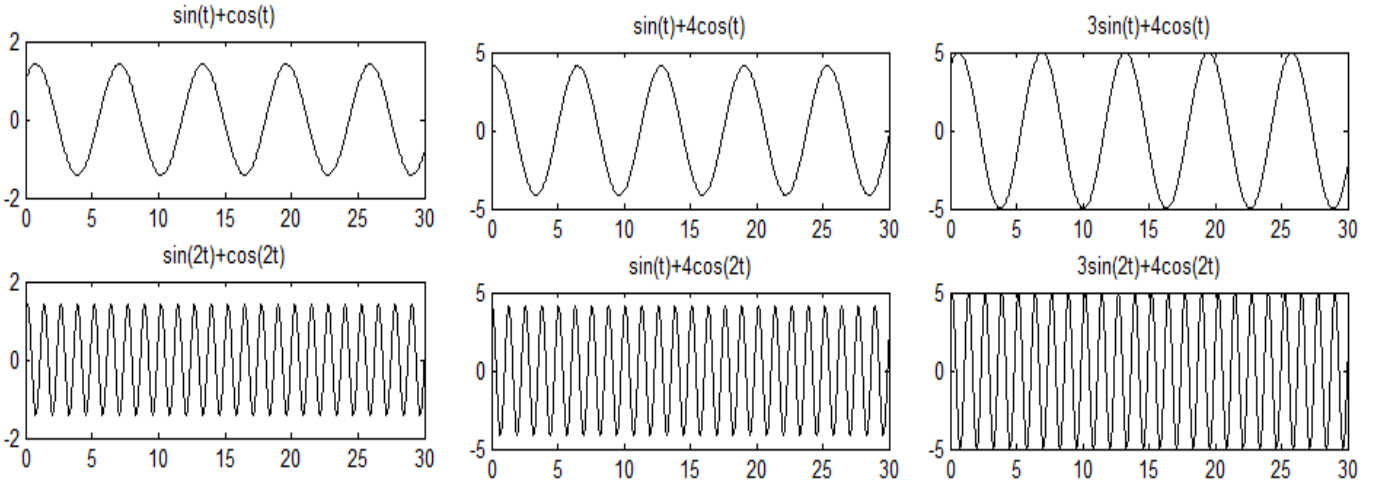


Sekil(xz13) Cesitli sinuzoidal isaretlerden uretilmis periyodik isaretler



Sekil(xz15) Aynı frekansdaki sinus ve kosinus isaretlerin toplami yine ayni frekansdadir.

Yukaridaki islemlerin tersi de bazi istisnalar disinda dogrudur. Yani T_0 periyotlu bir isaret $w_0, 2w_0, 3w_0, kw_0,$ acisal frekansli sinus ve kosinus fonksiyonlari cinsinden yazilabilir. Bir periyodik isaretin sinus ve kosinus fonksiyonlari cinsinden yazilmasi islemine isaretin **FURIER SERISINE** acilmasi denir. Fiziksel olarak elde edilen butun periyodik isaretler Fourier serisine acilabilir. Fourier serilerine girmeden once isaretlerin spektrumu kavraminin incelenmesi faydali olacaktır.

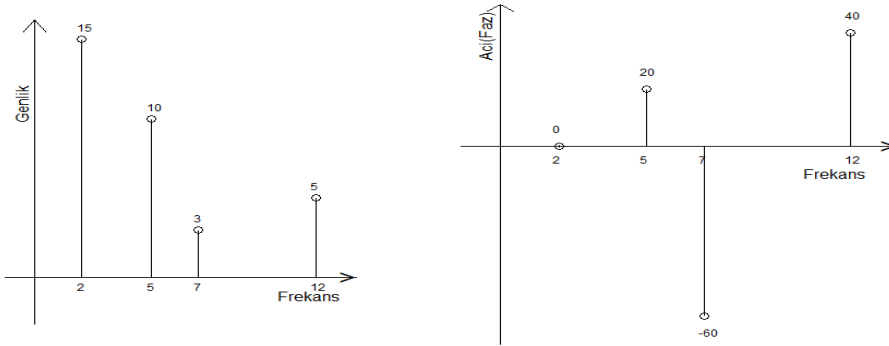
Sinuzoidal Isaretlerin Spektrumu

$g(t)=A\cos(w_0t+\theta)$ seklindeki bir isarete A genlik, w_0 acisal frekans θ aci(faz)dir. Pratikteki isaretler tek bir sinuzoidal dalgadan degil bircok sinuzoidal dalganin toplamindan meydana gelir. Bu tip isaretleri bir grafikte toplayarak gozlemlemek icin genlikler bir eksende fazlar bir eksende gosterilir. Isaretin fazi icin kosinus'lu terim referans alinir. Yani $\cos(wt)$ nin fazi 0 $\cos(wt+\theta)$ nin fazi θ dir. Sinuslu terimlerin fazi asagida gorulecegi gibi trigonometrik bagintilar kullanilarak kosinuslu terim haline getirilerek bulunur. Kosinuslu terimin fazinin sifir kabul edilmesinin nedeni geleneksel olarak sinuzoidal terimleri kompleks duzlemde donen vektorlerden meydana geldiği varsayilarak incelenmesi ve kosinuslu terimi temsil eden vektorlerin baslangic noktasinin reel eksen olmasidir.

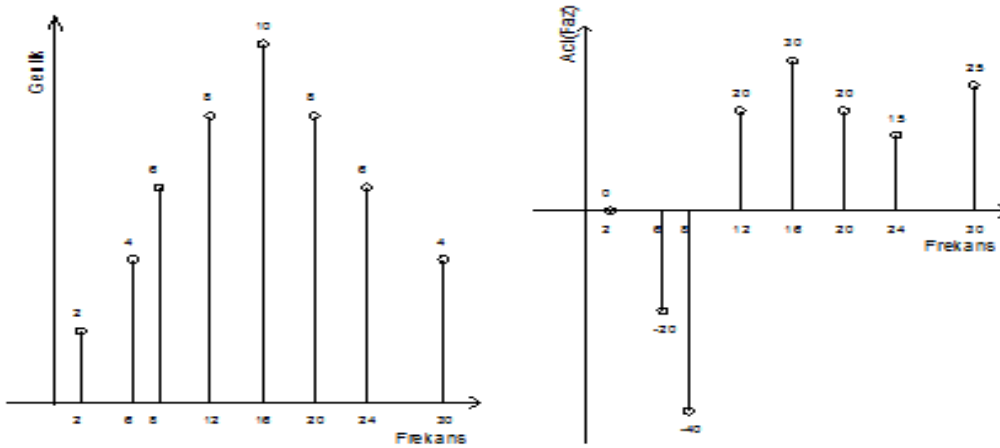
Tek Tarafli Spektrum

Yukarida anlatilanalara gore

$g(t)=15\cos(2t)+10\cos(5t+20)+3\cos(7t-60)+5\cos(12t+40)$ isaretinin spektrumu sekil(xz23) deki gibi olacaktır.



Sekil(xz23) $g(t)=15\cos(2t)+10\cos(5t+20)+3\cos(7t-60)+5\cos(12t+40)$ isaretinin tek tarafli spektrumu



Sekil(xzx235) $g(t)=2\cos(2t)+4\cos(6t-20)+6\cos(8t-40)+8\cos(12t+20)+10\cos(16t+30)+8\cos(20t+20)+6\cos(24t+15)+4\cos(30t+25)$

$g(t)$ 'nin icinde sinuslu terim varsa, $\sin(x)=\cos(90-x)=\cos(x-90)$ bagintisi kullanilarak sinuslu terim kosinuslu terim haline donusturulur.

Ornek: $g(t)=2\sin(5t)+4\sin(10t+33)+12\cos(15t-40)+5\cos(19t+20)+7\cos(23t+30)+13\sin(27t+20)$

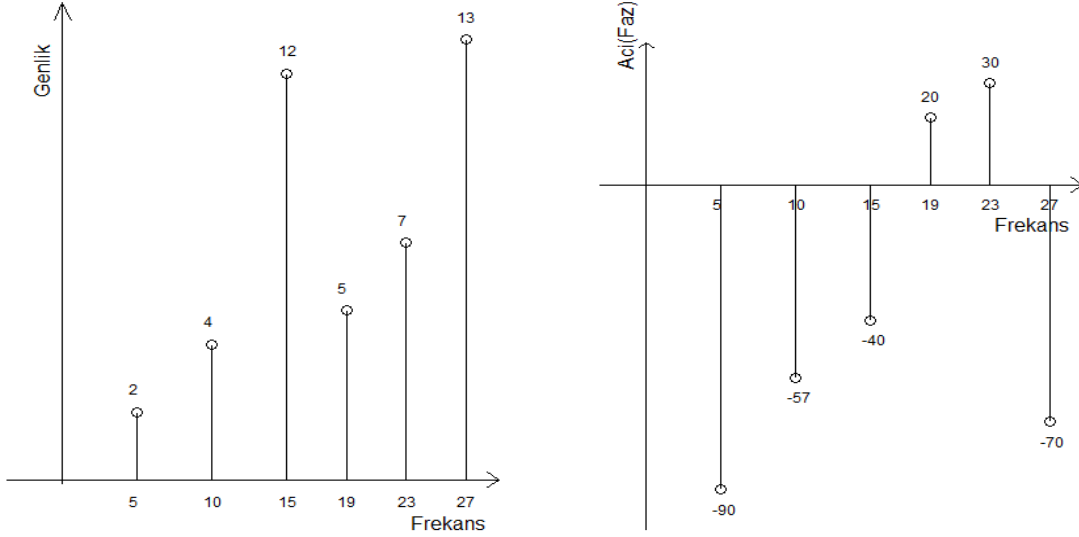
$\sin(x)=\cos(90-x)=\cos(x-90)$

$$\sin(5t)=\cos(5t-90)$$

$$\sin(10t+33)=\cos(10t+33-90)=\cos(10t-57)$$

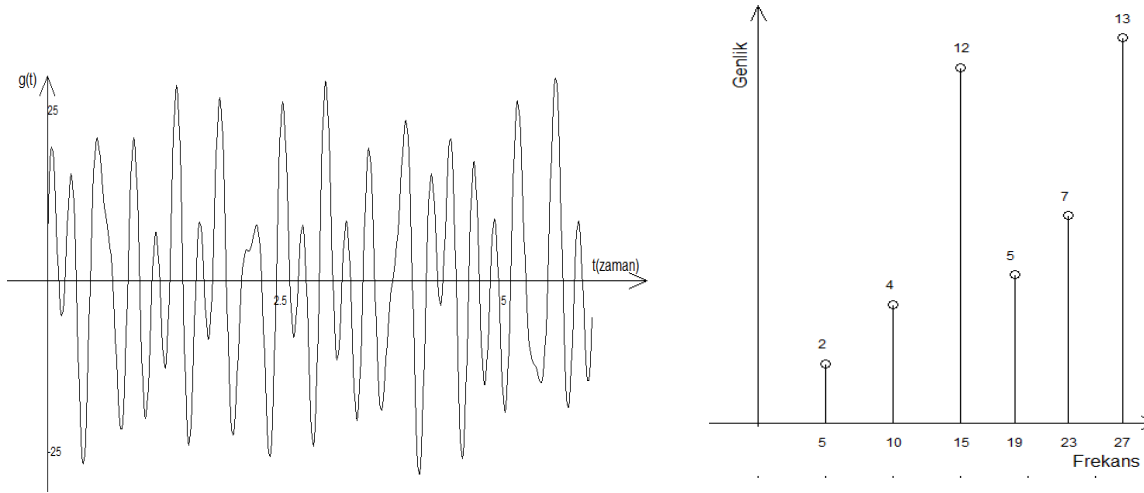
$$\sin(27t+20)=\cos(27t+20-90)=\cos(27t-70)$$

$$g(t)= 2\cos(5t-90)+ 4\cos(10t-57) +12\cos(15t-40)+5\cos(19t+20)+7\cos(23t+30) +13\cos(27t-70)$$



OZET:

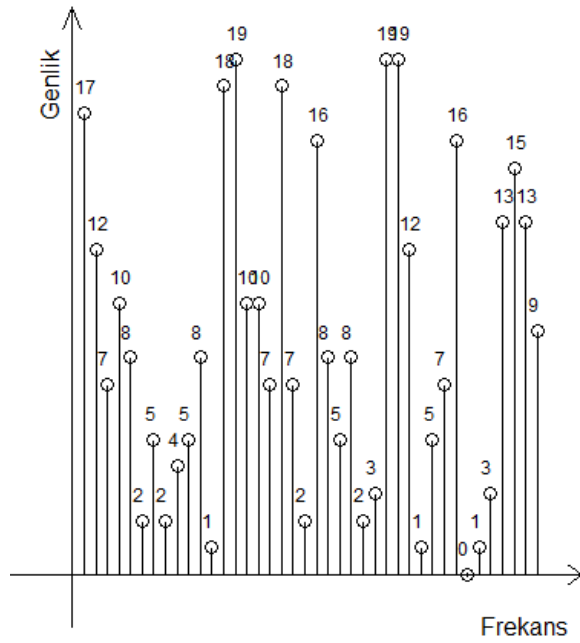
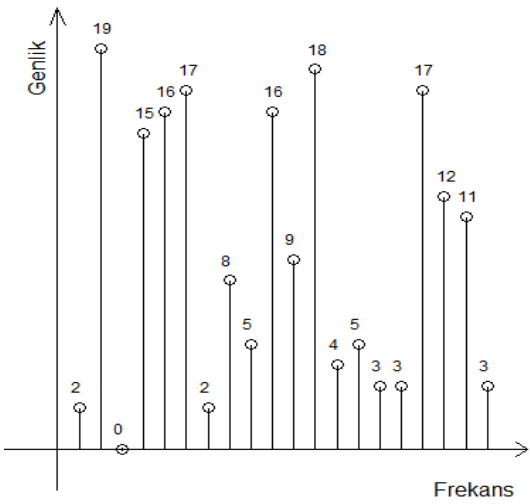
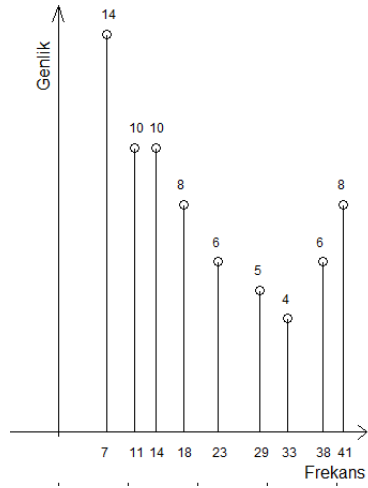
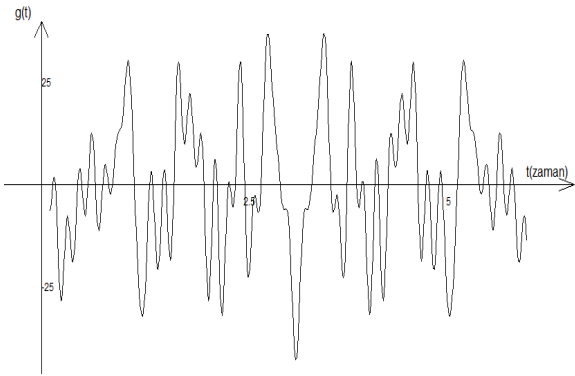
$$g(t)= 2\cos(5t-90)+ 4\cos(10t-57) +12\cos(15t-40)+5\cos(19t+20)+7\cos(23t+30) +13\cos(27t-70)$$



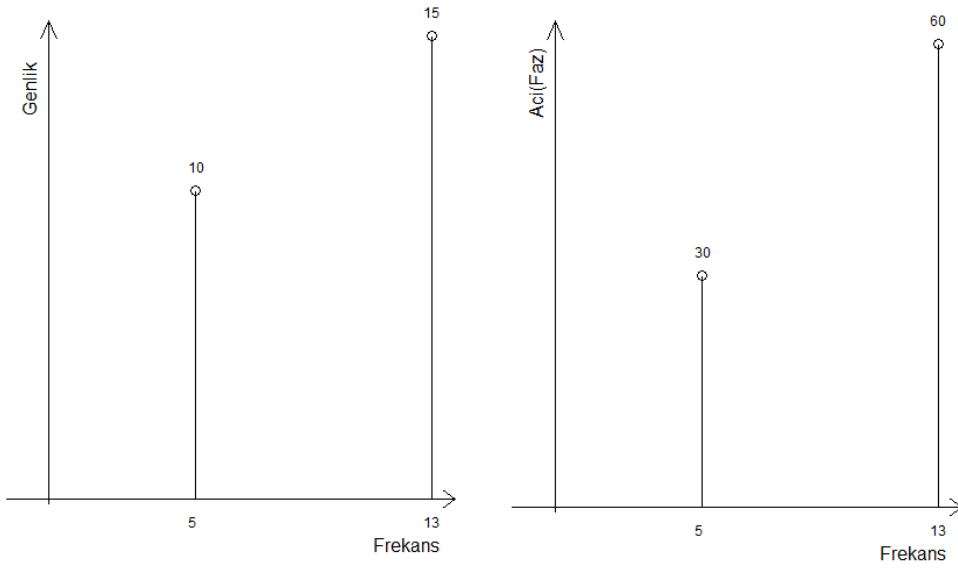
Goruldu gibi g(t),t grafigine bakarak g(t) nin icinde ne oldugunu bilmek imkansizdir. Halbuki Genlik spektrumun bakarak isaretin icinde ne oldugunu anlayabiliriz.

