 = 1+2j, \quad s_2 = 1-2j \quad s_3 = 1+2j, \quad s_4 = 1-2j$$

olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{4s^3 - 16s^2 - 4s - 64}{s^4 - 4s^3 + 14s^2 - 20s + 25}$$

$$= \frac{A}{s-(1+2j)} + \frac{A^*}{s-(1-2j)} \frac{B}{[s-(1+2j)]^2} + \frac{B^*}{[s-(1-2j)]^2}$$

seklinde carpanlara ayrilabilir. $A$ ve $B$ katsayilari (Ek-ref: appx41) de gosterilen yontemlerle hesaplanirsa

$$A = 2+3j, \qquad B = 4+5j;$$

olarak bulunur ve $X(s)$ ifadesi

$$X(s) = \frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)} \frac{4+5j}{[s-(1+2j)]^2} + \frac{4-5j}{[s-(1-2j)]^2}$$

seklinde olacaktir. Ilk iki terimin ters Laplas donusumu (C.P.ref: xq7pc153)de oldugu gibi hesaplanir Son iki terimin ters Laplas donusumu

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = e^{at}t$$

bagintisi geregi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-(1+2j))^2}\right] = e^{(1+2j)t}t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-(1-2j))^2}\right] = e^{(1-2j)t}t$$

seklinde hesaplanir. Bu degerler yerine konulur (C.P.ref: xq7pc153)de oldugu gibi ustel ifadeler sinuzoidal ifadelere donusturulurse

$$x(t) = e^t(4\cos(2t) - 6\sin(2t)) + te^t(8\cos(2t) - 10\sin(2t))$$

olarak bulunur.

*******************************************************

qq18 $X(s) = \frac{6}{s+2} + \frac{10}{s-5} + \frac{15}{s^2+4} + \frac{20s}{s^2+25}$ ise $x(t)$ nedir.

**Cozum**:

$$x(t) = \mathcal{L}\left[\frac{6}{s+2}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{10}{s-5}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{15}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{20s}{s^2+25}\right]$$

$$x(t) = 6\mathcal{L}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 10\mathcal{L}\left[\frac{1}{s-5}\right] + \frac{15}{2}\mathcal{L}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right] + 20\mathcal{L}\left[\frac{s}{s^2+5^2}\right]$$

Laplas donusum tablosundan her terimin ayri ayri Laplas donusumleri yazilarak.

$$x(t) = 6e^{-2t} + 10e^{5t} + 7.5\sin(2t) + 20\cos(5t)$$

qq19 $x(t) = \cos(10t + \frac{\pi}{3})$ ise $X(s)$'yi hesaplayin.

**Cozum**:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(10t + \tfrac{\pi}{3}) = \cos(10t)\cos(\tfrac{\pi}{3}) - \sin(10t)\sin(\tfrac{\pi}{3}) \\ &= 0.5\cos(10t) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(10t) \end{aligned}$$

olarak yazilip Laplas donusumu alinirsa.

$$X(s) = \frac{0.5s}{s^2+100} - \frac{10\sqrt{3}/2}{s^2+100} = \frac{0.5s}{s^2+100} - \frac{5\sqrt{3}}{s^2+100}$$

elde edilir.

qq20 $X(s) = \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$ ise $x(t)$'yi hesaaplayin.

**Cozum**: $X(s)$ ifadesini basit kesirlere acarak

$$X(s) = \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

Burada $A, B, C$ katsayilari (Ek-ref: ek-basitkesir) de verilen metodlarla hesaplanirsa

$$A = -\frac{1}{6}, \qquad B = -\frac{4}{3}, \qquad C = \frac{7}{2}$$

olarak bulunur. Dolayisiyla

$$X(s) = \frac{-\frac{1}{6}}{s+1} + \frac{-\frac{4}{3}}{s-2} + \frac{\frac{7}{2}}{s-3}$$

olacaktir. Her terimin ayri ayri Laplas donusumu alinarak

$$x(t) = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

elde edilir.

*************************

************************************************************

qw39 $X(s) = \frac{4s^2+21s-13}{s^3+2s^2-5s-6} = \frac{4s^2+21s-13}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ ise $x(t)$'yi rezidu yontemiyle hesaplayin.

**Cozum**: $X(s)$ nin $s = -1, \quad s = 2, \quad , s = -3$'de uc tane kutbu vardir. $e^{st}X(s)$ fonksiyonunun $s = -1$ deki rezidusu

$$R_{-1} = (s+1)e^{st}X(s)\Big|_{s=-1} = (s+1)e^{st}\frac{4s^2+21s-13}{(s+1)(s-2)(s+3)}\Bigg|_{s=-1}$$

$$= e^{st}\frac{4s^2+21s-13}{(s-2)(s+3)}\Bigg|_{s=-1} = e^{(-1)t}\frac{4(-1)^2+21(-1)-13}{(-1-2)(-1+3)} = e^{-t}\frac{-30}{-6}$$

$$= 5e^{-t}$$

seklinde hesaplanir. $s = -3$ ve $s = 2$ deki reziduler benzer sekilde hesaplanirsa

$$R_2 = 3e^{2t}, \qquad R_{-3} = -4e^{-3t}$$

olarak bulunur. Sonuc olarak $x(t)$ fonksiyonu elde dilen rezidulerin toplamidir.

$$x(t) = R_{-1} + R_2 + R_{-3} = 5e^{-t} + 3e^{2t} - 4e^{-3t}$$

qw41 $X(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$ ise $x(t)$'yi rezidu yontemiyle hesaplayin.

**Cozum**:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{[(s+j)(s-j)]^2} = \frac{1}{(s+j)^2(s-j)^2}$$

oldugundan $X(s)$'nin $s = j$'de $s = -j$'de iki tane kutbu vardir ve her iki kutup da iki katlidir. Reziduler onceki problemlerde oldugu gibi hesaplanir. Koklerin kompleks olmasi herhangibir degisiklik gerektirmez. $s = j$'deki rezidusu

$$R_j = \lim_{s\to j}\frac{d}{ds}\left[(s-j)^2\frac{e^{st}}{(s+j)^2(s-j)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{jt} - \frac{1}{4}e^{jt}$$

seklinde hesaplanir. Benzer sekilde $s = -j$ icin rezidu

$$R_{-j} = \lim_{s\to -j}\frac{d}{ds}\left[(s+j)^2\frac{e^{st}}{(s+j)^2(s-j)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{-jt}+\frac{1}{4}e^{-jt}$$

seklinde olacaktir.

## Cozumlu Problemler

$x(k) = \sin(bkT)\, u(kT)$ isaretinin $\mathcal{Z}$ donusumunu hesaplayin.

**Cozum**: $\sin(bkT)$ ifadesini

$$\sin(bkT) = \frac{1}{2j}(e^{jbkT}-e^{-jbkT})$$

seklinde ustel formda yazip (ref: xq7f57) bagintisini kullanarak problemi cozebiliriz.

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathcal{Z}\{sin(bkT)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{jbT}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-jbT}z^{-1}}\right)\\
&= \frac{1}{2j}\frac{(e^{jbT}-e^{-jbT})z^{-1}}{1-(e^{jbT}+e^{-jbT})z^{-1}+z^{-2}}\\
&= \frac{\sin(bT)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(bT)+z^{-2}}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[sin(bkT)] = \frac{\sin(bT)z}{z^2-2z\cos(bT)+1} \qquad \#$$

$x(k) = \cos(bkT)\, u(kT)$ ise $X(z) = ?$

**Cozum**: C.P.(ref: xq7c63) deki gibi

$$\cos(bkT) = \frac{1}{2}(e^{jbkT}+e^{-jbkT})$$

yazarak problemi cozebiliriz.

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathcal{Z}[\cos(bkT)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{jbT}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-jbT}z^{-1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2-(e^{jbT}+e^{-jbT})z^{-1}}{1-(e^{jbT}+e^{-jbT})z^{-1}+z^{-2}}\\
&= \frac{1-\cos(bT)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(bT)+z^{-2}}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(bkT)] = \frac{z^2-\cos(bT)z}{z^2-2z\cos(bT)+1} \qquad \#$$

$x(k) = e^{-akT}\sin(bkT)\, u(kT)$ ise $X(z) = ?$

**Cozum**: $\sin(bkT)$ terimini ustel formda yazalim.

$$
\begin{aligned}
e^{-akT}\sin(bkT) &= \tfrac{1}{2j}\left(e^{-akT}e^{jbkT} - e^{-akT}e^{-jbkT}\right) \\
&= \tfrac{1}{2j}\left(e^{-(akT-jbkT)} - e^{-(akT+jbkT)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \tfrac{1}{2j}\left(\tfrac{1}{1-e^{-(aT-jbT)}z^{-1}} - \tfrac{1}{1-e^{-(aT+jbT)}z^{-1}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2j}\,\tfrac{(e^{jbT}-e^{-jbT})e^{-aT}z^{-1}}{1-(e^{jbT}+e^{-jbT})e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}} \\
&= \tfrac{e^{-aT}\sin(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}} \\
&= \tfrac{e^{-aT}\sin(bT)z}{z^2-2e^{-aT}\cos(bT)z+e^{-2aT}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{Z}[e^{-akT}\sin(bkT)] = \frac{e^{-aT}\sin(bT)z}{z^2 - 2e^{-aT}\cos(bT)z + e^{-2aT}} \qquad \#
$$

$x(k) = e^{-akT}\cos(bkT)\,u(kT)$ ise $X(z) = ?$

**Cozum**: C.P.(ref: xq7c67) deki gibi islemler yapilarak cozum bulunur.

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \tfrac{1-e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}} \\
&= \tfrac{1-e^{-aT}\cos(bT)z}{z^2-2e^{-aT}\cos(bT)z+e^{-2aT}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{Z}[e^{-akT}\cos(bkT)\,u(kT)] = \frac{1 - e^{-aT}\cos(bT)z}{z^2 - 2e^{-aT}\cos(bT)z + e^{-2aT}} \qquad \#
$$

$$
X(z) = z^{-1} \quad ise \quad x(k) = ?
$$

$$
\mathcal{Z}[1] = 1\,\delta(k)
$$

oldugundan

$$
\mathcal{Z}[1\,z^{-1}] = 1\,\delta(k-1)
$$

dir. Dolayisiyla

$$
\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}] = \delta(k-1)
$$

olacaktir.

$$
X(z) = z^{-3} \quad ise \quad x(k) = ?
$$

C.P.(ref: xq7c414) deki gibi

$$
x(k) = \delta(k-3)
$$

bulunur.

$$X(z) = \frac{1}{(z-a)^2} \quad ise \quad x(k) = ?$$

**Cozum**:

$$\mathcal{Z}[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

teoreminden faydalanabiliriz.

$$\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$$

oldugundan yukaridaki teorem geregi

$$\mathcal{Z}[ka^k] = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right] = -z\frac{-a}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

olacaktir. Zamanda kaydirma teoremini uygulayarak

$$\mathcal{Z}[(k-1)a^{k-1}] = z^{-1}\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{a}{(z-a)^2} \qquad k = 1,2,3.\ldots.$$

elde edilir. Sonuc olarak

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a}{(z-a)^2}\right] = (k-1)a^{k-1} \qquad k > 0$$

olacaktir. O halde

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^2}\right] = \frac{(k-1)a^{k-1}}{a} = (k-1)a^{k-2} \;\; k > 0$$

elde edilir.

$X(z) = \frac{z}{(z-a)^2} \qquad x(k) = ?$

Bir onceki probleme kaydirma teoremi uygulanirsa $x(k) = ka^{k-1}$ bulunur.

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.2)} \quad ise \quad x(k) = ?$$

Bu tip problemlerde $Y(z) = \frac{X(z)}{z}$ ifadesinden faydalanarak ters Z donusumunu hesaplamak daha kolaydir. $Y(z)$ basit kesirlere ayrilirsa

$$Y(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.2}$$

elde edilir. Ek-ref: appx41'de verilen bagintilar yardimiyla $A_1 = 12.5 \quad A_2 = -12.5$ bulunur.

$$Y(z) = \frac{10}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{12.5}{z-1} + \frac{-12.5}{z-0.2}$$

Buradan $X(z)$ hesaplanir.

$$X(z) = zY(z) = \frac{12.5z}{z-1} + \frac{-12.5z}{z-0.2}$$

$Z$ donusum tablosundan her terimin ayri ayri ters $Z$ donusumunu alarak

$$x(k) = 12.5u(k) - 12.5(0.2)^k$$

bulunur.

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)} \quad ise \quad x(k) = ?$$

Onceki problemlerde oldugu gibi $\frac{X(z)}{z}$ carpanlara ayrilir.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{z(z-2)^2(z-1)} = \frac{9}{(z-2)^2} + \frac{-1}{z-2} + \frac{3}{z-1}$$

Buradan $X(z)$ elde edilir

$$X(z) = \frac{9z}{(z-2)^2} + \frac{-z}{z-2} + \frac{3z}{z-1}$$

ve $x(k)$ C.P.(ref: xq7c417) de oldugu gibi hesaplanir.

$$x(k) = 9k2^{k-1} - 2^k + 3u(k)$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 5} \quad ise \quad x(k) = ?$$

Payda polinomunun kokleri $z_1 = -1 + j \quad z_2 = -1 - j$ dir. $\frac{X(z)}{z}$ terimini carpanlara ayirarak onceki problerdekine benzer yontemle $X(z)$ hesaplanabilir. Fakat burada

$$Z[e^{-akT}\sin(bkT)] = \frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2 - 2e^{-aT}\cos(bT)z + e^{-2aT}}$$

bagintisini kullanarak da sonuca varabiliriz.

$$z^2 + 2z + 5 = z^2 - (2e^{-aT}\cos bT)z + e^{-2a}$$

seklinde dusunursek.

$$5 = e^{-2aT} \quad \Rightarrow e^{-aT} = \sqrt{5}$$

$$2 = -2e^{-aT}\cos bT \Rightarrow 2 = -2\sqrt{5}\cos b \rightarrow \cos bT = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin bT = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

degerlerini elde ederiz. Bu degerleri yukarida yerine koyarak

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z^2 + 2z + 5}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}\ \sqrt{5}\ \ \frac{2}{\sqrt{5}}\ \ z}{z^2 - 2\ \sqrt{5}\ \ \frac{-1}{\sqrt{5}}z + 5}\right] = \frac{1}{2}(\sqrt{5})^{kT}\sin(2.034kT)$$

elde ederiz.

$$X(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 5} \quad ise \quad x(k) = ?$$

**Cozum**:

$$Y(z) = zX(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 5}$$

yazalim. $\mathcal{Z}^{-1}Y(z)$ C.P.(ref: xq7c425) den

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{2}(\sqrt{5})^{kT}\sin(2.034kT)$$

olarak bulunmustu. O halde zamanda kaydirma teoremi geregi

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}Y(z)] \quad \Rightarrow \quad x(k) = y(k-1)$$

olacagindan sonuc

$$x(k) = \frac{1}{2}(\sqrt{5})^{(k-1)T}\sin(2.034(k-1)T) \;\; k = 1,2,3,4.. \;\; x(0) = 0dir.$$

seklinde hesaplanir.

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5} \quad ise \quad x(k) = ?$$

C.P(ref: xq7c423)'deki gibi benzetmeler yapilirsa.

$$5 = e^{-2aT} \quad \Rightarrow e^{-aT} = \sqrt{5}$$

$$2 = 2e^{-aT}\cos bT \Rightarrow 2 = 2\sqrt{5}\cos b \rightarrow \cos bT = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin bT = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Bu degerler yerine konursa

$$x(k) = \frac{1}{2}(\sqrt{5})^{kT}\sin(1.104kT)$$

olarak hesaplanir.

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 5} \quad x(k) = ?$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2 - e^{-aT}\cos(bT)z}{z^2 - 2e^{-aT}\cos(bT)z + e^{-2aT}}\right] = e^{-akT}\cos(bkT) = (e^{-aT})^k\cos(bkT)$$

formulunu kullanabiliriz. Onceki problemdekine benzer sekilde benzetmeler yapilirsa.

$$e^{-aT} = \sqrt{5} \quad \cos bT = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad bT = 1.107$$

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 5} = \frac{z^2 - \sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}z}{z^2 - 2\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}z + 5}$$

elde edilir. Buradan yukaridaki tanim geregi

$$x(k) = (\sqrt{5})^{kT}\cos(1.107kT)$$

elde edilir.

$$X(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+5} \quad x(k) = ?$$

$Y(z) = zX(z)$ tanimi yapilsin. (ref: xq7c427)inci problemden

$$y(k) = (\sqrt{5})^{kT}\cos(1.107kT)$$

olarak bulunmustu $X(z) = z^{-1}Y(z)$ oldugundan $x(k) = y(k-1)$ olacaktir. Dolayisiyla sonuc

$$x(k) = (\sqrt{5})^{(k-1)T}\cos(1.107(k-1)T) \quad k > 0 \quad icin \;\; gecerli$$

$$x(0) = 0$$

olacaktir.

$$X(z) = \frac{2z^2+7z+10}{z^2+3z+36} \quad x(k) = ?$$

paydanin kokleri kompleks oldugundan x(k) sinus ve kosinus terimleri bulunduracaktir.

$$z^2+3z+36 = z^2-2e^{-a}cos(b)z+e^{-2a}$$

$$e^{-2a} = 36 \quad e^{-a} = 6 \quad \cos(b) = \frac{3}{-2\ 6} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

$$\sin(b) = \sqrt{1-(\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad b = 104.47^0 = 1.823 radyan$$

$e^{-a}$ ve cos(b) terimleri belli iken $e^{-ak}\cos(bk)$, $e^{-ak}\sin(bk)$ terimlerinin $\mathcal{Z}$ donusumlerinin sekillerine bir goz atalim.

$$\mathcal{Z}[6^k\cos(1.8235k)] = \frac{z^2+1.5z}{z^2+3z+36} = A(z) \qquad \text{xq7f95}$$

$$\mathcal{Z}[6^k\sin(1.8235k)] = \frac{6\frac{\sqrt{15}}{4}}{z^2+3z+36} = B(z) \qquad \text{xq7f97}$$

Simdi $X(z)$ terimini parcalari yukaridaki terimler olacak sekilde parcalara bolelim.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{2z^2+7z+10}{z^2+3z+36} = 2\frac{z^2+3.5z+5}{z^2+3z+36} \\ &= 2\left[\frac{z^2+1.5z}{z^2+3z+36} + \frac{2z}{z^2+3z+36} + \frac{5}{z^2+3z+36}\right] \end{aligned}$$

$$= 2\left[\frac{z^2+1.5z}{z^2+3z+36} + \frac{2\frac{4}{\sqrt{15}}\ \frac{1}{6}\ \frac{\sqrt{15}}{4}\ 6z}{z^2+3z+36} + \frac{z^{-1}5\ \frac{4}{\sqrt{15}}\ \frac{1}{6}\ \frac{\sqrt{15}}{4}\ 6\,z}{z^2+3z+36}\right]$$

Veya (ref: xq7f95, ref: xq7f97) deki tanimlarla

$$X(z) = 2\left[A(z)+2\frac{4}{\sqrt{15}}\ \frac{1}{6}\ B(z)+5\ \frac{4}{\sqrt{15}}\frac{1}{6}z^{-1}B(z)\right]$$

haline gelir. $A(z)$ ve $B(z)$nin ters Z donusumleri (ref: xq7f95, ref: xq7f97) deki gibidir. $z^{-1}B(z)$ nin terz $Z$ donusumu ise $B(z)$ nin ters $Z$ donusumunun saga bir adim kaymis halidir. Dolayisiyla
k=0 icin

$$x(k) = 2\left[ 6^k \cos(1.8235k) + 2\frac{4}{\sqrt{15}} \quad \frac{1}{6} \quad 6^k \sin(1.8235k) \right]$$

$k > 0$ icin

$$\begin{aligned} x(k) &= 2\Big[ 6^k \cos(1.8235k) + 2\tfrac{4}{\sqrt{15}} \quad \tfrac{1}{6} \quad 6^k \sin(1.8235k) \\ &\quad +5\tfrac{4}{\sqrt{15}} \quad \tfrac{1}{6} \quad 6^{k-1} \sin(1.8235(k-1)) \Big] \end{aligned}$$

elde edilir. Veya iki baginti birlestirilirse

$$x(k) = 6^k \; 2[\cos(1.8235k) + 0.3443\sin(1.8235k) + 0.1434\sin(1.8235(k-1))]$$

elde edilir.

$$x(z) = \frac{z}{z-1}$$

Onceki pprobleme benzer sekilde payi paydaya bolunurse.

$$x(z) = \frac{z}{z-1} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ^{-3} + ^{-4} + \ldots\ldots\ldots = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-2} + \ldots.$$

elde edilir. o halde

$$x(0) = 1, \quad x(T) = 1, \quad x(2T) = 1, \quad x(3T) = 1, \quad x(4T) = 1\ldots\ldots\ldots\ldots$$

elde edilir. Her yerde degeri 1 olan fonksiyon birim basamak fonksiyonudur. O halde

$$x(kT) = u(kT)$$

olacaktir.

$$x(z) = \frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2} = \frac{Te^{-aT}z}{z^2 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}}$$

Onceki problemlere benzer sekilde payi paydaya bolunurse.

$$x(z) = Te^{-aT}z^{-1} + 2Te^{-2aT}z^{-2} + 3Te^{-3aT}z^{-3} + 4Te^{-4aT}z^{-4} + \ldots\ldots$$

elde edilir. Zx donusum formulune benzetilirse.

$$\begin{aligned} x(z) &= Te^{-aT}z^{-1} + 2Te^{-2aT}z^{-2} + 3Te^{-3aT}z^{-3} + 4Te^{-4aT}z^{-4} + \ldots\ldots \\ &= x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \ldots \end{aligned}$$

Goruldugu gibi $x(0) = 0 \quad x(T) = Te^{-aT} \quad x(2T) = 2Te^{-2aT}$ ve $n.$inci terim $nTe^{-naT}z^{-n}$ seklindedir. O halde genel terim ifadesi

$$x(kT) = kTe^{-kaT}$$

seklinde olacaktir.

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 0.5z + 0.06}$$

gore bu $x(k)$ isaretini bulun.

O.P.(ref: xq7c87)de $X(z)$'nin tek tarafli $x(k)$'ya ait olmasi durumu incelenmisti. $k \geq 0$ icin isaretin iki kutbu var ve ve bu kutuplar birim daire icinde. o halde $Y(z) = z^{-k-1}X(z)$nin yakinsaklik bolgesi birim dairenin icindedir. Integralin $C$ egrisini birim daire kabul edebiliriz. Bu sartlar altinda $k \geq 0$ icin isaretin $Z$ donusumu

$$x(k) = -10(-0.3)^k + 10(-0.2)^k$$

seklindedir. Tek tarafli donusumle ayni oldu (her zaman ayni olmak zorunda degil.)

$k < 0$ icin durumu inceleyelim. $k = -1$ icin

$$Y(z) = z^{-k-1}X(z) = \frac{1}{z(z+0.3)(z+0.2)}$$

olur. Bu durumda $Y(z)$'nin uc kutbu var. Bu kutuplardaki reziduler ise

$$R_1 = (z+0.3)\frac{1}{z(z+0.3)(z+0.2)}\bigg|_{z=-0.3} = \frac{1}{z(z+0.2)}\bigg|_{z=-0.3} = \frac{1}{(-0.3)(-0.1)} = \frac{100}{3}$$

$$R_2 = (z+0.2)\frac{1}{z(z+0.3)(z+0.2)}\bigg|_{z=-0.2} = \frac{1}{z(z+0.3)}\bigg|_{z=-0.2} = \frac{1}{(-0.2)(0.1)} = \frac{-100}{2}$$

$$R_3 = (z)\frac{1}{z(z+0.3)(z+0.2)}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.3)}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{(0.2)(0.3)}\frac{100}{6}$$

Sonuc olarak

$$x(-1) = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{100}{3} - \frac{100}{2} + \frac{100}{6} = 0$$

Benzer sekilde $k = -2, k = -3, \ldots\ldots$ icin reziduler hesaplanip $x(-2), \quad x(-3), \quad x(-4), \ldots\ldots$ degerleri bulunabilir.

$k < 0$ icin rezidulerі yukaridaki gibi hesaplamak zaman alicidir. Bunun yerine (ref: xq7f71) integralinin ozdesi olan

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} X(z^{-1})z^{-k-1}dz \qquad \text{xq7f84}$$

integrali kullanilabilir. Burada $C'$ $C$ cemberinin nokta nokta tersi alinarak elde edilen yeni bir cemberdir. Eger $C$ cemberi birim daire alinirsa $C'$ de birim daire olacaktir. (ref: xq7f71) deki $X(z)z^{k-1}$ nin birim daire disindaki kutuplari (ref: xq7f84) deki $X(z^{-1})z^{-k-1}$ nin birim daire icindeki kutuplarina donusur. Dolayisiyla $k < 0$ icin reziduler toplamini (ref: xq7f84) den hesaplayabiliriz.

$$X(z^{-1}) = \frac{z-1}{z^{-2} + 0.5z-1 + 0.06} = \frac{z}{1 + 0.5z + 0.06z^2}$$

oldugundan (ref: xq7f84) integrali

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{z}{1+0.5z+0.06z^2} z^{-k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{z^{-k}}{1+0.5z+0.06z^2}dz$$

haline gelir. $C'$ birim daire oldugundan ve birim daire icinde $\frac{z^{-k}}{1+0.5z+0.06z^2}$ ifadesinin kutbu olmadigindan $x(k) = 0$ olarak bulunur. Sonuc olarak

$$x(k) = 0$$

Not: $k = 1, k = 2$ vererek reziduleri hesaplayin. Yukarida $k/geq0$ icin hesaplanan $x(k) = -10(-0.3)^k + 10(-0.2)^k$ esitliginde $k = 1, k = 2$ koyarak buldugunuz sonuclari karsilastirin.

$$X(z) = \frac{10}{(z-1)()z-2)}$$

gore bu $x(k)$ isaretini rezidu yontemiyle bulun.

**Cozum**: $x(k)$ tek tarafli bir isaret olduguna gore sadece $k \geq 0$ icin reziduleri hesaplamamiz yeterlidir. $k \geq 0$ icin butun reziduleri hesaplamamiz gerekir.

$$Y(z) = z^{k-1}X(z)$$

Tanimini yapalim $k = 0, k = 1, k = 2$ icin $Y(z)$ asagidaki sekilleri alir.

$$Y_0(z) = \frac{10}{z(z-1)()z-2)},\ \ Y_1(z) = \frac{10}{(z-1)()z-2)},\ \ Y_2(z) = \frac{10z}{(z-1)()z-2)}$$

sekilllerini alir. Simdi teker teker Bu fonksiyonlarin rezidulerini hesaplayalim. $Y_0(z)$'nin $z = 0, z = 1, z = 2$ de 3 tane kutbu var. Bu kutuplara iliskin reziduler

$$R_0 = 5, R_1 = -10, R_2 = 5$$

seklindedir. Dolayisiyla $k = 0$ icin

$$x(0) = 5 - 10 + 5 = 0$$

olacaktir. Ote yandan $Y_1(z)$ nin $z = 1, z = 2$ de 2 tane kutbu var. Bu kutuplara iliskin reziduler

$$R_1 = -10, R_2 = 20$$

seklindedir. Dolayisiyla $k = 1$ icin

$$x(1) = -10 + 20 = -10$$

olacaktir. $k = 2, 3, 4, 5....$ icin $Y(z)$ nin kutbu ayni kalmaktadir. O halde $k > 0$ icin $k$'ya bagli genel terim hesaplayabiliriz.

$$Y(z) = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)()z-2)}$$

reziduleri hesaplanirsa

$$R_1 = -10, R_2 = 102^{k-1}$$

bulunnur O halde

$$x(k) = -10 + 102^{k-1}, \qquad k > 0 \; icingecerli$$

bulunur.

| | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $Birimimpuls\delta(t)$ | $1$ |
| 2 | $BirimBasamaku(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 3 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 4 | $t^n(n = 1,2,3..)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 5 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| 6 | $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 7 | $t^n e^{-at}(n = 1,2,3..)$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |
| 8 | $\sin(pt)$ | $\frac{p}{s^2+p^2}$ |
| 9 | $\cos(pt)$ | $\frac{s}{s^2+p^2}$ |
| 10 | $e^{-at}\sin(pt)$ | $\frac{p}{(s+a)^2+p^2}$ |
| 11 | $e^{-at}\cos(pt)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+p^2}$ |

Onemli Fonksiyonlarin Laplas Donusumleri

| | |
|---|---|
| Lineerlik | $\mathcal{L}[af_1(t)+bf_2(t)] \ = aF_1(s)+bF_2(s)$ |
| Olcekleme | $\mathcal{L}[f(at)] \ = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ |
| $s$ doneminde kaydirma | $\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$ |
| $t$ doneminde kaydirma | $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] \ = e^{-as}F(s)$ |
| $s$ doneminde turev | $\mathcal{L}[tf(t)] \ = -\frac{dF(s)}{ds}$ |
| $s$ doneminde integral | $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds$ |
| $t$ doneminde turev | $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - sf(0)$<br>$\mathcal{L}\left[\frac{df^n(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'^{n-3}f^(2)(0)$<br>$\ldots\ldots\ldots\ldots -sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ |
| $t$ doneminde integral | $\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}}{s}$<br>$\mathcal{L}\left[\int\int\ldots\ldots\int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{f^{(-1)}}{s^n} + \frac{f^{(-2)}}{s^{n-2}}$<br>$\ldots\ldots+\frac{f^{(-n+1)}}{s^2} + \frac{f^{(-n)}}{s}$ |
| $t$ doneminde konvolusyon | $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] \ = F_1(s)F_2(s)$ |
| $s$ doneminde konvolusyon | $\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] \ = F_1(s) * F_2(s)$ |
| Baslangic deger teoremi | $f(0^+) = \lim_{s\infty} sF(s)$ |
| Son deger teoremi | $\lim_{t\infty} f(t) = \lim_{s0} sF(s)$<br>$\lvert\lim_{t\infty} f(t)\rvert < \infty$ ise gecerli |

$f'(0) = -\frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0} \qquad f^{(}k)(0) = -s\frac{d^k f(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$

$f^{(-1)} = \left[\int f(t)dt\right]_{t=0} \qquad f^{(-k)} = \left[\int\int.....\int f(t)(dt)^k\right]_{t=0}$

$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^\infty f_1(x-q)f_2(q)dq = \int_0^\infty f_1(q)f_2(x-q)dq$ Laplas Donusumunun Ozellikleri

??

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-e^{-aT}}\right\} = e^{-akT} = (e^{-aT})^k$$

$$T = 1 \;\; ise \;\; Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-p}\right\} = p^k$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{z^2 - e^{-aT}\cos(bT)z}{z^2 - 2e^{-aT}\cos(bT)z + e^{-2aT}}\right\} = e^{-akT}\cos(bkT)$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2 - 2e^{-aT}\cos(bT)z + e^{-2aT}}\right\} = e^{-akT}\sin(bkT)$$

$Z$ Donusum Tablosu

# ANALOG FILTRE DIZAYNI

Analog filtrelerden ref: bolumfiltre. bolumde kismmen bahsedilmisti. Ananlog filtre dizayni frekans spektrumu onceden verilen bir karakteristigine mumkun oldugu kadar benzeyen lineer bir sistem elde etmektir. Daha acik bir ifade ile (ref: transfornk)deki transfer fonksiyonunun katsayilarini hesaplamaktir.

Transfer fonksiyonunun saglamasi gereken ozellikler (ref: transfonkozellik)'de verilmisti. O halde bu ozellikler saglayan bir genlik ve faz sonksiyonu elde etmeliyiz.

Hem genlik hemde faz spektrumunu ideale yaklastirmak imkansiz oldugundan genlik spektrumunun ideale yaklastirilmasi esas alinip faz spektrumunun da mumkun olddugu kadar duzggun olmasina calisilir. $|H(jw)|$ ile calismak yerine $|H(jw)|^2$ ile calismak daha kolaydir. Once $|H(jw)|^2$ nasil elde edildigini bir an icin ileriye atip eger $|H(jw)|^2$ $w$'nin fonksiyonu olarak biliniyorsa buradan $H(s)$ veya $H(jw)$ transfer fonksiyonunu nasil elde ederiz ona bakalim.

## Genlik Karakteristigi Bilinen Analog Filtrenin Transfer Fonksiyonunun Bulunmasi

$|H(jw)|$ genlik fonksiyonu cift smetriye sahip oldugu (). bolumden gorulmustu.

$$|H(jw)| = |H(-jw)|$$

O halde

$$|H(jw)|^2 = |H(jw)||H(jw)| = |H(-jw)||H(-jw)| = |H(jw)||H(-jw)|$$

Olacaktir. Ayrica (ref: laplasfurrier).bolumden eger $H(s)$ transfer fonksiyonunun $jw$ ekseninde ve saginda kutbu yoksa

$$H(s) = H(jw)|_{s=jw}$$

bagintisi vardir. Gerek $|H(jw)|$, gerekse $|H(jw)|^2$ ifadelerinin icinde $w$ yok, fakat $w^2$ terimi var. $|H(jw)|^2$ ifadesinde $jw \to s$ yerdegistirmesine karsilik olarak $-w^2$ yerine $s^2$ veya $w^2$ yerine $-s^2$ koyalim.

$$K(-s^2) = |H(jw)|^2|_{w^2=-s^2} ()$$

(ref: xq8f11),(ref: xq8f13) ve (ref: xq8f15) bagintilari birlestirilirse

$$K(-s^2) = H(-s)H(s)$$

olacagi acikca gorulur.

O halde genlik spektrumu $|H(jw)|^2$ seklinde verilen bir filtreyi gerceklemek icin.

1)$|H(jw)|^2$ de $w^2$ yerine $-s^2$ koy, $K(-s^2)$ fonksiyonun elde et.

2)$K(-s^2)$ fonksiyonunu $K(s^2) = K(s)K(-s)$ seklinde carpanlara ayir.

3) Gerek $K(s)$ gerekse $K(-s)$ verilen filtrenin genlik spektrumunu saglarlar. Ancak

filtrenin kararli olmasi icin payda polinomunun koklerinin reel kismi sifirdan kucuk olanlar filtreye iliskin transfer fonksiyonu olabilirler.

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{w^4 + 29w^2 + 100}$$

genlik fonksiyonunu saglayan $H(s)$ yi bulun.

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{(w^2)^2 + 29(w^2)^1 + 100}$$

$$K(-s^2) = \frac{1}{(-s^2)^2 + 29(-s^2) + 100} = \frac{1}{s^4 - 29s^2 + 100} = \frac{1}{(s+2)(s-2)(s+5)(s-5)}$$

O halde

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)} \qquad H(-s) = \frac{1}{(s-2)(s-5)}$$

O halde filtreye iliskin transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s^2 + 7s + 10}$$

olacaktir.

# Genlik karakteristigi grafik olarak verilen filtrenin $|H(jw)|^2$ genlik fonksiyonunun hesaplanmasi

Onceki bolumde $|H(jw)|^2$ belli ise $H(s)$ transfer fonksiyonu nasil hesaplanacagi gosterilmisti. Bu bolumde $|H(jw)|^2$ genlik fonksiyonun nasil bulunacagi aciklanacaktir. $|H(jw)|^2$'nin saglamasi gereken sartlar: cift bir fonkksiyon olmasi, iki polinomun orani seklinde olmasi, pay polinomunun derecesi payda polinomunun deerecesinden kucuk yada esit olmmasi. O halde problem ideal filtre karakteristigine yakin yukaridaki sartlari gercekleyen bir $f(w)$ fonksiyonunun hesabidir.

f?igure[hbt]   Cesitli $|H(jw)|^2$ genlik fonksiyonlari

Bu genlik fonksiyonlari cesitli sekillerde hesaplanabilir. Hesaplanma seklinde gore de isimlendirilir.

$H_i(jw)$ ideal, ve $|H_g(jw)|^2$ gerceklenebilir genlik fonksiyonu olmak uzere hata terimi olarak

$$\mathcal{E} = |H_\iota(jw)|^2 - |H_g(jw)|^2$$

tanimini yapalim. Idealde butun $w$ lar icin $\mathcal{E} = 0$ olmasi istenir. Ancak bu mumkun olmadigindan belli noktalarda $\mathcal{E} = 0$ yapilmaya calisilir. $w = w_x$ icin
$|H_i(jw_x)|^2 - |H_g(jw_x)|^2 = 0$ ise
$w = w_x$ icin $\frac{1}{|H_i(jw_x)|^2} - \frac{1}{|H_g(jw_x)|^2} = 0$

olmalidir.  Matematiksel kolaylik icin

$$\mathcal{E} = \frac{1}{|H_i(jw_x)|^2} - \frac{1}{|H_g(jw_x)|^2} = 0$$

ifadesi hata terimi olarak alinir. Ayrica filtre gecirme bandinda

$$|H_i(jw_x)|^2 = 1$$

olacak sekilde tasarlanir. Kolaylik icin tasarim kesim frekansi $w_c = 1$ olan alcak geciren filtre (AGF) icin yapilir, diger tip filtreler (AGF)den frekans donusumu ile elde edilir.

## Butterwoth yaklasimi

Burada maksat gecis bandinda $|H(jw)|^2$ nin degismemesi w eksenine paralel bir dogru olmasi istenir. Gecis bandinda genligin hizli bir sekilde dusmesi istenir.
(ref: lineersistem) bolumden biliyoruzki kutup sayisi sifir sayisindan ne kadar fazla ise genlik hizli bir sekilde duser. O halde $|H(jw)|^2$ nin payinda $w$ ya bagli bir terim olmasa (butun sifirlar sonsuzda olsa) gecis bandinda hizli bir dusus olur. Yani genlik fonksiyonu

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{c_0 + c_1 w^2 + c_2 w^4 + \ldots\ldots\ldots + c_n w^{2n}}$$

seklinde olmalidir. Bu durumda (ref: xq8fx15) de verilen hata terimi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{|H_i(jw_x)|^2} - \frac{1}{|H_g(jw_x)|^2} = 1 - c_0 - c_1 w^2 - c_2 w^4 - \ldots\ldots\ldots - c_n w^{2n} (xq8g12)$$

seklinde olacaktir.

Butterworth tipi filtrede hedef gecirme bandinda dalgalanma olmamasidir. O halde ilk sart gecirme bandinin baslangici $w = 0$ civarinda dalgalanma olmamasidir.

$w = 0$ de dalgalanma olmamasi icin

$$\mathcal{E}|_{w=0} = 0, \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dw}|_{w=0} = 0, \qquad \frac{d^2\mathcal{E}}{dw^2}|_{w=0} = 0$$

$$\frac{d^3\mathcal{E}}{dw^3}|_{w=0} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^n\mathcal{E}}{dw^n}|_{w=0} = 0$$

sartlari saglanmalidir. Dolayisiyla

$$\mathcal{E}|_{w=0} = 0 \quad \Rightarrow 1 - c_0 - 0 - 0 - \ldots\ldots\ldots - 0 = 0 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dw}|_{w=0} = 0 \quad \Rightarrow 0 - 0 - 0 - 0 - 0 \ldots\ldots - 0 = 00 = 0$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dw^2}|_{w=0} = 0 \quad \Rightarrow 0 - 0 - c_1 - 0 - 0 \ldots\ldots - 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n\mathcal{E}}{dw^n} = 0|_{w=0} \quad \Rightarrow 0 - 0 - 0 - \ldots c_n \neq 0 \Rightarrow c_n \neq 0$$

olmalidir. Eger $c_n = 0$ olsa o zaman $\mathcal{E}$ her yerde sifir olur bu da butun $w$ degerleri icin $|H(jw)| = 1$ olmasini gerektirir. Halbuki $w > w_r$ icin $|H(jw)|^2 = 0$ olmali.

Su halde maksimum duzgunluk icin $c_0 = 1 \quad c_n \neq 0$ olmali diger butun $c$ ktsayilari sifir olmalidir. Bu durumda genlik fonksiyonu

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + c_n w^{2n}}$$

sekline gelir. Cogu kere $c_n$ katsayisi yerine $\epsilon^2$ kullanilir ve Butterworth Filtre karakteristigi

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 w^{2n}} \qquad \text{xq8fg45}$$

seklinde bulunur.

## Butterworth Filtre Transfer Fonksiyonu

$|H(jw)|^2$ (ref: xq8fg45) deki gibi bulunursa $H(s)$ yi bolum(ref: H(s)hesabi) oldugu gibi hesaplayabiliriz.

$$K(-s^2) = \frac{1}{1 + \epsilon^2(-s^2)^n}$$

n tek ise $K(-s^2)$ nin kutuplari (payda polinomunun kokleri).

$$1 - \epsilon^2 s^{2n} = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon^2 s^{2n} = 1 \quad \rightarrow \quad s^{2n} = \frac{1}{\epsilon^2} e^{j2r\pi} \quad \rightarrow \quad s = \left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)^{1/2n} e^{\frac{j2r\pi}{2n}}$$

$$s_r = \epsilon^{-\frac{1}{n}} e^{\frac{jr\pi}{n}} \quad r = 1, 2, 3, \dots . 2n \qquad \#$$

olarak bulunur.

n cift ise

$$1 + \epsilon^2 s^{2n} = 0 \quad \epsilon^2 s^{2n} = -1 \quad \rightarrow \quad s^{2n} = \frac{1}{\epsilon^2} e^{j(2r+1)\pi} \quad \rightarrow \quad s = \left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)^{1/2n} e^{\frac{j(2r+1)\pi}{2n}}$$

$$s_r = \epsilon^{-\frac{1}{n}} e^{\frac{j(2r+1)\pi}{2n}} \quad r = 1, 2, 3, \dots . 2n \qquad \#$$

$\epsilon^2 = 1, \quad n = 2$ icin Butterworth filtresinin transfer fonksiyonunu hesaplayin.

**Cozum**:

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + w^{2n}} = \frac{1}{1 + (w^2)^n} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

payda polinomunun kokleri:

$$1 + s^{2\,2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 = -1 \quad \rightarrow s = e^{j(2r+1)\pi/4}$$

$$s_1 = e^{j(2+1)\pi/4} = e^{3j\pi/4} = -0.7071 + j0.7071$$
$$s_2 = e^{j(4+1)\pi/4} = e^{5j\pi/4} = -0.7071 - j0.7071$$
$$s_3 = e^{j(4+1)\pi/4} = e^{5j\pi/4} = 0.7071 - 0.7071i$$
$$s_4 = e^{j(0+1)\pi/4} = e^{j\pi/4} = 0.7071 + j0.7071$$

Reel kisimlari sifirdan kucuk olan kokleri alarak.

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s2)} = \frac{1}{s^2 + 1.41s + 1}$$

$\epsilon^2 = 1, \quad n = 3$ icin Butterworth filtresinin transfer fonksiyonunu hesaplayin.

**Cozum**:

$$1 + (-s^2)^3 = 0 \quad \longrightarrow s^6 = 1 \quad \longrightarrow s = e^{jr\pi/n} \quad \longrightarrow s = e^{jr\pi/3}$$

$$s_1 = e^{j\,1\,\pi/3} = e^{j\pi/3} = \frac{1}{2} + j\frac{sqrt3}{2}$$
$$s_2 = e^{j\,2\,\pi/3} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{sqrt3}{2}$$
$$s_3 = e^{j\,3\,\pi/3} = e^{j\pi} = -1$$
$$s_4 = e^{j\,4\,\pi/3} = e^{j4\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{sqrt3}{2}$$
$$s_5 = e^{j\,5\,\pi/3} = e^{j5\pi/3} = \frac{1}{2} - j\frac{sqrt3}{2}$$
$$s_4 = e^{j\,6\,\pi/3} = e^{j2\pi} = 1$$

Dolayisiyla

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2}+j\frac{sqrt3}{2})(s+\frac{1}{2}-j\frac{sqrt3}{2})} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

olarak bulunur.

Gecmis orneklerde $\epsilon$ ve $n$ degerlerini vererek Butterworth filtrenin transfer fonksiyonunu bulduk. Pratikte ise bu degerler verilmez. Genlik karakteristiginin sekil (g55) de goruldugu gibi gecirme ve sondurme bandinda alacagi degerler ($w_c, w_r, A, B$) verilir. Bu degerlerden hareketle $\epsilon$ ve $n$ degerleri hesaplanir.

$$w < w_c \quad icin \quad |H(jw_c)|^2 > A \qquad \text{xq8fg62}$$

$$w = w_c degerinde |H(jw_c)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 w_c^{2n}} = A \qquad \text{xq8fg63}$$

$$w = w_r degerinde |H(jw_r)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 w_r^{2n}} = B \qquad \text{xq8fg64}$$

$$w > w_r \quad icin \quad |H(jw_r)|^2 < B \qquad \text{xq8fg65}$$

(ref: xq8fg63) ve (ref: xq8fg64) esitliklerinden once $n$ bulunur. $n$ filtrenin derecesi oldugundan tamsayi olmalaidir. (ref: xq8fg62) ve (ref: xq8fg65) esitsizlikleri saglanabilmesi icin bulunan $n$ degerinin ustundeki tamsayi alinmalidir.

$$\frac{1}{1+\epsilon^2 w_c^{2n}} = A \quad \longrightarrow \epsilon^2 = (\frac{1}{A} - 1) w_c^{-2n} \qquad \text{xq8fg71}$$

$$\frac{1}{1+\epsilon^2 w_c^{2n}} = A \quad \longrightarrow \epsilon^2 w_r^{2n} = (\frac{1}{B} - 1) \qquad \text{xq8fg72}$$

$\epsilon$ in (ref: xq8fg71) deki degeri (ref: xq8fg72) de yerine konursa.

$$(\frac{1}{A} - 1) w_c^{-2n} w_r^{2n} = (\frac{1}{B} - 1)$$

$$\left(\frac{w_r}{w_c}\right)^{2n} = \frac{(\frac{1}{B} - 1)}{(\frac{1}{A} - 1)}$$

$$2n\log\left(\frac{w_r}{w_c}\right) = \log\left(\frac{A(B-1)}{B(A-1)}\right)$$

$$n = \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{A(B-1)}{B(A-1)}\right)}{\log(\frac{w_r}{w_c})} \qquad \text{xq8fg76}$$

Filtre ile ilgili bazi kitaplarda A yerine $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ ve B yerine $\frac{1}{1+\lambda^2}$ notasyonlari kullanilir ve karakteristikler once $\epsilon$ ve $\lambda$ cinsinden hesaplanir.

$w = 1$ de $|H(jw)|^2 = 0.5$ $w = 1.5$ da $|H(jw)|^2 = 0.1$ olacak sekilde Butterworth filtreyi tasarlayin.

**Cozum**: $w_c = 1$ $A = 0.5$ $w_r = 1.5$ $B = 0.1$

$$n = \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{A(B-1)}{B(A-1)}\right)}{\log(\frac{w_r}{w_c})} = \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{0.5(0.1-1)}{0.1(0.5-1)}\right)}{\log(\frac{1.5}{1})} = 2.7$$

$\epsilon = \sqrt{(\frac{1}{A} - 1)w_c^{-2n}} = 1$

$n = 3$ ve $\epsilon = 1$ alinarak $H(s)$ transfer fonksiyonu ornek(ref: xq8p11) de bulunmustu.

## Gecirme bandinda esit genliklerle dalgalanmaya musade edilen filtreler (Chebyshew filtreleri)

Butterwoth tipi filtrelerde gecis bandi oldukca buyuktur. Gecis bandi dar tutulmak istenirse filtrenin derecesini artirmak gerekir. Dusuk derece ile gecis bandi dar filtre bulma arastirmasi gecirme bandindaki duzgunlukten feragat etme fikrini dogurmustur. Gecirme bandinda dalgalanmma olmasina musade edilmis fakat dalgalanmanin mmaksimumlari bir seviyede minimumlari da bir seviyede olmasi sarti getirilmistir. Minimum seviye ile maksimum seviye arasindaki farkin cok az olmasi daha da onemmlidir.

f?igure[hbt]   gecirme bandinda esit genlikli dalgalanma

Yani biz oyle polinomlar ariyoruz ki

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2[f(w)]^2}$$

ifadesinde $f(w)$ yerine koydugumuzda sekil(ref: xq8sgx21) deki karakteristik elde edilsin. Bu sartlari saglayan polinomlar gurubuna Chebyshew polinomlari denir. Bu polinomlar

$$c_{n+1}(x) = 2xc_n(x) - c_{n-1}(x) \qquad \text{xq8f27}$$

$$c_0(x) = 1 \qquad c_1(x) = x$$

ozellikleri saglarlar. $c_3(x)$, $c_4(x), \ldots.$ gibi polinomlar (ref: xq8f27) bagintisi yardimiyla hesaplanir.

$$c_2(x) = 2xc_1(x) - c_0(x) = 2x\,x - 1 = 2x^2 - 1$$

$$c_3(x) = 2xc_2(x) - c_1(x) = 2x\,(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Bu polinomlar ayrica

$$c_n(x) = \cos(n\cos^{-1}(x)) \qquad |x| < 1 \qquad \text{xq8fg85}$$

$$\begin{aligned} c_n(x) &= cosh(ncosh^{-1}(x)) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-n}\right] \end{aligned} \qquad |x| > 1 \qquad \text{xq8fg86}$$

$$[c_n(1)]^2 = 1 \qquad \#$$

ozelliklerini de saglar

Kacinci dereceden $c_n$ kullanilacagina karar verilmisse (n'nin kac olacagi belli ise ) $\epsilon$ degeri de belli ise filtreni transfer fonksiyonu

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2[c_n(w)]^2}$$

genlik fonksiyonu yardimiyla bulunabilir.

$\epsilon = 0.1 \qquad n = 2$ icin Chebyshew 1 tipi filtreyi hesaplayin.

**Cozum**: Tablodan $c_2(w) = 2w^2 - 1$ olarak alinir.

$$[c_2(w)]^2 = (2w^2 - 1)^2 = 4w^4 - 4w^2 + 1$$

bulunan deger $|H(jw)|^2$ de yerine konursa

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2[c_2(w)]^2} = \frac{1}{1 + \epsilon^2(4w^4 - 4w^2 + 1)}$$

Buradan $K(-s^2)$ ve $H(s)$ onceki bol;umlerde oldugu gibi hesaplanir.

$$K(-s^2) = \frac{1}{1 + (0.1)^2(4(-s^2)^2 - 4(-s^2) + 1} = \frac{25}{s^4 + s^2 + \frac{101}{4}}$$

payda polinomunun kokkleri

$$s_1 = -1.5 + j1.66 \quad s_2 = -1.5 - j1.66 \quad s_3 = 1.5 + j1.66 \quad s_3 = 1.5 - j1.66$$

seklindedir. Kararli (reel kismi sifirdan kucuk olan kokleri alarak $H(s)$ olusturulur.

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{P}{s^2 + 3s + 5.02}$$

Burada P katsayisi $H(0) = 1$ yapmak icin eklenmistir. $H(0) = 1$ olmasi icin P=5.02 olmmasi gerektigi aciktir.

f?igure[hbt]  ($w_c, w_r, A, B$) nin gosterildigi sekil Butterworth ile ayni olabilir.

Filtre kullanicisi $\epsilon$ ve $n$ degerlerini vermez, isteklerini Butterworth filtrede oldugu gibi filtreden saglamasi gereken genlik karakteristigi seklinde ifade eder. Sekil (ref: xq8sgx65) de goruldugu gibi gecirme ve sondurme bandinda alacagi degerler ($w_c, w_r, A, B$) verilir. Bu degerlerden hareketle $\epsilon$ ve $n$ degerleri hesaplanir. (ref: xq8fg63),(ref: xq8fg64) bagintilari chebbshew filtreler icin

$$w = w_c \quad degerinde \quad |H(jw_c)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 c_n^{2n}} = A \qquad \text{xq8fg83}$$

$$w = w_r \quad degerinde \quad |H(jw_r)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 c_n^{2n}} = B \qquad \text{xq8fg84}$$

seklini alir.