Ornek 231

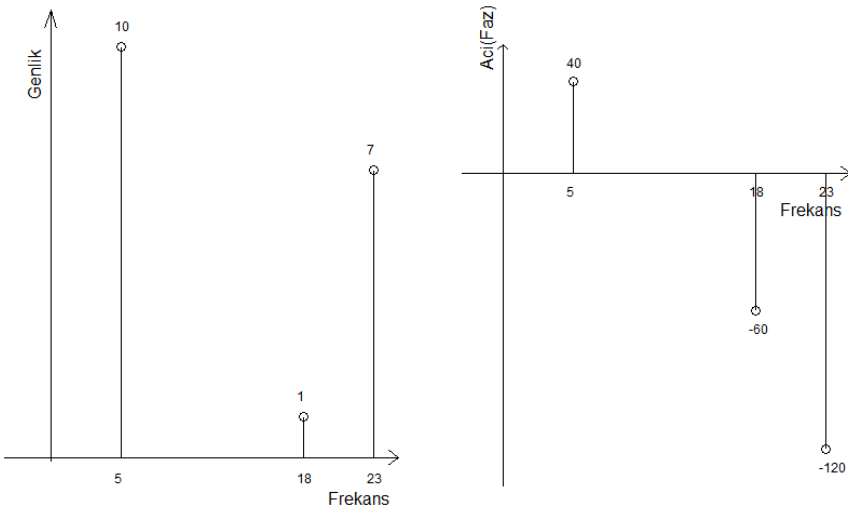
$$g(t)= 14\cos(5t)+10\cos(10t)+ 10\cos(15t)+ 8\cos(20t)+ 6\cos(25t)+5\cos(30t)+4\cos(35t)+6\cos(40t)+8\cos(45t)$$

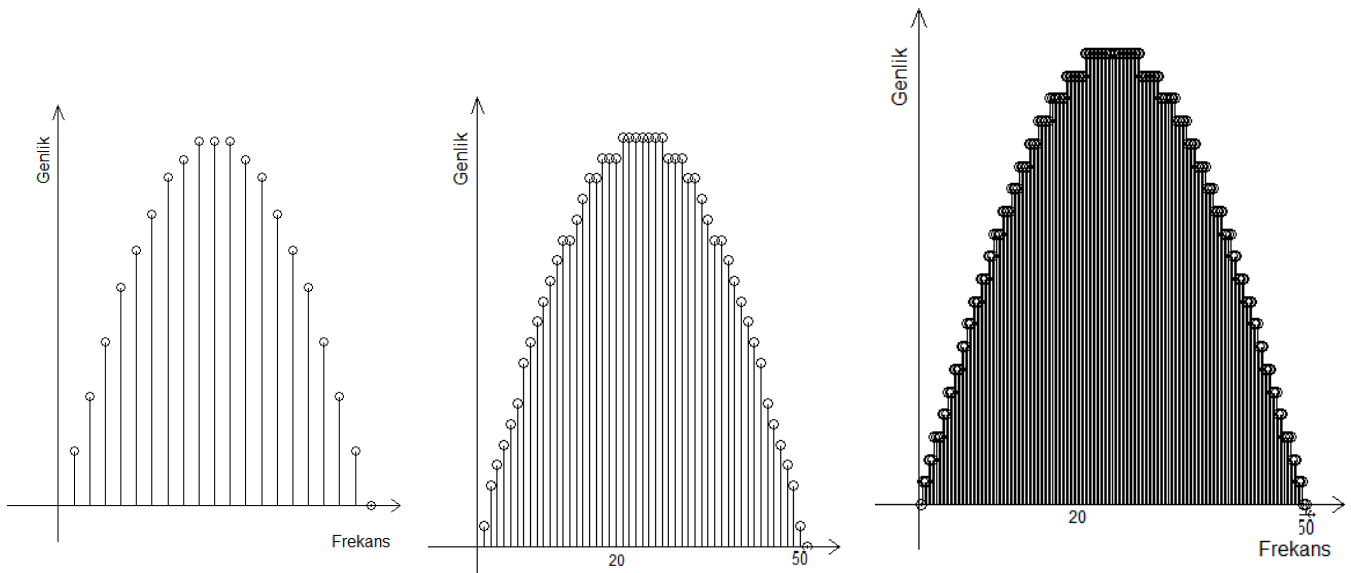
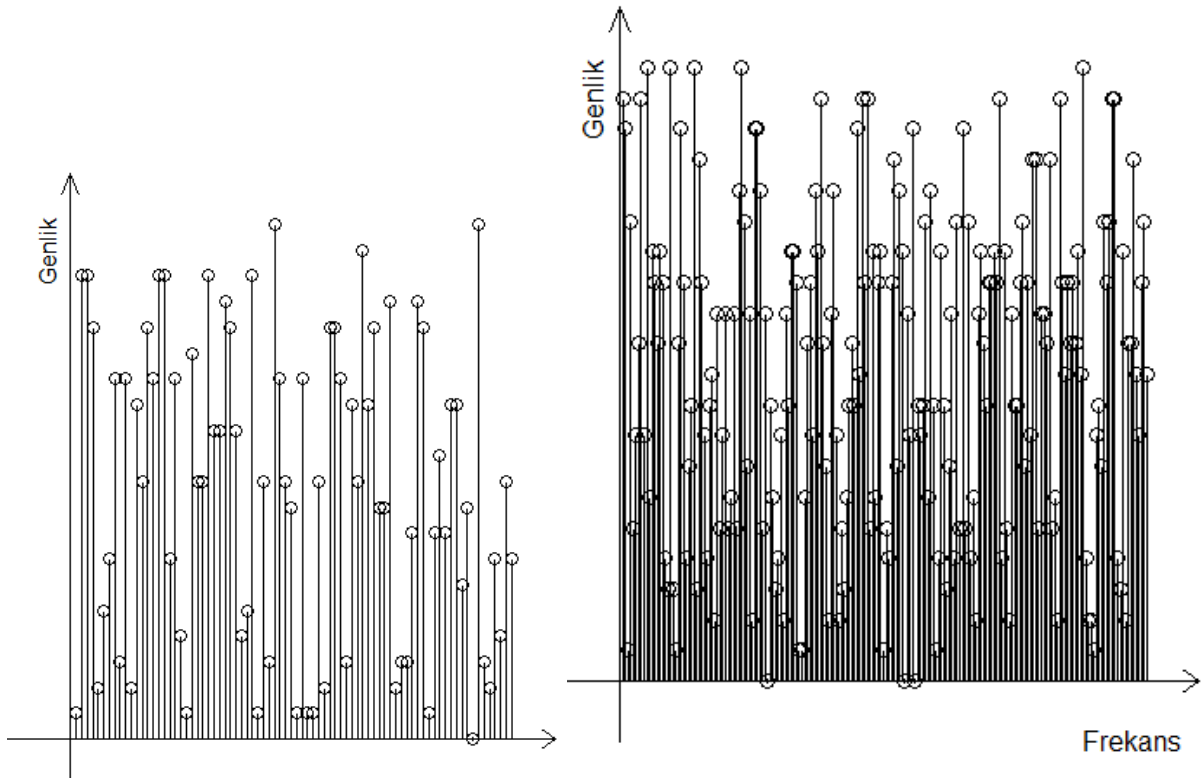


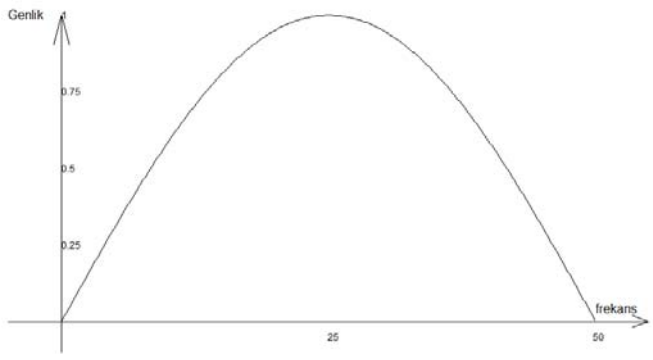
Ornek 347. Genlik ve aci spektrumu sekilde verilen $g(t)$ isaretini yazin.



Ornek 349. Genlik ve aci spektrumu sekilde verilen $g(t)$ isaretini yazin.







FOURIER TRANSFORM

In signal processing $\omega = 2\pi f$ is used. (ω is angular frequency radian/second)

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

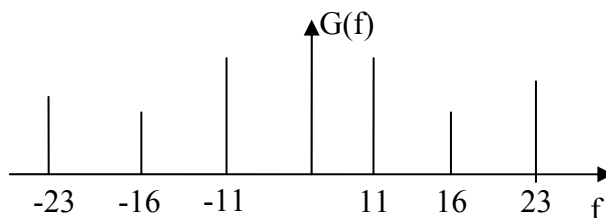
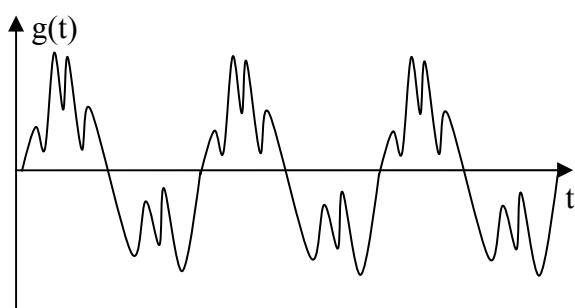
In communication systems f is used (f is frequency. 1/second=Hertz)

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \quad \left(\text{There is no } \frac{1}{2\pi} \right)$$

$$F\{g(t)\} = G(f) \quad F^{-1}\{G(f)\} = g(t)$$

$$g(t) \leftrightarrow G(f)$$

Where is Fourier Transform used.



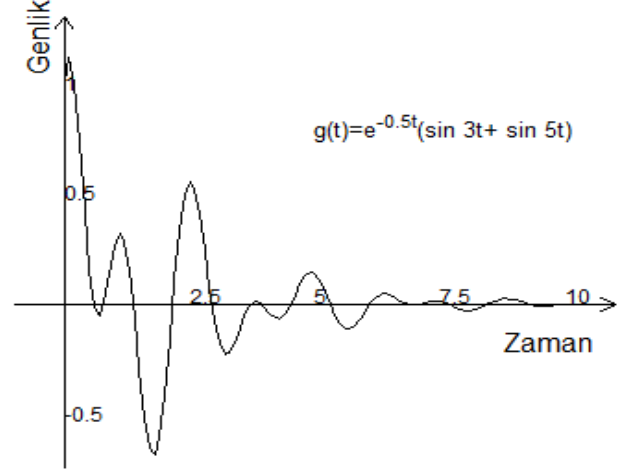
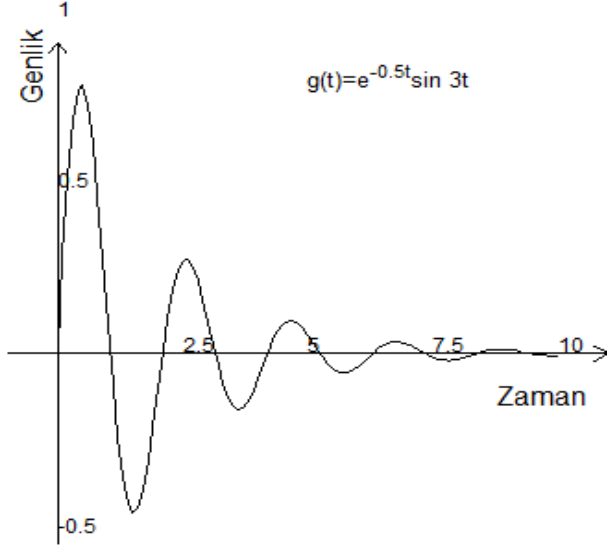
We cannot say anything about $g(t)$ by examining $g(t)$ versus t graphics.

If we examine $G(f)$ we can say that $g(t)$ contains three frequencies 11Hz, 16Hz, 23 Hz.

$$g(t) = a \cos 2\pi 11t + b \cos 2\pi 16t + c \cos 2\pi 23t$$

FURIER DONUSUMU

Periyodik isaretleri Furier serisine acararak isaretin hangi sinuzoidal bilesenlerden meydana geldigini bulabiliyoruz. Simdi sekil(ref: xdd1)'de gosterilen $g(t) = e^{-0.1t}(\sin(3t) + \cos(5t))$ isaretini ele alalim.



S(xdd1) a) $e^{-0.5t}(\sin 3t)$ b) $e^{-0.5t}(\sin(3t) + \cos(5t))$

isaretleri

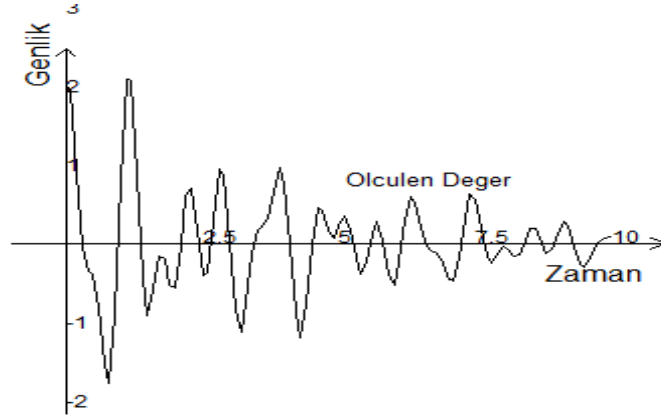
$g(t)$ isareti $e^{-0.5t}$ ve $\sin(3t) + \cos(5t)$ isaretlerinin carpimidir. Yani $g(t)$ isaretinin icinde saklanmis olarak sinuzoidal isaretler mevcuttur. Ancak $g(t)$ isareti periyodiklik sartini saglamaz, dolayisiyla Furier serisine acilamaz.

Bilgisayarda bir diskette veya grafik olarak elimizde $g(t)$ isareti varken, $\sin(3t)$ ve $\cos(5t)$ isaretini $g(t)$ isaretinin icinden nasil cekip cikaracagiz? Daha acik bir ifade ile grafigi inceleyerek bu isaret $\sin(3t)$ 'li $\cos(5t)$ 'li terimler barindiriyor diyebilecegimiz bir yontem varmidir.

Elektrik devrelerinde bir koldan gecen akim, bir robot kolundaki titresim asagidaki gibi olabilir.

$$g(t) = F_1 e^{-q_1 t} \cos(w_1 t + \theta_1) + F_2 e^{-q_2 t} \cos(w_2 t + \theta_2) + F_3 e^{-q_3 t} \cos(w_3 t + \theta_3) \quad \text{xfdd2}$$

Akimi olctugumuzde Sekil(ref: xdd2)'deki gibi bir grafikte karsilasabiliriz. Olcum sonuclarina bakarak (Grafigi inceleyerek) $F_1, F_2, F_3, w_1, w_2, w_3, q_1, q_2, q_3$ degerleri hesaplanmak istenmektedir.



Sekil(xdd2) Fiziksel olarak olculen deger.

Gercek dunyadan fiziksel olcumlerle elde edilen isaretler cogu kere periyodik degildir, fakat icerisinde yukaridaki ornekte oldugu gibi sinuzoidal terimler bulundururlar. Furier donusumu bu gibi periyodik olmayan isaretlerin iclerindeki sinuzoidal terimlerin frekanlarini ve genliklerini ($F_1, F_2, F_3, w_1, w_2, w_3, q_1, q_2, q_3$ katsayilarini) hesaplamak icin kullanilan bir alettir. Furier serisi acilimi sadece periyodik isaretler icin olmasina karsilik Furier donusumu ile periyodik olmayan bir isaretin genlik ve faz spektrumu elde edilebilir. Bununla beraber Furier donusumu periyodik isaretlerin spektrumunu elde etmek icin de kullanilabilir.

Furier Serisinden Furier Donusumunun Hesaplanmasi

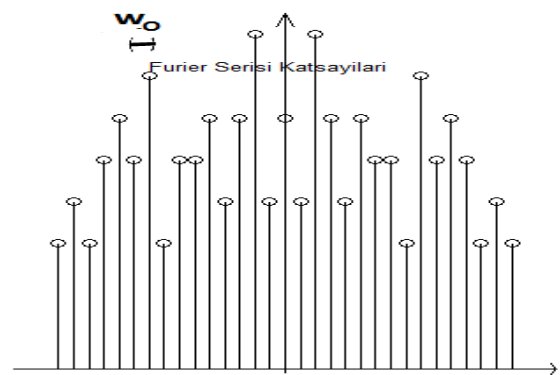
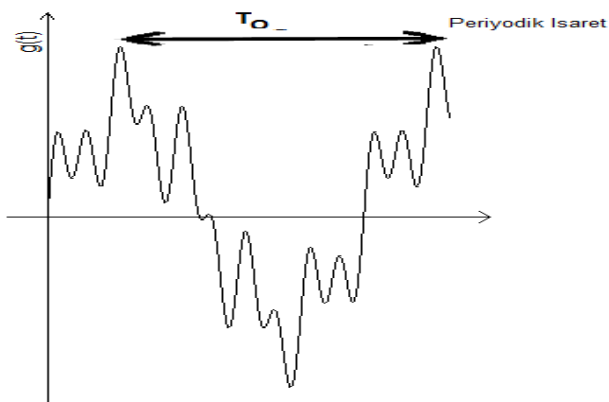
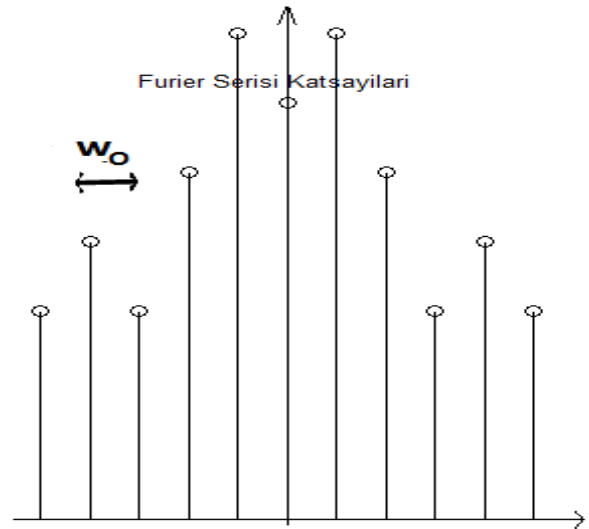
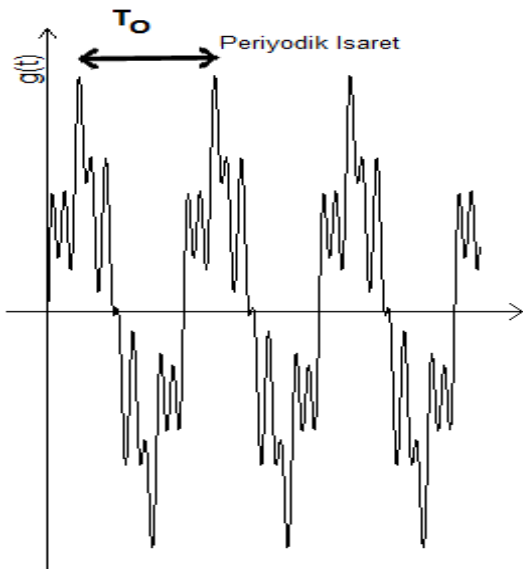
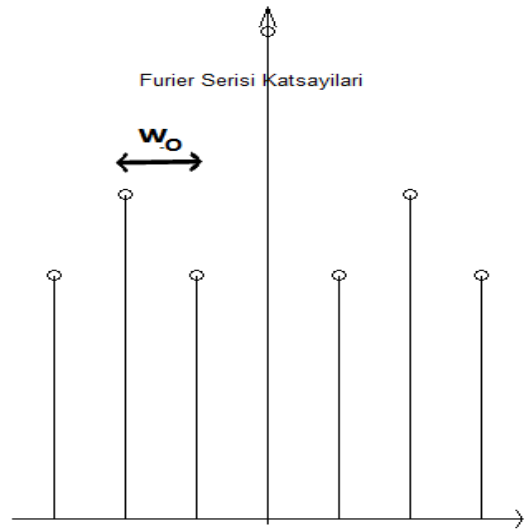
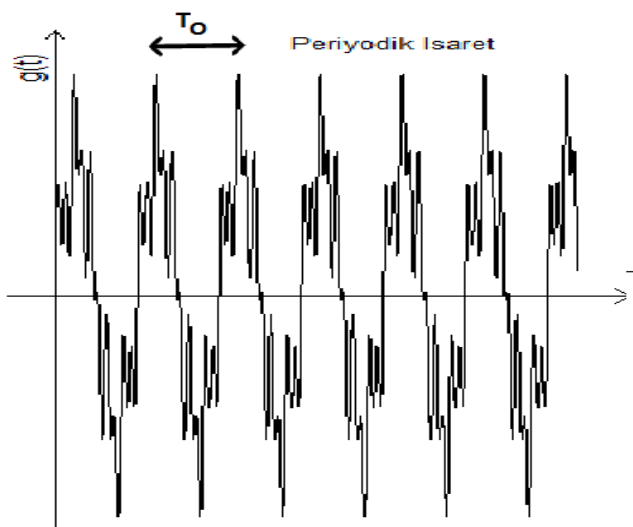
Periyodik olmayan bir isaretin spektrumunu elde etmek icin once periyodik isaretin spektrumuna kisa bir goz atalim. Kompleks Furier serisi bagintisi (ref: xq1b71) bolumden

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jnw_0 t} \quad \text{a12}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-jnw_0 t} dt \quad \text{a13}$$

olarak verilmisti. (t_0 rin secimi keyfi oldugundan $t_0 = \frac{T_0}{2}$ olarak alinmistir.)

Sekil(ref: xfur1)'den goruldugu gibi $T_0 \rightarrow \infty$ oldugunda $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0$ gider. Bu hali Δw ile gosterelim.



Sekil(xfur1) FurierSerisinden Furier

donmusunun elde edilmesi

$$T_0 \rightarrow \infty \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \Delta\omega \quad \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

(ref: a13) esitligini yeniden duzenleyelim.

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \quad \text{a14}$$

(ref: a14) deki C_n degerini (ref: a12) de yerine yazalim.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \right] e^{jn\Delta\omega t} \quad \text{a15}$$

$n\Delta\omega$ degiskeni yerine surekli degisken olarak yeni ω tanimi koyalim. ve esitligi yeniden duzenleyelim.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \Delta\omega \quad \text{a16}$$

Simdi $T_0 \rightarrow 0$ oldugunda, $\Delta\omega$ cok kuculecek ve esitligin basindaki toplam isareti integrale donusecektir. Integral degiskeni olarak $\Delta\omega$ yerine geleneklere uygun olarak $d\omega$ yazarak esitlik yeniden duzenlenirse.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad \text{a17}$$

Koseli parantez ici $G(\omega)$ olarak tanimlanirsa (ref: a17) esitligi .

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{a18}$$

haline gelir.

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{a19}$$

olarak tanimlanmistir. (ref: a18) ve (ref: a19) esitlikleri Furier donusumu ve ters Furier donusumu olarak adlandirilir. Furier ve ters Furier donusumleri

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \quad \#$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega) \quad \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = g(t) \quad \text{a20}$$

sembolleri ile gosterilir.

Bir periyodik isaretin Furier serisine aciliminda ayrik degerlerde frekans bilezenleri

vardir. Periyodik olmayan isaretin Furier donusumu sonucu isaretin ayrik dedgil butun frekans araliginda bilesenleri vardir.

Furier Transformu alinabilen fonksiyonlar:

Furier donusumunun tanimina gore Furier donusumunun olabilmesi icin

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j\omega t} dt$$

integralinin hesaplanabilmesi gerekir. $|e^{j\omega t}|=1$ oldugundan ucgen esitsizligi ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j\omega t} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)e^{j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \quad \text{g211}$$

yazilabilir. Ayrica eger

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad \text{g212}$$

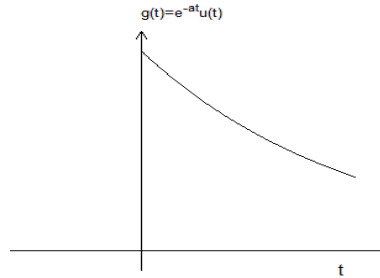
ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{g213}$$

sarti da saglanir. Dolayisiyla (ref: g212) veya (ref: g213) sartlarindan birisi saglanirsa $g(t)$ nin Furier donusumu alinabilir. Bunun anlami ise $g(t)$ nin $-\infty < t < \infty$ araliginda t eksenini ile arasinda kalan alanin sinirli olmasi sonsuz olmamasidir. Bu sarti $g(t) = e^{-at}u(t)$ gibi fonksiyonlar saglar. Fakat $g(t) = u(t)$, birim basamak fonksiyonu, gibi bazi fonksiyonlar bu sarti saglamadiklari halde Furier donusumleri vardir. Bu tip özel fonksiyonların Furier donusumleri genelleştirilmiş fonksiyonlar kullanılarak bulunur[ref44??]. Fiziksel isaretlerin Furier donusumleri vardir.

Ornek Problem

$u(t)$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere $g(t) = e^{-at}u(t)$ fonksiyonunun Furier donusumunu bulun



Sekil(xq2sq10) $g(t) = e^{-at}u(t)$ fonksiyonu

(ref: a19) bagintisi geregi

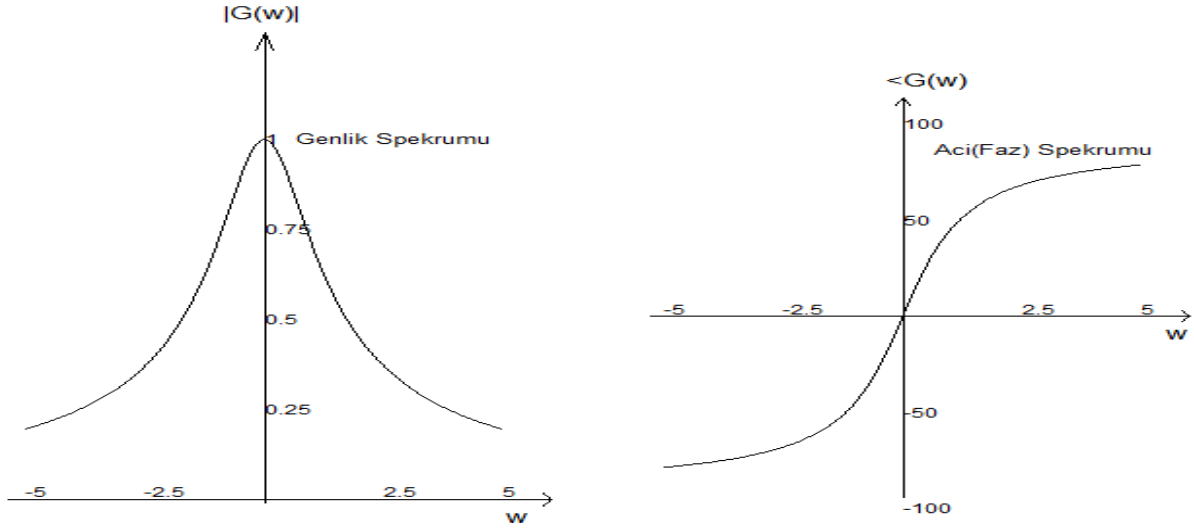
$$\begin{aligned}
G(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{-(a+j\omega)} [e^{-(a+j\omega)t}]_0^{\infty} = \frac{-1}{a+j\omega} [e^{-\infty} - e^0] \\
&= \frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0 \text{ için geçerli}
\end{aligned}$$

$a < 0$ için integral yakınsamaz. $G(w)$ nin genliği ve fazi (Ek-ref: appx31)'de verilen yöntemle hesaplanır.

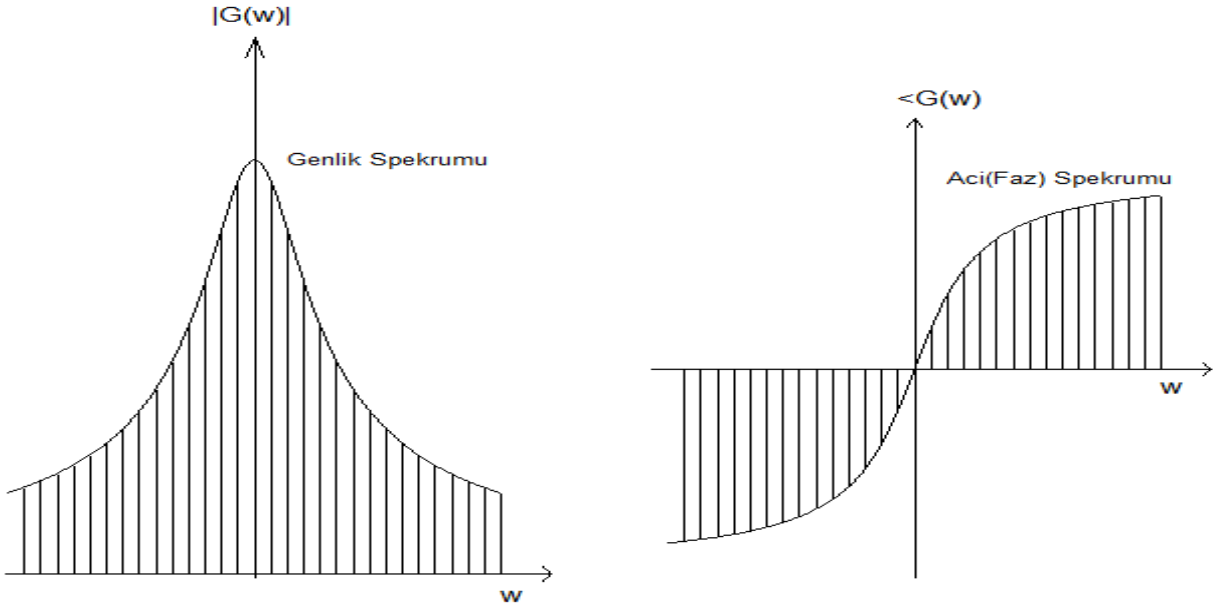
$$|G(w)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}$$

$$\angle G(w) = \operatorname{argtg} \frac{0}{1} - \operatorname{argtg} \frac{w}{a} = -\operatorname{argtg} \frac{w}{a}$$

w 'ya cesitli degerler vererek $|G(w)|$ ve $\angle G(w)$ degerlei hesaplanır ve grafik cizilir. Verilen $g(t)$ fonksiyonuna iliskin genlik ve faz spektrumu $a=1$ icin sekil(ref: xq2sq11)'de goruluyor.



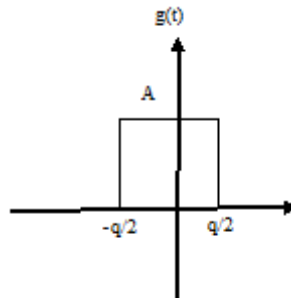
Sekil(xq2sq11) $g(t) = e^{-t}u(t)$ 'nin genlik ve faz spektrumu.



Sekil(xq2sq51) $g(t) = e^{-t}u(t)$ 'nin genlik ve faz spektrumunu kompleks furier katsayilari gibi temsil edilmesi .

Ornek Problem: $\prod\left(\frac{t}{q}\right)$ olarak gosterilen Sekil(ref: xsx21)deki darbenin Furier Donusumunu bulun.

$$g(t) = \prod\left(\frac{t}{q}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < q \\ 0 & |t| > q \end{cases}$$



Sekil(xsx21) Dikdortgen darbe fonksiyonu

Isaretin $-\infty < t < -q$ ve $q < t < \infty$ araliklarindaki degeri sifir oldugundan Furier donusumu icin gerekli integrali sadece bu aralikta hesaplamak yeterlidir.

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-q}^q Ae^{-j\omega t} dt = A \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-q}^q \\
&= A \frac{-1}{j\omega} (e^{-j\omega q} - e^{j\omega q}) = A \frac{1}{j\omega} 2j \frac{1}{2j} (e^{j\omega q} - e^{-j\omega q}) \\
&= \frac{2A}{\omega} \sin(\omega q) = 2Aq \frac{\sin(\omega q)}{\omega q} = 2Aq \frac{\sin(\pi \frac{\omega q}{\pi})}{\pi \frac{\omega q}{\pi}} \\
&= 2Aq \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega q}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

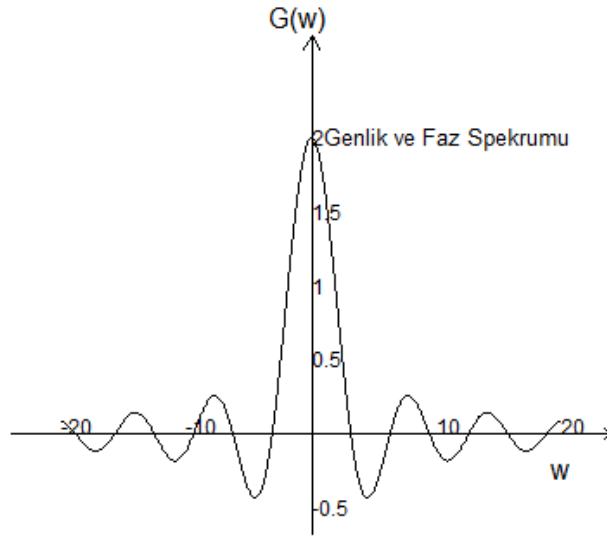
sinc fonksiyonu

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

#

olarak tanımlanmıştır. Genlik fonksiyonu reeldir (kompleks değildir). Bu nedenle faz spektrumunu ayrı bir grafik olarak çizmeye gerek kalmamıştır.

Odev Problem: Genlik ve faz spektrumunu ayrı ayrı çizin.



Sekil(xsx21) Dikdörtgen darbe fonksiyonunun genlik ve faz spektrumu.

Ozel Durumlar

Eger $g(t)$ reel ve çift fonksiyon ise ($g(t) = g(-t)$ ise)

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt$$

j332

Eger $g(t)$ reel ve tek fonksiyon ise ($g(t) = -g(-t)$ ise)

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(wt) dt$$

j333

bagintilari ile hesaplanabilir.

Furier serisi katsayilari ile Furier Donusumu arasindaki baginti (ref: rx45) de verilen kompleks Furier serisi Katsayisi ile (ref: a19) da verilen Furier Donusum formulunu tekrar yazalim.

$$c_p = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) e^{-jp w_0 t} dt$$

xqx357

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j w t} dt$$

xqx358

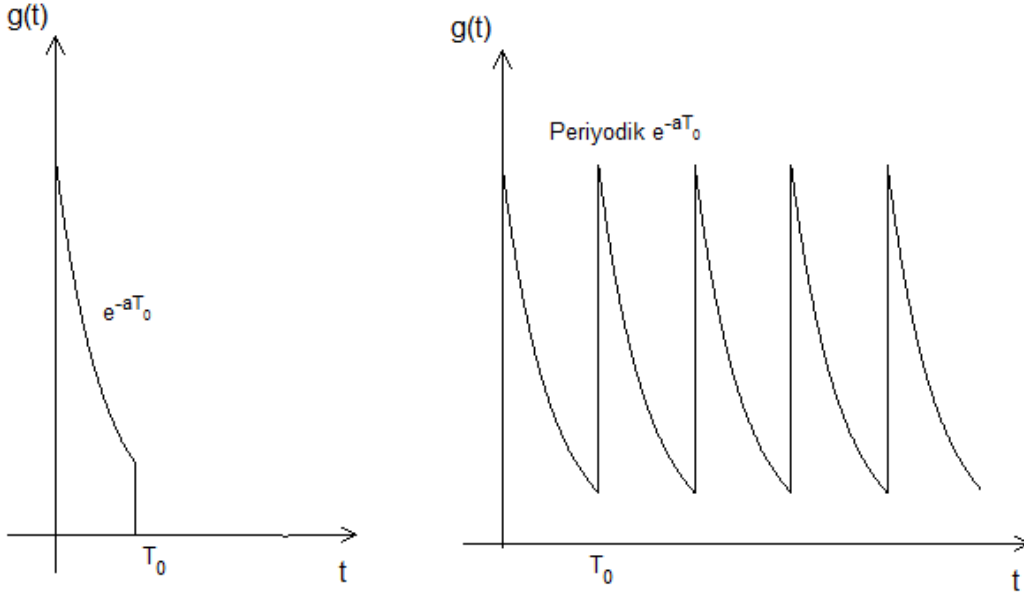
iki esitlige dikkat edilirse

$$c_p = \frac{1}{T_0} G(p w_0)$$

xqx766

bagintisi hemen goze carpar. Yani periyodik bir isaretin kompleks serisi katsayilari ile o isaretin bir periyodunun Furier donusumu arasinda ref: xqx766 bagintisi mevcuttur.

Sekil(ref: xqs391) deki $g(t)$ isaretinin Furier donusumunu $G(w)$ 'yi bulun. Buldugunuz $G(w)$ 'dan faydalanarak Sekil(ref: xqs392) deki periyodik isaretin kompleks Furier Serisi katsayilarini hesaplayin



Sekil(xqs391) a) $g(t) = e^{-at}$, $t > T_0$ için $g(t) = 0$
 $g(t) = e^{-at}$, T_0 ile periyodik

b) periyodik

Önce sekil ref: xqs391.a)'in Fourier dönüşümünü bulalım.