$w_c, w_r, A, B$ degerlerinden $\epsilon$ ve $n$ nin hesabi icin Butterwort filtrelerinde oldugu gibi acik bir formul elde etmek icin ve (ref: xq8fg83), (ref: xq8fg84) esitlikleri uygun degildir. Hesabi kolaylastirmak icin kesim frekansi $w_c = 1$ alinir, ve $w_r$ yerine de $\frac{w_r}{w_c}$ alinir. Istenen kesim frekansindaki filtre bolum(ref: frekansdonusum) gorulecegi uzere olceklenir.

$$\frac{1}{1+\epsilon^2[c_n(w_c)]^2} = A \quad \rightarrow \epsilon^2 = (\frac{1}{A} - 1)[c_n(w_c)]^{-2} \qquad \text{xq8fg91}$$

$$\frac{1}{\epsilon^2[c_n(w_r)]^2} = B \quad \rightarrow \epsilon^2[c_n(w_r)]^2 = (\frac{1}{B} - 1) \qquad \text{xq8fg92}$$

$\epsilon$ in (ref: xq8fg91) deki degeri (ref: xq8fg92) de yerine konur duzenlenirse

$$[c_n(w_c)]^{-2}(\frac{1}{A} - 1)[c_n(w_r)]^2 = \frac{1}{B} - 1$$

$$\frac{[c_n(w_r)]^2}{[c_n(w_c)]^2} = \frac{\frac{1}{B} - 1}{\frac{1}{A} - 1}$$

$w_c = 1$ oldugunda $[c_n(w_c)]^2 = 1$ konularak

$$c_n(w_r) = \sqrt{\frac{\frac{1}{B} - 1}{\frac{1}{A} - 1}}$$

elde edilir. Ote yandan (ref: xq8fg86) den

$$c_n(w) = cosh(ncosh^{-1}(w_r))$$

yazilir her iki tarfin ters hiperbolik fonksiyonlari alinirak duzenlenirse

$$n = \frac{cosh^{-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{B}-1}{\frac{1}{A}-1}}}{cosh^{-1}(w_r)} \qquad \text{xq8fg101}$$

elde edilir.

$w_c = 1$ de $|H(jw)|^2 = 0.9615$ $\quad w_r = 2$ de $|H(jw)|^2 = 0.0385$ olan chebshew 1 tipi filtreyi tasarlayin.

**Cozum**: $A = 0.9615 \;\; B = 0.0385 \quad w_r = 2$ koyarak (ref: xq8fg101) esitliginden $n = 2.97$ bulunur. Dolayisiyla filtre derecesi en az 3 olmali

$$\epsilon^2 = \frac{1}{A} - 1 = 0.2$$

olarak bulunur. Buradan

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + (0.2)^2[4w^3 - 3w]^2} = \frac{\frac{1}{(0.2)^2}}{16w^6 - 24w^4 + 9w^2 + \frac{1}{(0.2)^2}}$$

$$K(-s^2) = \frac{\frac{25}{16}}{-s^6 - \frac{24}{16}s^4 - \frac{9}{16}s^2 + \frac{25}{16}}$$

Buradan onceki orneklere benzer sekilde.

$$H(s) = \frac{1.25}{s^3 + 17s^2 + 21s + 1.25}$$

olarak bulunur.

Not: $1 + \epsilon^2[c_n(x)]^2 = 0$ polinomunun kokleri seklinde hesaplanabilir

$$x_r = sinh(\alpha)\, cos(\beta_r) + jcosh(\alpha)\, sin(\beta_r)$$

$$\alpha = \frac{1}{n} sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} \qquad \beta_r = \frac{2r + n - 1}{2n}\pi$$

## Sondurme bandinda esit genliklerle dalgalanmaya musade edilen filtreler (2. tip Chebyshew filtreleri)

Bu tip filtrelerin gecirme bandi duz, sondurmme bandi esit genlikli dalgalanmaya sahiptir. Bu tip filtrelerin genlik fonksiyonu

$$|H(jw)|^2 = \frac{\epsilon^2[c_n(1/w)]^2}{1 + \epsilon^2[c_n(1/w)]^2} \qquad \#$$

seklindedir. 2. tip chebshew filtre icin once 1. tip chebshew filtre hesaplanir ve yukaridaki formule gore 2. tip filtre elde edilir. 1. ve 2. tip filtrelerde $\epsilon$ ve $n$ nin hesabi aynidir.

## Gecirme ve sondurme bandinda esit genliklerle dalgalanmaya musade edilen filtreler (eliptik filtreler)

Bu tip filtrelerde hem gecirme hem de sondurmme bandinda esit genlikklerle dalgalanmaya mmusade edilir. Eliptik filtrelerin genlik fonksiyonu

$$|H(jw)|^2 = \frac{}{1 + \epsilon^2[R_n(w)]^2}$$

seklindedir. Burada $[R_n(w)]^2$ iki polinomun orani seklindedir ve $[R_n(w)]^2$ nin hesabi eliptik integralerin hesabini gerektirir, bu yuzden burada bu kadarla yetinilecektir. Konu ile ilgili genis bilgi [ref: eliptikfiltrereferansi] de bulunabilir.

**Bessel Filtreleri**

Bessel filtreleri filtrenin faz karakteristigi onem arzeden yerlerde onem kazanir. Bessel filtrelerini iliskin transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{B_n(0)}{B_n(s)} \qquad \text{xq8fg123}$$

seklindedir. Burada $B_n(s)$ Bessel fonksiyonudur ve asagidaki sekilde hesaplanir.

$$B_0(s) = 1$$

$$B_1(s) = s + 1$$

$$B_2(s) = s^3 + 3s + 3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_r(s) = (2r - 1)B_{r-1}(s) + s^2 B_{r-2}(s) \qquad \#$$

Bessel filtrelerinin genlik karakteristigi Butterworth filtreninkine benzer fakat faz karakteristigi Butterwort'unkunden daha duzgundur.

f?igure[hbt] ayni derecede butt chebb, eliptik besselin karsilastirilmamsi

## Hangi Filtre En iyisidir

Bu sorunun cevabi kullanim maksadina baglidir. Mesela karmasik isaretin fazinin hic onemi yok sadece genlikleri ile ilgileniliyorsa eliptik filtreler veya chebb filtreler en uygun olanidir. Ancak faz onemli ise o zaman Bessel filtreleri daha uygundur. Butterworth filtrelerinde ise dizayn basit. Sekil(ref: xq8s49) de 3.derece But cheb1 cheb2, eliptik, bessel filtreleri verilmistir. mesela ..... icin cheb de n=3 olurkken butterw de n=8 olmakta eliptikte ise n=2 yeterli olmaktadir. bunun yaninda cheb ve eliptigin fazlari cok bozulmustur.????????

MATLAB komutlari ek te verilmistir.

lineer sistemlerin frekans cevabina kutuplarin sayisi-sifirlarin dayisi kadar bir hizla genlik azalir. ilave edilmeli

Eger $w = 0$ icin $|H(j0)|^2 = 1$ olmasi istenirse, (ki bu $H(s)|_{s=0} = 1$ anlamina gelir. Bu durumda $H(0) = 1$ olmasi icin

$$H(0) = \frac{P}{0^3 + 2\ \ 0^2 + 2\ \ 0 + 1} = 1$$

# AGF den Diger tip Filtrelerin elde edilmesi (Frekans Donusumleri)

Filtre dizayni kesim frekansi $1$ olan alcak geciren filtre icin yapilirsa bir cok kolayliklar saglar. Kesim frekansi $1$ olan AGF icin elde edilen $H(s)$ transfer fonksiyonu belli **frekans donusumleri** ile kesim frekansi $w_c$ olan yuksek geciren filtre, band geciren filtre, band sonduren filtre haline getirilebilir. BU bolumde bu konular islenecektir.

## Alcak Frekanslari Geciren filtrenin kesim frekansinin degistirilmesi

Kesim frekansi $w_c = 1$ olan filtrenin $|H(w)|^2$ genlik fonksiyonunda $w$ yerine $\frac{w}{w_c}$ konursa filtrenin kesim frekansi $w_c$ olur. Bu durum sekil(ref: xq8s61) asagidaki sekilde acikca goruluyor.

f?igure[hbt]   frekans kaydirma

O halde kesim frekansi w=1 olan filtreden, kesim frekansi $w = w_c$ olan filtre elde etmek icin

$$|H_{Aw_c}(w)|^2 = |H_{A1}(p)|^2_{p=\frac{s}{w_c}} \qquad \#$$

donusumu yapilmalidir.

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{w^2+1}$$

genlik fonksiyonunun a)kesim frekansini bulun, b)$w = \frac{w}{0.1}$, c)$w = \frac{w}{20}$ donusumu ile elde edilen genlik fonksiyonlarinin kesim frekanslarini bulun.

**Cozum**: a)$|H(0)|^2 = 1$ dir. O halde genligin $\frac{1}{2}$ ye dustugu frekans kesim frekansidir.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{w^2+1} \quad \rightarrow \quad w_c = 1$$

olarak bulunur.

b) $|H(jw)|^2 = \frac{1}{\left(\frac{w}{0.1}\right)^2+1} = \frac{0.01}{w^2+0.01}$ dir.

$|H(0)|^2 = 1$ dir. ve genligin $\frac{1}{2}$ ye dustugu kesim frekansi

$$\frac{1}{2} = \frac{0.01}{w^2+0.01} \quad \rightarrow \quad w_c = 0.1$$

olarak bulunur.

c) Benzer sekildeki islemlerle $w_c = 20$ olarak bulunur.

$H(s)$ transfer fonksiyonu $jw = s$ donusummu ile elde edildiginden kesim frekansinin kaydirilimasi Laplas domenindeki transfer fonksiyonuna dogrudan uygulanabilir.

$$H_{Aw_c}(s) = H_{A1}\left(\frac{s}{w_c}\right) \qquad \#$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

transfer fonksiyonunun a)kesim frekansini bulun, b)$s = \frac{s}{0.1}$, c)$s = \frac{s}{20}$ donusumu ile elde edilen genlik fonksiyonlarinin kesim frekanslarini bulun.

**Cozum**: a)

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{w^2+1}$$

oldugundan kesim frekansi $w = 1$ dir.

b) $H(s) = \frac{1}{\frac{s}{0.1}+1} = \frac{0.1}{s+0.1}$ $ve$ $|H(jw)|^2 = \frac{0.01}{w^2+0.01}$

oldugundan kesim frekansi $w = 0.1$dir.

c) Benzer islemlerle $w_c = 20$ cikar.

## AGF den YGF elde edilmesi

AGF'nin frekansinin kaydirilmasinda oldugu gibi burada da $w$ yerine $w_c w$ Kesim frekansi $w_c = 1$ olan filtrenin $|H(w)|^2$ genlik fonksiyonunda $w$ yerine $\frac{w}{w_c}$ konursa filtrenin kesim frekansi $w_c$ olur. Bu durum sekil(ref: xq8s37) de gosterilmistir.

f?igure[hbt] AGF den YGF elde etme

O halde kesim frekansi $w = 1$ olan filtreden, kesim frekansi $w = w_c$ olan yuksek geciren filtre elde etmek icin

$$|H_y(w)|^2 = \left|H_{A1}(\frac{w_c}{w})\right|^2 \qquad \#$$

donusumu yapilmalidir. Laplas domenindeki transfer fonksiyonlari icin

$$H_y(s) = H_{A1}(\frac{w_c}{s}) \qquad \text{xq8f57}$$

donusumu yapilmaidir. Kesim frekansi $w_c = 1$ olan $H(s) = \frac{1}{s+1}$ AGF'den kesim frekansi $w_c = 100$ olan YGF elde ediniz.

**Cozum**: (ref: xq8f57)'den

$$H_y(s) = \frac{1}{\frac{100}{s}+1} = \frac{s}{s+100}$$

Elde edilir. Elde edilen filtrenin kesim frekansini bulalim. $|H_y(\infty) = 1|$'dir. O halde $|H_y(w_c)|^2 = \frac{1}{2}$ olan $w_c$ frekansi, kesim frekansidir.

$$|H_y(w_c)|^2 = \frac{w_c^2}{w_c^2+10000} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad w_c = 100$$

## AGF den BGF elde edilmesi

Sekil(ref: xq8s34)de goruldugu gibi burada maksat kesim frekansi $w = 1$ olan AGF den bir donusumle ($w$ yerine bir $x(w)$ koyarak) $w_c$ civarindaki frekanslari geciren BGF elde etmektir.

f?igure[hbt] AGF den BGF elde etme

Kesim frekansi $w = 1$ olan AGF den kesim frekansi $w = w_c$ olan AGF elde edildiginde

$x(w) = \frac{w}{w_c}$ donusumu yapildi. Kesim frekansi $w = 1$ olan AGF den kesim frekansi $w = w_c$ olan YGF elde edildiginde $x(w) = \frac{w_c}{w}$ donusumu yapildi. Burada bu donusumu hemen gormek kolay degil. Bu tuzden AGF ile BGF nin saglamasi gereken sartlari inceleyelim.

AGF nin genlik transfer fonksiyonu $|H_{A1}(w^2)|^2$ ve BGF nin genlik transfer fonksiyonu $|H_B(w^2)|^2$ olsun. BGF elde edilirken AGF de $w$ yerine $x(w)$ koymakla elde edileceginden

$$|H_B(w^2)|^2 = |H_{A1}([x(w)]^2)|^2 \qquad \text{xq8r32}$$

olacaktir. Sekil(ref: xq8s34)den gorulecegi gibi

$$H_B(w_c^2) = H_{A1}(0) \qquad H_B(0) = H_{A1}(\infty) \qquad H_B(\infty) = H_{A1}(\infty) \qquad \text{xq8r41}$$

(ref: xq8r32) ve (ref: xq8r41) den

$$H_B(w_c^2) = H_{A1}(0) = H_{A1}([x(w_c)]^2) \quad \rightarrow \quad 0 = [x(w_c)]^2 \qquad \text{xq8r51}$$

$$H_B(0) = H_{A1}(\infty) = H_{A1}([x(0)]^2) \quad \rightarrow \quad \infty = [x(0)]^2 \qquad \text{xq8r52}$$

$$H_B(\infty) = H_{A1}(\infty) = H_{A1}([x(\infty)]^2) \quad \rightarrow \quad \infty = [x(\infty)]^2 \qquad \text{xq8r53}$$

Dolayisiyla $x(0) = \pm\infty \quad x(w_c) = 0 \quad x(\infty) = \pm\infty$ olan *(iki polinomun orani seklindeki)* bir $x(w)$ fonksiyonu ariyoruz. Bu sartlari saglayan cesitli fonksiyonlar bulunabilir. Ancak Bu sartlara ilave olarak $w$ yerine $x(w)$ konuldugunda elde edilecek $|H_B(w)|^2$ fonksiyonu genlik fonksiyonu olma sartlarini gerceklemelidir. Bu sartlarin en onemlisi $|H_B(w)|^2$ nin cift fonksiyon olma sartidir. Bu sartin saglanmasi icin $x(w)$'nin kutuplari ve sifirlari $jw$ eksenine gore simetrik olmalidir. Iste butun bu sartlari saglayan uygun fonksiyonlardan biri.

$$x(w) = w - \frac{w_c^2}{w} = \frac{w^2 - w_c^2}{w}$$

fonksiyonudur. BGF nin bant genisligini ayarlamak icin de paydaya $B$ katsayisi carpan olarak eklenir. ve $x(w)$ donusum fonksiyonu

$$x(w) = \frac{w^2 - w_c^2}{Bw} \qquad \#$$

olur. $B$ nin BGF nin bant genisligine karsi geldigi gosterilebilir. Sonuc olarak kesim frekansi 1 olan bir AGF den kesim frekansi $w_c$ ve bant genisligi $B$ olan BGF elde etmek icin

$$|H_B(w^2)|^2 = |H_{A1}(p^2)|_{p = \frac{w^2 - w_c^2}{Bw}} \qquad \#$$

donusumu yapilmalidir.

s domenindeki transfer fonksiyonunu bulmak icin $jp = s_p \quad jw = s \quad p = \frac{s_p}{j} \quad w = \frac{s}{j}$ konarak

$$\frac{s_p}{j} = \frac{-s^2 - w_c^2}{B\frac{s}{j}} \qquad s_p = -\frac{-s^2 - w_c^2}{Bs} \qquad s_p = \frac{s^2 + w_c^2}{Bs}$$

O halde donusum bagintisi

$$H_B(s) = H_{A1}(s_p)\Big|_{s_p=\frac{s^2+w_c^2}{Bs}}$$ xq8f71

sekklinde olmalidir.

Kesim frekansi 1 olan $H(s) = \frac{1}{s+1}$ AGF'den kesim frekansi $w_c = 100$ bant genisligi $B = 20$ olan BGF elde edin.

**Cozum**: (ref: xq8f71)'den

$$H_B(s) = \frac{1}{\frac{s^2+100^2}{20s}+1} = \frac{20s}{s^2+20s+10000}$$

elde edilir. Buradan

$$H(jw) = \frac{20jw}{(jw)^2+20jw+10^4} \qquad ve \qquad |H(jw)|^2 = \frac{400w^2}{(10^4-w^2)^2+400w^2}$$

$H(jw)$ ya iliskin genlik ve faz spektrumu sekil(ref: xq8s73) de gosterilmistir.

f?igure[hbt] $H(s) = \frac{20s}{s^2+20s+10^4}$ transfer fonksiyonuna iliskin genlik ve faz spektrumu.

Sekilden acikca gorulecegi uzere $|H(jw)|^2$nin en buyuk degeri $w = 100$ icindir ve $|H(j100)|^2 = 1$ dir. Kesim frekansini hesaplayalim.

$$\frac{400w^2}{(10^4-w^2)^2+400w^2} = \frac{1}{2}$$

denklemi cozulurse

$$w_1 = 110.49, \quad w_2 = 90.49, \quad w_3 = -100.49, \quad w_4 = -90.49$$

kokleri bulunur. Kesim frekanslari anlamli kokler olan $w_1 = 110.49$ ve $w_2 = 90.49$ degerleridir. Not: kesim frekanslari iki tarafda simetrik degil geometrik smetriktir. Yani

$$w_c^2 = w_1 w_2$$

sartini saglarlar.

## AGF den BSF elde edilmesi

Bir onceki bolumde oldugu gibi sekil(rx43) yardimiyla kesim frekansi 1 olan AGF den kesim frekansi $w_c$ olan BSF elde etmek icin gerekli $w \;\to\; x(w)$ donusum bagintisi bulunabilir. Ancak ddaha kolayca da bu is basarilabilir.

f?igure[hbt] AGF den BSF elde etmek

Hemen kolayca gorulecegi gibi AGF den BGF elde etmek icin uygulanan yontemler YGF ye uygulansa BSF elde edilir. Kesim frekansi 1 olan AGF den kesim frekansi 1 olan YGF elde etmek icin $w$ yerine $\frac{1}{w}$ koymalidir. Kesim frekansi 1 olan YGF den kesim frekansi $w_c$ bant genisligi B olan BSF elde etmek icin $w$ yerine $\frac{w^2-w_c^2}{Bw}$ konmalidir. O halde kesim frekansi 1 olan AGF den kesim frekansi $w_c$ olan BSF elde etmek icin $w$ yerine $\frac{Bw}{w^2-w_c^2}$ konmaliddir. Yani

$$|H_{BSF}(w^2)|^2 = |H_{A1}(p^2)|^2_{p=\frac{Bw}{w^2-w_c^2}} \qquad \#$$

s domenindeki transfer fonksiyonunu bulmak icin $jw = s \quad \rightarrow w = \frac{j}{s}$ koyarak

$$H_{BSF}(s) = H_{A1}(p)|_{p=\frac{Bs}{s^2|w_c^2}} \qquad \#$$

olarak bulunur.

/*********************************************************************

**************************************************************************************

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{4w^4 - 2w^2 + 1}$$

genlik fonksiyonunu saglayan $H(s)$ yi bulun.

$$K(-s^2) = \frac{1}{4s^4 + 2s^2 + 1} = \frac{\frac{1}{4}}{s^4 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}}$$

$s^4 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}$ polinomunun kokleri,

$s_1 = 0.35 + j0.61 \quad s_2 = 0.35 - j0.61 \quad s_3 = -0.35 + j0.61 \quad s_1 = -0.35 - j0.61$

$$K(-s^2) = \frac{\frac{1}{4}}{(s - 0.35 + j0.61)(s - 0.35 - j0.61)(s + 0.35 + j0.61)(s + 0.35 - j0.61)}$$

Dolayisiyla

$$H(s) = \frac{\frac{1}{4}}{(s + 0.35 + j0.61)(s + 0.35 - j0.61)} = \frac{1}{2s^2 + 1.41s + 1}$$

$$|H(jw)|^2 = \frac{-w^2 - 1}{4w^4 + 29w^2 + 100}$$

genlik fonksiyonunu saglayan $H(s)$ yi bulun.

$$K(-s^2) = \frac{-(-s^2) - 1}{(-s^2)^2 + 29(-s^2) + 100} = \frac{s^2 - 1}{s^4 - 29s^2 + 100} = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s-2)(s+5)(s-5)}$$

O halde

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+5)}$$

O halde filtreye iliskin transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+5)} = \frac{s+1}{s^2 + 7s + 10}$$

olacaktir. Ancak burada

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+5)}$$

ifadesi de filtre transfer fonksiyonu olarak alinabilir. Dolayisiyla

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + 7s + 10}$$

ifadesi de bir filtreye iliskin transfer fonksiyonudur.

Burada her iki filtrenin genlik karakteristigi de aynidir. Fakat faz karakteristikleri farklidir. Dolayisiyla hangi filtrenin faz karakteristigi maksada uygun ise o filtre kullanilir.

# Analog Filtrelerin gerceklemesi

Analog filtrenin pratik anlami bir elektrik devresidir. Yani filtre analog filtre direnc(R), kondansator (C), bobin(L), tranzistor, OPAM, besleme kaynagi (pil, aku, adaptor) den meydana gelen bir devredir. Bolum(ref: analogfiltdizayni)'de analog filtre dizaynindan maksat vcerilen bir genlik ve faz spektrumunu saglayan biki polinomun orani seklinde bir $H(s)$ fonksiyonu bulmakti. Analog filtrenin gerceklemesi ise, yukaridaki elemanlardan meydana gelen ve transfer fonksiyonu $H(s)$ olan bir elektrik devresi yapmak anlamina gelir.

Bir elektrik devresinin transfer fonksiyonu cikis geriliminin Laplas donusumunun giris geriliminin Laplas donusumune orani olarak tanimlanir. Temel elektrik devre teoremleri(cevre ve dugum denklemleri, Kirchoff kanunlari) Laplas domeninde de benzeri sekilde tanimlanmistir. Kondansator elemaninin empedansi

$$Z_c = \frac{1}{sc}$$

ve bobin elemaninin empesandi

$$Z_c = sc$$

Ornek olarak Sekil(ref: xq9s11) deki $RC$ devresinde

f?igure[hbt] RC devresi

$$-V_i(s) + RI(s) + \frac{1}{sc}I(s) = 0 \qquad \text{xq9f11}$$

$$V_0(s) = \frac{1}{sc}I(s) \qquad \text{xq9f13}$$

(ref: xq9f11)den $I(s)$ cekilip (ref: xq9f13) de yerine konursa

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{sCR+1} \qquad \#$$

elde edilir. Bulunan $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$ ifadesi (ref: xq9s11) deki devreye iliskin transfer fonksiyonudur.

Verilen bir devreye iliskin transfer fonksiyonunu bulmak yukarida bahsedildigi gibi temel elektrik devreleri bilgisi ile yapilabilir. Peki $H(s)$ Transfer fonksiyonu verilirse bu transfer fonsiyonuna iliskin elektrik devresi nasil bulunabilr. Iste analog filtrenin gerceklemesi problemi budur.

## Aktif ve pasif Filtreler

Gerceklemede kullanilan elemanlara gore analog filtreler aktif ve pasif filtreler olarak gurubuna ayrilir. Pasif filtreler diasaridan enerji cekmeden calisirlar, R,L,C elemanlarindan meydana gelir. Aktif filtreler tranzistor, OPAM, diyot, direnc, kondansator kullanilarak gerceklestirilir. Calismalari icin disaridan beslemeye (pil,aku,adaptor) ihtiyacalari vardir.

Tumdevre teknolojisinin gelismesiyle pasif filtrelerin yerini aktif filtreler almaya baslamistir. Dusuk frekanslarda aktif filtreler hem daha az yer isgal eder hem daha ucuzdur. Ancak yuksek frekanslarda pasif filtreler hala yerlerini korumaktadir. Tablo(ref: xq9t11) de aktif ve pasif filtrelerin bir karsilastirilmasi verilmistir.

| Pasif filtreler | Aktif filtreler |
|---|---|
| R,L,C den meydana gelir. | R,C,OPAM, tumdevrelerdan meydana gelir. |
| pahali | ucuz |
| agir | hafif |
| $\frac{v_0}{v_i} << 1$ | $\frac{v_0}{v_i} >> 1$ |
| Giris direnci $R_i$ kucuk | Giris direnci $R_i$ cok buyuk $R_i \sim \infty$ |
| Calismasi icin disaridan enerji istemez | Calismasi icin disaridan besleme lazimdir |
| Yuksek frekanslar icin elverisli f$=500Mhz$e kadar kullanilir. | Yuksek frekanslarda OPAM karakteristigi bozulur. Yaygin kullanim alani f$< 500KHz$ dir. f$> 500KHz$ icin yapilan ozel OPAM lar cok pahalidir. |
| Her zaman kararli | Devre parametrelerinin degismesiyle kararsiz olabilir. |
| boyle bir problem yok | Giris isaretinin genligi belli bir degeri asarsa OPAM doymaya gider ve isaret bozulur |

?? Aktif ve pasif filtrelerin karsilastirilmasi

Bir $H(s)$ transfer fonksiyonunu pasif filtrelerle gercekleme islemi uzerinde pek cok kisi calismis ve adeta standartlastirilmistir. Pasif filtreler bugun daha cok haberlesme muhendisliginde kullanilir ve biz burada uzerinde daha fazla durmayacagiz.

Aktif filtreler uzerindeki calismalarda oldukca fazladir. Aktiff filtre gurubunda sayilabilecek **ac-kapa tipi kapasiteler**le (switched kapasitor) gerceklestirmeler uzerinde yogun calismalar vardir.

Biz bu kitap cercevesinde aktif filtre gerceklemesinde temel bir iki yontem uzerinde duracagiz.