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{T_0} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \left| \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \right|_0^{T_0} = \frac{-1}{a+j\omega} [e^{-(a+j\omega)T_0} - e^0]$$

$$= \frac{-1}{a+j\omega} [e^{-(a+j\omega)T_0} - 1]$$

Şimdi de kompleks Fourier serisi katsayılarını (ref: xqx766) bağıntısı ile hesaplayalım.

$$c_p = \frac{1}{T_0} \left\{ \frac{-1}{a+jp\omega_0} [e^{-(a+jp\omega_0)T_0} - 1] \right\}$$

$\omega_0 T_0 = 2\pi$ olduğu dikkate alınırsa

$$c_p = \frac{-1}{aT_0 + jp2\pi} [e^{-aT_0} - 1]$$

olarak bulunur.

Ödev Problem: kompleks Fourier serisi katsayılarını () bağıntısı ile hesaplayın ve sonuçları karşılaştırın.

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Lineerlik

$$\mathcal{F}[g_1(t)] = G_1(w) \quad \mathcal{F}[g_2(t)] = G_2(w)$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}[g_1(t) + g_2(t)] = G_1(w) + G_2(w)$$

dir.

İsbat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_1(t) + g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(t) + g_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[g_1(t)] + \mathcal{F}[g_2(t)] \end{aligned}$$

Simetri

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad \text{ise} \quad \mathcal{F}[G(t)] = 2\pi g(-w)$$

özelliği vardır.

İsbat: (ref: a18) eşitlikte w yerine x sonra da t yerine $-w$ koyalım.

$$g(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-jxw} dx$$

şimdi de x yerine t koyalım.

$$g(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$$

veya

$$2\pi g(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[G(t)]$$

Örnek Problem $g(t) = \frac{1}{a+jt}$ nin Fourier dönüşümünü bulun.

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+j\omega}$$

olduğundan simetri prensibine göre

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi e^{aw}u(-w)] = \frac{1}{a+jt}$$

olacaktır. yani

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a+jt}\right] = 2\pi e^{aw}u(-w)$$

Ölçekleme

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad \text{ise} \quad \mathcal{F}[g(at)] = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{w}{a}\right)$$

s65

İsbat:

$$\mathcal{F}[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-j\omega t} dt$$

$x = at \quad t = \frac{x}{a} \quad dt = \frac{dx}{a}$ koyarak $t > 0$ için

$$\mathcal{F}[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jwx/a} \frac{dx}{a}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jx(w/a)} dx = \frac{1}{a} G\left(\frac{w}{a}\right)$$

elde edilir. $t < 0$ için

$$\mathcal{F}[g(at)] = \int_{\infty}^{-\infty} g(x)e^{-jwx/a} \frac{dx}{a}$$

$$- \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-jx(w/a)} dx = -\frac{1}{a} G\left(\frac{w}{a}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla teorem isbatlanmış olur.

Ornek Problem $\mathcal{F}[g(-t)] = G(-w)$ olduğunu gösterin.

(ref: s65) de $a = -1$ konarak problem çözülür.

Zaman ekseninde Kaydırma

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad \text{ise} \quad \mathcal{F}[g(t-a)] = G(w)e^{-jwa}$$

s66

İsbat:

$$\mathcal{F}[g(t-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-a)e^{-j\omega t} dt$$

$x = t-a \quad dt = dx$ koyarak

$$\mathcal{F}[g(t-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\omega(x+a)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\omega x} e^{-j\omega a} dx$$

$$= e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega a} G(w)$$

bulunur.

Ornek Problem $g(t) = [e^{-a|t-t_0|}]$ isaretinin Fourier Donusumunu hesaplayın.

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

oldugu (C.P.ref: s443) den biliniyordu. O halde kaydırma teoremi gereği

$$\mathcal{F}[e^{-a|t-t_0|}] = \frac{2a}{a^2 + w^2} e^{-j\omega t_0}$$

olacaktır.

Frekans Ekseninde kaydırma

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \quad \text{ise} \quad \mathcal{F}[g(t)e^{jat}] = G(w-a)$$

s341

İsbat:

$$\mathcal{F}[g(t)e^{jat}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{jat} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(\omega-a)t} dt = G(w-a)$$

Ornek Problem $[g(t) \cos(at)]$ nin Fourier donusumunu hesaplayin.

$$\cos(at) = \frac{1}{2}(e^{jat} - e^{-jat})$$

yazilabilir. Frekans domeninde kaydirma teoremine gore

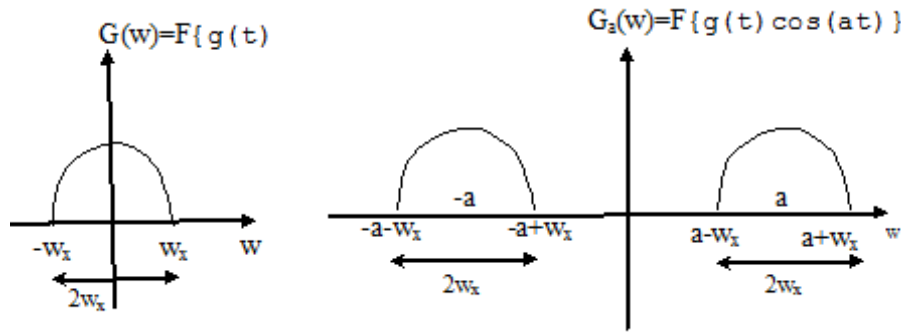
$$\mathcal{F}[g(t)e^{jat}] = G(w + a) \quad \mathcal{F}[g(t)e^{-jat}] = G(w - a)$$

yazilarak.

$$\mathcal{F}[g(t) \cos(at)] = \frac{1}{2}[G(w - a) + G(w + a)]$$

s211

elde edilir. Sekil(ref: x2.24) de $g(t)$ ve $g(t) \cos(at)$ isaretine iliskin spektrumlar goruluyor.



Sekil(x2.24) $g(t)$ ve $g(t)\cos(at)$ nin fur donusumleri

Odev Problem: $g(t)=10 \cos(2t)+5 \cos(5t)+8 \cos(7t)$, $m(t)=\cos(60t)$, $h(t)=g(t) m(t)$ isaretleri veriliyor. $g(t)$ ve $h(t)$ nin tek taraflı ve çift taraflı spektrumlarını cizin. yukarıdaki teoremin sonuçları ile karşılaştırın.

Not: $\cos(A)\cos(B)=0.5[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ bağıntisini kullanın.

Konvolüsyon

Tanım :

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z)f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-x)f_2(z)dx$$

bağıntisi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu olarak adlandırılır. Konvolüsyon bağıntisi birim impuls cevabı bilinen sistemlerin cevaplarını bulmada kullanılır. Örnek olarak birim impuls cevabı $h(t)$ olarak verilen bir sistemin girişine $f(t)$ isareti uygulanırsa sistem çıkışı $y(t) = h(t) * f(t)$ şeklinde hesaplanabilir. Ayrıca $H(w)$ sistemin transfer fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{F}[h(t)] = H(w)$ dir. Dolayısıyla konvolüsyon integrali bir sistemin herhangi bir girişe karşı sistemin çıkışını hesaplamak için kullanılır.

$$\mathcal{F}[g_1(t)] = G_1(w) \quad \mathcal{F}[g_2(t)] = G_2(w)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= G_1(w)G_2(w) \\ \mathcal{F}[g_1(t) g_2(t)] &= \frac{1}{2\pi} G_1(w) * G_2(w)\end{aligned}$$

İsbat:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(t-x)dx \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x)g_2(t-x)e^{-j\omega t}] dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-x)e^{-j\omega t} dt \right) dx\end{aligned}$$

İçerideki integralde zaman domeninde kaydırma teoremi uygulanırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-x)e^{-j\omega t} dt = G_2(w)e^{-j\omega x}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)G_2(w)e^{-j\omega x} dx = G_2(w) \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)e^{-j\omega x} dx \\ &= G_2(w)G_1(w)\end{aligned}$$

elde edilir.

Konvolüsyon integralini normal integral olarak analitik yöntemlerle hesaplamak çok zor, çoğu kere imkansızdır. Bu teorem konvolüsyon integrali hesaplanmadan konvolüsyon sonucunu elde etmeye yarar. Yani $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonunu hesaplamak için $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerini çarpıp ters Fourier dönüşümlerini bulmak yeterlidir.

Örnek Problem

$g_1(t) = e^{-at}u(t)$, $g_2(t) = u(t)$ olduğuna göre $g_3(t) = g_1(t) * g_2(t)$ konvolüsyonunu hesaplayın.

Bu durumda

$$g_1(x) = e^{-ax}u(x), \quad g_2(x) = u(x) \quad g_2(t-x) = u(t-x)$$

olacak ve $g_3(t)$ fonksiyonu

$$g_3(t) = g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}u(x)u(t-x)dx$$

şeklinde yazılacaktır. Öte yandan

$$x < 0 \text{ için } u(x) = 0$$

ve

$$x > t \text{ için } u(t-x) = 0$$

oldugundan $u(x)u(t-x)$ carpimi

$$u(x)u(t-x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < t \\ 0 & x > t \text{ ve } x < 0 \end{cases}$$

olacaktır. Dolayisiyla

$$\begin{aligned} g_3(t) &= g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-ax} 0 dx + \int_0^t e^{-ax} dx + \int_t^{\infty} e^{-ax} 0 dx \\ &= \int_0^t e^{-ax} dx = 1 - e^{-at} \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$t < 0 \text{ icin } e^{-ax}u(x)u(t-x) = 0$$

oldugundan bulunun

$$g_3(t) = 1 - e^{-at}$$

degeri sadece $t > 0$ icin gecerlidir. $t < 0$ icin $g_3(t) = 0$ dir.

Sekil(ref: x2.29) ?????da bu durum gosterilmistir.

Sekil(x2.29)????

Zaman domeninde turev

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \text{ ise}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = jwG(w)$$

#

Isbat:

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jw t} dt$$

kismi integrasyon ile ikinci tarafin integrali alinirsa.

$$u = g(t) \quad dv = e^{-jw t} dt \rightarrow du = \frac{dg(t)}{dt} dt \quad v = \frac{1}{-jw} e^{-jw t}$$

$$G(w) = \frac{1}{-jw} e^{-jw t} g(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{-jw} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} e^{-jw t} dt$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ oldugundan ilk terim sifirdir ve

$$jwG(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} e^{-jw t} dt = \mathcal{F}\left[\frac{dg(t)}{dt}\right]$$

elde edilir.

Frekans Domeninde turev

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(w) \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \text{ ise}$$

$$\mathcal{F}[-jtg(t)] = \frac{dG(w)}{dw}$$

İsbati zaman domeninde turevde oldugu gibi yapılabilir.

Zaman domeninde integral

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t g(x)dx\right] = \frac{1}{jw}G(w) + \pi G(0)\delta(w)$$

İsbat:konvolusyon tanimina gore:

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)u(t-x)dx$$

öte yandan

$$u(t-x) = \begin{cases} 1 & x \leq t \\ 0 & x > t \end{cases}$$

oldugundan

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t g(x)dx$$

konvolusyon teoremine gore

$$\mathcal{F}[g(t) * u(t)] = G(w)U(w) = G(w)\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right]$$

veya

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t g(x)dx\right] &= G(w)\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right] \\ &= \frac{G(w)}{jw} + \pi G(w)\delta(w) = \frac{G(w)}{jw} + \pi G(0)\delta(w) \end{aligned}$$

not: $\delta(w)$ $t = 0$ haric her yerde sifir oldugundan $G(w)\delta(w) = G(0)\delta(x)$ olacaktır. (Bkz. Ek-ref: appx51) Boylece teorem isbatlanmis olur.

$\mathcal{F}[\delta(w)] = 1$ olduguna gore $\mathcal{F}[u(t)]$ yi hesaplayin.

$$\int_{-\infty}^t \delta(x)dx = u(t) \text{ ve } \mathcal{F}[\delta(t)] = \Delta(w) = 1$$

oldugundan

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{\Delta(w)}{jw} + \pi\Delta(0)\delta(w) = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$$

olarak bulunur.

Parseval Teoremi

Parseval teoremi $g(t)$ isaretinin tasidigi gucu bulmada faydali olur. $g(t)$ real ise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 dw$$

esitligi vardir.

Isbat Konvolusyon teoreminden

$$\mathcal{F}[g_1(t)g_2(t)] = \frac{1}{2\pi}G_1(w) * G_2(w)$$

yazilabilir. Esitligin her iki tarafini acik yazalim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u)G_2(w-u)du$$

Esitligin her iki yaninda $w = 0$ kayalim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u)G_2(-u)du$$

Sag taraftaki integral degiskeni olarak u yeerine w kullanabiliriz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(w)G_2(w)dw$$

$G_1(w) * G_2(w) = G_2(w) * G_1(w)$ oldugundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(w)G_2(-w)dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(-w)G_2(w)dw$$

elde edilir. $g_1(t) = g_2(t) = g(t)$ olsa.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(w)G(-w)dw$$

Eger $g(t)$ reel ise (pratikte boyledir.) $G(-w) = G^*(w)$ olacak bunun sonucuda $G(-w)G^*(w) = |G(w)|^2$ olacaktir. Dolayisiyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 dw$$

elde edilir.

$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$ integrali $g(t)$ isaretinin tasidigi enerji miktarini verir. Ancak integrali hesaplamak cogu kere pratik degildir. Yukaridaki teorem vasitasiyla isaretin Furier donusumu yardimiyla isaretin tasidigi enerji hesaplanabilir. pratikte $G(w)$ sinirli oldugundan $\int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 dw$ integralini hesaplamak $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$ integralini hesaplmaktan daha kolaydir.

Autocorrelasyon fonksiyonu

Neden sinuzoidal Muhendislikteki mekanik hareketlerin hemen tamamina duzgun sinuzoidal hareketler hakimdir (sabit hizda donen bir motor gibi). Tam duzgun sinuzoidal olmayan hareketler isesinuzoidal hareketlerin birlesimi imis gibi dusunulerek analiz edilir. Diferansiyel denklemlerin cozumunde sinuzoidal bilezenlerin bulunmasi bu yuzdendir.

Bir mikrofondaki zarin hareketini ele alalim. Sekilde goruldugu gibi zar bir uca varirken hizi yavaslar, varma noktasinda hiz sifir olur, donuste zarin hizi yavas yavas artar, obur uca yaklastiginda tekrar yavaslar. Esasen zar hizli olarak kiyilara carparak

hareket yapsa mikrofondan bozuk ugultular gelir. (Agiza cok yakin tutulan mikrofonlardaki durum gibi). insan sesinin girtlakta olusmasindada ses telleri cok hassas ayarli bir mikrofon zarindan daha nazik hareketler yapar, kiyilara vurarak hareket yapmis olsa insan sesi anlasilmaz olur.

Dunya yuvarlak. Yuvarlak harekette bir ahenk var. Dunmyanin koseli oldugunu dusunun. Veya dunyanin yorungesi kare seklinde olsa.?? Dolayisiyla Kainatta ekseriya dairesel harekler vardir.

Yukaridaki anlatildigi gibi dinamik hareketlerin incelenmesi isareti sinuzoidal bilesenlere ayrilmis oldugu dusunulerek yapilir. (Dinamik bir olcu aletinin katalogu aletin degisik frekanslardaki davranisini gosteren tablolar icerir).

Sinusun Tarihcesi: Sinusle ilgili islem yapan Furierin adi varda sinusu bulan endulus emevilerinin adi yok

Problemin tam cozumu icin sistem dinamigi ve sistem kestirimi konularina vakif olmak gerekir. Biz basitlik icin sistemin tamamen lineer oldugu, olcmenin hassas oldugu, gurultuden arindirilmis oldugunu ve $F_1 = F_2 \quad F_3 = 0$ oldugunu varsayalim.

Once $g(t)$ isaretinin spektrumunu hesaplamamiz lazim. Su ana kadarki bilgilerimizle $g(t)$ 'nin spektrumunu hesaplayamayiz. Fakat simdilik spektrum bulma isleminin (ref: xAq1) de verilen d_p ve θ_p katsayilarinin hesabi oldugunu varsayin. $g(t)$ 'nin genlik spektrumu sekil(ref: xs71) deki gibi cikmistir.

f?igure "xs71 $g(t) = F_1 e^{-a_1 t} \cos(w_1 t) + F_2 e^{-a_2 t} \cos(w_2 t)$

Bu spektrumu ileride verilecek olan $e^{-at} \cos(wt)$ nin spektrumu ile karsilastirdigimizda hemen $w_1 = ??? \quad w_2 = ????$ oldugunu kolayca goruruz. Ote yandan $a_1 > a_2$ ise $e^{-a_1} \cos(w_1 t)$ fonksiyonu $e^{-a_2} \cos(w_2 t)$ fonksiyonuna gore daha cabuk sonumlenir. w_1 frekansindaki tepe, w_2 frekansindaki tepeden daha kucuk oldugundan $a_1 > a_2$ oldugunu da soyleyebiliriz.

a_1 ve a_2 'nin kesin degerlerinin hesabi oldukca zordur. Ayrica ve $F_1 \neq F_2$ olmama durumunda hesaplarin daha da zorlasacagi aciktir. Dikkati dagitmamak icin biz bu konuyu burada noktaliyoruz. Ilgilenen okuyucularin system dinamigi ve system kestirimi gibi kitaplara muracaat etmelerini tavsiye ederiz.

C.P.2.1 Sekil(ref: xs127)deki ucgen darbenin Furier Donusumunu bulun.

$$g(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{q} & |t| < q \\ 0 & |t| > q \end{cases}$$

Sekil(xs127) Ucgen darbe Fonksiyonu

Cozum:

Bir oncesi problemde oldugu gibi integrali $-q < t < q$ araliginda hesaplamak yeterlidir.

$$\begin{aligned} G(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-q}^0 \left(1 + \frac{t}{q}\right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^q \left(1 - \frac{t}{q}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= q \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega q}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

Integral alinirken islemler gosterilmemistir. (ek-??) deki integral tablosundan yararlanilmistir.

C.P.2.2 Impuls fonksiyonunun Furier Donusumunu bulun.

Impuls fonksiyonu tanimi geregi (Ek-ref: appx51) de verilen ozellikleri saglar. (ref: s223) bagintisi kullanilarak istenen Furier donusumunu bulabiliriz

$$\mathcal{F}[\delta t] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

xqg301

C.P.2.3 $g(t) = A$ seklinde verilen sabit sayinin Furier Donusumunu Bulun. (C.P.ref: s22)'den

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

oldugu hesaplanmisti. Ters Furier donusumu tanimmindan

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{-j\omega t} dt$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega$$

yazilabilecegi aciktir. Son integralde $\omega = -p$ donusumu yaparak.