## Aktif Filtre Elemanlari

Aktif filtrede temel eleman direnc, kondansator ve OPAM'dir. bu yuzden OPAM'in yapisini kisaca incelemek gerekir. OPAM icnde 10-50 civarinda tranzistor, bir o kadarda direnc ve birkac kapasiteden meydana gelen tumdevre seklinde imal edilen bir elemandir. OPAMM kullanicisi OPAM'in ic yapisi ile degil giris cikis bagintilari ile ilgilenir. Sekil(ref: xq9s17.a)de OPAM'in bir devrede sematik gosterimi ve sekil(ref: xq9s17.b)de OPAM'in fiziksel gorunumu ve uc baglantilari verilmistir. OPAM'in calismasi icin iki tane besleme kaynagina ihtiyac vardir. ??.?? uclari devrede bos kalir 5 nolu uc OPAM'in ic yapisinin duzgun olmamasindan kaynaklanan gerilim duzensizligini gidermek icin kullanilir.

f?igure[hbt]   OPAM'in sematik seklive fiziksel gorunumu

OPAM pratik olarak cok yuksek kazancli bir kuvvetlendiricidir. Giris cikis bagintisi

$$V_0 = A(V_b - V_a) \qquad \text{xq9f23}$$

seklinde verilir. Burada $A$ kazanc (kuvvetlendirme orani)dir ve OPAM'in acik cevrim kazanci olarak bilinir. $A$'nin degeri $10^5 - 10^6$mertebesindedir. OPAM'in ikinci ozelligi giris direncini yuksek olmasi dolayisiyla cok az, ihmal edilebilcek bir akim cekmesidir.

$$i_a = i_b \cong 0 \qquad \text{xq9f25}$$

(ref: xq9f23) ve (ref: xq9f25)'den OPAM'in giris direnci

$$R_i = \frac{V_b - V_a}{i_b - i_a} \cong \infty \qquad \#$$

olacaktir. Kitaplarda $V_b, V_a$ yerine $V_+, V_-$ ve $i_b, i_a$ yerine $i_+, i_-$ notasyonlari kullanilir.

## OPAM da Geribesleme Devresi

$V_0$ gerilimi en fazla OPAM'in besleme gerilimi, tipik olarak $+15v$ ve $-15v$ olabilir. Dolayisiyla (ref: xq9f23) bagintisinin gecerli oldugu $V_a - V_b$ araligi cok sinirlidir (mikrovoltlar mertebesinde). Bu yuzden sekil(ref: xq9s17) deki haliyle OPAM bir gerilimi kuvvetlendirmek icin kullanilamaz. Sekil(ref: xq9s27)deki gibi bir geribesleme devresi kuvvetlendirici olarak kullanilabilir. Simdi sekil(ref: xq9s53) deki devrede $\frac{V_0}{V_i}$ oranini hesaplayalim.

f?igure[hbt]

```
              ---Z2-----<---
        I1    |         I2 |
   ---->-Z1-----|\         |
   1            | \ _____|___
       ---------| /     V0
           Vb|  |/
        -------|-----------------
```

Geribeslemeli OPAM devresi

Devrenin $V_b$ ucu topraga bagli oldugundan

$$V_b = 0 \qquad \#$$

olacaktir. Dolayisiyla (ref: xq9f23) bagintisi

$$V_0 = -V_a A \quad \rightarrow \quad V_a = -\frac{V_0}{A} \qquad \text{xq9f31}$$

haline gelir. Devrede 1 nolu cevre icin cevre denklemi yazilirsa

$$-V_1 + Z_1 I_1 + V_a = 0$$

olur. Burada $V_a$ yerine (ref: xq9f31) deki degeri konulup $I_1$ cekilirse

$$I_1 = \frac{V_1 - V_a}{Z_1} = \frac{V_1 + \frac{V_0}{A}}{Z_1} \qquad \text{xq9f33}$$

elde edilir. Benzeri islemler 2 nolu cevre icin yapilirsa

$$-V_0 + Z_2 I_2 + V_a = 0 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{V_0 - V_a}{Z_2} = \frac{V_0 + \frac{V_0}{A}}{Z_2} \qquad \text{xq9f35}$$

elde edilir. (ref: xq9f25) bagintisi burada

$$I_1 = -I_2 \qquad \text{xq9f37}$$

haline gelir. (ref: xq9f33),(ref: xq9f35),(ref: xq9f37) bagintilari birlestirilerek

$$\frac{V_1 + \frac{V_0}{A}}{Z_1} = -\frac{V_0 + \frac{V_0}{A}}{Z_2}$$

elde edilir. Ara islemlerden sonra

$$V_0[(-A-1)Z_1 - Z_2] = AZ_2 V_i$$

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{AZ_2}{(-A-1)Z_1 - Z_2} \; \frac{V_0}{V_i} = \frac{Z_2}{(-1-\frac{1}{A})Z_1 - \frac{Z_2}{A}} \qquad \text{xq9f39}$$

bagintisi bulunur. $A$ cok buyuk olmsi durumunda(pratikte oyledir) $\frac{1}{A} \cong 0$ olur ve (ref: xq9f39) esitligi

$$\frac{V_0}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} \qquad \#$$

haline gelir. Ayrica $A$ cok buyuk olursa (ref: xq9f23) bagintisi

$$V_b - V_a = \frac{V_0}{A} \cong 0 \quad \rightarrow \quad V_a = V_b = 0 \qquad \text{xq9f38}$$

olur.

## Ozel durumlar

a) $Z_1 = R_1,\ Z_2 = R_2$ olmasi durumunda

$$\frac{V_0}{V_1} = -\frac{R_2}{R_1}, \quad \rightarrow \quad V_0 = -\frac{R_2}{R_1} V_1 \qquad \#$$

elde edilir. Yani devre bir kuvvetlendirici gibi calisir. Ornek olarak $R_1 = 10^4,\ R_2 = 10^5$ secilse $V_0 = -10V_1$ elde edilir. Giris isareti 10 defa kuvvetlendirilerek cikisa verilmekte, ve $V_2(t)$ $V_1(t)$ nin ters isaretine sahiptir.

b) $Z_1 = R,\ Z_2 = \frac{1}{sC}$ olmasi durumunda

$$\frac{V_0}{V_1} = -\frac{1}{sCR} \quad \rightarrow \quad V_0 = -\frac{1}{sCR} V_1$$

veya

$$V_0(t) = \frac{1}{RC}\int V_1(t)dt \qquad \#$$

elde edilir. Burada giris isareti $V_1(t)$ integre edilerek cikisa verilmektedir.

c) $Z_1 = \frac{1}{sC}, \quad Z_2 = R$ olmasi durumunda

$$\frac{V_0}{V_1} = -sCR \quad \rightarrow \quad V_0 = -sCRV_1$$

veya

$$V_0(t) = \frac{1}{RC}\frac{dV_1(t)}{dt} \qquad \#$$

elde edilir. Burada giris isareti $V_1(t)$'nin turevi alinarak cikisa verilmektedir.

## OPAM ile Toplama Devresi

Sekildeki gibicok girisli devreyi ele alalim $V_0$ ile $V_1$,$V_2$,$V_3$ arasindaki bagintiyi bulalim.

f?igure[hbt]

```
              ---Ro-----<---
    I1        |         Io |
     --R1-----X---|\       |
    I2    |       | \ _____|___
     --R2-      ---| /    V0
    I3    |  Vb|  |/
     --R3-|  --|------------------
```

OPAM kullanilarak gerceklestirilen toplama devresi

$X$ noktasi icin dugum denklemi yazilirsa (gelen akimlar giden akimlara esittir prensibi)

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_0 \qquad \text{xq9f10}$$

(ref: xq9f38) bagintisi geregi

$$V_x = 0 \qquad \#$$

ve bunun sonucu olarak

$$V_1 = R_1 I_1 \qquad \text{xq9f12}$$

$$V_2 = R_2 I_2 \qquad \text{xq9f14}$$

$$V_3 = R_3 I_3 \qquad \text{xq9f16}$$

$$V_0 = R_0 I_0 \qquad \text{xq9f18}$$

bagintilari yazilabilir. (ref: xq9f12),(ref: xq9f14),(ref: xq9f16),(ref: xq9f18) deki $I_1, I_2, I_3, I_0$ deleri cekilip (ref: xq9f10) esitliginde yerine konulursa

$$V_0 = -\frac{R_0}{R_1}V_1 - \frac{R_0}{R_2}V_2 - \frac{R_0}{R_3}V_3 \qquad \text{xq9f20}$$

elde edilir. $R_0 = R_1 = R_2 = R_3$ secilirse (ref: xq9f20) bagintisi

$$V_0 = -(V_1 + V_2 + V_3) \qquad \#$$

haline gelir. Dolayisiyla sekil(ref: xq9s27)deki devre bir toplama devresi olarak kullanilabilir.

# Aktif Filtre Sentezi

Onceki bolumden goruldugu gibi $Z_1$ ve $Z_2$ yerine direnc ve kondansatorlerin degisik kommbinezonlari konarak cesitli transfer fonksiyonlari elde edilebilir.
Tabblo(ref: xq9t15) de degisik bagli kondansator direnc gurubu icin $Z$ empedanslari goruluyor. ??[hbt] ) Degisik $Z$ empedanslari
$H(s) = -\frac{10}{s+3}$ transfer fonksiyonunu gercekleyen devreyi tasarlayin.

**Cozum**: (ref: xq9f39) da $Z_1 = R_1, \quad Z_2 = \frac{R_2}{sCR_2+1}$ olarak alinsa

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1(1+R_2CS)} = -\frac{\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{RC_2}}$$

elde edilir. Burada $R_1C = 10,$, $R_2C = 3$ olacak sekilde elemanlar secilebilir. Ornek olarak $C = 1, R_1 = 10, R_2 = 3$ bir secim turudur. Pratikte $C = 1F$'lik kondansator bulumaz, fakat mesela $C = 10^{-6}F$lik kondansator bulunur. $C = 10^{-6}F$secilse $R_1 = 10^7, R_2 = 3x10^6$ secilmesi gerektiggi aciktir. Devre semasi sekil(ref: xq9s23.a) de goruluyor.

f?igure[hbt] a) $Z_1 = R_1, \quad Z_2 = \frac{R_2}{sCR_2+1}$ olarak b) $Z_1 = \frac{R_1}{sC_1R_1+1} \quad Z_2 = \frac{R_2}{sC_2R_2+1}$ olarak
$H(s) = -\frac{s+6}{s+8}$ transfer fonksiyonunu gercekleyen devreyi tasarlayin.
**Cozum**:

$$Z_1 = \frac{R_1}{1+R_1C_1s} \qquad Z_2 = \frac{R_2}{1+R_2C_2s}$$

secilir. Bu durummda transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2(1+R_1C_1s)}{R_1(1+R_2C_2s)}$$

seklinde olacaktir. Dolayisiyla $R_1 = R_2 = 10^6,\ C_1 = 6x10{-}6,\ ,C_2 = 8x10{-}6$ seklindeki secimle istenen $H(s)$ elde edilir. Devre semasi sekil(ref: xq9s23.b) de goruluyor.
$H(s) = -k\frac{(s+1)(s+2)}{(s+5)(s+7)}$ transfer fonksiyonunu gercekleyen devreyi tasarlayin. ($k$ sabit)

**Cozum**: $Z_1$ ve $Z_2$ sekil(ref: xq9s25)deki gibi secilsin. $Z_1$ ve $Z_2$ degerlerini hesaplayalim.

$$Z_1 = \left(R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{\frac{1}{sC_1}}}\right) = R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + sC_1} = R_a + \frac{R_b}{1+sR_bC_1} = \frac{R_aR_bC_1s + R_a + R_b}{1+sR_bC_1}$$

$$= \frac{(R_a + R_b)\left(\frac{R_aR_b}{R_a+R_b}C_1 s + 1\right)}{1 + R_bC_1 s} = (R_a + R_b)\frac{p_1C_1\left(s + \frac{1}{p_1C_1}\right)}{R_bC_1\left(s + \frac{1}{R_bC_1}\right)} \qquad P_1 = \frac{R_aR_b}{(R_a + R_b}$$

f?igure[hbt]

```
                 |------C1------|
--------Ra-----|                |-------- =Z1,     Z2=(Rc,Rd,C2)
                 |______Rb______|
```

$H(s) = K\frac{(s+a)(s+b)}{(s+c)(s+d)}$'nin gerceklememsi

$Z_2$ benzer sekilde hesaplanirsa

$$Z_2 = (R_c + R_d)\frac{p_2C_2\left(s + \frac{1}{p_2C_2}\right)}{R_dC_1\left(s + \frac{1}{R_dC_2}\right)} \qquad P_2 = \frac{R_cR_d}{(R_c + R_d}$$

bulunur. Bu durumda $H(s)$ transfer fonksiyonu

$$\frac{V_0}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -K\frac{\left(s + \frac{1}{p_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{p_2C_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_bC_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_dC_2}\right)} \qquad K = \frac{(R_a + R_b)\frac{p_1}{R_b}}{(R_c + R_d)\frac{p_2}{R_d}}$$

seklinde olacaktir. Dolayisiyla

$$\frac{1}{p_1C_1} = 1 \quad \frac{1}{p_2C_2} = 2 \quad \frac{1}{R_bC_1} = 5 \quad \frac{1}{R_dC_2} = 7$$

olacak sekilde $R_a$, $R_b$ ,$R_c$ ,$R_d$ ,$C_1$ ,$C_2$ parametreleri secilerek istenen $H(s)$ elde edilir.

Transfer fonksiyonunda pay ve paydadaki kokler (transfer fonksiyonunun kutuplari ve sifirlari) reel ise yukaridaki gibi gercekleme sistemi uygulanir. Fakat sifir ve kutuplarin kompleks olmasi durumunda degisik yontemler uygulanir. Bunlardan bazilari burada incelenecektir.

# Cok Kollu Geribeslemeli Devre

Sekildeki devrede devre denklemleri:

$$-V_1 + Z_1I_1 + Z_2I_2 = 0 \qquad \text{xq9f41}$$

$$-Z_2I_2 + Z_4I_4 = 0 \qquad \text{xq9f42}$$

$$-V_0 + Z_5I_5 = 0 \qquad \text{xq9f43}$$

$$I_4 = -I_5 \qquad \text{xq9f44}$$

$$-V_0 + Z_3I_3 - Z_1I_1 + V_1 = 0 \qquad \text{xq9f45}$$

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \qquad \text{xq9f46}$$

Yukaridaki esitlikler duzenlenerek $\frac{V_0}{V_1}$ bulunabilir.

$$\text{(ref: xq9f43)}den \qquad I_5 = \frac{V_0}{Z_5} \tag{xq9f47}$$

$$\text{(ref: xq9f44}ve\text{(ref: xq9f47)}den \quad I_4 = -\frac{V_0}{Z_5} \tag{xq9f48}$$

$$\text{(ref: xq9f42}ve\text{(ref: xq9f48}den \quad I_2 = -\frac{Z_4}{Z_2 Z_5} V_0 \tag{xq9f49}$$

$$\text{(ref: xq9f41}ve\text{(ref: xq9f48}den \quad I_1 = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{Z_4}{Z_1 Z_5} V_0 \tag{xq9f410}$$

(ref: xq9f46),(ref: xq9f48),(ref: xq9f49),(ref: xq9f410) dan

$$I_3 = -\frac{Z_4}{Z_2 Z_5} V_0 - \frac{V_0}{Z_5} - \frac{V_1}{Z_1} - \frac{Z_4}{Z_1 Z_5} V_0 \tag{xq9f411}$$

(ref: xq9f45),(ref: xq9f410),(ref: xq9f411) dan

$$-V_0 + Z_3\left[-\frac{Z_4}{Z_2 Z_5} V_0 - \frac{V_0}{Z_5} - \frac{V_1}{Z_1} - \frac{Z_4}{Z_1 Z_5} V_0\right] - Z_1\left[\frac{V_1}{Z_1} + \frac{Z_4}{Z_1 Z_5} V_0\right] + V_1 = 0 \tag{xq9f412}$$

Esitlik duzenlenirse

$$V_1\left[-\frac{Z_3}{Z_1}\right] + V_0\left[-1 - \frac{Z_3 Z_4}{Z_2 Z_5} - \frac{Z_3}{Z_5} - \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_5} - \frac{Z_4}{Z_5}\right] = 0 \tag{xq9f413}$$

elde edilir. $Z$ emmpedanslari yerine admitanslari kullanarak

$$Z_1 = \frac{1}{Y_1} \quad Z_2 = \frac{1}{Y_2} \quad Z_3 = \frac{1}{Y_3} \quad Z_4 = \frac{1}{Y_4} \quad Z_5 = \frac{1}{Y_5}$$

bulunur. Gerekli duzenlemeler yapilirsa (ref: xq9f413) esitligi

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{V_1} &= \frac{-Y_1 Y_4}{Y_3 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_4 Y_5 + Y_1 Y_5 + Y_3 Y_5} \\ &= \frac{-Y_1 Y_4}{Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \end{aligned} \tag{xq9f415}$$

haline gelir.

## Butterworth AGF gerceklemesi

Simdi ikinci derece Butterworth AGF filtresi olan $H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}$ transfer fonksiyonunu cok katmanli geribeslemeli devre ile gerceklemeye calisalim.

$$H(s) = \frac{-Y_1 Y_4}{Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1} \tag{xq9f51}$$

$Z$ elemanlari ya direnc($Z = R$ yada kapasite$Z = \frac{1}{sC}$ olabilir. Dolayisiyla $Y$ elemanlari da $\frac{1}{R}$ veya $sC$ seklinde olabilir. $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$ elemanlarindan hangisinin kapasite hangisinin direnc olacagi asagidaki gibi bir mantik yurutme sonucu tesbit edilir.

Acikca goruldugu gibi $Y_1 Y_4 = 1$ olmak zorundadir ve $Y_1 Y_4$ carpiminin icinde $s$ terimi yoktur. Dolayisiyla hem $Y_1$ hem $Y_4$ direnc olmak zorundadir.

$Y_4$ sabit oldugundan $Y_3 Y_4$ carpimi ya sabittit veya $s$ li bir terimdir. $s^2$ li olamaz.

Paydada mutlaka bir $s^2$ li terim gerektiginden, $Y_5$ icin bunu saglayan tek sart $Y_5$ in $s$ li bir terim ihtiva etmsidir.

$Y_5$ $s$ li bir terim oldugu icin ve Paydada mutlaka sabit terim gerektiginden bu sabit terim ancak $Y_3 Y_4$ carpimi olabilir. O halde $Y_3$ sabittir.

$Y_1, Y_4, Y_3$ sabit terimler olduguna gore $Y_2$ $s$ li olmak zorunda cunku paydada $s^2$ li terim ancak $Y_2 Y_5$ carpimi olabilir.

Su halde $Y_2, Y_5$ $s$ li terimlerdir, yani kapasitedirler. $Y_1, Y_3, Y_4$ sabit terimdirler, yani direncdirler. Sonuc olarak admitans ifadeleri

$$Y_2 = sC_2 \qquad \#$$

$$Y_5 = sC_5 \qquad \#$$

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} \qquad \#$$

$$Y_3 = \frac{1}{R_3} \qquad \#$$

$$Y_4 = \frac{1}{R_4} \qquad \#$$

seklinde olmalidir.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_4}}{sC_5\left(\frac{1}{R_1} + sC_2 + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) + \frac{1}{R_3}\frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{1}{R_1 R_4 C_5 C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\frac{1}{C_2} s + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}} \qquad \text{xq9f53}$$

(ref: xq9f51) ve (ref: xq9f53) deki $H(s)$ ifadeleri karsilastirilirsa

$$\frac{\frac{1}{R_1 R_4 C_5 C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\frac{1}{C_2} s + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}$$

elde edilir. Buradan $s$'in benzer kuvvetlerinin katsayilarinin esitlenmesiyle

$$\frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5} = 1 \qquad \#$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\frac{1}{C_2} = \sqrt{2} \qquad \#$$

Burada saglanmasi gereken iki sart vardir eleman sayisi ise 5 tanedir. Eleman sayisi fazla oldugundan burada 3 eleman keyfi olarak secilebilir. Direnclerdeki toleranslardan olusacak zararlari onlemek icin uc direnc ayni degerde ($R_1 = R_3 = R_4 = R$) secilir. Bu durumda $C_2 = \frac{3}{\sqrt{2}R}$ $C_5 = \frac{\sqrt{2}R}{3}$ olarak hesaplanir.

## Butterworth YGF gerceklemesi

Simdi ikinci derece Butterworth YGF filtresi olan

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1} \qquad \text{xq9f61}$$

transfer fonksiyonunu cok katmanli geribeslemeli devre ile gerceklemeye calisalim.

$$H(s) = \frac{-Y_1 Y_4}{Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1} \qquad \#$$

pay'da $s^2$ li terim olmasi icin $Y_1Y_4$ $s^2$ li terim olmali. Yani hem $Y_1$ hem de $Y_4$ $s$'li terim bulundurmali.

$$Y_1 = sC_1 \quad \#$$

$$Y_4 = sC_4 \quad \#$$

$Y_4$ $s$ li, terim bulunduruyor. O halde $Y_5$ sabit olmak zorundadir. Aksi halde paydadaki terimlerin hepsi $s$ veya $s^2$ li olur, sabit terim kalmaz.

$$Y_5 = \frac{1}{R_5} \quad \#$$

$Y_5$ de $s$ yok, o halde paydada $s^2$ olmasi icin $Y_3Y_4$ carpimi $s^2$ olmali.

$$Y_3 = sC_3 \quad \#$$

Paydadaki sabit terimi olusturmak icin tek secenek $Y_2$ nin $s$ li terim bulundurmamasi yani sabit olmasidir.

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} \quad \#$$

Dolayisiyle transfer fonsiyonu asagidaki sekilde olacaktir.

$$H(s) = \frac{sC_1sC_4}{\frac{1}{R_5}\left(sC_1 + \frac{1}{R_2} + sC_3 + sC_4\right) + sC_3sC_4} = \frac{\frac{C_1}{C_3}s^2}{s^2 + \frac{C_1+C_3+C_4}{R_5C_3C_4}s + \frac{1}{R_2R_5C_3C_4}} \quad \text{xq9f63}$$

(ref: xq9f61) ve (ref: xq9f63)deki $H(s)$ ifadelerindeki $s$'nin benzer terimleri esitlenirse

$$\frac{C_1 + C_3 + C_4}{R_5C_3C_4} = \sqrt{2} \quad \text{xq9f71}$$

$$\frac{1}{R_2R_5C_3C_4} = 1 \quad \text{xq9f72}$$

Burada da 3 elemanin degeri keyfi secilebilir. Genelde $C_1 = C_3 = C_4 = C$ seklinde secilerek direnc degerleri (ref: xq9f71) ve (ref: xq9f72)'yi saglayacak sekilde secilir.

## Butterworth BGF gerceklemesi

AGF, YGF tiplerinde oldugu gibi

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + \sqrt{2}\,s + 1} \quad \text{xq9f77}$$

seklindeki BGF tipi bir filtre transfer fonksiyonu cok katmanli geribeslemeli devre ile gerceklestirilebilir. AGF ve YGF filtrelerindeki tasarima benzer bir mantik burada da izlenerek eleman degerleri bulunur.

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} \quad \#$$

$$Y_3 = sC_3 \quad \#$$

$$Y_4 = sC_4 \quad \#$$

$$Y_5 = \frac{1}{R_5} \quad \#$$

Seklindeki bir secim (ref: xq9f77) ile verilen devreyi gercekler. Burada $Y_2$ herhangibir eleman olabilir, hatta $Y_2 = 0$ olabilir yani devreden cikartilabilir.

# Yuksek dereceden Filtrelerin Gerceklemsi

Yukaridaki yontenler kullanilarak

$$H(s) = \frac{K}{s+a} \qquad H(s) = \frac{K}{s^2+as+b} \qquad \#$$

$$H(s) = \frac{Ks}{s^2+as+b} \quad H(s) = \frac{Ks^2}{s^2+as+b}$$

seklindeki transfer fonksiyoblarinin nasil gerceklestirilecegi gosterilmisti. Daha yuksek dereceden filtreler bu filtrelerdeki $Z$ empedanslarini degistirerek veya geribesleme kolunun sayisini artirarak elde edilebilir. Ancak Bu islemin asagidaki mahzurlari vardir.

1) kararsizlik problemi ortaya cikar.

2) OPAM kolayca doymaya gider.

3)

4)

Yukaridaki sebeplerden dolayi cok kollu geribesleme yontemi ile filtre tasariminda transfer fonksiyonlari sekil(ref: xq9s41) de gosterildigi gibi ikinci dereceden bloklar halinde yapilir ve bloklar kaskat olarak birlestirilir.

f?igure[hbt] kaskat bagli bloklar

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1} = \frac{1}{(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)} \qquad \#$$

transfer fonksiyonu ile verilen4. derece Butterwoth filtresini geerceklestirin. Verilen transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.765s + 1} \frac{1}{s^2 + 1.848s + 1} \qquad \#$$

seklinde dusunulur ve

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0.765s + 1} \qquad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1.848s + 1} \qquad \text{xq9f81}$$

transfer fonksiyonlari ayri ayri gerceklestirilir. Bolum(ref: xq9b21)de gosterildigi uzere $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ transfer fonksiyonlari gerceklestirilip direnc ve kondansator degerleri hesaplanirsa

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1 \qquad \#$$

$$C_1 = 1.62, \quad C_2 = 0.615, \quad C_3 = 3.9197, \quad C_4 = 0.2551 \qquad \#$$

seklindeki bir secim (ref: xq9f81) ile verilen $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ bagintilarini saglar.

Dolayisiyla aranan devre $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ devrelerinin sekil(ref: xq9s47) deki gibi seri baglanmasi ile elde edilen devredir.

f?igure[hbt]   seri bagli butt devresinin semasi

**Not**: Gercekte $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ transfer fonksiyonuna sahip iki devre kaskat olarak baglanirsa yeni sistemin transfer fonksiyonu

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)\frac{Z_{i2}(s)}{Z_{i2}(s) + Z_{o1}(s)} \qquad \#$$

seklinde olur.

f?igure[hbt]   iki blok seri bagli $Z_{i2}$  $Z_{o1}$ gosterilmis. opam seri bagli

Burada $Z_{i2}$ sekil(ref: xq9s49) de gosterildigi gibi ikinci blogun giris empedandi, $Z_{o1}$ birinci blogun cikis empedansidir. Eger

$$Z_{i2} >> Z_{o1} \qquad \#$$

ise

$$\frac{Z_{o1}}{Z_{i2}} \simeq 0 \qquad \#$$

bunun sonucu olarak da

$$\frac{Z_{i2}(s)}{Z_{i2}(s) + Z_{o1}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{o1}}{Z_{i2}}} \simeq 1 \qquad \#$$

olacak ve

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \qquad \#$$

sarti saglanacaktir. OPAM'li devrelerde genelde bloklarin giris empedanslari $Z_{i1}, Z_{i2}\ldots$ yuksek cikis empedanslari $Z_{o1}, Z_{o2}, \ldots.$ dusuktur. Zaten OPAM'li devrenin kullanilmasindaki maksatlardan biri de budur. Ancak giris empedanslari ve cikis empedanslarinin degerleri yeterli limitler arasinda degilse araya sekil(ref: xq9s51) de gosterildigi gibi *Tampon (buffer)*  devreler konur. Tampon devrenin giris direnci cok yuksek pratik olarak sonsuz cikis direnci cok dusuk pratik olarak sifirdir. Bu yuzden iki blogun birbiri ile empedans uyumsuzlugundan olan etkilesimini engeller.

f?igure[hbt]   OPAM li BUffer devresi .