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-jp t} dp$$

s125

yazilabilir. Simdi 1 sayisinin Furier donusumunu alalim.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt$$

sx125

(ref: s125) de t yerine w , ve p yerine t harfleri kullanilarak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt = \delta(\omega) \quad \text{s126}$$

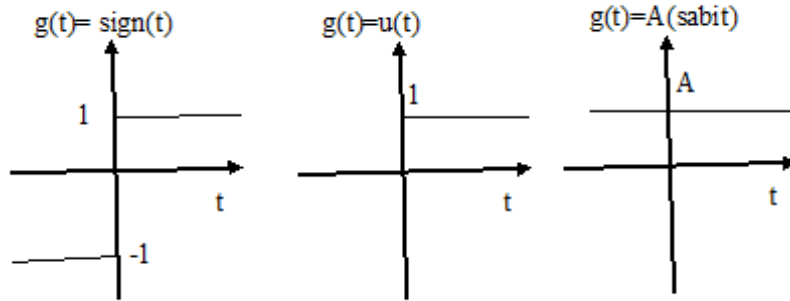
yazilir ve (ref: s125) den yararlanarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad \text{s127}$$

bulunur. yazilabilir. Dolayisiyla Sabit sayinin Furier donusumu impuls fonksiyonunun 2π ile carpilmisidir.

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

C.P.2.5



Sekil(xsx81) Degisik fonksiyonlar

$$g(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

sekinde tanimlanan isaret fonksiyonunun Furier donusumunu bulun.

Verilen isaret fonksiyonu

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

sekinde yazilabilir. Esitligin her iki tarafinin Furier donusumu alinirsa

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)] \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt - \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

C.P.2.6 $g(t) = u(t)$ birim basamak fonksiyonunun Fourier donusumunu bulun.

Cozum: $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ oldugundan her iki tarafin Fourier donusumu alinarak

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \text{sgn}(t)\right] \\ &= \frac{1}{2} 2\pi\delta(w) + \frac{1}{2} \frac{2}{jw} = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

s232

elde edilir.

C.P.2.7 $g(t) = \frac{j}{\pi t}$ nin Fourier donusumunu hesaplayin.

Cozum: $\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{jw}$ oldugu (ref: s136)de gosterilmisti. O halde simetri ozelligi geregi.

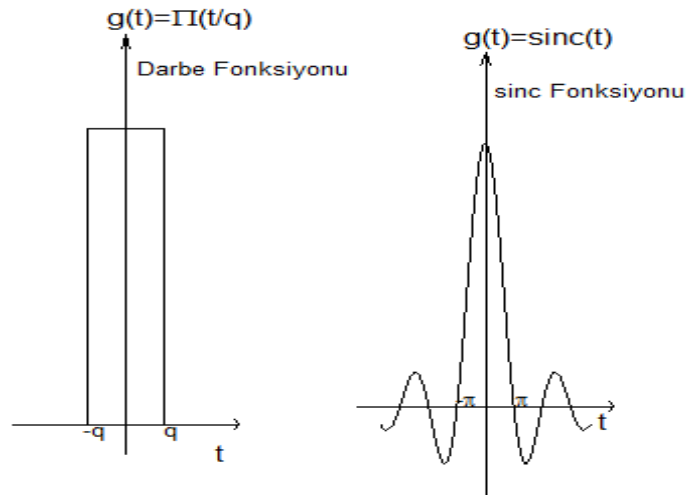
$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{jt}\right] = 2\pi \text{sgn}(-w) = -2\pi \text{sgn}(w)$$

veya

$$\mathcal{F}\left[\frac{j}{\pi t}\right] = 2\pi \text{sgn}(-w) = \text{sgn}(w)$$

elde edilir.

C.P.2.8 $g(t) = \text{sinc}(at)$ nin Fourier donusumunu elde edin.



Cozum .(ref: xpo34) den goruldugu gibi

$$\Pi\left(\frac{t}{q}\right) \leftrightarrow 2q \text{sinc}\left(\frac{wq}{\pi}\right)$$

simetri prensibine gore

$$2q \operatorname{sinc}\left(\frac{qt}{\pi}\right) \leftrightarrow 2\pi \prod\left(\frac{-w}{q}\right)$$

ote yandan $\prod\left(\frac{-w}{q}\right) = \prod\left(\frac{w}{q}\right)$ oldugu dikkate alindiginda

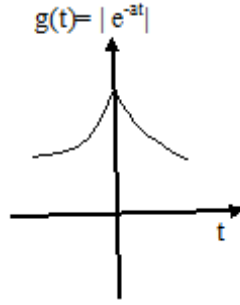
$$\operatorname{sinc}\left(\frac{qt}{\pi}\right) \leftrightarrow \frac{\pi}{q} \prod\left(\frac{w}{q}\right)$$

veya

$$\operatorname{sinc}(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \prod\left(\frac{w}{a\pi}\right)$$

elde edilir.

C.P.2.9 $g(t) = [e^{-a|t|}]$ isaretinin Furier Donusumunu hesaplayin.



$|e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$ dir. ote yandan

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a + jw}$$

oldugundan olcekleme bagintisi geregi

$$\mathcal{F}[e^{at}u(-t)] = \frac{1}{a - jw}$$

olacaktır. Dolayisiyla

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{1}{a + jw} + \frac{1}{a - jw} = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

C.P.2.10 $g_1(t)$ isaretin Furier donusumu $G_1(w)$ dir. $g_2(t) = 2g_1\left(-\frac{t}{1.5}\right)$ isaretin Furier donusumunu $G_1(w)$ cinsinden bulun.

. $\mathcal{F}[g_1(t)] = G_1(w)$ oldugundan olcekleme teoremine gore

$$\mathcal{F}\left[2g_1\left(-\frac{t}{1.5}\right)\right] = 2 \cdot \frac{1}{1.5} G_1\left(\frac{-w}{-\frac{1}{1.5}}\right) = 3G_1(-1.5w)$$

$$G_2(w) = 3G_1(-1.5w)$$

C.P.2.11 $g(t) = e^{jat}$ ise $G(w)$ yi hesaplayin.

Cozum: ref: s76) dan $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(w)$ oldugu bulunmustu. Frekans domeninde kaydirma teoremini uygulayarak.

$$\mathcal{F}[1e^{jat}] = 2\pi\delta(w - a)$$

C.P.2.12 $[g(t) \cos(at + \phi)]$ nin Fourier donusumunu hesaplayin.

Cozum: $\cos(at + \phi)$ terimi ustel formda yazilip frekans domeninde kaydirma teoremi uygulanirsa.

$$\mathcal{F}[g(t) \cos(at + \phi)] = \frac{1}{2}[G(w - a)e^{j\phi} + G(w + a)e^{-j\phi}]$$

s165

elde edilir.

C.P.2.12 $[g(t) \sin(at)]$ 'nin Fourier donusumunu hesaplayin.

Cozum: (ref: s55) de $\phi = -\pi/2$ konarak

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t) \cos(at - \pi/2)] &= \mathcal{F}[g(t) \sin(at)] \\ &= \frac{1}{2}[G(w - a)e^{-j\pi/2} + G(w + a)e^{j\pi/2}] \\ &= \frac{j}{2}[G(w + a) - G(w - a)]\end{aligned}$$

C.P.2.13 $g(t) = \cos(at + \phi)$ ise $G(w)$ yi hesaplayin.

Cozum: de $g(t) = 1$ koyup. 1 rin Fourier donusumunun $2\pi\delta(w)$ oldugu dusunulurse.

$$\mathcal{F}[\cos(at + \phi)] = \pi[\delta(w + a)e^{-j\phi} + \delta(w - a)e^{j\phi}]$$

xqfq357

elde edilir.

C.P.2.14 $g(t) = \cos(at)u(t)$ ise $G(w)$ yi hesaplayin.

Cozum $u(t)$ nin Fourier donusumu (ref: s232) den

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

idi. (ref: s221) de $g(t) = u(t)$ konulursa.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t) \cos(at)] &= \frac{1}{2}[\pi\delta(w - a) + \frac{1}{j(w - a)} + \pi\delta(w + a) + \frac{1}{j(w + a)}] \\ &= \frac{\pi}{2}[\delta(w - a) + \delta(w + a)] + \frac{jw}{a^2 - w^2}\end{aligned}$$

sekil(ref: xs2.26) da $g(t) = \cos(at)$, $g(t) = \cos(at)u(t)$ isaretlerinin spektrumlari goruluyor.

Sekil(xs2.26)??? $g(t) = \cos(at)$, $g(t) = \cos(at)u(t)$ isaretlerinin furier spektrumlari.

C.P.2.15 $g(t) = \sin(at)u(t)$ ise $G(w)$ yi hesaplayin

Cozum: (ref: s155) de $g(t) = u(t)$ yazilip yukaridaki islemlere benzer islemler yapilirsa.

$$\mathcal{F}[g(t) \sin(at)] = \frac{\pi}{2j} [\delta(w - a) - \delta(w + a)] + \frac{a}{a^2 - w^2}$$

bulunur. sekil(ref: xs2.262) da $g(t) = \sin(at) \quad g(t) = \sin(at)u(t)$ isaretlerinin spektrumları goruluyor.

Sekil(xs2.262) $g(t) = \sin(at) \quad g(t) = \sin(at)u(t)$ isaretlerinin furier spektrumları.

C.P.2.16 $g(t)$ periyodik bir isaret olduguna gore $g(t)$ nin Furier donusumunu bulun.

Cozum (ref: r12) den goruldugu gibi T_0 peryotlu bir isaret kompleks furier serisi formunda

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

sekinde yazilabilir. Dolayisiyla

$$\mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[c_n e^{jn\omega_0 t}]$$

(ref: s341) den

$$\mathcal{F}[c_n e^{jn\omega_0 t}] = c_n 2\pi \delta(w - n\omega_0)$$

oldugundan.

$$\mathcal{F}[g(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(w - n\omega_0)$$

olarak bulunur.

C.P.2.16 sekil(ref: cx2) de gosterilen impuls dizisinin Furier donusumunu bulun.

Cozum (ref: s63) den impuls dizisi

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

sekinde yazilabilir. (ref: s341) den

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jn\omega_0 t}\right] = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(w - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(w - n\omega_0) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Odev Proplemler

O.P 21 ref: j332 ve ref: j333 bagintilarini ispatlayin.

O.P 22 $g(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ nin Furier donusumunu Bulun.

Yol gosterme: Problem (ref: s443)'e simetri ozelligini uygulayin.

Cevap: $G(w) = \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$

O.P 23

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| < q \\ 0 & |t| > q \end{cases}$$

olmak uzere $g(t) = p(t) \cos(w_0 t)$ fonksiyonunun Furier donusumunu bulun.

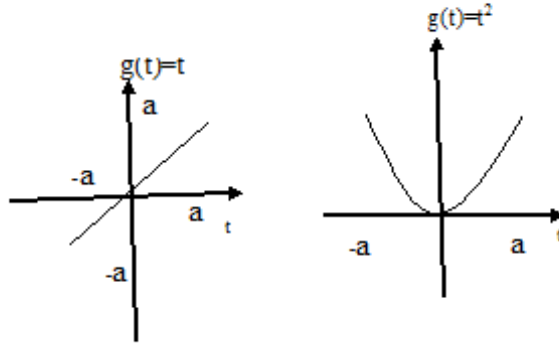
Yol gosterme: $p(t)$ 'darbe fonksiyonudur. problem s55 den yaralaniniz.

Cozum: $G(w) = \frac{\sin q(w-w_0)}{w-w_0} + \frac{\sin q(w+w_0)}{w+w_0}$

O.P 24 $p(t)$ problem O.P.23 de tanimlandigi gibi olmasi durumunda

$g(t) = p(t) \sin(w_0 t)$ ve $g(t) = p(t) \sin(w_0 t + \phi)$ fonksiyonlarinin Furier donusumlerini bulun.

O.P 25 (ref: xqx766) bagintisindan faydalanarak sekil(ref: xqs387) deki isaretin Furier donusumunu bulun.



Sekil(xqs387) $g(t)=t$ isreti Sekil(xqs388) $g(t) = t^2$ isreti

O.P 26 (ref: xqx766) bagintisindan faydalanarak sekil(ref: xqs388) deki isaretin Furier donusumunu bulun.

O.P 27 $g(t) = \sum_{p=0}^{p=k-1} \delta(t - nT_0)$ şeklinde tanımlanan birim impuls treninin Fourier dönüşümünü bulun.

Cevap: $G(w) = e^{-j(k-1)wT_0/2} \frac{\sin(kwT_0/2)}{\sin(wT_0/2)}$

O.P 28 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -\pi j \operatorname{sgn}(w) = \pi j - 2\pi j u(w)$ olduğunu gösterin.

O.P 29 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 3\delta(t)$ diferansiyel denkleminin özel çözümünü Fourier dönüşümü yardımıyla bulun.

Yol gösterme: Her iki tarafın Fourier dönüşümünü alın, $X(w)$ yi çekin, $x(t) = \mathcal{F}^{-\infty}[X(w)]$ yi elde edin.

Cevap: $x_o(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

Fourier Transform

c13

In signal processing we use ω

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

In communication we use f ($\omega = 2\pi f$)

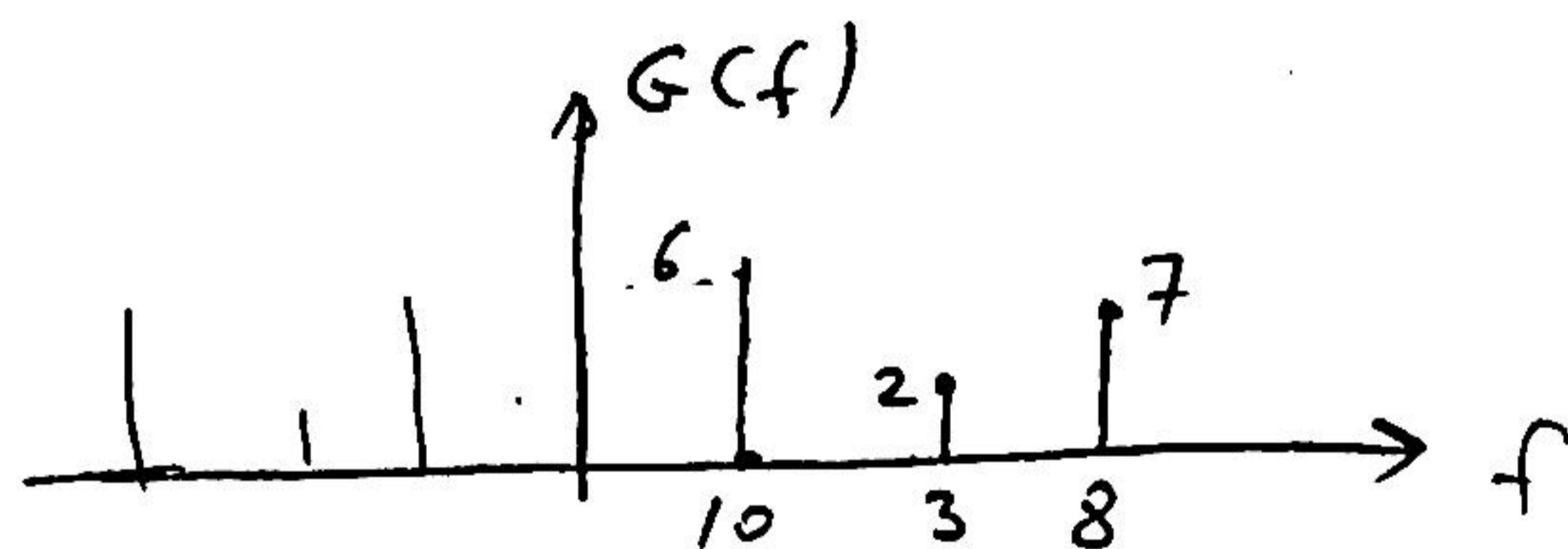
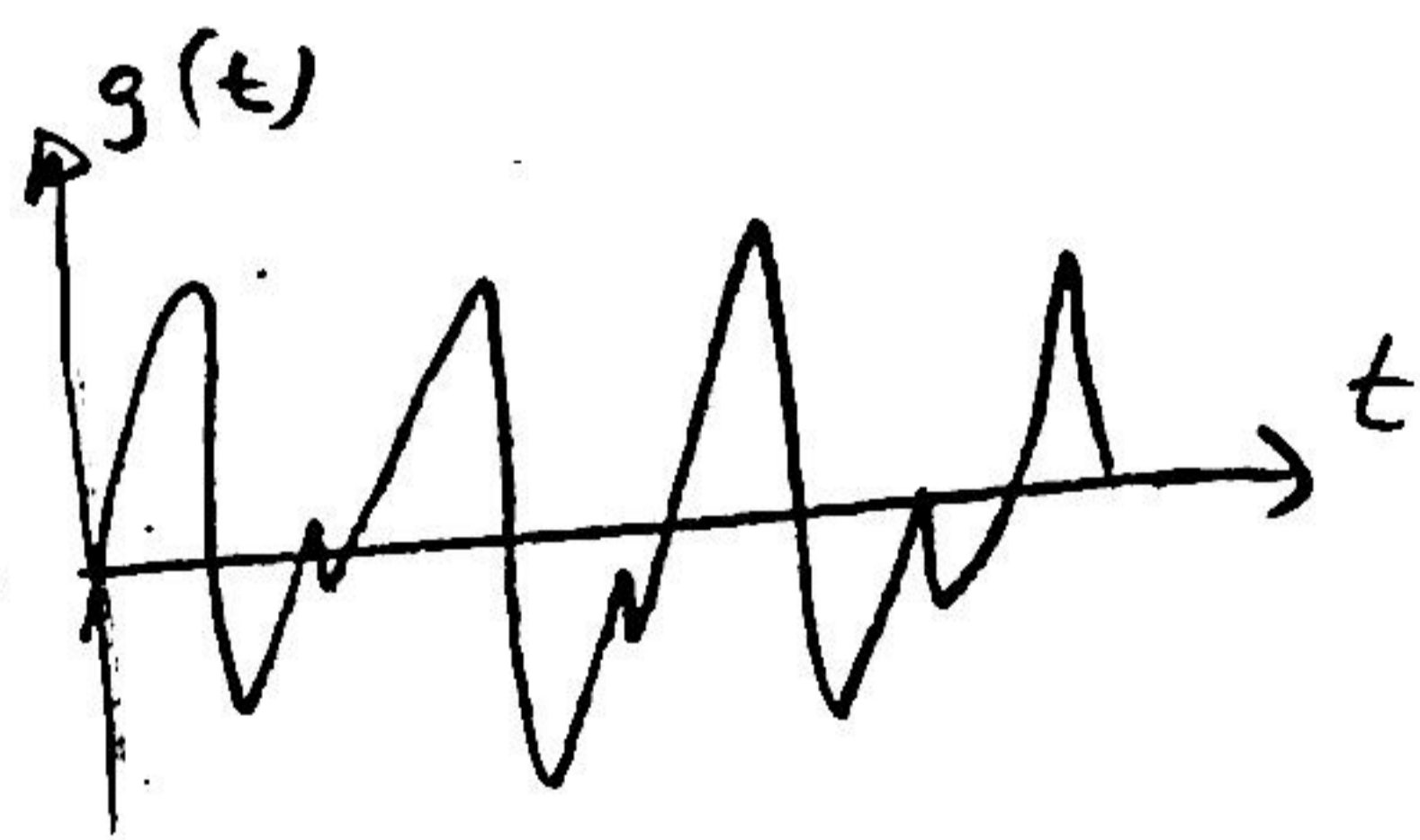
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{-j2\pi f t} df \quad \left(\text{No } \frac{1}{2\pi} \right)$$

$$F \{ g(t) \} = G(f) \quad F^{-1} \{ G(f) \} = g(t)$$

$$g(t) \rightleftharpoons G(f)$$

Why do we use Fourier Transform.