# Durum degiskenleri yontemiyle Filtre dizayni

$H(s)$ Filtre transfer fonksiyonu **durum denklemleri**  formunda yazilip gercekleme yapilabilir. Bir transfer fonksiyonunun durum denlemleri cesitli formlarda olabilir. Bir transfer fonksiyonunun durum denklemi formu birden faladir, hatta teorik olarak sonsuzdur. Durum denklemleri formu otomatik kontrol ile ilgili kitaplarda [ref: durumdenklemlerireferans]. genisce islenmistir. Burada bu koonu kisaca anlatilacaktir.

Durum denklemleri formunda blok diyagramlarinin onemli bir yeri vardir. Blok diyagramlari sayisal filtrelerin gerceklemesinde de sik sik karsimiza cikar. Bu yizden blok diyagramlari konusu oncelikle islenecektir.

## Blok diyagramlari

Blok diyagramlari isaretin akisini gostermek ve bir sistemin anlasilmasi icin kullanilan bir alettir. Blok diyagraminda kullanilan elemanlari kisaca taniyalim.

I)kuvvetlendirme sekil(ref: xq9s70.a) de gorulen kuvvetlendirme isleminde $x(t)$ isareti $K$ sabiti ile carpilip cikisa verilmektedir.

$$y(t) = Kx(t) \quad \#$$

f?igure[hbt]

```
x(t)---->---|K|----y(t)        x(t)---->---|s^{-1}|----y(t)
```

a)kuvvetlendirme b)integral alma

II) integral alma sekil(ref: xq9s70.b) de gorulen integral alma isleminde cikis girisin integralidir.

$$y(s) = s^{-1}x(s) \qquad veya \qquad y(t) = \int x(t)dt \quad \#$$

seklinde gosterilir.

III)Toplama devresi

f?igure[hbt]

```
          +\/ x_1                       -\/ x_1
-x2---->O--------y(t)        -x2---->O--------y(t)
         + /\-                         - /\-
           x3                             x3
           a)                              b)
```

a)toplama elemanlari

Toplama devresinde cikis giren isaretlerin toplamidir. Giren degerlerin sareti ok ucunda belirtilir. sekil(ref: xq9s72.a)de gorulen devrede cikis

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \quad \#$$

seklinde iken Sekil(ref: xq9s72.b)de ise

$$y(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \quad \#$$

seklinde olacaktir.

IV)Olcme alma

f?igure[hbt]

```
          /\ y_1
-a------|--------y3
          \/
          y2
```

a)Olcme devresi

sekil(ref: xq9s74 de gorulen devrede bir noktadan degisik olcme yapilmis bir kac yerde kullanilmistir.

$$y_1(t) = a, \quad y_2(t) = a, \quad y_3(t) = a \tag{\#}$$

Bir yerden bir veya birkac olcme almanin o yerin karakteristigine bir etksi olmaz.

Sekil(ref: xq9s80)de gosterilen devrede $y_1$ ve $y_2$nin $x_1$, $x_2$, $x_3$'e olan baglantisini bulun.

f?igure[hbt]

```
          +\/ x_1                |---|-M|-------->y1
 -x2-|k|->O----t----|s^{-1}|-q-|-------|s^{-1}|-->y2
         - /\-
           x3
```

Degisik elemanlarin birlestirilmesiyle olusmus bir blok diyagrami

**Cozum**: Sekilden goruldugu gibi

$$t = x_1 - x_2 - x_3 \tag{xq9g01}$$

$$q = s^{-1}t \tag{xq9g02}$$

$$y_1 = -Mq \tag{xq9g03}$$

$$y_2 = s^{-1}q \tag{xq9g04}$$

(ref: xq9g01), (ref: xq9g02) ve (ref: xq9g03)un birlestirilmesiye

$$\begin{aligned} y_1 &= -Ms^{-1}t = -Ms^{-1}(x_1 - x_2 - x_3) \\ &= -Ms^{-1}x_1 + Ms^{-1}x_2 + Ms^{-1}x_3 \end{aligned} \tag{\#}$$

elde edilir. Benzer sekilde (ref: xq9g01), (ref: xq9g02) ve (ref: xq9g04)un birlestirilmesiye

$$y_2 = s^{-1}s^{-1}t = s^{-2}(x_1 - x_2 - x_3) = s^{-2}x_1 - s^{-2}x_2 - s^{-2}x_3 \tag{\#}$$

elde edilir.

Sekil(ref: xq9s81)de gosterilen geribesleme devresinde $y$ ve $x$ arasindaki baginntiyi belirleyin.

f?igure[hbt]

```
 +  q
  x-->O--->|s^{-1}|---|-->y
     /\- p            |
      |----|K|--------|
```

a)toplama b)olcme yapma

Sekilden goruldugu gibi

$$q = x - p \tag{\#}$$

$$p = Ky \quad \#$$

$$y = s^{-1}q \quad \#$$

Uc esitligin birlestirilmesiyle

$$y = s^{-1}q = s^{-1}(x-p) = s^{-1}(x-Ky) = s^{-1}x - s^{-1}Ky \quad \#$$

elde dilir. Esitlik $y$'ye gore duzenlenirse

$$y + Ks^{-1}y = s^{-1}x \quad \rightarrow \quad y = \frac{s^{-1}}{1+Ks^{-1}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{s+K} \quad \#$$

## Transfer fonksiyonlarinin Blok diyagramlari

Bir transfer fonksiyonnunun cok degisik formda durum denklemmleri (ve blok diyagrami) gosterimi vardir. Burada standart programlama olarak bilinen yontem ikinci derece bir sistem transfer fonksiyonu uzerinde anlatilacaktir.

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0} \quad \text{xq9f60}$$

olarak verilen bir sistemi durum denklemleri formunda gercekleyelim. $H(s)$ polinomu

$$H(s) = \frac{a_2s + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}{1 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}} \quad \#$$

seklinde yazilip

$$\frac{V_0(s)}{X(s)} = \frac{a_2s + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}{1} \quad \text{xq9f62}$$

$$\frac{X(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}} \quad \text{xq9f64}$$

tanimlari yapilirsa (ref: xq9f60) esitligi

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{V_0(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{V_1(s)} \quad \#$$

seklinde yazilabilir. (ref: xq9f64) esitligi

$$V_1(s) = X(s) + b_1s^{-1}X(s) + b_0s^{-2}X(s) \quad \text{xq9f66}$$

veya

$$X(s) = V_1(s) - b_1s^{-1}X(s) - b_0s^{-2}X(s) \quad \text{xq9f68}$$

seklinde yazilabilir. $X(s)$ ve $V_1(s)$ arasinda bir blok diyagrami yapabiliriz. Once bir noktaya $X(s)$ isareti koyup $s^{-1}X(s)$ ve $s^{-2}X(s)$ noktalarini elde edelim.

(ref: xq9f68) esitligini elde edebilmek icin $X(s)$ noktasinin basina bir toplama isareti koymamiz lazimdir.

$s^{-1}X(s)$ ve $s^{-2}X(s)$ bos uclarini yerlerine baglayarak (ref: xq9f68) esitliginin tanimladigi diyagram sekil(ref: xq9s89) deki gibi tamamlanir.

f?igure[hbt]
$X(s) = V_1(s) - b_1 s^{-1} X(s) - b_0 s^{-2} X(s)$ in blok diyagrami $b_1, b_0$ eklenecek
(ref: xq9f62) esitligi

$$V_0(s) = a_2 X(s) + a_1 s^{-1} X(s) + a_0 s^{-2} X(s) \qquad \#$$

seklinde yazilirsa benzer yontemle sekil(ref: xq9s91) deki gibi blok diyagrami cikartilabilir.

f?igure[hbt]
$V_0(s) = a_2 X(s) + a_1 s^{-1} X(s) + a_0 s^{-2} X(s)$ in blok diyagrami
(ref: xq9f60) esitligi ile verilen transfer fonksiyonunu gerceklemek icin
Sekil(ref: xq9s89) ve (ref: xq9s91) deki blok diyagramlari Sekil(ref: xq9s93) de oldugu gibi birlestirilir.

f?igure[hbt] kflj;lkfjlkd;sajf $H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$ blok diyagrami
Burada ikinci dereceden bir transfer fonksiyonuna iliskin gercekleme gozonune alindi. Acikca gorulecegi uzere durum denklemleri ile yukaridaki gibi gerceklemede transfer fonksiyonu kacinci dereceden olursa olsun gercekleme yapilabilir. Ancak devredeki OPAMlarin calisma sartlarinin diger elemanlarin calismalarinda etkilesimi problemi vardir. Bunu onlemek icin pratikte ikinci dereceden yuksek transfer fonksiyonlarin gerceklemesinde tipki cok katmanli gerceklemede oldugu gibi transfer fonksiyonu ikinci dereceden terimlere ayrilir. Elde edilen ikinci derece transfer fonksiyonlari ayri ayri gerceklenir ve kaskat olarak baglanarak sistem transfer fonksiyonu $H(s)$ elde edilir.

## Blok diyagraminin OPAM devreleri ile gerceklemesi

Bolum(ref: xq9b12) de verilen devreler kullanilarak sekil(ref: xq9s93)de verilen $H(s)$ transfeer fonksiyonuna iliskin blok diyagrammi gerceklenebilir. Sekil(ref: xq9s95)de sekil(ref: xq9s93)deki blok diyagraminin OPAM kullanarak gerceklemesi goruluyor.

f?igure[hbt] $H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$ nin OPAM’larla gerceklemesi.
Sekilde OPAM’larin......toprak uclari gosterilmmmm ... devre ile ilgili aciklamalar yapilacak .....

Durum denklemleri formu kullanarak gerceklemede cok katmanli geribeslemeye gore cok daha fazla eleman kullanilir. Durum denklemleri ile gerceklemenin avantaji sistem transfer fonksiyonundaki $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$ katsayilarinin hassas olarak ayarlanabilmesidir.

# IIR FIltreler ve Analog Sistemlerin Sayisal Esdegeri

Sayisal bir filtrenin $z$ domenindeki transfer fonksiyonu (ref: zdomentransfonk) esitligi ile

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots b_1 z + b_0}$$

-8mm (ref: zdomentransfonk) ve frekans spektrumu (ref: xqfg615) esitligi ile

$$\begin{aligned} \overline{H(w)} &= |H(e^{jwT}| = |\tfrac{y(e^{jwT})}{u(e^{jwT})} \\ &= \frac{a_m e^{jwmT} + a_{m-1} e^{jw(m-1)T} + a_{m-2} e^{jw(m-2)T} + \ldots a_1 e^{jwT} + a_0}{a_n e^{jwnT} + a_{n-1} e^{jw(n-1)T} + a_{n-2} e^{jw(n-2)T} + \ldots a_1 e^{jwT} + a_0} \end{aligned} \qquad \text{xq10f613}$$

verilmisti. IIR filtre tasariminda hedeflenen (ref: zdomentransfonk) veya (ref: xq10f613) formunda verilen transfer fonksiyonundaki $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots b_0, b_1, b_2$ katsayilarinin hesabidir. Burada istenenler

1)$H(z)$nin kararli olmasi,

2)$\dot{H}(w)$nin istenen genlik ve faz karakteristigini saglamasi,

3)Transfer fonksiyonunun derecesinin mumkun oldugu kadar dusuk ($n$'nin kucuk olmasi).

1.sart filtrenin kullanilabilmesi icin gerek bir sarttir. Kararsiz bir filtrenin kulllanimi sozkonusu degildir. 3. sart filtreye iliskin bilgisayar programinin calisma esnasinda bilgisayar hafizasinda isgal ettigi yer ve filtre cikkisinin hesaplanmamsi icin gereken matematik islem sayisi ile ilgilidir. $n$ ne kadar buyuk olursa filtre programi bilgisayarda cok yer isgal edecek ve verilen bir girise karsilik filtre cikisinin hesabi uzun zaman alacaktir. Buradan hemen gorulecegi uzere 2. ve 3. sartlar birbirine zittir. Genlik ve faz karakteristiginin ideal filtre karakterisitigine benzemesi icin $n$'nin buyultulmesi lazimdir.

IIR filtre tasarimi literaturde degisik yontemlerle yapilmaktadir. Yaygin olarak kullanilan yontemlerden birisi analog filtrenin sayisal esdegerini hesaplamaktir. Dogrudan $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots b_0, b_1, b_2$ katsayilarinin hesabi da uzerinde oldukca calisilan bir konudur. Bunlari kisaca inceleyelim.

## En Kucuk Kareler Yontemiyle IIR Filtre Tasarimi

IIR filtre tasariminin ozu olan $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots b_0, b_1, b_2$ katsayilarinin hesabi en kucuk kareler yontemiyle yapilabilir.

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty |H(e^{jwT} - H_d(jw)|^2 dw \qquad \text{xq10f17}$$

seklinde bir hata gostergesi tanimlayalim. Burada $H_d(w)$ ideal filtreye iliskin transfer fonksiyonu, $H(e^{jwT}$ dizayn edilecek filtrenin transfer fonksiyonudur. Ideal filtre transfer fonksiyonu $H_d(w)$ kompleks formdan ziyade genlik ve faz spektrumu seklinde verilir.

Dolayisiyla (ref: xq10f17) esitligini $H_d(w)$'nin genligi ve fazi cinsinden yazmak daha kullanislidir.

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty}\Big(||H(e^{jwT}|-|H_d(jw)||^2 + \big[\angle H(e^{jw_iT} - \angle H_d(w_i)\big]^2\Big)dw \qquad \text{xq10g17}$$

$\mathcal{E}$'yi minimum yapan $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots b_0, b_1, b_2$ katsayilari nedir. (ref: xq10g17)integralini analitik olarak hesaplamak cok zor hatta imkansizdir. $0 - \infty$ arasinda integral almak yerine onemli frekanslardaki degerler alinarak integral yerine toplam kullanilir.

$$\mathcal{E} = \sum_{i=0}^{k}[H(e^{jw_iT} - H_d(jw_i)]^2 + \big[\angle H(e^{jw_iT} - \angle H_d(w_i)\big]^2 \qquad \text{xq10g19}$$

Kouyu daha acik olarak aciklayabilmek icin basit bir ornek ele alalim.

**soru**:$H_d(0.5T) = 10,\ \ H_d(1.5T) = 10,\ \ H_d(2T) = -10$ olan diger butun $w$'lar icin $H_d(wT) = 10$ olan

$$H(z) = \frac{z+a}{z+b} \qquad \text{xq10f11}$$

seklindeki $H(z)$ transfer fonksiyonu nedir. Ornekleme periyodu $T = 1$saniyedir.

**Cozum**: (ref: xq10f11) ile verilen $H(z)$ye iliskin genlik fonksiyonunu bulalim.

$$H(e^{jwT}) = \frac{e^{jwT}+a}{e^{jwT}+a} = \frac{\cos(wT)+j\sin(wT)+a}{\cos(wT)+j\sin(wT)+b}$$

$$|H(e^{jwT})| = \frac{\sqrt{(\cos(wT)+a)^2+(\sin(wT))^2}}{\sqrt{(\cos(wT)+b)^2+(\sin(wT))^2}} = \sqrt{\frac{a^2+2a\cos(wT)+\cos^2(wT)+\sin^2(wT)}{b^2+2b\cos(wT)+\cos^2(wT)+\sin^2(wT)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+2a\cos(wT)+1}{b^2+2b\cos(wT)+1}}$$

$H(z)$ye iliskin faz fonksiyonu

$$\theta(w) = argtg\frac{\sin(wT)}{a+\cos(wt)} - argtg\frac{\sin(wT)}{b+\cos(wt)} \qquad \#$$

seklinde olacaktir.

$$|H_d(0.5)| = 10,\ \ |H_d(1.5)| = 20,\ \ |H_d(2)| = 10,$$

$$\angle H_d(0.5) = 0,\ \ \angle H_d(1.5) = 0,\ \ \angle H_d(2) = \pi$$

oldugu gozonune alinarak (ref: xq10g19) esitligini verilen problem icin yazalim.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \sum_{i=0}^{3} |H(e^{jw_iT} - H_d(jw_i)|^2 \\
&= \left[ \sqrt{\frac{a^2+2a\cos(0.5T)+1}{b^2+2b\cos(0.5T)+1}} - 10 \right]^2 \\
&\quad + \left[ \sqrt{\frac{a^2+2a\cos(1.5T)+1}{b^2+2b\cos(1.5T)+1}} - 20 \right]^2 \\
&\quad + \left[ \sqrt{\frac{a^2+2a\cos(2T)+1}{b^2+2b\cos(2T)+1}} - 10 \right]^2 \\
&\quad + \left[ 0 - \left( argtg\frac{\sin(0.5T)}{a+\cos(0.5T)} - argtg\frac{\sin(0.5T)}{b+\cos(0.5T)} \right) \right]^2 \\
&\quad + \left[ 0 - \left( argtg\frac{\sin(1.5T)}{a+\cos(1.5T)} - argtg\frac{\sin(1.5T)}{b+\cos(1.5T)} \right) \right]^2 \\
&\quad + \left[ \pi - \left( argtg\frac{\sin(2T)}{a+\cos(2T)} - argtg\frac{\sin(2T)}{b+\cos(2T)} \right) \right]^2
\end{aligned}
\qquad \text{xq10f31}
$$

$\mathcal{E}$'nin $\mathcal{E}$'nin $a$ ve $b$'ye gore turevlerinin sifir olmasi lazimdir.

$$\frac{d\mathcal{E}}{da} = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}}{db} = 0 \qquad \#$$

(ref: xq10f31) bagintisi ile verilen $\mathcal{E}$'nin $a$ ve $b$ ye gore turevleri alinip sifira esitlenirse iki bilinmeyenli iki denklem ortaya cikar. Ancak bu denklem ciftini analitik olarak cozmek imkansizdir. Denklem ciftinin numemri cozumu de bilinen numerik metodlarla kolay degildir. Basdaki varsayimimizda $H(z)$ transfer fonksiyonu cok basit birince dereceden bir fonksiyon varsayildi. Transfer fonksiyonu yuksek dereceden secilirse cozumun daha da karisik olacagi aciktir.

Problemin cozumunde optimizasyon teknikleri kullanilir. Optimizasyon konusu kaplayacagi hacim nedeniyle bu kitap kapsaminda ele alinmayacacktir. Konu ile ilgili genis aciklamalar (ref: optimumfiltretasarimi) de bulunabilir. (ref: neurallnetworkfiltre konusu da bahsetmeye deger.

# Analog Sistemlerin Sayisal Esdegeri

(ref: xq8b01) bolumde goruldugu gibi analog filtre dizayn icin teknikler cok gelistirilmistir. Bu teknikleri sayisal filtre dizayni icin kullanabilirmiyiz. Analog filtrenin sayisal esdegerini bulmak bu bolumde calisilacaktir. (ref: xq8b01) bolumde anlatildigi gibi analog filtrenin transfer fonksiyonu $H(s)$ elde edilmis olsun. $H(s)$ transfer fonksiyonu ile ayni genlik ve faz ozelliklerine sahip $H_D(z)$ ayrik zaman transfer fonksiyonu nedir. Onu bulmaya calisiyoruz. Bir kac noktanin hattirlatilmasi burada faydali olacaktir.

1) $H_D(z)$ transfer fonksiyonunun genlik ve faz spektrumu $T_s$ ornekleme periyodu olmak uzere $w_s = \frac{2\pi}{T_s}$ ornekleme frekansi ile periyodiktir. Bu nedenle ayrik filtrenin kullanilabilecegi maksimum frekans ornekleme frekansinin yarisi olan frekansdir. Ayrik filtrenin daha yuksek frekanslardaki degerlerinin pratikte bir faydasi yoktur. Yalniz frekans domeninde ortusme olmamasi icin dikkate alinmasi gerekir.

Analog sistem transfer fonksiyonu $H(s)$'nin sayisal sistem esdegeri tek degildir. Verilen bir kritere gore $H(s)$'nin sayisal esdegerinden soz edilir. Ornek olarak $H(s)$ ile sayisal esdegegri olarak dusunulen bir $H_D(z)$'nin impuls cevaplari ayni olsun. Bu durum $H(s)$ ile $H_D(z)$'nin frekans cevaplari da ayni olacagi anlamina gelmez. Impuls cevaplari birbirine cook yakin oldugu halde frekans cevaplari birbirine benzemeyen analogg ve ayrik sistemler coktur.

Benzer sekilde frekans spektrumlari birbirine benzeyen analog ve ayrik sistem ciftinin impuls cevaplarinin da birbirine benzeyecegi garantisi yoktur.

Bu nedenle analog sistemin ayrik esdegeri denildiginde belirli bir kriter dahilinde esdegelikten sozedilir. Mesela genlik spektrumunun birbirne benzemesi, impuls cevaplarinin birbirine benzemesi, sistemlere iliskin kutplarin ve sifirlarin esdeger olmasi gibi kriterler temel alinarak iki sistem esdegerdir denir. Bundan sonraki kisimda bu konular sirayla inclenecektir.

## impuls cevaplarinin ayni olmasi

Bu yontemde ayrik ve analog sistemlere impuls girisi uyggulandiginda ayrik sistem cikisinin ornekleme anlarindaki deger ile surekli sistem cikisiinin in bu anlardaki degegrlerinin esit olmasi istenir.

$H(s)$ surekli sistemin transfer fonksiyonu $H_D(z)$ ayrik sistemin transfer fonksiyonu $h(t)$ surekli sistemde birim impuls $h_D(kT)$ ayrik sistemde birim impuls
olmak uzere

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) \qquad \mathcal{Z}\{h_D(kT)\} = H_D(z)$$

bagintilarinin varligi bolum (ref: xq7b41) de gosterilmisti. Impuls cevaplarinin ayni olmasi yontemi ile ayrik model elde etmede hedef verilen bir $H(s)$ icin

$$h_D(kT) = Th(t) \qquad \text{xq10g21}$$

olacak sekilde bir $H_D(z)$ transfer fonksiyonu bulmaktir. (ref: xq10g21) esitlinin sag tarafindaki $T$ carpani ayrik sistemlerdeki birim impuls tanimindan gelmistir. Bazi literaturde $\mathcal{Z}[1] = \frac{1}{T}$ olarak alindigindan dolayi bahsi gecen $T$ carpani eklenmistir. $T$ burada sadece bir carpan olarak gelmekte ve $H(z)$ nin frekans spektrumunun sekline bir etkisi olmamaktadir.

f?igure[hbt] impuls cevabi h(t)nin ik ornekleme arasindaki degeri hizli degisiyor
$h(t)$ iki ornekleme ani arasinda sekil(ref: xq10s05) deki gibi hizli degisiyorsa ($h(t)$nin icinde yuksek frekansli bilesenler varsa) bu hizli degisim bilgileri kayip olacaktir. Iki ornekleme ani arasinda $h(t)$ hizli degismiyorsa ($h(t)$ nin icinde yuksek frekansli bilesenler yoksa analog ve ayrik sistemlerin frekans spektrumlari birbirine benzer.

$H(s)$ transfer fonksiyonu verilen bir sistemin $H_D(z)$ ayrik esdegerini impuls cevaplari aynmi olkacak sekilde hesaplamak demek $H(s)$ den $h(t)$ yi bulup, $h(t)$ yi ornekleyip

($h_D(kT)$ yi elde edip, $h_k T(kT)$ nin z donusumunu almakla elde edilir.

$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ sistemi ile impuls cevabi ayni olan $H_D(z)$ ayrik sistem transfer fonksiyonunu bulun.

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$h(t) = -e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

$$h_D(kT) = -e^{-2kT} + 2e^{-3kT}$$

$$\begin{aligned} H_D(z) &= -\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} + 2\frac{1}{1-e^{-3T}z^{-1}} \\ &= \frac{1+(e^{-3T}-2e^{-2T})z^{-1}}{1-(e^{-3T}+e^{-2T})z^{-1}+e^{-5T}z^{-2}} \end{aligned}$$

## Adim fonksiyonu cevaplarinin ayni olmasi

Bu yontemde analog ve ayrik sistemlerin birim basamak girisine karsi olan cevaplari ornekleme anlarinda ayni olacak sekilde $H_D(z)$ secilir. $\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$, $u(t)$ birim basamak fonksiyonunu. $\mathcal{Z}[u(kT)] = U(z)$, $u(kT)$ ayrik zamanda birim basamak fonksiyonu.

olmak uzere analog sistemin birim basammak cevabi

$$X(s) = H(s)U(s) = H(s)\frac{1}{s} \qquad \#$$

ve ayrik sistemin birim basamak cevabi

$$X_D(z) = H_D(z)U(z) = H_D(z)\frac{z}{z-1} \qquad \#$$

seklinde oldugunu bolum(ref: xq7b01)den biliyoruz. Iki sistem cikisinin ornekleme anlarindaki degerleri birbirine esit olmasi icin

$$\mathcal{Z}\left\{H(s)\frac{1}{s}\right\} = H_D(z)\frac{z}{z-1} \qquad \text{xq10f41}$$

bagintisi saglanmalidir. (ref: xq10f41) bagintisi

$$H_D(z) = \frac{z-1}{z}\ \mathcal{Z}\left\{H(s)\frac{1}{s}\right\} \qquad \text{xq10f43}$$

seklinde yazilabilir. (ref: xq10f43) bagintisi birim basamak cevaplari ayni olan analog ve ayrik sistem arasindaki bagintiyi verir.

$H(s) = \frac{1}{s+2}$ sistemi ile birim basamak cevabi ayni olan $H_D(z)$ ayrik sistem transfer fonksiyonunu bulun.

$$H_D(z) = \frac{z-1}{z}\ \mathcal{Z}\left\{H(s)\frac{1}{s}\right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$H_D(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right] = \left[1 - \frac{z-1}{z}\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right]$$

$$= \left[ \frac{z(1-e^{-T}z^{-1})-(z-1)}{z(1-e^{-T}z^{-1})} \right] = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

## kutuplarin ve sifirlarin esdeger olmasi

Bu yontemde $H(s)$ nin kutuplari ve sifirlari $z = e^{sT}$ bagintisi araciligiyla $H_D(z)$ ye cevrilir. Ornek olarak

$$H(s) = \frac{s+a}{s+b} \qquad \#$$

seklindeki analog sistem

$$H_D(z) = K\frac{z-e^{aT}}{z-e^{bT}} \qquad \#$$

seklindeki ayrik sistemme donusturulur. Burada $K$ analog ve ayrik sistemlerin belirli frekans bantlarindaki kazanclarini ayarlamak icin konulmus bir sabittir. Mesela yukaridaki sistem icin dusuk frekanslarda $w = 0$ civarinda analog ve ayrik filtreler ayni kazanca sahip olmasi istensin. yani $w = 0$ icin $H(jw) = H_D(e^{jwT})$ olmasi istenirse.

$$H(s)|_{w=0} = H_D(e^{jwT})|_{w=0} \quad \to H(s)|_{s=0} = H_D(z)|_{z=1} \qquad \#$$

$$\frac{0+a}{0+b} = K\frac{1-e^{aT}}{1-e^{bT}} \quad \to K = \frac{a}{b}\frac{1-e^{bT}}{1-e^{aT}} \qquad \#$$

olarak bulunur. Dolayisiyla

$$H_D(z) = \frac{a}{b}\frac{1-e^{bT}}{1-e^{aT}}\frac{z-e^{aT}}{z-e^{bT}} \qquad \#$$

seklinde olacaktir.

Eger analog ve ayrik sistemin $w = \infty$ civarindaki genlikleri ayni olmasi istenirse

$$|H(jw)|_{w=\infty} = |H_D(e^{jwT})|_{w=\infty} \qquad \#$$

olmasi gerekir. Ayrik sistemin $w = \infty$ icin degeri $H_D(z)$ transfer fonksiyonunda $z = -1$ konarak  bulunur. Ayni nedenlerden dolayi transfer fonksiyonunun sonsuzda sifir ve kutuplari varsa sonsuzda olan sifir veya kutup yerine $-1$ de sifir veya kutup varmis gibi dusunulur.

$$H(s)|_{s=\infty} = H_D(z)|_{z=-1} \qquad \text{xq10f51}$$

olmasi gerekir. Yukaridaki probleme (ref: xq10f51) bagintisi uygulanirsa.

$$1 = K\frac{1-e^{aT}}{1-e^{bT}} \quad \to K = \frac{1-e^{bT}}{1-e^{aT}} \qquad \#$$

elde edilir. Dolayisiyla analog ve ayrik sistemlerin sonsuzdaki kazanclari esit olmasi istendiginde ayrik sistem transfer fonksiyonu

$$H_D(z) = \frac{1-e^{bT}}{1-e^{aT}}\frac{z-e^{aT}}{z-e^{bT}} \qquad \#$$

seklinde olacaktir.

$H(s) = \frac{a}{s+b}$ alcak geciren filtrenin ayrik esdegerini kutup ve sifirlari $Z$ domenine tasiyarak hesaplayin.

**Cozum**:

$$H_D(z) = K\frac{a(z+1)}{z - e^{bT}}$$

Alcak ggeciren filtre oladugundan $w = 0$ civarinda $H(s)$ ve $H_D(z)$ nin esit olsun isteniyor.

$$H(s)|s = 0 = H_D(z)|_{z=1} \qquad K = \frac{a}{b}\frac{1-e^{bT}}{2a} = \frac{1-e^{bT}}{2b}$$

Dolayisiyla

$$H_D(z) = \frac{1-e^{bT}}{2b}\frac{z+1}{z-e^{bT}}$$

seklinde olacaktir.

$H(s) = \frac{1}{(s+a)^2+b^2} = \frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)}$ alcak geciren filtrenin ayrik esdegerini bulun.

**Cozum**: $H(s)$'nin iki sonlu kutbu ve iki tane de sonzuzda sifiri var. Sonsuzdaki iki sifir icin paya iki tane $z+1$ terimi gelecek.

$$H_D(z) = K\frac{(z+1)(z+1)}{z - e^{-(a+jb)T}z - e^{-(a-jb)T}} = K\frac{(z+1)^2}{z - e^{-(a+jb)T}z - e^{-(a-jb)T}}$$

$w = 0$ civarinda genlikler esit olmali.

$$H(s)|_{s=0} = H_D(z)|_{z=1} \qquad \to K = \frac{1 - 2e^{-aT}\cos(bT) + e^{-2aT}}{4(a^2+b^2)}$$

Dolayisiyla ayrik sistem transfer fonksiyonu

$$H_D(z) = \frac{1 - 2e^{-aT}\cos(bT) + e^{-2aT}}{4(a^2+b^2)}\frac{(z+1)^2}{z - e^{-(a+jb)T}z - e^{-(a-jb)T}}$$

seklinde olacaktir.

## Analog ve ayrik sistem cevaplarinin zamana gore integrallerinin esit olmasi

Bu yontemde analog ve ayrik sistem cevaplarinin zamana gore integre edilmeleri ile elde edilen alan esit olacak sekilde ayrik sistem tasarlanir. Bir ornek uzerinde konuyu aciklayalim. Girisi $r(t)$ cikisi $y(t)$ olan ve

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b}{s+a} \qquad \text{xq10f61}$$

transfer fonksiyonu ile verilen analog sistemi ele alalim. (ref: xq10f61) esitliginde icler dislar carpimi yapip iki tarafin ters Laplass donusumu alinirsa, sisteme iliskin diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dr} = -by + ar \qquad \text{xq10fy1}$$

seklinde ortaya cikar. (ref: xq10fy1) esitliginin her iki tarafini $t = 0$ dan $t = kT$ ye kadat integre edelim.

$$\int_0^{kT} \frac{dy(t)}{dt} = -b\int_0^{kT} y(t)dt + a\int_0^{kT} r(t)dt \qquad \text{xq10fy2}$$

Integral teoremine gore

$$\int_0^{kT} \frac{dy(t)}{dt} = y(kT) - y(0) \qquad \#$$

seklinde yazilabileceginden (ref: xq10fy2) esitligi

$$y(kT) - y(0) = -b\int_0^{kT} y(t)dt + a\int_0^{kT} r(t)dt \qquad \text{xq10fy3}$$

seklinde yazilabilir.

Benzer sekilde (ref: xq10fy1) esitliginin her iki tarafini $t = 0$ dan $t = kT - T$ ye kadar integre edilirse

$$y(kT - T) - y(0) = -b\int_0^{kT-T} y(t)dt + a\int_0^{kT-T} r(t)dt \qquad \text{xq10fy5}$$

(ref: xq10fy3) den (ref: xq10fy5) taraf tarafa cikartilirsa.

$$y(kT) - y(kT - T) = -b\int_{kT-T}^{kT} y(t)dt + a\int_{kT-T}^{kT} r(t)dt \qquad \text{xq10fy11}$$

elde edilir.

f?igure[hbt]   geriye ve ileriye integral hesabini gosteren...

Integral islemi netice itibariyle bir alan hesabidir. (ref: xq10fy11)'in sag taradindaki birinci integral $y(t)$'nin $t = KT - T$ ile $t = KT$ degerleri arasinda kalan alani verir. $r(t)$ icinde durumun ayni olacagi aciktir. Simdi $y(t)$'nin, $t = KT - T$ ve $t = KT$ noktalarindaki degerlerini kullanarak bu alani hesaplamak istiyoruz. Sekil(ref: xq10s21.a) ve (ref: xq10s21.b) 'de gosterildigi gibi en basit yontem bu alanin dikdortgen oldugunu varsaymak dikdorgenin bir kenarinin uzunlugu $T$ diger kenari ise $y(KT - T)$ veya $y(kT)$ oldugunu dusunmektir. Iste Eger dikdortgenin sekilde gosterilen uzun kenari $y(KT - T)$ olarak hesabab katilirsa buna **geriye dogru integral** alma veya geri adim integrali denir. Bunun gibi uzun kenar olarak $y(KT)$ alinirsa bu yonteme de **ileriye dogru integral** alma veya ileri adim integrali denir. Bahsedilen alani biraz daha hassas hesaplamak icin uzun kenar $\frac{y(KT)+y(KT-T)}{2}$ seklinde varsayilirsa bu yonteme de **ucgen kurali ile integral** denir. Simdi Bu yontemleri kullanarak ayrik model nasil olusturulur ona bakalim.

## Geriye dogru integral Yontemi

Geriye dogru integral yonteminde

$$\int_{kT-T}^{kT} y(t)dt = Ty(kT) \qquad \int_{kT-T}^{kT} r(t)dt = Tr(kT) \qquad \text{xq10fy13}$$

yaklasimlari yapilir. Bu yaklasim,in ne anlama geldigi sekil(ref: xq10s21.a) da gosterilmistir. Bu yaklasim altinda (ref: xq10fy11) esitligi

$$y(kT-T)-y(kT) = -bTy(kT)+aTr(KT) \quad \text{xq10fy16}$$

haline gelir. (ref: xq10fy16) esitliginin her iki tarafinin $Z$ donusumu alinirsa

$$z^{-1}Y(z)-Y(z) = -bTY(z)+aTR(z) \quad \text{xq10fy18}$$

veya

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{aT}{1-z^{-1}+bT} = \frac{a}{\frac{1+z^{-1}}{T}+b}) \quad \text{xq10fy20}$$

elde edilir. Goruldugu gibi (ref: xq10f61) ile verilen $\frac{Y(s)}{R(s)}$ ile $\frac{Y(z)}{R(z)}$ arasindaki baginti $s$ yerine $\frac{1-z^{-1}}{T}$ koymus gibidir. Dolayisiyla $H(s)$ transfer fonksiyonu verin bir sistemin bakkward difference?? yontemi ile ayrik hale getirilmesinde $s$ yerine $\frac{1-z^{-1}}{T}$ koymak yeterlidir.

$$H_d(z) = H(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad \text{xq10fy30}$$

Tablo(ref: xq10t11)de degisik ornekler verilmistir.

$H(s) = \frac{1}{s^2+1.6s+0.6}$ transfer fonksiyonunun geriye dogru integral yontemi ile ayrik esdegerini bulun.

**Cozum**: (ref: xq10fy30) bagintisi geregi

$$H_D(z) = \frac{1}{s^2+1.6s+0.6}\bigg|_{s=\frac{z-1}{zT}}$$

oldugundan

$$\begin{aligned} H_D(z) &= \frac{1}{\left(\frac{z-1}{zT}\right)^2+1.6\left(\frac{z-1}{zT}\right)+0.6} = \frac{(zT)^2}{(z-1)^2+1.6zT(z-1)+0.6(zT)^2} \\ &= \frac{T^2z^2}{(0.6T^2+1.6T+1)z^2-(1.6T-2)z+1} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

## Ileriye dogru integral alma yontemi

Bu yontem de tipki ggeriye dogru integral alma yontemine benzer bu yontemde

$$\int_{kT-T}^{kT} x(t)dt = Tx(kT-T) \qquad \int_{kT-T}^{kT} r(t)dt = Tr(kT-T) \quad \text{xq10f24}$$

yaklasimlari yapilir. Bu yaklasimlar altinda (ref: xq10fy11) esitligi

$$x(kT-T)-x(kT) = -bTx(kT-T)+aTr(KT-T) \quad \text{xq10f16}$$

haline gelir. esitligin her iki tarafinin $Z$ donusumu alinip $\frac{X(z)}{R(z)}$ orani hesaplanirsa

$$\frac{X(z)}{R(z)} = \frac{aTz^{-1}}{1-z^{-1}+bTz^{-1}} = \frac{a}{\frac{1+z^{-1}}{Tz^{-1}}+b} \quad \text{xq10f28}$$

(ref: xq10f61) ile (ref: xq10f28) esitlikleri karsilastirildiginda $s$ yerine $\frac{1+z^{-1}}{Tz^{-1}}$ gelmis oldugu kolayca gorulur. Dolayisiyla $H(s)$ transfer fonksiyonu verilen bir sistemin ileriye doggru integral alma yontemi ile ayrik hale getirilmesinde $s$ yerine $\frac{1+z^{-1}}{Tz^{-1}}$ koymak yeterlidir.

$$H_d(z) = H(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \qquad \text{xq10f30}$$

## Ucgen Kurali ile integral yontemi (Bilineer Donusum)

Bu yontemde de oncekilere benzzer sekilde

$$\int_{kT-T}^{kT} x(t)dt = \frac{1}{2}T[x(kT-T)+x(kT)] \qquad \int_{kT-T}^{kT} r(t)dt = \frac{1}{2}T[r(kT-T)+r(kT)] \qquad \text{xq10f32}$$

yaklasimlari yapilir. Bu yaklasimla sekil(ref: xq10s4.77) de gosterildigi gibi alan daha hassas olarak hesaplanmaya calisilmistir.

f?igure[hbt]   ucgen kkulari ile integral yontemi
Bu yaklasimlar altinda (ref: xq10fy11) esitligi

$$x(kT-T)-x(kT) = -bT\frac{1}{2}[x(kT-T)+x(kT)] \; + aT\frac{1}{2}[r(kT-T)+r(kT)] \qquad \text{xq10fy34}$$

haline gelir. esitligin her iki tarafinin $Z$ donusumu alinip $\frac{X(z)}{R(z)}$ orani hesaplanirsa

$$\frac{X(z)}{R(z)} = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})+\frac{bT}{2}(1+z^{-1}} = \frac{a}{\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}+b} \qquad \text{xq10fy78}$$

(ref: xq10f61) ile (ref: xq10fy78) esitlikleri karsilastirildiginda $s$ yerine $\frac{1+z^{-1}}{Tz^{-1}}$ gelmis oldugu kolayca gorulur. Dolayisiyla $H(s)$ transfer fonksiyonu verin bir sistemin ileriye dogru integral yontemi ile ayrik hale getirilmesinde $s$ yerine $\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ koymak yeterlidir.

$$H_d(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \qquad \text{xq10fg50}$$

# Kararlilik Analizi

Filtrenin kararli olmasi gerektigi aciktir. Kararsiz filtre kullanilamaz. Dolayisiyla elde edilen bir filtreninn karrali olup olmadigi dikkatle incelenmelidir. Analog filtrenin $H(s)$ transfer fonksiyonu kararli oldugu halde donusum sonucu elde edilen ayrik filtrenin $H(z)$ transfer fonksiyonu kararsiz olabilir. Haliyle boyle bir ayrik filtre kulanilamaz.

(ref: xq7b41)den gordugumuz gibi $H(s)$ karali ise $H(s)$'nin payda polinomunun koklerinin reel kismi sifirdan kucuk olmalidir. $H(z)$ kararli ise $H(z)$nin payda polinomunun kokleeri birim daire icinde bulunmalidir. Onceki bolumde inceledigimiz donusumler sonucu filtrelerin kararliliklarinda nasil bir degisiklik oluyor onu inceleyelim.

Impuls cevaplarinin ayni olmasi kriterine gore elde edilen ayrik modelde donusum bagintisi $z = e^{sT}$ seklindedir. Bolum(ref: xq7b41)'de incelendigi gibi $H(s)$ kararli ise bu yontemle elde edilen $H_D(z)$ de kararlidir. Keza $H(s)$ kararsiz ise bu yontemle elde edilen $H_D(z)$ de kararsizdir.

Birim basamak cevaplarinin ayni olmasi kriterine gore elde edilen ayrik modelde de durum benzeridir. Yani $H(s)$ kararli ise $H_D(z)$ kararli, $H(s)$ kararsiz ise $H_D(z)$ kararsiz olacaktir.

Integral alma yontemleri ile elde edilen ayrik modelleri ayri ayri incelemek gerekir.

Geriye dogru integral alma yontemi ile elde edilen ayrik modelde donusum bagintisi (ref: xq10fy30) ile

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

seklinde verilmisti. $z = p + jq$ koyarak durumu inceleyelim.

$$\begin{aligned} s &= \frac{z-1}{Tz} = \frac{p+jq-1}{T(p+jq)} = \frac{1}{T}\frac{p^2+q^2-p-jq}{p^2+q^2} \\ &= \frac{1}{T}\frac{p^2+q^2-p}{p^2+q^2} + \frac{1}{T}\frac{-jq}{p^2+q^2} \end{aligned} \quad \#$$

Kararlilik icin $Re(s) < 0$ olmasi gerektiginden kararli bir $H(s)$ icin

$$Re(s) = \frac{1}{T}\frac{p^2+q^2-p}{p^2+q^2} < 0 \quad \text{xq10fy42}$$

sarti saglanir. Peki bu sart saglandigi zaman $z = p + jq$ ile belirledigimiz $z$ nerede olur. $p, q, T$ reel sayilar oldugundan (ref: xq10fy42) esitsizliginde payda daima pozitifdir ve $Re(s)$ nin pozitif yada negatif olmasina bir katkisi yoktur. O halde $Re(s)$'nin isareti payin isaretine baglidir. (ref: xq10fy42) esitsizligi

$$p^2 + q^2 - p < 0 \quad \text{xq10fy40}$$

haline gelir. Bu esitsizlik

$$(p - \frac{1}{2})^2 + q^2 < (\frac{1}{2})^2 \quad \text{xq10fy50}$$

seklinde de yazilabilir.

f?igure[hbt]   geriye dogru integaral yonteminde s ve z domenleri ileriye dogru integaral yonteminde s ve z domenleri

(ref: xq10fy50) esitsizliginin $z$ duzleminde gosterdigi yer sekil(ref: xq10s4.4) de gosterilmistir. $z$ duzleminde bir filtrenin kararli olmmasi icin gerek ve yeteer sart kutuplarin birim ddaire icinde olmasidir. Dolayisiyla $s$ duzlemindeki ($Re(s) < 0$) sartini saglayan bir kutup $z$ duzleminde kucuk dairenin icine dusecek yani kararli olacaktir. Ilave olarak da $s$ duzleminde kararsiz olan bazi filtreler $z$ duzleminde birimm daire icine dusecek yani gene kararli olacaktir. Tablo((ref: xq10t11)da bu durum gosterilmistir.
??[hbt]

| backward Integration | $s = \frac{z-1}{zT}$ | | |
|---|---|---|---|
| s domeninde transfer fonksiyonu | s domeninde kutuplar | z domeninde transfer fonksiyonu | z domeninde kutuplar |
| $H(s) = \frac{1}{s^2+1.6s+0.6}$ | $s_1 = -1$<br>$s_2 = -0.6$<br>(kararli) | $H_D(z) = \frac{z^2}{3.2z^2-3.62z+1}$ | $z_1 = 0.625$<br>$z_2 = 0.5$<br>(kararli) |
| $H(s) = \frac{1}{s^2-4s+5}$ | $s_1 = 2+j$<br>$s_2 = 2-j$<br>(kararsiz) | $H_D(z) = \frac{z^2}{2z^2+2z+1}$ | $z_1 = -0.5+0.5j$<br>$z_2 = -0.5-0.5j$<br>(kararli) |
| $H(s) = \frac{1}{s-0.75}$ | s=0.75<br>(kararsiz) | $H_D(z) = \frac{4z}{z-4}$ | $z = 4$<br>(kararsiz) |

geriye dogru integral yonteminde $s$ ve $z$ duzlemlerinde kutuplar

f?igure[hbt] Ileriye dogru integralde $s$ ve $z$ domeninde durum
Ileriye dogru integral yonteminde

$$s = \frac{z-1}{T} \qquad \#$$

oldugundan $z = p + jq$ konuldugunda $Re(s) < 0$ sarti

$$p < 1 \qquad \#$$

olarak karsimiza cikar. Sekil(ref: xq10s63)de gosterildigi gibi bu sonuc $s$ duzleminde kararli olan bir filtre $z$ domeninde kararsiz olabilir anlamina gelir. Tablo((ref: xq10t13)da bu durum gosterilmistir. ??[hbt]

| Ileriye Dogru integral Yontemi | $s = \frac{z-1}{T}$ | | |
|---|---|---|---|
| s domeninde transfer fonksiyonu | s domeninde kutuplar | z domeninde transfer fonksiyonu | z domeninde kutuplar |
| $H(s) = \frac{1}{s+1.5}$ | $s_1 = -1.5$<br>(kararli) | $H_D(z) = \frac{1}{z+0.5}$ | $z_1 = 0.5$<br>(kararli) |
| $H(s) = \frac{1}{s^2+6s+10}$ | $s_1 = -3+j$<br>$s_2 = -3-j$<br>(kararli) | $H_D(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$ | $z_1 = -2+j$<br>$z_2 = -2-j$<br>(kararsiz) |

ileriye dogru integral yonteminde $s$ ve $z$ duzlemlerinde kutuplar ($T = 1$)

Bilinear donusumde benzeri islemlerle

$$s = \frac{2}{T}\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$z = p + jq$ koyarak

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1}\right] = \frac{2}{T}\left[\frac{p+jq-1}{p+jq+1}\right] = \frac{2}{T}\left[\frac{(p+jq-1)(p+1-jq)}{(p+1+jq)(p+1-jq)}\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{p^2-1+q^2+2jw}{(p+1)^2+q^2}\right] < 0 \end{aligned} \quad \#$$

Buradan $Re(s) < 0$ olma sarti

$$p^2 + q^2 < 1 \quad \text{xq10f91}$$

sekilnde yazilabilir. (ref: xq10f91) bagintisi $Z$ duzleminde birim daireyi vermektedir. Yani $s$ duzleminde sol yari duzlemde olan(kararli olan) bir nokta $z$ duzleminde birim daire icinde (kararli) olacaktir. Tablo((ref: xq10t15)da bu durum gosterilmistir. ??[hbt]

Bilinear donusum $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

| s domeninde transfer fonksiyonu | s domeninde kutuplar | z domeninde transfer fonksiyonu | z domeninde kutuplar |
|---|---|---|---|
| $H(s) = \frac{1}{s^2+6s+10}$ | $s_1 = -3 + j$<br>$s_2 = -3 - j$<br>(kararli) | $H_D(z) = \frac{z^2+2z+1}{26z^2-12z+2}$ | $z_1 = -0.23 + 0.53j$<br>$z_2 = -0.23 - 0.53j$<br>(kararli) |
| $H(s) = \frac{1}{s^2-4s+5}$ | $s_1 = 2 + j$<br>$s_2 = 2 - j$<br>(kararsiz) | $H_D(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^2+2z+17}$ | $z_1 == -1 - 4j$<br>$z_2 = -1 + 4j$<br>(kararsiz) |

bilineer donusumde $s$ ve $z$ duzlemlerinde kutuplar ($T = 1$)

Kararlilik acisindan bilinear donusum formulu $Z$ donusumune benzer. Ancak frekans cevaplari arasinda fark vardir. $z$ donusumunde $z = e^{sT}$ iken bilineer donusumde $z = \frac{2+sT}{2-sT}$ olmaktadir. $s = jw$ koyup frekans spektrumunu inceleyelim. $w = 0$ dan $w = 2\pi$ kadar degisse $z_1 = e^{jwT}$ birim daire uzerinde bir tur atar oysa $z_2 = \frac{2+sT}{2-sT}$ birim daire uzerinde az bir mesafe kateder.

# Sayisal Filtrelerin Gerceklemesi

Sayisal filtrelerin gerceklemesi $H(z) = \frac{X(z)}{R(z)}$ seklinde transfer fonsiyonu verilen bir filtreyi bilgisayar programi haline getirilmesi islemidir. Sayisal filtreler yaygin olarak kullanildigindan $H(z)$ transfer fonksiyonu sadece bilgisayar programi (yazilim) olarak degil donanim olarak da gerceklestirilebilir. Sayisal filtre donanim olarak gerceklestirmede ozel maksatla yapilmis mikroislemciler kullanilir. Bu mikroislemcilerin toplama, cikarma, carpma bolme gibi islemlerin dizideki sayilari tek bir komutla saga sola kaydirabilme gibi fazladan ozellikler bulunur. Bu tip mikroislemciler genelde A/D cevirici ve D/A cevirici ile beraber hazir bir "**kit**" olarak satilir. Prensip olarak yazilim ve donanim ile gercekleme yontemleri aynidir. Donanim agirlikli gerceklemelerde filtrenin blok diagrami cikartilarak gercekleme yapmak daha kolaydir. Yazilim olarak gerceklemede cogu kere asagidaki ornekte oldugu gibi filtre transfer fonksiyonuna bakarak da bilgisayar programi yazilabilir.

Ornek olarak. $H(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{3z+10}{z+0.5}$ transfer fonksiyonunu ele alalim. Acikca goruldugu gibi,

$$\frac{X(z)}{R(z)} = \frac{3z+10}{z+0.5} = \frac{3+10z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$$

$$X(z)[1+0.5z^{-1}] = [3+10z^{-1}]X(z)$$

Her iki tarafin terz $Z$ donusumu alinarak

$$x(k) + 0.5x(k-1) = 3r(k) + 10r(k-1)$$

$$x(k) = -0.5x(k-1) + 3r(k) + 10r(k-1)$$

Bu sisteme iliskin bilgisayar programi asagidaki gibi olacaktir.

```
 Algoritma koy
cevrim_basi
r_eski=rk
(rk yi giristen oku):
x_eski=xk
xk=-0.5~x_eski + 3~rk +10~r_eski
(xk) ui cikisa ver
Cevrim_basi”na git.
```

Herhangi bir transfer fonksiyonu yukaridaki gibi gerceklenebilir. Ancak bu asagida anlatilan nedenlerden dolayi cogu kere kabul edilebilir bir grcekleme turu sinifina giremez.

Sayisal filtrede onemli hata kaynaklari sunlardir.

1) Filtre katsayilari yuarlak rakamlar degildir bilgisayarda filtre katsayilarini depolamak icin ayrilan bit sayisi sinirlidir. Dolayisiyla filtre katsayilari yuvarlatilarak bilgisayarda depolanacaktir ve bu yuvarlatma islemi belirli bir hata terimi olarak devreye girer.

2)Analog isaretin bilgisayara aktarilmasi (A/D cevirme) esnasinda bolum(ref: quantalama) de bahsedilen seviyeleme (quantalama) hatasi.

3)Carpma bolme gibi islemlerin sonuclarinin yuvarlatilmasindan kaynaklanan hatalar.

Bu hatalardan kurtulmak ve diger bazi avantajlari dolayisiyla degisik gercekleme teknikleri ortaya cikmistir. Bu tip gerceklemelerde hedeflenenler su sekilde siralanabilir.