By looking at $g(t)$ we cannot get any information about $g(t)$. If we examine

$G(f)$, we can easily say that

$g(t)$ consists of three cosine signals

$$\cos 2\pi 10t, \quad \cos 2\pi 3t, \quad \cos 2\pi 8t$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$e^{j\pi} = -1 \quad e^{-j\pi} = -1 \quad e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j \quad e^{-j\frac{3\pi}{2}} = j$$

$$|3+4j| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad |3| = 3 \quad \angle 3 = 0 \quad |-3j| = 3$$

$$\angle(3+4j) = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53.1^\circ = 0.295\pi \quad |3j| = 3 \quad \angle 3j = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad \angle -3j = -\frac{\pi}{2}$$

$$|-3| = 3 \quad \angle -3 = -\pi = \pi = -180^\circ = +180^\circ$$

Example = calculate the amplitude and phase spectrum of the following signals

a) $g_1(t) = 4 \cos 2\pi 5t$ b) $g_2(t) = 8 \sin 2\pi 10t$ c) $g_3(t) = -16 \cos 2\pi 20t$

Solution

$$a) g_1(t) = 4 \cos 2\pi 5t = \frac{4}{2} (e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}) = 2e^{j2\pi 5t} + 2e^{-j2\pi 5t}$$

$f = 5 \text{ Hz}$ Amplitude = 2 Phase = 0
 $f = -5 \text{ Hz}$ Amplitude = 2 Phase = 0

$$b) g_2(t) = 8 \sin 2\pi 10t = \frac{8}{2j} (e^{j2\pi 10t} - e^{-j2\pi 10t}) = -4j e^{j2\pi 10t} + 4j e^{-j2\pi 10t}$$

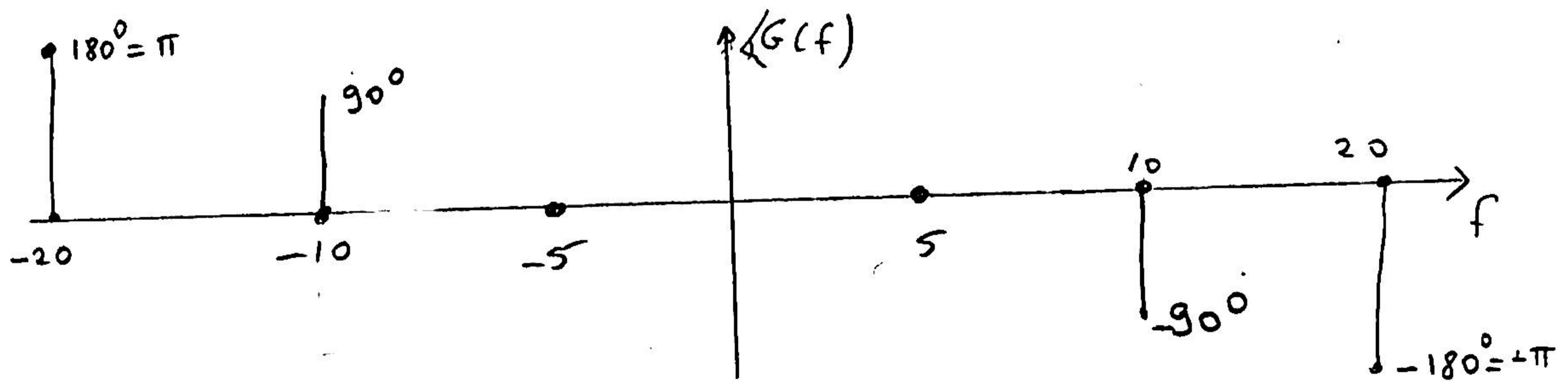
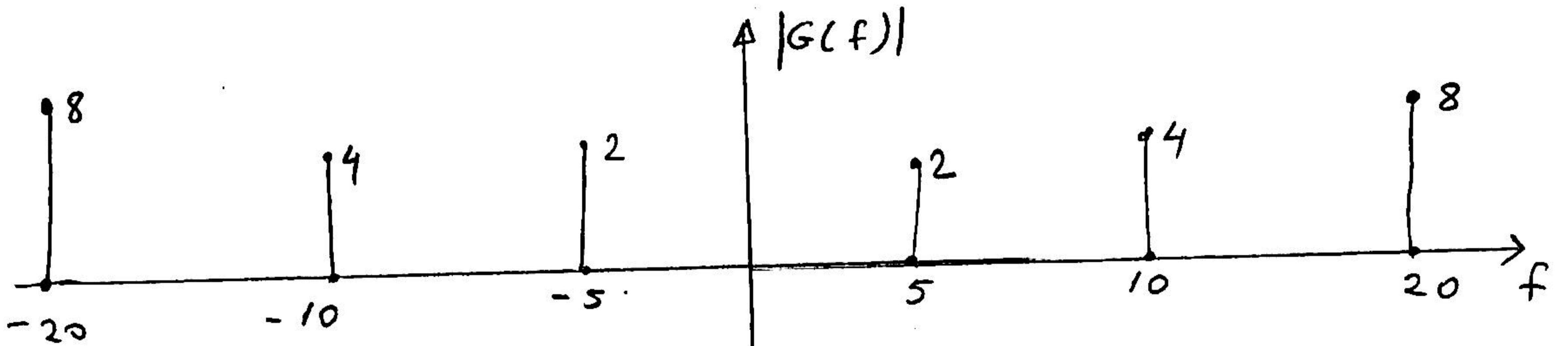
$f = 10 \text{ Hz}$ amplitude = $|-4j| = 4$ Phase = $\angle -4j = -\frac{\pi}{2}$
 $f = -10 \text{ Hz}$ amplitude = $|4j| = 4$ Phase = $\angle 4j = \frac{\pi}{2}$

$$c) g_3(t) = -16 \cos 2\pi 20t = -\frac{16}{2} (e^{j2\pi 20t} + e^{-j2\pi 20t}) = -8e^{j2\pi 20t} - 8e^{-j2\pi 20t}$$

$f = 20 \text{ Hz}$ amplitude = $|-8| = 8$ Phase = $\angle -8 = -\pi = \pi$
 $f = -20 \text{ Hz}$ " " " " " " "

1) Draw the amplitude and phase of the following signal:

$$g(t) = 4 \cos 2\pi 5t + 8 \sin 2\pi 10t - 16 \cos 2\pi 20t$$



Explanation $4 \cos 2\pi 5t = \frac{4}{2} (e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t})$

$$= 2 e^{j2\pi 5t} + 2 e^{-j2\pi 5t}$$

$f = 5$ Amplitude = 2 phase = 0

$f = -5$ Amplitude = 2 phase = 0

$$8 \sin 2\pi 10t = \frac{8}{2j} (e^{j2\pi 10t} - e^{-j2\pi 10t}) = -4j e^{j2\pi 10t} + 4j e^{-j2\pi 10t}$$

$f = 10$ amplitude = 4 phase = $-90^\circ = -\frac{\pi}{2}$

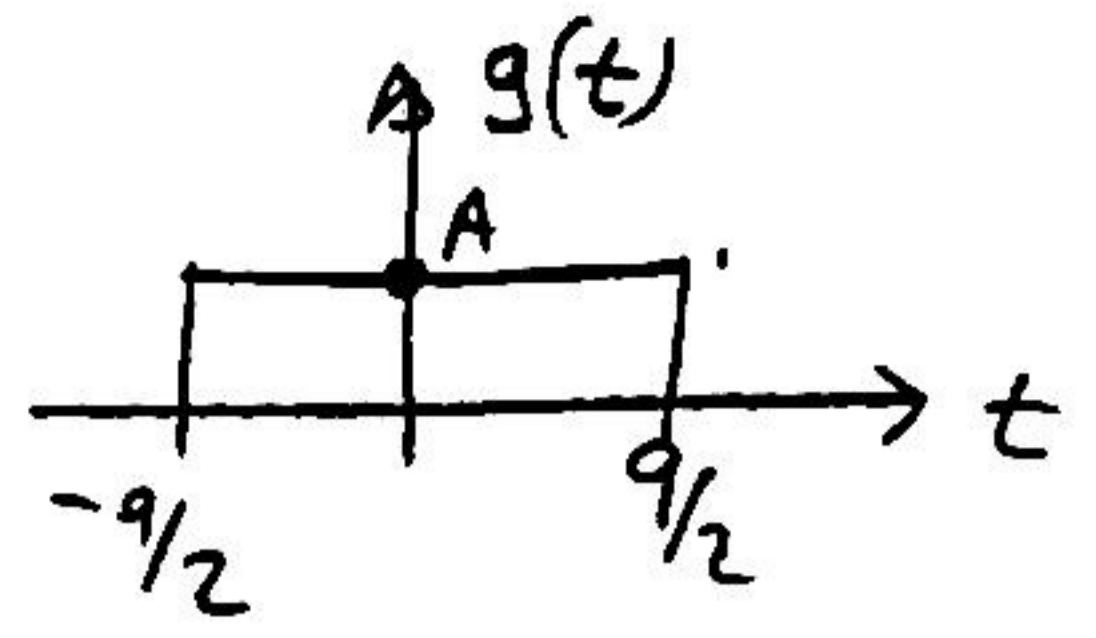
$f = -10$ " " = 4 " = $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$$-16 \cos 2\pi 20t = +8 e^{j2\pi 20t} - 8 e^{-j2\pi 20t}$$

$f = 20$ amplitude = 8 phase = $-\pi = \pi$

$f = -20$ " " = 8 phase = $-\pi = \pi$

Example: calculate the Fourier Transform of the signal $g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{9}\right)$



Answer $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi j f t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{-9/2} 0 + \int_{-9/2}^{9/2} A e^{-2\pi j f t} dt + \int_{9/2}^{\infty} 0$$

$$= A \int_{-9/2}^{9/2} e^{-2\pi j f t} dt = A \frac{1}{-2\pi j f} e^{-2\pi j f t} \Big|_{-9/2}^{9/2}$$

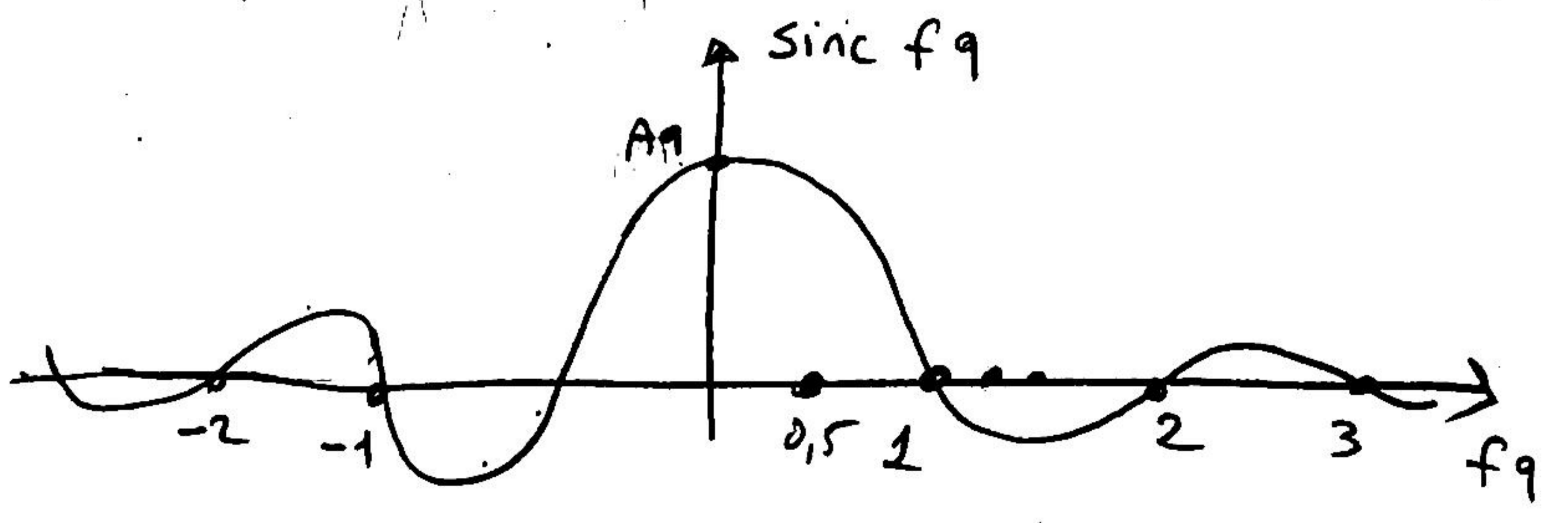
$$= \frac{A}{-2\pi j f} \left[e^{-2\pi j f \frac{9}{2}} - e^{-2\pi j f \left(-\frac{9}{2}\right)} \right] = \frac{A}{\pi f} \frac{1}{2j} \left[e^{j\pi f 9} - e^{-j\pi f 9} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sin(\pi f 9)}$

$$= \frac{A}{\pi f} \sin \pi f 9 = \frac{A}{\pi f} \cdot \frac{9}{9} \sin \pi f 9 = A 9 \frac{\sin \pi f 9}{\pi f 9} = A 9 \text{sinc}(f 9)$$

$A \text{rect}\left(\frac{t}{9}\right) \longleftrightarrow A 9 \text{sinc}(f 9)$

$f 9$	$\text{sinc } f 9$
0	1
0.5	0.63
1	0
1.2	-0.15
1.3	-0.19
2	0



Properties of Fourier Transform C18

1) Linearity

$$g_1(t) \xleftrightarrow{\quad} G_1(f) \quad g_2(t) \xleftrightarrow{\quad} G_2(f) \quad |$$

then

$$a g_1(t) + b g_2(t) \xleftrightarrow{\quad} a G_1(f) + b G_2(f)$$

2) Time scaling

$$g(at) \xleftrightarrow{\quad} \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

3) duality

$$g(t) \xleftrightarrow{\quad} G(f) \quad \text{then} \quad G(t) \xleftrightarrow{\quad} g(-f)$$

4) Time shifting

$$g(t - \tau) \xleftrightarrow{\quad} G(f) e^{-j2\pi f \tau}$$

5) frequency shifting

$$g(t) e^{2\pi j \tau t} \xleftrightarrow{\quad} G(f - \tau)$$

6) Differentiation

$$\frac{d}{dt} g(t) \xleftrightarrow{\quad} 2\pi j G(f)$$

7) Integration

$$\int_{-\infty}^t g(x) dx \xleftrightarrow{\quad} \frac{1}{2\pi j f} G(f)$$

$$g^*(t) \xleftrightarrow{\quad} G^*(-f)$$

$x = a + bi \quad x^* = a - bi$

9) convolution

$$g_1(t) g_2(t) \xleftrightarrow{\quad} G_1(f) * G_2(f)$$

$$g_1(t) * g_2(t) \xleftrightarrow{\quad} G_1(f) G_2(f)$$

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-x) g_2(x) dx$$

Examples of Fourier Tra.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

1) $g(t) = \delta(t)$ $G(f) = ?$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^0 = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

Duality

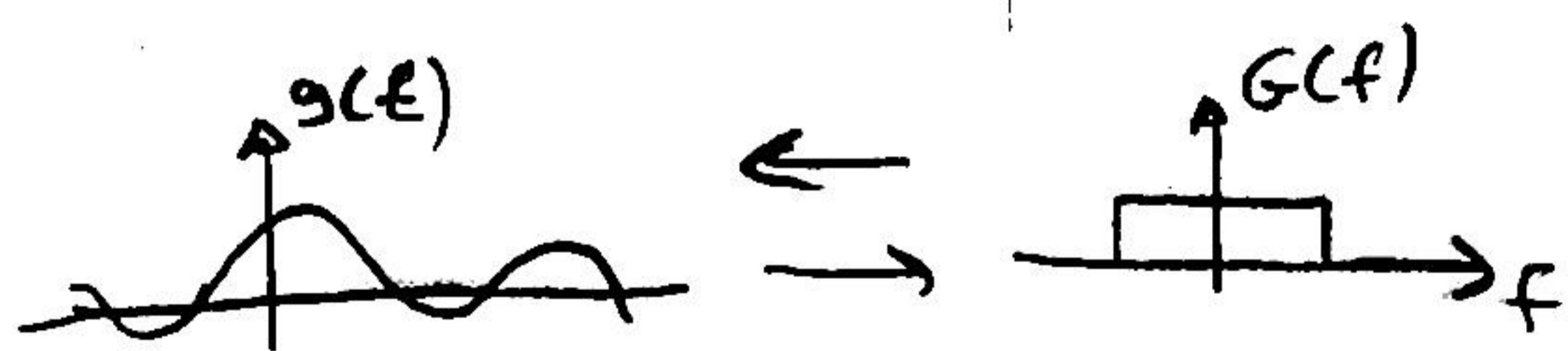
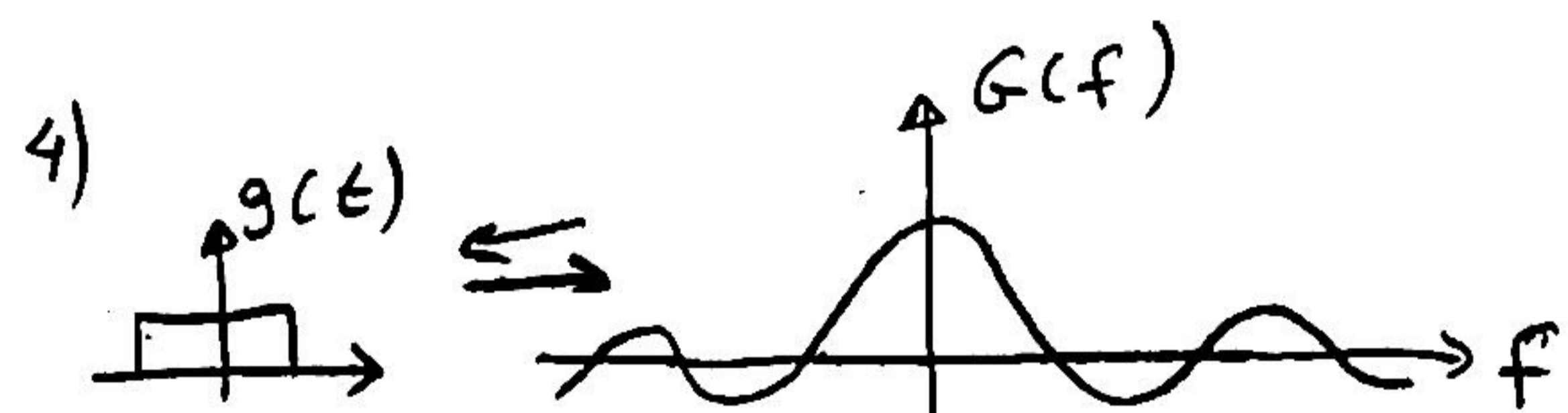
$g(t) \leftrightarrow G(f)$ then $G(t) \leftrightarrow g(-f)$