1)Yukarida bahsedilen hatalarin sonuca etkisini minimuma indirmek.

2)filtre algoritmasini minimum zamanda gerceklemek, islem sayisini minimum indirmek.

3)filtreyi gerceklemek icin gereken hafiza miktarini minimuma indirmek.

Bu hedeflerin hepsini yerine getiren optimum bir gercekleme turu istenen ideal gercekleme turudur. Ancak hdeflerden birini yerine getiren algoritma diger hedefi gerceklemede daha az performans gosterilebilir. Asagida degisik gercekleme turleri verilmistir.

1)Direk Programlama

2)Standart Programlama

3)Paralel Programlama

4)Seri Programlama

5)Merdiven tipi Programlama

6)Kafes Yapisinda Programlamma

7)Durum deklemleri fomunda gercekleme

# Direk Programlama

Bu yukarida anlatilan programlama tipidir.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \ldots.. + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots.. + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \\ &= \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-1-n} + \ldots.. + b_2 z^{2-n} + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + a_{n-2} z^{-2} + \ldots.. + a_2 z^{2-n} + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}} \end{aligned} \quad \text{xq11f01}$$

Gerekli duzenlemeler yapilip terz $Z$ donusumu alinirsa

$$\begin{aligned} x(k) &= -a_1 x(k-1) - a_2 x(k-2) \ldots\ldots. a_{n-1} x(k-n+1) - a_n x(k-n) \\ &+ b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + b_2 r(k-2) \ldots\ldots.. + b_{n-1} r(k-n+1) - b_n r(k-n) \end{aligned} \quad \text{xq11f03}$$

(ref: xq11f03) esitligi ile verilen sisteme iliskin blok diyagrami sekil(ref: xq11s03)de verilmistir.

f?igure[hbt]   Direk programlamaya ilisin blok diyagrami

(ref: xq11f03) esitligi yukarida oldugu gibi programlanabilir. Buradan acikca goruldugu gibi $2n$ tane hafiza elemanina gerek vardir. Bunu daha iyi gorebilmek icin 2. dereden bir sistem alalim.

$$H(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \qquad \#$$

$$x(k) = -a_1 x(k-1) - a_0 x(k-2) + b_2 r(k) + b_1 r(k-1) + b_0 r(k-2) \qquad \#$$

Bilgisayar algoritmasi ise su sekilde olacaktir.

```
cevrim_basi:
  r2=r1
  r1=rk
   (rk yi oku)
  x2=x1
  x1=xk
  xk=-a1*x1 - a0*x2 + b2*rk + b1*r1+ b0*r2
   (xk yi cikisa aktar)
 cevrim_basi'na  git
```

Acikca goruldugu gibi $r2, r1, x2, x1$ toplam 2xn=2x2=4 tane hafiza birimine ihtiyac vardir.

# Standart Programlama

(ref: xq11f01) ile verilen $H(z)$ transfer fonksiyonunu asagidaki gibi ayristiralim.

$$H(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{X(z)}{Q(z)} \frac{Q(z)}{R(z)} \qquad \#$$

Buradan

$$\frac{X(z)}{Q(z)} = b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-1-n} + \ldots\ldots + b_2 z^{2-n} + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n} \qquad \text{xq11fp41}$$

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + a_{n-1} z^{-1} + a_{n-2} z^{-2} + \ldots\ldots + a_2 z^{2-n} + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}} \qquad \text{xq11fp42}$$

tanimlarini yapalim. (ref: xq11fp41) esitligi

$$X(z) = b_m z^{m-n} Q(z) + b_{m-1} z^{m-n-1} Q(z) + \ldots\ldots\ldots + + b_1 z^{1-n} Q(z) + b_0 z^{-n} Q(z) \qquad \text{xq11fp43}$$

ve (ref: xq11fp42) esitligi de

$$Q(z) = R(z) - a_{n-1} z^{-1} Q(z) - a_{n-2} z^{-2} Q(z) + \ldots\ldots\ldots + a_1 z^{1-n} Q(z) + a_0 z^{-n} Q(z) \qquad \text{xq11fp44}$$

seklinde yazilabilir. (ref: xq11fp43 esitliginin her iki tarafinin ters $Z$ donusumunu alalim.

$$x(k) = b_m q(k+m-n) + b_{m-1} q(k+m-n-1) + \ldots\ldots\ldots + + b_1 q(k-n+1) + b_0 q(k-n) \qquad \text{xq11fp45}$$

ve (ref: xq11fp44) esitliginin her iki tarafinin ters $Z$ donusumu de

$$q(k) = r(k) - a_{n-1} q(k-1) - a_{n-2} q(k-2) + \ldots\ldots\ldots + a_1 q(k-n+1) + a_0 q(k-n) \qquad \text{xq11fp46}$$

seklinde olacaktir. (ref: xq11fp45) ve (ref: xq11fp46) esitlikleri (ref: xq11f01) ile verilen $H(z)$ transfer fonksiyonunu bir gerceklemede kullanilabilir. Gerceklemeye iliskin blok diyagrami sekil(ref: xq11s05)de verilmistir.

f?igure[hbt]   Standart programlamaya ilisin blok diyagrami

Durumu basit olarak gormek icin ikinci dereceden bir sistem uzerinde inceleyelim.

$$H(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{X(z)}{Q(z)} = \frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \qquad \#$$

$$\begin{aligned} q(k) &= r(k) - a_1 q(k-1) - a_0 q(k-2) \\ x(k) &= b_2 q(k) + b_1 q(k-1) + b_0 q(k-2) \end{aligned} \qquad \#$$

Programlama teknigi su sekilde olacaktir.

```
 cevrim_basi:
    (rk yi oku)
   q2=q1
   q1=qk
   qk=rk-a1*q1 - a0* q2
   xk=b2*qk+b1*q1+ b0*q2
    (xk yi cikisa aktar)
  cevrim_basi’na  git
```

Algoritmadan goruldugu gibi $q2, q1$ degerleri hafizada depolanmak durumundadir. Halbuku ayni transfer fonksiyonu direk programlama ile gerceklestirildiginde 4 tane degiskeni hafizada depolamak gerekiyordu. Filtrenin derecesi yukseldiginde (50-100) hafiza elemanindan yapilan tasarruf onem kazanir. Bu islemmler mikroislemcinin icinde yapilmasi gerektigi durumlarda hafiza elemaninin pahaliligi daha da artar.

# Seri Programlama

Seri programlamada toplama ve carpma islemlerinin sayisi onceki gercekleme turlerine gore biraz azaltilmis ve bunun sonucu olarak toplama carpma sonucu olusacak yuvarlatma hatalarinin derecesi biraz dusmustur, Seri programlamada $H(z)$ transfer fonksiyonu asagidakki gibi carpanlarina ayrilir.

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)\, H_2(z)\, H_3(z) \ldots\ldots . H_p(z) = K \prod_{i=1}^{j} \frac{1 + c_i z^{-1}}{1 + d_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^{p} \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + g_i z^{-1} + h_i z^{-2}} \\ &= K\left( \frac{1 + c_1 z^{-1}}{1 + d_1 z^{-1}} \frac{1 + c_2 z^{-1}}{1 + d_2 z^{-1}} \ldots\ldots\ldots \frac{1 + c_j z^{-1}}{1 + d_j z^{-1}} \right. \\ &* 15mm \left. \frac{1 + e_1 z^{-1} + f_1 z^{-2}}{1 + g_1 z^{-1} + h_i z^{-2}} \frac{1 + e_2 z^{-1} + f_2 z^{-2}}{1 + g_2 z^{-1} + h_i z^{-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 + e_p z^{-1} + f_p z^{-2}}{1 + g_p z^{-1} + h_i z^{-2}} \right) \end{aligned} \qquad \#$$

Burada pay ve paydada reel kokler bir gurupta, kompleks kokler eslenikleri ile beraber bir gurupta toplanmistir. Esitlige carpan olarak ilave edilen $K$ katsayisi pay ve paydalarin ilk terimlerini 1 yapmak icin gereklidir.

Bu sekildeki bir ayrisimin bilgisayar algoritmasini gerceklemek icin once her blok ayri ayri standart programlama teknigi ile gerceklenir. Daha sonra birinci blogun cikisi ikinci blogun girisi, ikinci blogun cikisi ucuncu blogun girisi ........ $p - 1$ inci blogun cikisi $p$ inci blogun girisi olacak sekilde algoritma duzenlenir.

$$H(z) = K\frac{1+c_1z^{-1}}{1+d_1z^{-1}} \quad \frac{1+c_2z^{-1}}{1+d_2z^{-1}} \quad \frac{1+c_3z^{-1}}{1+d_3z^{-1}} \quad \frac{1+e_4z^{-1}+f_4z^{-2}}{1+g_4z^{-1}+h_4z^{-2}} \qquad \#$$

transfer fonksiyonu ile verilen filtrenin blok diyagramini ve bilgisayar programini yapin. Gerceklemeye iliskin blok diyagrami sekil(ref: xq11s07)de verilmistir. Programa iliskin bilgisayar programi asagida verilmistir.

f?igure[hbt]   Seri programlamaya ilisin blok diyagrami

```
 Cevrim_basi:
-------------------------------
 r1k yi oku
 q11=q1k
 q1k= -d1*q11 + r1k
 x1k=q1k + c1*q11
-------------------------------
 r2k=x1k
 q21=q2k
 q2k= -d2*q21 + r2k
 x2k=q2k + c2*q21
-------------------------------
 r3k=x2k
 q31=q3k
 q3k= -d3*q31 + r3k
 x3k=q3k + c3*q31
-------------------------------
   rk4=x3k
   q42=q41
   q41=q4k
   q4k= -g4*q41 - h4*q42 + r4k
   x4k=q4k + e4*q41 + f4*q42
   x4k yi cikisa aktar.
 Cevrim_basi"na git.
-------------------------------------
```

# Paralel Programlama

Islem sayisini ve yuvarlatma hatalarini azaltmak icin bir baska tur programlama teknigi de paralel programlamadir Bu tur programlama tekniginde $H(z)$ transfer fonksiyonu

$$\frac{X(z)}{R(z)} = H(z) = K + \frac{c_1}{1+d_1z^{-1}} + \frac{c_2}{1+d_2z^{-1}} \cdots\cdots\cdots + \frac{c_j}{1+d_jz^{-1}}$$

$$+ \frac{e_1+f_1z^{-1}}{1+g_1z^{-1}+h_iz^{-2}} + \frac{e_2+f_2z^{-1}}{1+g_2z^{-1}+h_iz^{-2}} \cdots\cdots\cdots + \frac{e_p+f_pz^{-1}}{1+g_pz^{-1}+h_iz^{-2}}$$

$$= K + \sum_{i=1}^{j} \frac{c_i}{1+d_iz^{-1}} + \sum_{i=j+1}^{p} \frac{e_i+f_iz^{-1}}{1+g_iz^{-1}+h_iz^{-2}} \qquad \text{xq11f31}$$

seklinde basit kesirlere ayrilir. Burada paydanin reel kokleri bir gurupta, paydanin kompleks kokleri eslenikleri ile beraber bir gurupta toplanmistir.  Esitlige ilave edilen K katsayisi payin derecesi paydaninkinden kucukse sifir olur. (ref: xq11f31)esitligini

$$H(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = K + H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) \ldots\ldots + H_p(z) \qquad \#$$

seklinde gosterelim. Bu sekildeki bir ayrisimin bilgisayar algoritmasini gerceklemek icin once her blok ayri ayri standart programlama teknigi ile gerceklenir. Sistem cikisi ise

$$X(z) = KR(z) + H_1(z)R(z) + H_2(z)R(z) + H_3(z)R(z) \ldots\ldots + H_p(z)R(z) \qquad \#$$

bagintisi uyarinca cikis her bloogun cikislarinin toplamidir. Gerceklemeye iliskin blok diyagrami sekil(ref: xq11s09)de verilmistir.

f?igure[hbt]   Pararlel programlamaya ilisin blok diyagrami

$$H(z) = K\frac{c_1}{1 + d_1 z^{-1}} + \frac{c_2}{1 + d_2 z^{-1}} + \frac{c_3}{1 + d_3 z^{-1}} + \frac{e_4 + f_4 z^{-1}}{1 + g_4 z^{-1} + h_4 z^{-2}}$$

Transfer fonksiyonu ile verilen sistemin paralel programlama ile gerceklenecek sekilde bilgisayar algoritmasini yazin. Programa iliskin bilgisayar programi asagida verilmistir.

```
 Cevrim_basi:
-------------------------------
 rr girisini oku
-----------------
 r1k=rr
 x11=x1k
 x1k= -d1*x11 + c1*r1k
-------------------------------
 r2k=rr
 x21=x2k
 x2k=-d2*x21 + c2*r2k
-------------------------------
 r3k=rr
 x31=x3k
 x3k=-d3*x31 + c3*r3k
-------------------------------
   r4k=rr
   q42=q41
   q41=q4k
   q4k= -g4*q41 - h4*q42 + r4k
   x4k=e4*q4k + f4*q41
------------------------------
   xcc=K*rr+x1k+x2k+x3k+x4k
   xcc yi cikisa aktar.
 Cevrim_basi”na git.
-------------------------------------
```

Burada aciklik icin ilave satirlar eklenmistir. Normalde 1., 2., 3. bloklar

$x1k = -d1 * x1k + c1 * rr \quad x2k = -d2 * x2k + c2 * rr \quad x3k = -d3 * x3k + c3 * rr$

seklinde tek satir olur.

# Merdiven Tipi Programlama

Bu tip programlama tekniginde $H(z)$ transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = H(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\ddots \; A_{n-1} + \cfrac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}}}}} \qquad \text{xq11fa1}$$

seklinde surekli kesirlere ayrilir. Esitlikteki $A_0, A_1, \ldots A_n, B_1, B_2 \ldots . B_n$ katsayilari surekli bolme islemi ile hesaplanir. (Bkz C.P.ref: xq11p11 )

Burada

$$H_{1B}(z) = \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\ddots \; A_{n-1} + \cfrac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}}}}} \qquad \#$$

tanimi yapilirsa (ref: xq11fa1) esitligi

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = H(z) = A_0 + H_{1B}(z) \qquad \text{xq11fa11}$$

seklinde yazilabilir. Benzer sekildeki tanimlarla asagidaki bagintilari yazabiliriz.

$$H_{1B}(z) = \frac{1}{B_1 z + H_{1A}(z)} \qquad \text{xq11fa15}$$

$$H_{1A}(z) = \frac{1}{A_1 + H_{2B}(z)} \qquad \text{xq11fa17}$$

$$H_{2B}(z) = \frac{1}{B_2 z + H_{2A}(z)} \qquad \text{xq11fa19}$$

$$H_{2A}(z) = \frac{1}{A_2 + H_{3B}(z)} \qquad \#$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$H_{(n-1)A}(z) = \frac{1}{A_{n-1} + H_{nB}(z)} \qquad \#$$

$$H_{nB}(z) = \frac{1}{B_n z + H_{nA}(z)} \qquad \#$$

$$H_{nA}(z) = \frac{1}{A_n} \qquad \#$$

Ilave olarak $X_1(z), Y_1(z), X_2(z), Y_2(z), \ldots\ldots.$ gibi yeni degiskenleri asagidaki gibi tanimlayalim.

$$H_{1B}(z) = \frac{Y_1(z)}{R(z)} \quad \rightarrow \quad H_{1B}(z)R(z) = Y_1(z) \qquad \text{xq11fa31}$$

$$H_{1A}(z) = \frac{X_1(z)}{Y_1(z)} \quad \rightarrow \quad H_{1A}(z)Y_1(z) = X_1(z) \qquad \text{xq11fa33}$$

$$H_{2B}(z) = \frac{Y_2(z)}{X_1(z)} \quad \rightarrow \quad H_{2B}(z)X_1(z) = Y_2(z) \qquad \text{xq11fa35}$$

$$H_{2A}(z) = \frac{X_2(z)}{Y_2(z)} \quad \rightarrow \quad H_{2A}(z)Y_2(z) = X_2(z) \qquad \text{xq11fa37}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

(ref: xq11fa11)'rin her iki tarafini $R(z)$ ile carparak

$$Y(z) = A_0R(z) + H_1B(z)R(z) \qquad \text{xq11fa51}$$

elde edilir. Ote yandan $H_1B(z)R(z)$'nin (ref: xq11fa31)deki degeri (ref: xq11fa51)de yerine konursa

$$Y(z) = A_0R(z) + Y_1(z) \qquad \#$$

elde edilir.

(ref: xq11fa15) esitligini

$$B_1z + H_{1A}(z) = \frac{1}{H_{1B}(z)} \qquad \text{xq11fa53}$$

seklinde yazip $H_{1B}(z)$ yerine (ref: xq11fa31) deki degeri yerine konursa

$$B_1z + H_{1A}(z) = \frac{R(z)}{Y_1(z)} \quad \rightarrow \quad R(z) = B_1zY_1(z) + H_{1A}(z)Y_1(z) \qquad \text{xq11fa55}$$

seklinde yazilabilir. Ayrica $H_{1A}(z)Y_1(z)$ yerine (ref: xq11fa33) deki degeri yazilirsa

$$R(z) = B_1zY_1(z) + X_1(z) \qquad \text{xq11fa57}$$

elde edilir.

Benzeri islemler [(ref: xq11fa17), (ref: xq11fa33),(ref: xq11fa35)] , [(ref: xq11fa19), (ref: xq11fa35),(ref: xq11fa37)],.......... esitlikleri icin yapilirsa

$$Y_1(z) = A_1X_1(z) + Y_2(z) \qquad \text{xq11fa59}$$

$$X_1(z) = B_2zY_2(z) + X_2(z) \qquad \text{xq11fa61}$$

$$Y_2(z) = A_2X_2(z) + Y_3(z) \qquad \text{xq11fa63}$$

$$X_2(z) = B_3zY_3z + X_3(z) \qquad \text{xq11fa65}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_n(z) = A_nX_n(z) + Y_{n+1}(z) \qquad \#$$

$$X_n(z) = B_{n+1}zY_{n+1}z + X_{n+1}(z) \qquad \#$$

bagintilari yazilabilir.

Bundan sonraki adimda $Y$'leri $X$ cinsinden $X$'leri $Y$ cinsinden yazmaya calisalim.

(ref: xq11fa57) esitliginden $Y_1(z)$ cekilirse

$$Y_1(z) = \frac{1}{B_1} z^{-1} [R(z) - X_1(z)] \qquad \#$$

elde edilir. Benzer sekilde (ref: xq11fa61) esitliginden $Y_2(z)$, (ref: xq11fa65) esitliginden $Y_3(z)$, ......... (ref: xq11fa59) esitliginden $X_1(z)$, (ref: xq11fa63) esitliginden $X_2(z)$, cekilirse asagidaki bagintilar yazilabilir.

$$Y_2(z) = \frac{1}{B_2} z^{-1} [X_1(z) - X_2(z)] \qquad \#$$

$$Y_3(z) = \frac{1}{B_3} z^{-1} [X_2(z) - X_3(z)] \qquad \#$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1(z) = \frac{1}{A_1} [Y_1(z) - Y_2(z)] \qquad \#$$

$$X_2(z) = \frac{1}{A_2} [Y_2(z) - Y_3(z)] \qquad \#$$

$$X_3(z) = \frac{1}{A_3} [Y_3(z) - Y_4(z)] \qquad \#$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

merdiven tipi programlamanin avantaji filtre katsayilarinin yuvarlatilmasindan dogacak hata birikimini azaltmasidir. Blok diyagram haline getirilmesi islemi sekil(ref: xq11s3.51)de gosterilmistir.

f?igure[hbt]   merdiven tipi programlamada blok diyagraminin elde edilmesi
Program algoritmasi ise asagidaki sekilde olacaktir.

```
Butun baslangic kosullarini sifir al.
y1(k-1)=y2(k-1)......x1(k-1)=x2(k-1)=x(k-1)0

Cevrim_Basi:
giristen rr yi oku r(k)=rr
y1(k)=1/B1*( r(k-1) - x1(k-1) )
y2(k)=1/B2*( x1(k-1) - x2(k-1) )
y3(k)=1/B3*( x2(k-1) - x3(k-1) )
...
...
yn_1(k)=1/Bn_1*( xn_2(k-1) - xn_1(k-1) )
yn(k)=1/Bn* ( xn_1(k-1) - xn(k-1) )
x1(k)=1/A1*( y1(k)-y2(k) )
x2(k)=1/A2*( y2(k)-y3(k) )
x3(k)=1/A3*( y3(k)-y4(k) )
..
..
xn(k)=1/An* yn(k)
```

```
y(k)=A0*x(k)+y1(k)
y(k) yi cikisa aktar
k=k+1
Cevrim_Basina git.
```

Yukarida $H(z)$ transfer fonksiyonu $z$ in kuvvetlerine gore surekli kesirlere ayrildi. $A_n$ ve $B_n$ katsyayilarinin bazisinin sifir olmasi durumunda gerceklemede problemler ortaya cikar. Boyle durumlarda $H(z)$ transfer fonksiyonu $z^{-1}$ in kuvvetlerine gore surekli kesirlere ayrilip degisik bir algoritma elde edilebilir.

$$\frac{X(z)}{R(z)} = H(z) = C_0 + \cfrac{1}{D_1 z^{-1} + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{D_2 z^{-1} + \cfrac{1}{\ddots\, C_{n-1} + \cfrac{1}{D_n z^{-1} + \cfrac{1}{C_n}}}}}} \qquad \text{xq11fa71}$$

# Kafes Yapisinda Programmlama

Sekil(ref: xq11s9.12.a) daki diyagrami gozonune alalim. (192 sh) Diyagramdan acikca goruldugu gibi.

$$\begin{aligned} X_{n+1}(z) &= X_n(z) + z^{-1} K_n Y_n(z) \\ Y_{n+1}(z) &= K_n X_n(z) + z^{-1} Y_n(z) \end{aligned} \qquad \text{xq11fg02}$$

veya matris formunda

f?igure[hbt] Iki elemanli kafes yapisi

$$\begin{bmatrix} X_{n+1}(z) \\ Y_{n+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} K_n \\ K_n & z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n(z) \\ Y_n(z) \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh9.46}$$

Sekil(ref: xq11s9.12.b) diyagramindan goruldugu gibi

$$\begin{aligned} X_n(z) &= X_{n+1}(z) - z^{-1} K_n Y_n(z) \\ Y_{n+1}(z) &= K_n X_n(z) + z^{-1} Y_n(z) \end{aligned} \qquad \#$$

Acikca goruldugu gibi her iki diyagram da ayni sonucu vermektedir.

f?igure[hbt] Simetrik kafes yapisinda bir gercekleme turu

Ote yandan sekil(ref: xq11sh9.13) den goruldugu gibi

$$C(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y_n(z) \qquad \text{xq11fh21}$$

Simdi $C(z)/R(z)$ oranini elde etmeye calisalim. Acikca goruldugu gibi $R(z) = X_N(z)$ dir. O halde (ref: xq11fh21) esitligi

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n Y_n(z)}{X_n(z)} \qquad \text{xq11fh23}$$

seklinde yazilabilir. Sekil(ref: xq11sh9.13)'den acikca goruldugu gibi

$$vX_0(z) = Y_0(z) \qquad \text{xq11fh43}$$

Islemleri kolaylastirmak icin

$$P_n(z) = \frac{X_n(z)}{X_0(z)} \qquad Q_n(z) = \frac{Y_n(z)}{Y_0(z)} \qquad \text{xq11fh44}$$

tanimlarini yapalim. (ref: xq11fh44 ve (ref: xq11fh9.46) dan dolayi

$$\begin{bmatrix} X_0(z)P_n(z) \\ Y_0(z)Q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n(z) \\ Y_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_{n-1} \\ K_{n-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n-1}(z) \\ Y_{n-1}(z) \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh9.48}$$

veya

$$\begin{bmatrix} X_0(z)P_n(z) \\ Y_0(z)Q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_{n-1} \\ K_{n-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0P_{n-1}(z) \\ Y_0Q_{n-1}(z) \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh9.51}$$

yazilabilir. $X_0 = Y_0$ oldugundan (ref: xq11fh9.51)rin her iki tarafi $X_0$ veya $Y_0$ ra bolunurse.

$$\begin{bmatrix} P_n(z) \\ Q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_{n-1} \\ K_{n-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-1}(z) \\ Q_{n-1}(z) \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh901}$$

elde edilir. Acikca goruldugu gibi

$$P_0(z) = \frac{X_0(z)}{X_0(z)} = 1 \qquad Q_0(z) = \frac{Y_0(z)}{Y_0(z)} = 1 \qquad \text{xq11fh903}$$

dir.

## Kafes Yapisindan Transfer fonksiyonunun Elde Edilmesi

Sekil(ref: xq11sh9.13) de verilen lattice yapidan $H(z) = C(z)/R(z)$ transer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n Q_n(z)}{P_n(z)}$$

-8mm (ref: xq11fh23)

$$\begin{bmatrix} P_n(z) \\ Q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_{n-1} \\ K_{n-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-1}(z) \\ Q_{n-1}(z) \end{bmatrix}$$

-8mm (ref: xq11fh901)

$$P_0(z) = Q_0(z) = 1$$

-8mm (ref: xq11fh903) bagintilari yardimiyla elde edilebilir.

$k_0 = 0.1,\ k_1 = 0.2,\ k_2 = 0.3\ \ v_0 = 4,\ v_1 = 5,\ v_2 = 6,\ v_3 = 1$ icin $H(z)$ yi hesaplayin.