2) $\frac{t-1}{t^3+2t^2+1} \xleftrightarrow{2\pi f} \frac{2\pi f+1}{(2\pi j f)^4+1}$

$$\frac{2\pi t+1}{(2\pi j t)^4+1} \xrightarrow{(-t)} \frac{(-t)-1}{(-t)^3+2(-t)^2+1}$$

3) $\delta(t) = 1$

$$1 = \delta(f)$$



Frequency Shifting

19

$g(t) \leftrightarrow G(f)$ then $g(t)e^{j2\pi a t} \leftrightarrow G(f-a)$

5) $\frac{t^3-1}{t^5+2t^4+2} \xleftrightarrow{2\pi j f} \frac{(2\pi j f)^4+2}{(2\pi j f)^5+2\pi j f+5}$

$$\frac{t^3-1}{t^5+2t^4+2} e^{j2\pi a t} \xleftrightarrow{2\pi j(f-a)} \frac{[2\pi j(f-a)]^4+2}{[2\pi j(f-a)]^5+2\pi j(f-a)+5}$$

6) $1 \leftrightarrow \delta(f)$

1. $e^{j2\pi a t} \leftrightarrow \delta(f-a)$

1. $e^{-j2\pi a t} \leftrightarrow \delta(f+a)$

7)

$$e^{j2\pi a t} + e^{-j2\pi a t} \leftrightarrow \delta(f-a) + \delta(f+a)$$

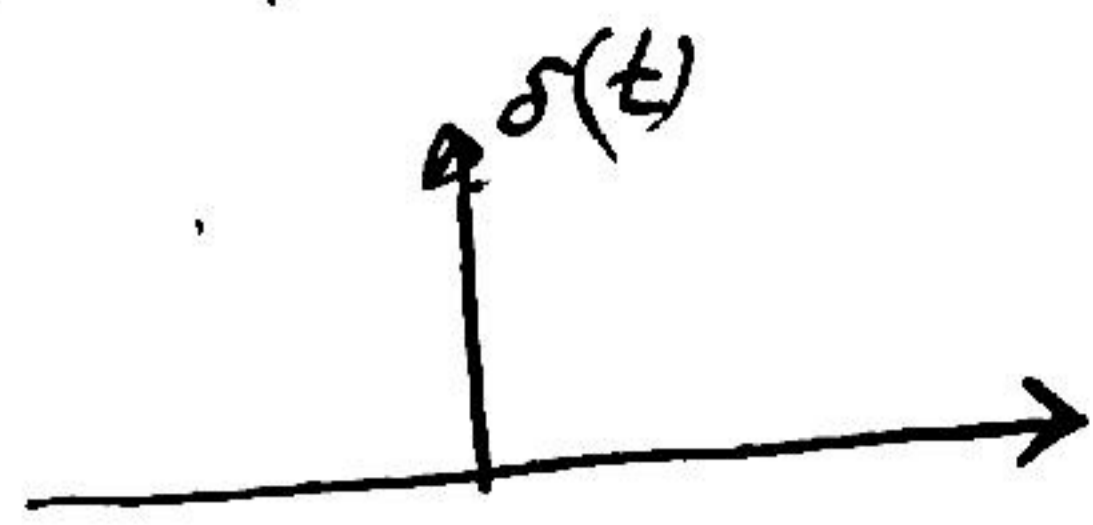
$$\frac{1}{2} [e^{j2\pi a t} + e^{-j2\pi a t}] \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f-a) + \delta(f+a)]$$

$$\cos 2\pi a t \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f-a) + \delta(f+a)]$$

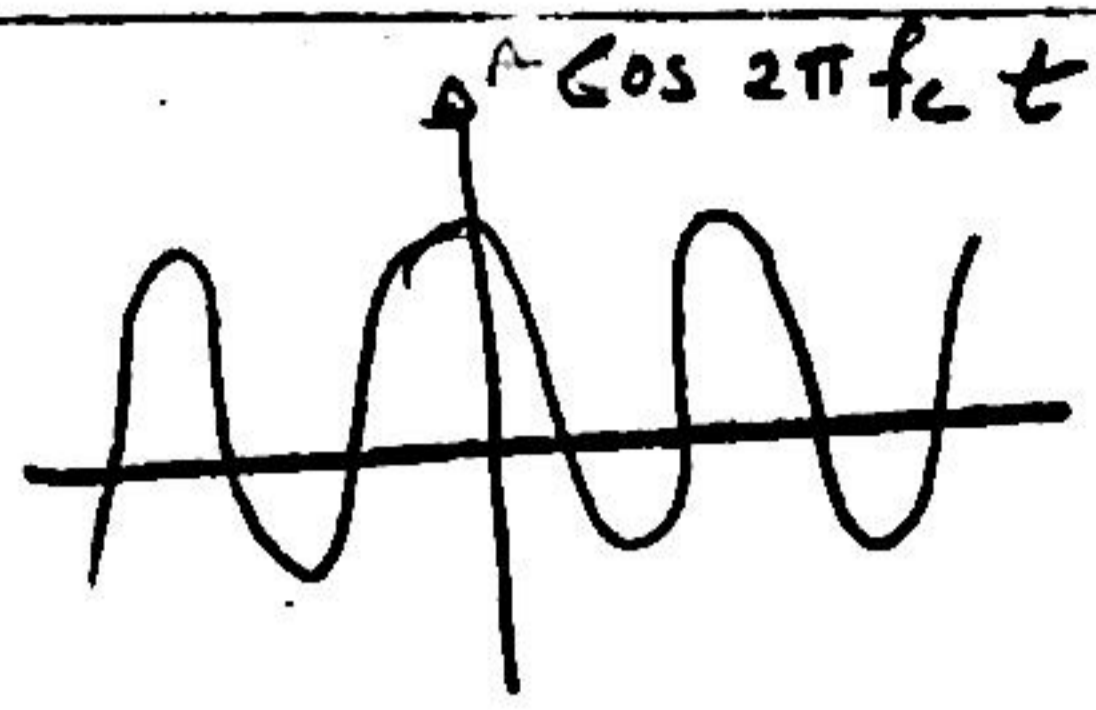
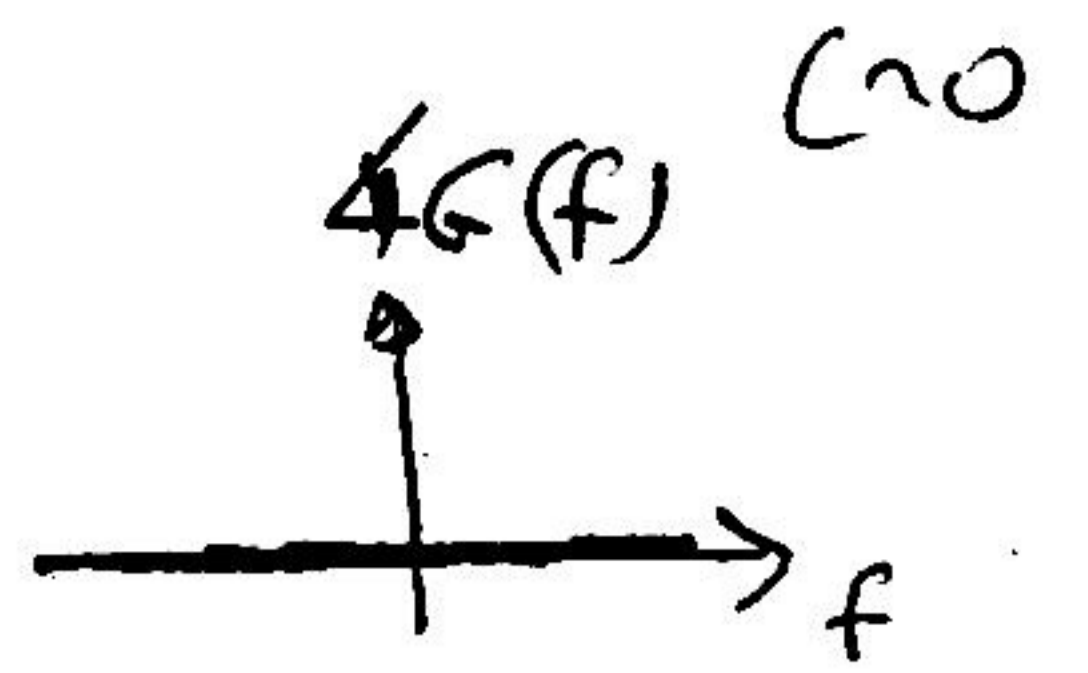
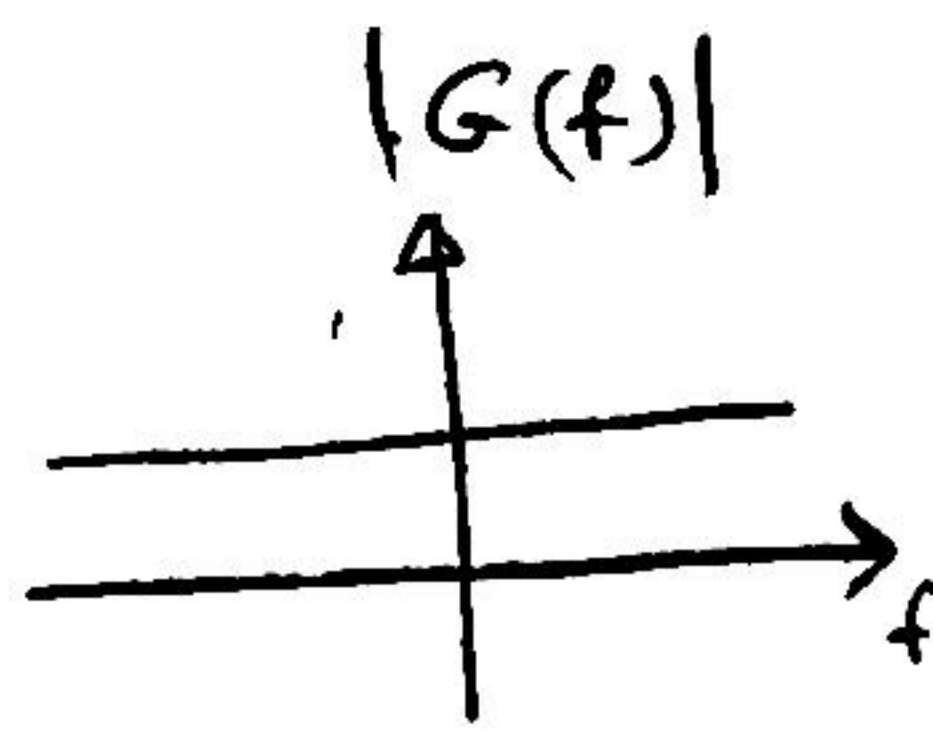
8)

$$\frac{1}{2j} [e^{j2\pi a t} - e^{-j2\pi a t}] \leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f-a) - \delta(f+a)]$$

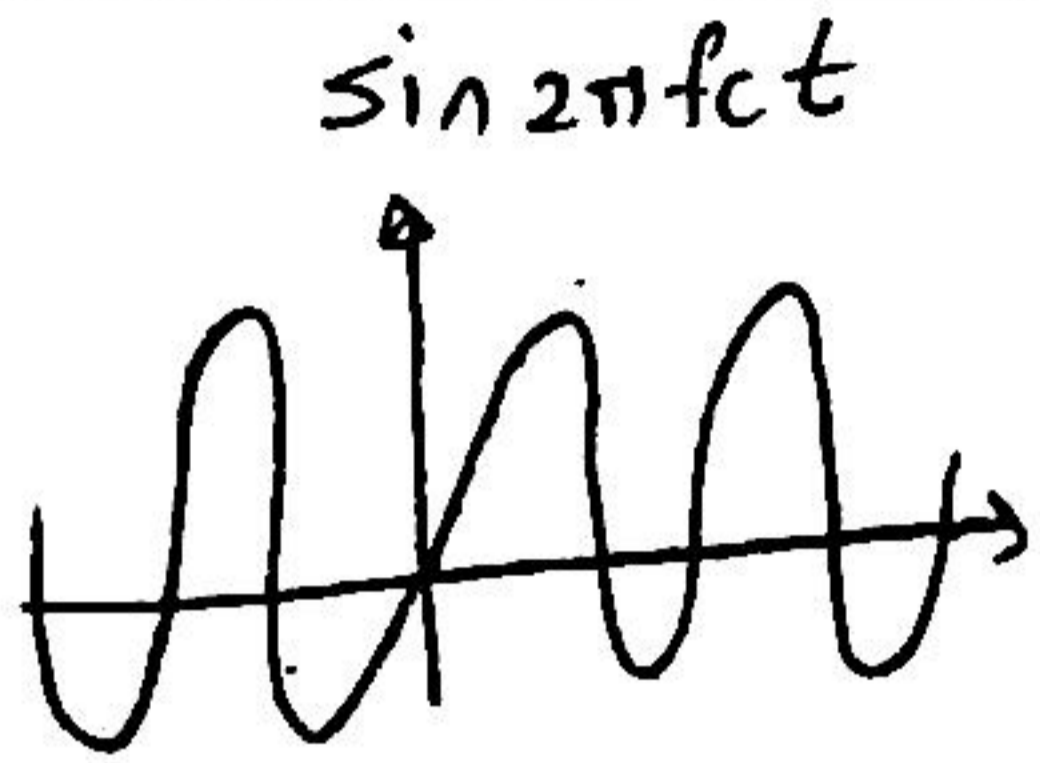
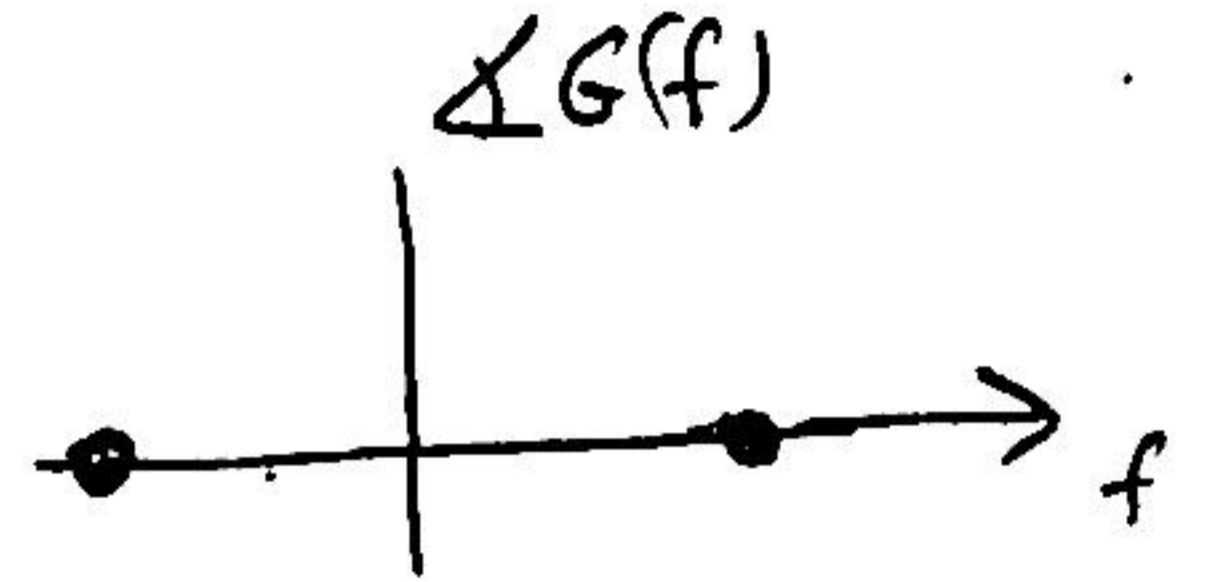
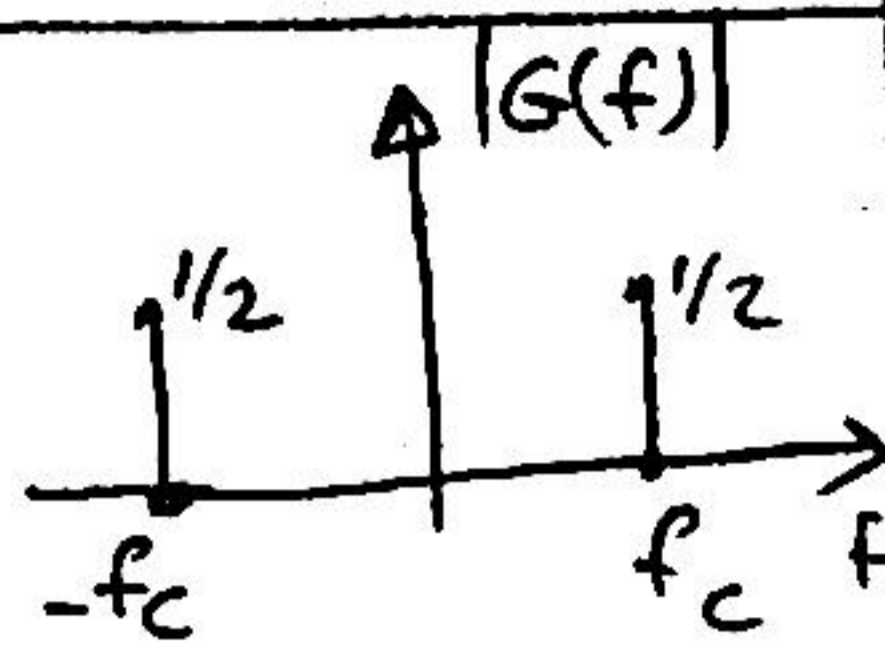
$$\sin 2\pi a t \leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f-a) - \delta(f+a)]$$