**Cozum**: (ref: xq11fh903)'den

$$P_0(z) = Q_0(z) = 1$$

olur. (ref: xq11fh901)'de $n = 1$ koyarak $P_1, Q_1$ degerlerini hesaplayabiliriz.

$$\begin{bmatrix} P_1(z) \\ Q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_0 \\ K_0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z) \\ Q_0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_0 \\ K_0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0.1z^{-1} \\ 0.1 + z^{-1} \end{bmatrix}$$

Benzer sekilde (ref: xq11fh901)'de $n = 2$ koyarak $P_2, Q_2$ degerlerini $n = 3$ koyarak $P_3, Q_3$ degerlerini hesaplayabiliriz.

$$\begin{bmatrix} P_2(z) \\ Q_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_1 \\ K_1 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(z) \\ Q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0.12z^{-1} + 0.2z^{-2} \\ 0.2 + 0.12z^{-1} + z^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_3(z) \\ Q_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0.18z^{-1} + 0.236z^{-2} + 0.3z^{-3} \\ 0.3 + 0.236z^{-1} + 0.18z^{-2} + z^{-3} \end{bmatrix}$$

(ref: xq11fh23) esitligi kullanilarak $H(z)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{4(1)+5(0.1+z^{-1})+6(0.2+0.12z^{-1}+z^{-2})+1(0.3+0.236z^{-1}+0.18z^{-2}+z^{-3})}{1+0.18z^{-1}+0.236z^{-2}+0.3z^{-3}} \\ &= \frac{6+5.95z^{-1}+6.18z^{-2}+z^{-3}}{1+0.18z^{-1}+0.236z^{-2}+0.3z^{-3}} \end{aligned}$$

## Transfer Fonksiyonundan Lattice Yapinin Elde Edilmesi

( ref: xq11fh901) esitliginde $P_{n-1}, Q_{n-1}$ yerine $P_{n-2}, Q_{n-2}$ cinsinden degerlerini yazip elde edilen denklemde de $P_{n-2}, \quad Q_{n-2}$ yerine $P_{n-3}, \quad Q_{n-3}$ cinsinden degerleri yazilir ve islemler bu istikamette devam ettirilirse ve $P_0(z) = 1, \quad Q_0(z) = 1$ oldugu da hatirda tutulursa

$$\begin{bmatrix} P_n(z) \\ Q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_{n-1} \\ K_{n-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \ldots\ldots \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_1 \\ K_1 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^{-1}K_0 \\ K_0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh61}$$

esitligi yazilabilir. . $n = 1$ icin (ref: xq11fh61) esitliginin ilk denkleminde $z^{-1}$ yerine $z$ koyalim ve esitligin her iki tarafini $z^{-1}$ ile carpilirsa

$$z^{-1}P_1(z^{-1}) = z^{-1} + K_0 \qquad \#$$

$$Q_1(z) = K_0 + z^{-1} \qquad \#$$

elde edilir. Benzer islemi $n = 2$ icin yapalim.

$$z^{-2}P_2(z^{-1}) = 1 + z^{-1}K_0 + z^{-1}K_1K_0 + z^2 \qquad \#$$

$$Q_2(z^{-1}) = 1 + z^{-1}K_0 + z^{-1}K_1K_0 + z^2 \qquad \#$$

gibi

$$z^{-1}P_1(z^{-1}) = Q_1 \qquad z^{-2}P_2(z^{-1}) = Q_2$$

olmaktadir. Islemler $n = 3, n = 4\ldots..$ icin yapilirsa acikca gorulurki

$$z^{-n}P_n(z^{-1}) = Q_n \qquad \text{xq11fh42}$$

olmaktadir. Bu baginti transfer fonksiyonu verilen bir filtrenin lattice katsayilarini hesaplammada buyuk kolaylik saglar.

(ref: xq11fh901)'ri asagidaki sekilde yazalim.

$$\begin{bmatrix} P_n(z) \\ Q_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_{n-1} \\ K_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-1}(z) \\ z^{-1}Q_{n-1}(z) \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh63}$$

Esitligin her iki tarafini

$$\begin{bmatrix} 1 & K_{n-1} \\ K_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-K_{n-1}^2} \begin{bmatrix} 1 & -K_{n-1} \\ -K_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

terimi ile carpalim.

$$\begin{bmatrix} P_{n-1}(z) \\ z^{-1}Q_{n-1}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{1-K_{n-1}^2} \begin{bmatrix} 1 & -K_{n-1} \\ -K_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(z) \\ Q_n(z) \end{bmatrix} \qquad \text{xq11fh66}$$

elde edilir. Buradan

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{1-K_{n-1}^2}[P_n(z) - K_{n-1}Q_n(z)] \qquad \text{xq11fg93}$$

(ref: xq11fh66) bagintisini kullanarak $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots.$ ifadeleri hesaplanirsa acikca goruruz ki $Q_1$ ifadesinde $z^{-1}$, $Q_2$ ifadesinde $z^{-2}$, $Q_3$ ifadesinde $z^{-3}$....... terimlerinin katsayilari hep $1$ dir.

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1 \\ Q_1 &= K_{n-1}P_0 + z^{-1}Q_0 = \ldots\ldots\ldots + z^{-1} \\ Q_2 &= K_{n-2}P_1 + z^{-1}Q_1 = \ldots\ldots\ldots + z^{-2} \\ Q_3 &= K_{n-3}P_2 + z^{-1}Q_2 = \ldots\ldots\ldots + z^{-3} \\ &\ldots\ldots \\ Q_n &= K_0P_{n-1} + z^{-1}Q_{n-1} = \ldots\ldots\ldots + z^{-n} \end{aligned} \qquad \#$$

Yine (ref: xq11fh66) kullanilarak gosterilebilir ki $P_k$ ifadesinde $z^{-k}$nin katsayisi $K_{n-k}$dir

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= P_0 + K_{n-1}z^{-1}Q_0 = \ldots\ldots\ldots + K_{n-1}z^{-1} \\ P_2 &= P_1 + K_{n-2}z^{-1}Q_1 = \ldots\ldots\ldots + K_{n-2}z^{-2} \\ P_3 &= P_2 + K_{n-3}z^{-1}Q_2 = \ldots\ldots\ldots + K_{n-3}z^{-3} \\ &\ldots\ldots \\ P_n &= P_{n-1} + K_0z^{-1}Q_{n-1} = \ldots\ldots\ldots + K_0z^{-n} \end{aligned} \qquad \#$$

O halde $P_k$ polinomlari hesaplanabilirse $K_k$ katsayilari da hesaplanabilir.

(ref: xq11fh21) esitligini acik olarak yazalim

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{v_1 Q_1(z) + v_1 Q_1(z) + v_1 Q_1(z) + \ldots\ldots v_n Q_n(z)}{P_n(z)} \qquad \text{xq11fg21}$$

Buradan acikca goruldugu gibi $H(z)$ nin payindaki $z^{-n}$nin katsayisi $v_n$ dir. cunku $Q_1, Q_2, \ldots. Q_{n-1}$ polinomlarinda $z^{-n}$ yok sadece $Q_n$ de vardir.

$$S_{n-1} = v_1 Q_1(z) + v_1 Q_1(z) + v_1 Q_1(z) + \ldots\ldots v_n Q_{n-1}(z) \qquad \#$$

seklinde bir polinom tanimlayalim. Bu polinomda $z^{n-1}$ rin katsayisi yukaridaki bahsedilen sebeble $v_{n-1}$ dir. Ayrica bu sekilde tanimlanan $S_j$ polinomlari

$$S_{j-1} = S_j - v_j Q_j \qquad \text{xq11fg91}$$

ozelligini sagladigi aciktir. O halde $K_k$ ve $v_k$ katsayilarini hesaplamak icin $P_k, Q_k$ polinomlarini hesaplamak yeterlidir. Algoritmmayi asagidaki sekilde kurabiliriz.

**[1]** $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

**[2]** $P_n(z) = A(z) \qquad S_n(z) = B(z)$

**[3]** $j = n$

**[4]** $K_{j-1} = P_j(z)$ polinomunda $z^{-j}$ nin katsayisi

**[5]** $v_j = S_j(z)$ polinomunda $z^{-j}$ nin katsayisi

**[6]** (ref: xq11fh42) bagintisindan $Q_j(z)$ yi hesapla.

**[7]** (ref: xq11fg93 ) bagintisindan $P_{j-1}$ ri hesapla

**[8]** (ref: xq11fg91) bagintisindan $S_{j-1}$ ri hesapla

**[9]** j=j-1 yap [3] e don

$$H(z) = \frac{6 + 5.95z^{-1} + 6.18z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0.18z^{-1} + 0.236z^{-2} + 0.3z^{-3}}$$

transfer fonksiyonunu lattice forma getiriniz.

$$P_3(z) = 1 + 0.18z^{-1} + 0.236z^{-2} + 0.3z^{-3} \qquad \rightarrow K_2 = 0.3$$

$$S_3(z) = 6 + 5.95z^{-1} + 6.18z^{-2} + z^{-3} \qquad \rightarrow v_3 = 1$$

$$Q_3(z) = z^{-3}P_3(z^{-1}) = 0.3 + 0.236z^{-1} + 0.18z^{-2} + z^{-3})$$

$$P_2 = \frac{1}{1 - K_2^2} P_3(z) - Q_3(z)K_2 = 1 + 0.12z^{-1} + 0.2z^{-2} \qquad \rightarrow K_1 = 0.2$$

$$Q_2 = z^{-2}P_2(z^{-1}) = 0.2 + 0.12z^{-1} + z^{-2}$$

$$S_2 = S_3 - v_3 Q_3 = 5.7 + 5.714z^{-1} + 6z^{-2} \qquad \rightarrow v_2 = 6$$

$$P_1 = \frac{1}{1-K_2^1}P_2(z) - Q_2(z)K_1 = 1 + 0.1z^{-1} \quad \rightarrow K_0 = 0.1$$

$$Q_1 = z^{-1}P_1(z^{-1}) = 0.1 + z^{-1}$$

$$S_1 = S_2 - v_2Q_2 = 4.5 + 4.9940z^{-1} \quad \rightarrow v_1 = 4.994$$

$$P_0 = 1 \;\; Q_0 = 1 \;\; S_0 = S_1 - v_1Q_1 = 4.0006 \quad \rightarrow v_0 = 4.0006$$

Kafes seklinde gerceklemedeki bilgisayar algoritmasi (ref: xq11fg02), (ref: xq11fh21) bagintilari yardimiyla kolayca yapilabilir. Kafes seklinde gerceklemenin avantaji hafiza elemaninin azligi ve matematiksel islem sayisinin azligi degil yuvarlatma hatalarinin minimum duzeyde olmasidir.

# Durum denklemleri formunda programlama

Transfer fonksiyonu forunda verilen denklemler once durumu denklemleri formuna getirilir. Bir ornek uzerinde aciklayalim.

$$H(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{a}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}} \qquad \#$$

transfer fonkksiyonunu ele alalim. Esitlik basit icler dislar carpimi ile

$$X(z)[1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}] = aR(z) \qquad \text{xq11fj01}$$

haline gelir. (ref: xq11fj01) esitliginin ters $Z$ donusumu alinarak

$$x(k) + b_1x(k-1) + b_2x(k-2) + b_3x(k-3) = ar(k) \qquad \text{xq11fj03}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x(k) \\ x_2(k) &= x(k-1) = x_1(k-1) \\ x_3(k) &= x(k-2) = x_2(k-1) \end{aligned} \qquad \text{xq11fj05}$$

tanimlarini yapalim. (ref: xq11fj03) esitligi bu tanimlar altinda

$$x_1(k) + b_1x_1(k-1) + b_2x_2(k-1) + b_3x_3(k-1) = ar(k) \qquad \text{xq11fj07}$$

seklinde veya

$$x_1(k) = -b_1x_1(k-1) - b_2x_2(k-1) - b_3x_3(k-1) + ar(k) \qquad \text{xq11fj08}$$

seklinde yazilabilir. (ref: xq11fj05) ve (ref: xq11fj08) matris formunda yazilirsa

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \qquad \text{xq11fj09}$$

haline gelir. (ref: xq11fj09) esitligi (ref: xq11fj01) ile verilen $H(z)$ transfer fonksiyonuna iliskin durum denklemleri formu olarak adlandirilir.

$$\mathbf{X(k)} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \#$$

tanimlari ile (ref: xq11fj09) esitligi

$$\mathbf{X(k)} = A\mathbf{X(k-1)} + Br(k) \qquad \#$$

halinde gosterilir. Burada konunun basitce anlasilmasi icin basit bir transfer fonksiyonu ele alinmis ve durum denklemleri formuna getirlimistir. Transfer fonksiyonu verilen bir sistem degisik sekillerde durum denklemleri formunda yazilabilir. Yani Bir transfer fonksiyonunun birden fazla (hepsi birbirinden farkli) durum denklemleri formu vardir. Bu konu daha cok otomatik kontrol alanina girdigi icin fazla incelenmeyecektir. Konu ile ilgili genis bilgiler [ref: refdurumdenklemleri] bulunabilir.

Esasen Yukaridaki yonteme transfer fonksiyonunun payinda $z^{-k}$ li terimler bulunmasi halinde degisiklikler yapilmasi gerekir. C.P.(ref: durumdenkonrnek) de herhangibir transfer fonksiyonunu durum denklemleri formuna ceviren genel bir yontem verilmistir.

Durum denklemleri seklinde programlama diger programlama tekniklerine gore zaman ve dogruluk acisindan geride kalir. Ancak matris islemlerinin kolaylikla yapildigi MATLAB gibi programlarla durum denklemleri ile sayisal filtreyi gerceklemek daha kolay oldugu icin simulasyon maksadiyla kullanilir. Durum denklemleri ile gercekleme, sayisal filtrelerin otomamtik kontrol sistemlerinin bir parcasi oldugu durumda simulasyon icin en kolay bir alet olarak karsimiza cikar.

# Sonuclar

Hangi gercekleme sekli daha iyidir turu bir soru akla takilacaktir. Her gercekleme seklinin avantajlari dezavantajlari olacagi muhakkaktir. Mesela direk gerceklemme programlama acisindan en kolay olani buna karsilik durum denklemleri formu haric en fazla hafiza elemani gerektirenidir. Surekli kesirlere ayirarak gercekleme gerek hafiza elemani gerek matemetik islemler acisindan hepsinden ustundur. Fakat Surekli kesirlere ayirma esnasinda yapilan hatalar filtre karakteristigini etkiler. Kafes yapisi gercekleme yuvarlatma hatalarinin minimum olmasi temel hedef oldugu durumlarda en iyi sonuc veren yontemdir.

**************************************************************************************

$$(H(z) = \frac{120z^2 + 180z + 37}{60z^2 + 80z + 6}$$

transfer fonksiyonu (ref: xq11fa1)deki formda surekli kesirlere acin.

**Cozum**: Once pay paydaya bolunur.

Dolayisiyla

$$H(z) = \frac{120z^2+180z+37}{60z^2+80z+6} = 2 + \frac{20z+25}{60z^2+80z+6} = 2 + \frac{1}{\frac{60z^2+80z+6}{20z+25}}$$

olacaktir. ikinci adimda $60z^2+80z+6$ ifadesi $20z+25$ ye bolunur.

veya

$$H(z) = 2 + \frac{1}{\frac{60z^2+80z+6}{20z+25}} = 2 + \frac{1}{3z + \frac{5z+6}{20z+25}} = 2 + \frac{1}{3z + \frac{1}{\frac{20z+25}{5z+6}}}$$

olacagi aciktir. islemler devam ettirilerek Bu defa $20z+25$ $5z+6$ ya bolunerek

$$H(z) = 2 + \frac{1}{3z + \frac{5z+6}{20z+25}} = 2 + \frac{1}{3z + \frac{1}{4 + \frac{1}{5z+6}}} = 2 + \frac{1}{3z + \frac{1}{4 + \frac{1}{5z + \frac{1}{1/6}}}}$$

elde edilir.

$$H(z) = \frac{1440z^3+6468z^2+2195z+105}{240z^3+1058z^2+281z+8}$$

seklinde verilen bir transfer fonksiyonunu (ref: xq11fa1)deki formda surekli kesirlere acin.

$$Cevap\ : H(z) = 6 + \frac{1}{2z + \frac{1}{3 + \frac{1}{5z + \frac{1}{4 + \frac{1}{2z + \frac{1}{1/8}}}}}}$$

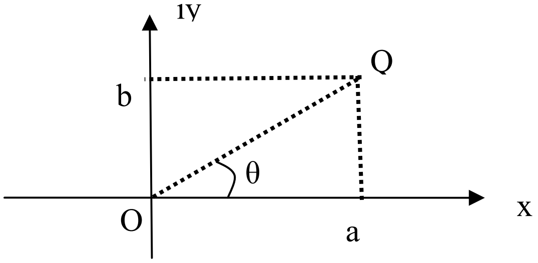
$H(z)$..... transfer fonksiyonunu direk, standart, merdiven tipi programlama teknikleri ile gercekleyin.

$H(z)$ filtre transfer fonksiyonunu merdiven tipi programlama ile gercekleyin

(ref: xq11p51 nolu problemdeki $H(z)$ kesrini (ref: xq11fa71 )deki formda surekli kesirlere aciniz

(ref: xq11fa71) deki gibi surekli kesirlere acilan bir transfer fonksiyonu icin gerekli bilgisayar programini ve blok diyagramini yapin.

**Komplex Duzlem**




z=a+ib, $|z|=r=\overline{OQ}=\sqrt{a^2+b^2}$, a=r cos θ, b=r sin θ

$\sin\theta=\frac{b}{r}$, $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\tan\theta=\frac{b}{a}$,

**r: genlik, modulus, magnitude, amplitude, absolute value,**
**θ: aci, faz, angle, argument, phase**

**Komplex sayilarin kutupsal (polar) formu.**

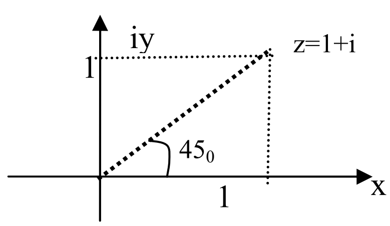
$z = a+bi=r\,e^{j\theta} = r < \theta$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

**Ornek CM1**: z=1+i sayisini complex duzlemde gosterin ve kutupsal formda ifade edin.

**Cozum**: $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=1.41$

$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{1}=\tan^{-1}1=45^0$

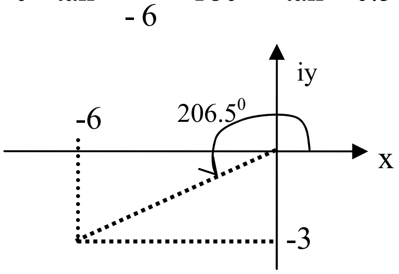



polar form is $z=1.41\,e^{j45(degree)}$
$z=1.41 < 45^0$

**Ornek CM2**: z=-6-3i sayisini complex duzlemde gosterin ve kutupsal formda ifade edin.

**Solution**: $r=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=6.7$

$\theta=\tan^{-1}\frac{-3}{-6}=180^0+\tan^{-1}0.5=180^0+26.5^0=206.5^0$




polar form is $z=6.7\,e^{j206.5(degree)}$
$z=6.7 < 206.5^0$

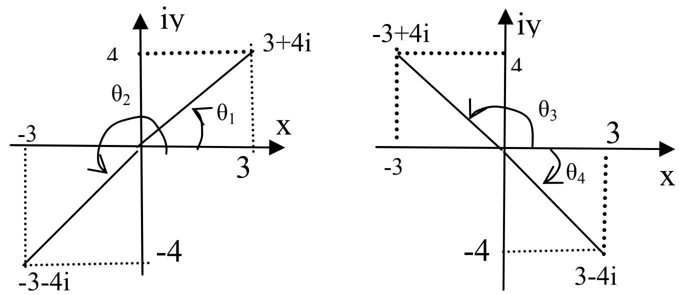
**Note:** $\frac{-3}{-6}=\frac{3}{6}$ **but** $\tan^{-1}\frac{-3}{-6}\neq\tan^{-1}\frac{3}{6}$

---

**Ornek CM2**: Asagidaki sayilari complex duzlemde gosterin ve kutupsal formda ifade edin.

a) $z_1$=3+4i b) $z_2$=-3-4i c) $z_3$ = -3+4i d) $z_4$ = 3 -4i

**Solution:**




**a)** $z_1$=3+4i

$\theta_1=\tan^{-1}\frac{4}{3}=\tan^{-1}1.33=53.13^0$

$r_1=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Polar form $z_1=5\,e^{j53.1(degree)}=5 < 53.13^0$

**b)** $z_2$=-3- 4i

$\theta_2=180+\tan^{-1}\frac{4}{3}=180+\tan^{-1}1.33=180^0+53.1^0=233.1^0$

$r_2=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Polar form $z_2=5\,e^{j233.1(degree)}=5 < 233.1^0$

**c)** $z_3$=-3+4i

$\theta_3=180-\tan^{-1}\frac{4}{3}=180-\tan^{-1}1.33=180^0-53.1^0=126.9^0$

$r_3=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Polar form $z_3=5\,e^{j126.9(degree)}\;5\,e^{j223.1(degree)}=5 < 126.9^0$

**d)** z1=3-4i

$\theta_4=-\tan^{-1}\frac{4}{3}=-\tan^{-1}1.33=-53.13^0$

$r_4=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Polar form $z_4=5\,e^{-j223.1(degree)}=5\,e\text{-}^{j53.1(degree)}=5<-53.1^0$

---

**Euler Formulu:** $\mathbf{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$

$e^{i60(degree)}=\cos 60^0+i\sin 60^0=0.5+0.866\,i$

$e^{i170(degree)}=\cos 170^0+i\sin 170^0=-0.98+0.17\,i$

$e^{i220(degree)}=\cos 220^0+i\sin 220^0=-0.76-0.64\,i$

$e^{i335(degree)}=\cos 335^0+i\sin 335^0=0.9-0.42\,i$

$e^{i2(radian)}=\cos 2(radian)+i\sin 2\,(radian)=-0.41+0.9\,i$

$e^{i2}=\cos 2+i\sin 2=-0.41+0.9\,i$

$e^{i17}$=cos 17 + i sin 17 = -0.27 - 0.96 i
$e^{-i2}$=cos (-2) + i sin (-2) = -0.41 - 0.9 i
$e^{-i17}$=cos (-17) + i sin (-17) = -0.27 + 0.96 i

**Carpma, bolme, us alma.**

**Ornek CM5-** $\frac{3+4i}{-4+6i}$ ifadesini hesaplayin.

**Method I.**

$$\frac{3+4i}{-4+6i}=\frac{(3+4i)(-4-6i)}{(-4+6i)(-4-6i)}=\frac{-12-18i-16i+24}{4^2+6^2}$$

$$=\frac{12-34i}{52}=0.23-0.65i$$

**Method II:** | 3+4i |= $\sqrt{3^2+4^2}$ =5

<(3+4i)=$\tan^{-1}$ (4/3)=$53.1^0$

| -4+6i |= $\sqrt{4^2+6^2}$ =7.21

<(-4+6i)= $\tan^{-1}\frac{6}{-4}$ = 180 - $\tan^{-1}\frac{6}{4}$ =180-56.3=$123.7^0$

**Kontrol:** $7.21e^{i123.7(degree)}$=7.21(cos $123.7^0$+ i sin $123.7^0$)
=7.21(-0.55 + i 0.83)
=7.21(-0.55 + i 0.83)
=- 3.9 + 5.9 i ≈ -4 +6 i

$$\frac{3+4i}{-4+6i}=\frac{5\ e^{i53.1^0}}{7.21\ e^{i123.7^0}}=\frac{5}{7.21}e^{i(53.1-123.7)}=0.69\,e^{i(-70.6)}$$

$$=0.69\left(\cos(-70.6)+i\sin(-70.6)\right)=0.69(0.33-i\,0.94)$$

= 0.23 - 0.65i

**Ornek CM6-**

P=(-6+10i)(-3+i)(10-4i)(7+3i)
Q=(5+3i)(3-7i)(-5+2i)(-9+3i)

Calculate

$$A=\frac{P}{Q}=\frac{(-6+10i)(-3+i)(10-4i)(7+3i)}{(5+3i)(3-7i)(-5+2i)(-9+3i)}$$

**Cozum: Method 1:**

(-6+10i)(-3+i)=(-6)(-3)-6i-30i+10$i^2$ =18-10-6i-30i
=8-36i
(10-4i)(7+3i)= 82+2i
P=(8-36i)( 82+2i)= 728-2936i
-----------------------
(5+3i)(3-7i)= 36-26i
(-5+2i)(-9+3i)= 39-33i
Q=(36-26i)(39-33i)= 546-2202i
-------------------..

$$A=\frac{(728-2936i)}{(546-2202i)}=\frac{(728-2936i)(546+2202i)}{(546-2202i)(546+2202i)}$$

$$\frac{6862560+0i}{5146920}=1.3333+0i$$

**Method 2:**

Pay

-6+10i=$\sqrt{6^2+10^2}\ e^{i\tan^{-1}\frac{10}{-6}}$=11.66 $e^{121i}$
-3+i=3.16 $e^{161i}$
10-4i=10.77 $e^{-21.8i}$
7+3i=7.61 $e^{23.2i}$
Amp=11.66 *x* 3.16 *x* 10.77 *x* 7.61=3019.8
Angle=121+161+(-21.8)+23.2=283.4

Payda

5+3i=5.83 $e^{30.9i}$
3-7i=7.61 $e^{-66.8i}$
-5+2i =5.38 $e^{158i}$
-9+3i 9.48 $e^{161i}$
Amp=5.83 7.61 5.38 9.48=2262.7
Angle=30.9+(-66.8)+(158)+161=283.1

**Genlikler bolunur. Acilar cikartilir**

$$A=\frac{3019.8\,e^{283.4i}}{2262.7\ e^{283.1i}}=\frac{3019.8}{2262.7}\ e^{(283.4-283.1)i}$$

=1.33 $e^{0.3i}$ = 1.33 (cos 0.3 +i sin 0.3 )
=1.329+0.0069i

Method 1 ve method2 ayni sonucu verirler..

**Ornek CM2-** q=3-4i calculate a) $q^2$ b) $q^7$.

**Solution:** 3-4i=$\sqrt{3^2+4^2}\ e^{i\tan^{-1}\frac{-4}{3}}$ =5 $e^{-i53.13}$

a) $(3-4i)^2$= $(5\ e^{-i53.13})^2$=$5^2$ $e^{2(-i53.13)}$= 25 $e^{-i106.26}$
=25(25*(-0.279 -i 0.960 )=
=-6.999 - i 24.00025

b) $(3-4i)^7$=$(5\ e^{-i53.3})^7$=$5^7$ $e^{7(-i53.3)}$= 78125 $e^{-i371.9}$
=78125 [cos(-371.9)+ i sin(-371.9) ]
=78125 [cos(-371.9)+ i sin(-371.9) ]
=78125(0.97-i 0.22 )
=76122.6- i 17574.1

**Note:**

$(3-4i)^2$=(3-4i) (3-4i)=-7-24i fakat biz
$(3-4i)^2$=-6.999 - i 24.00025 olarak bulduk. Aradaki fark yuvarlatma hatalarindan dolayidir.
$\tan^{-1}$(-4/3)=-53.13 aldik gercegi
$\tan^{-1}$(-4/3)=-53.13010235…