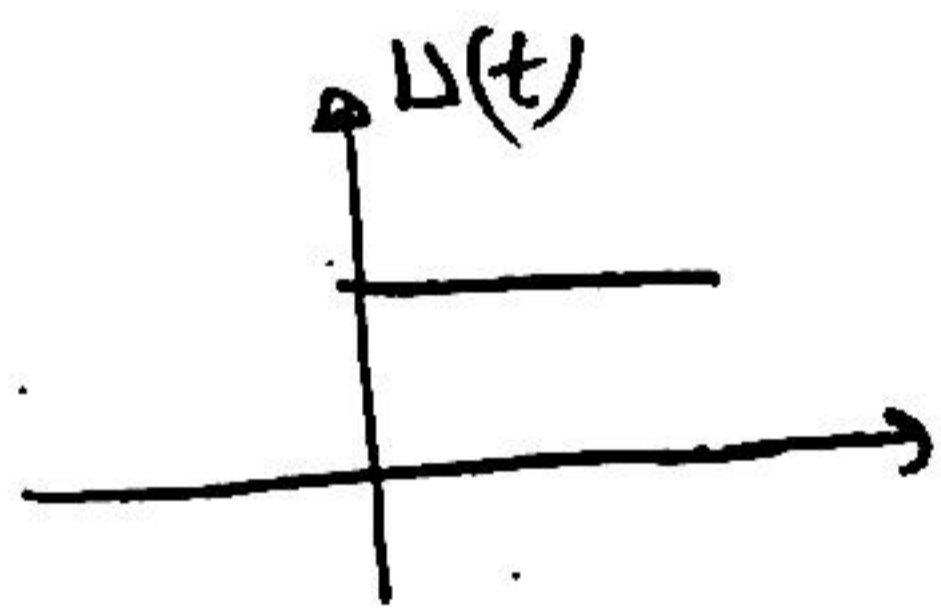
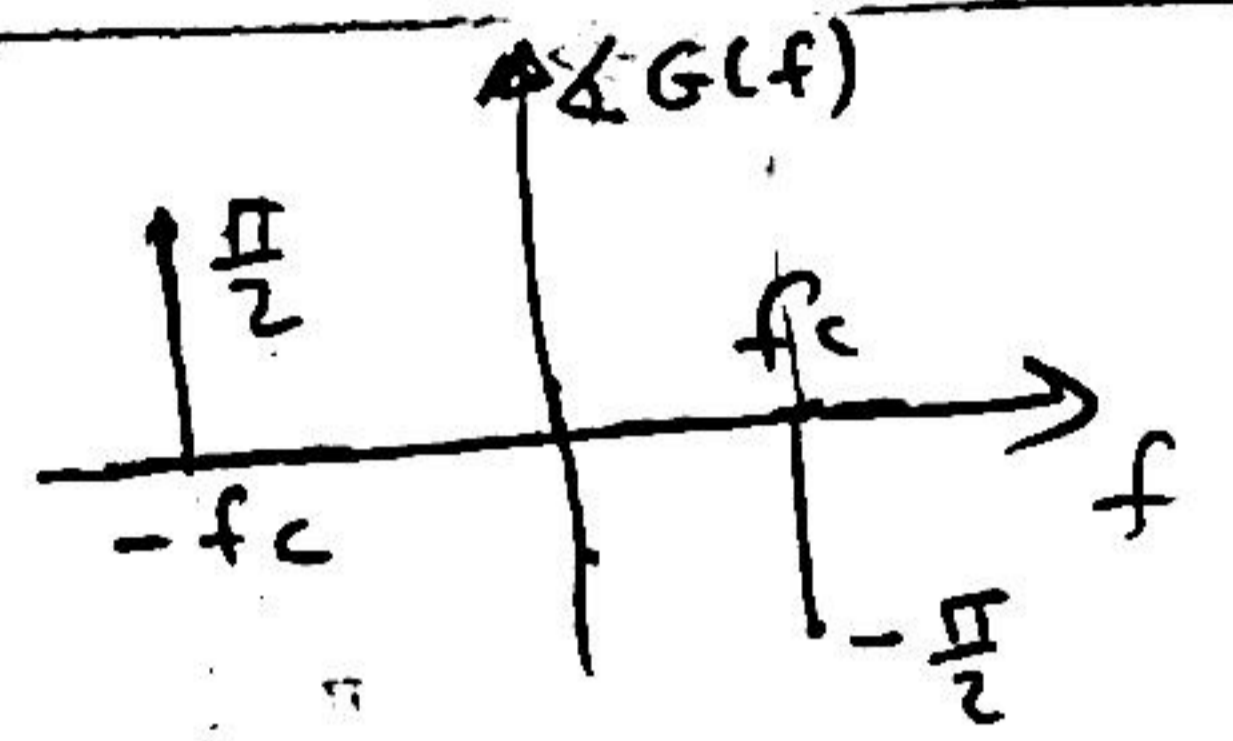
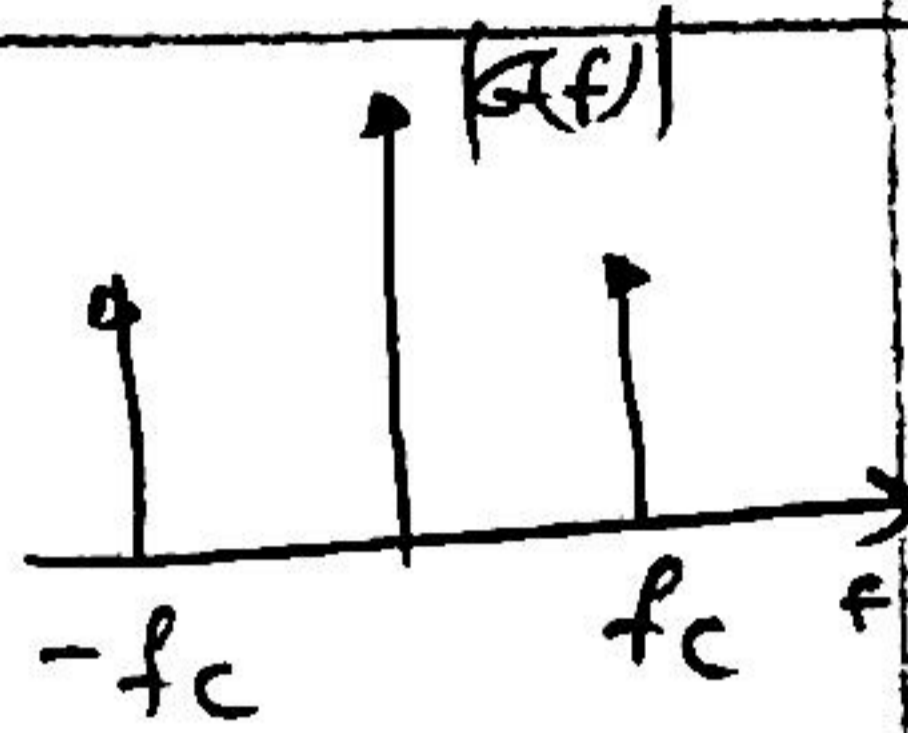
$$G(f) = 1$$



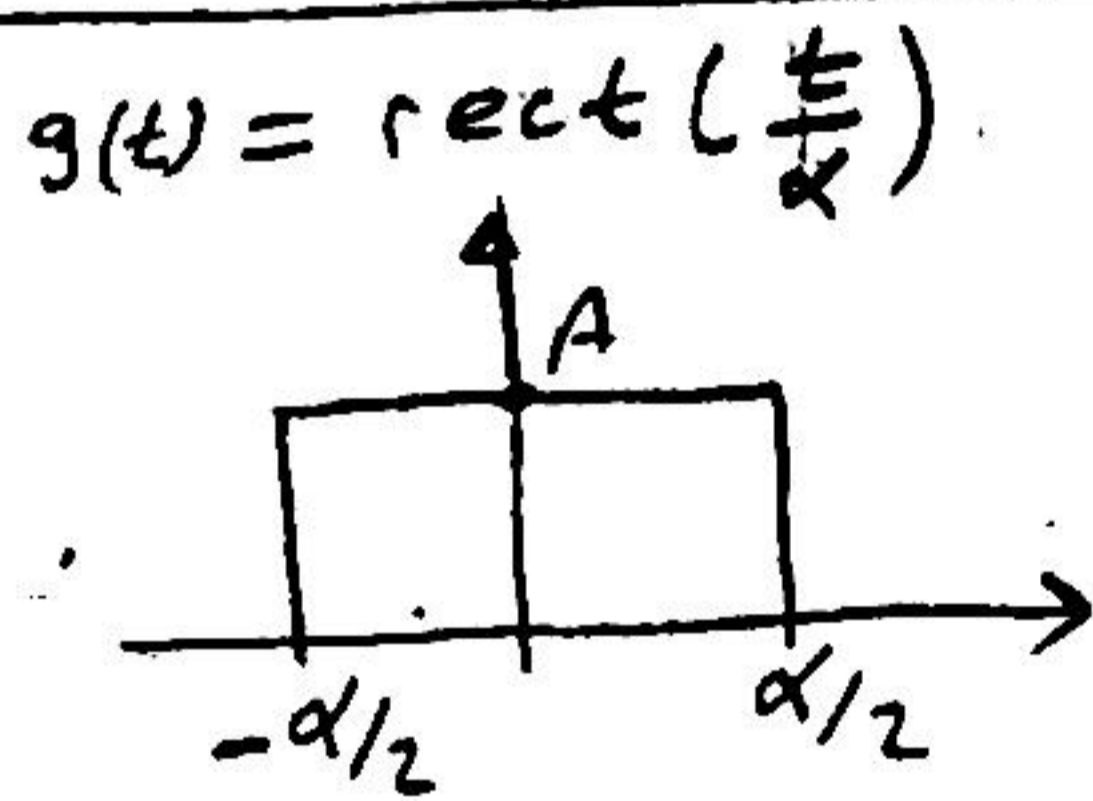
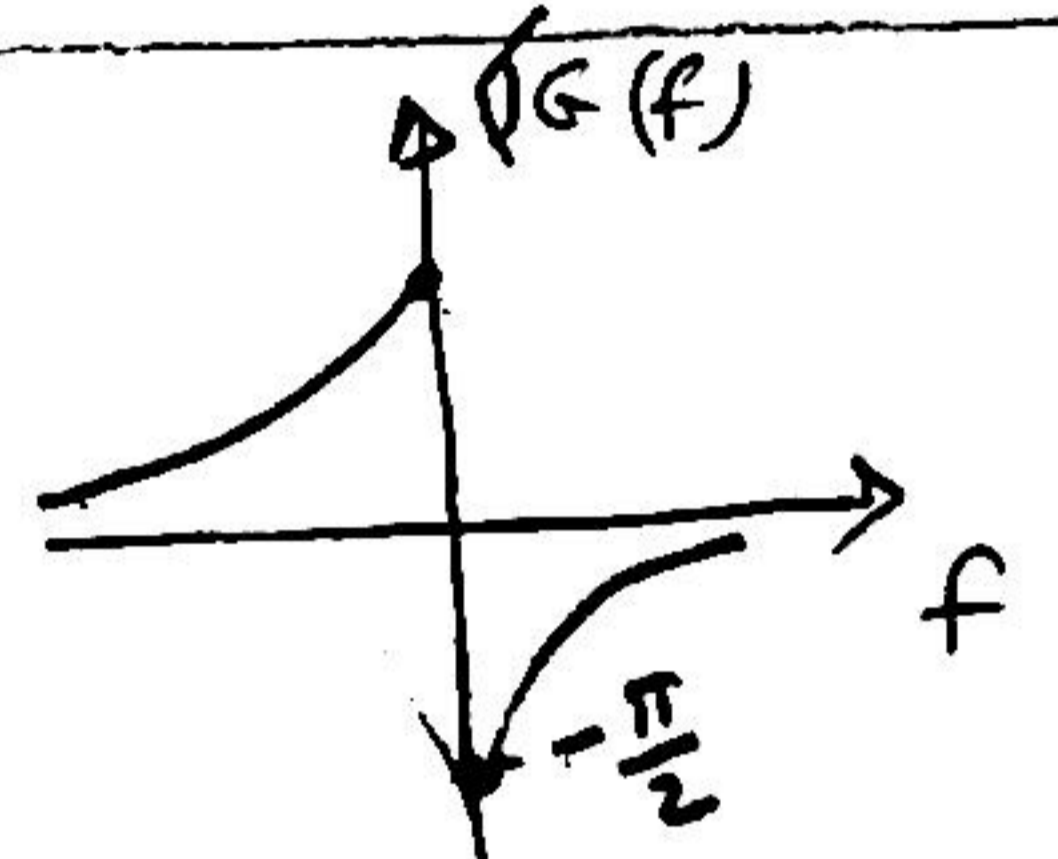
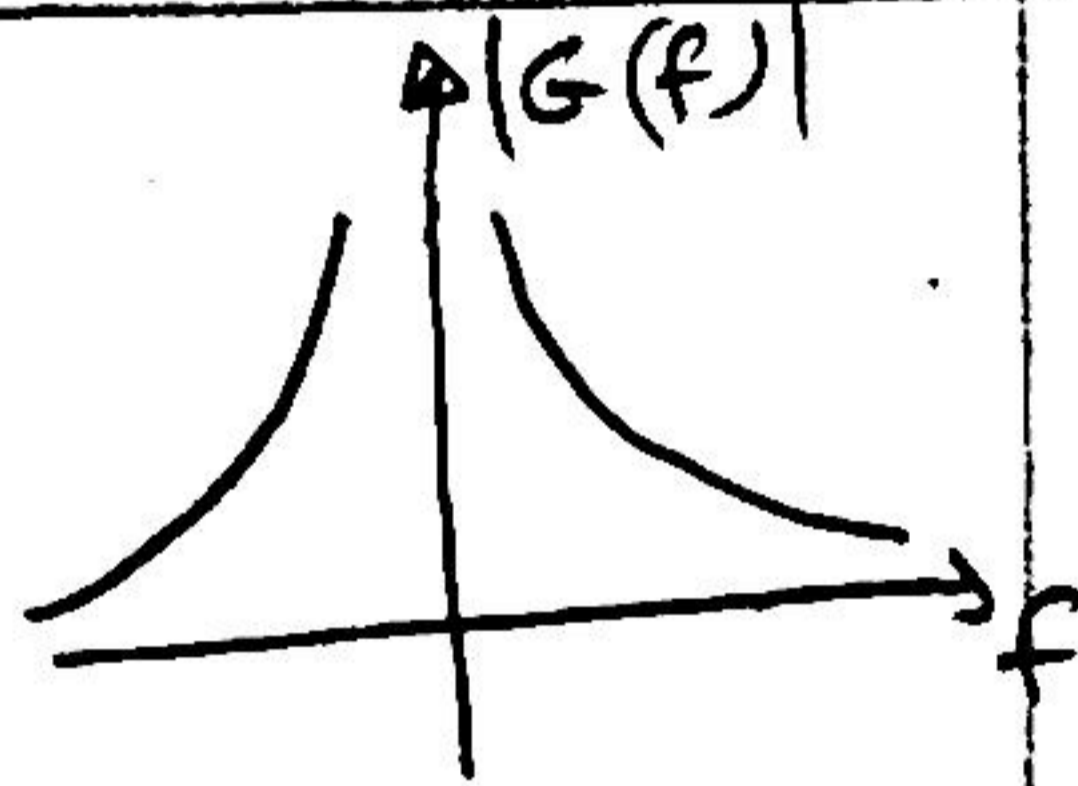
$$G(f) = \frac{1}{2} [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]$$



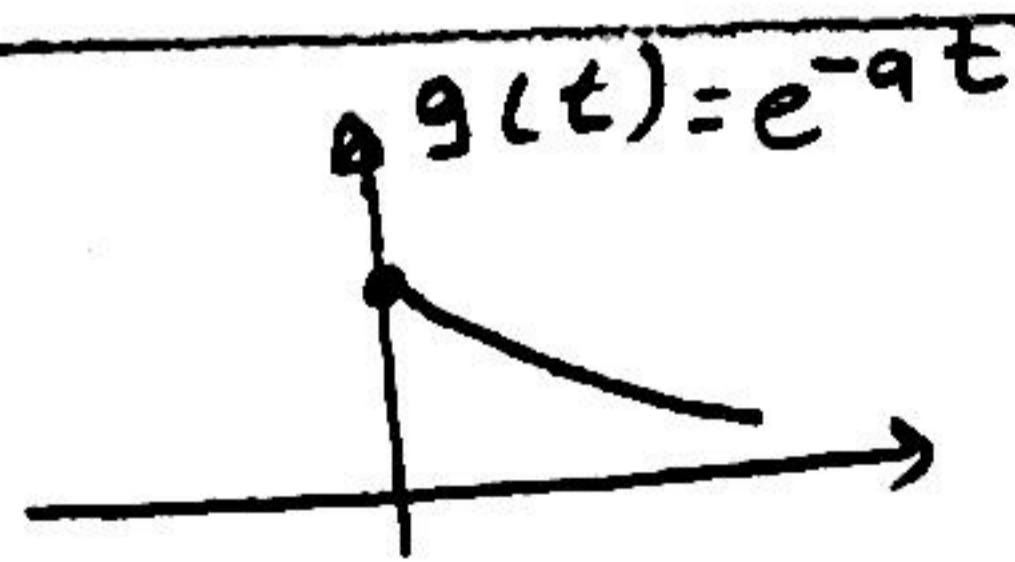
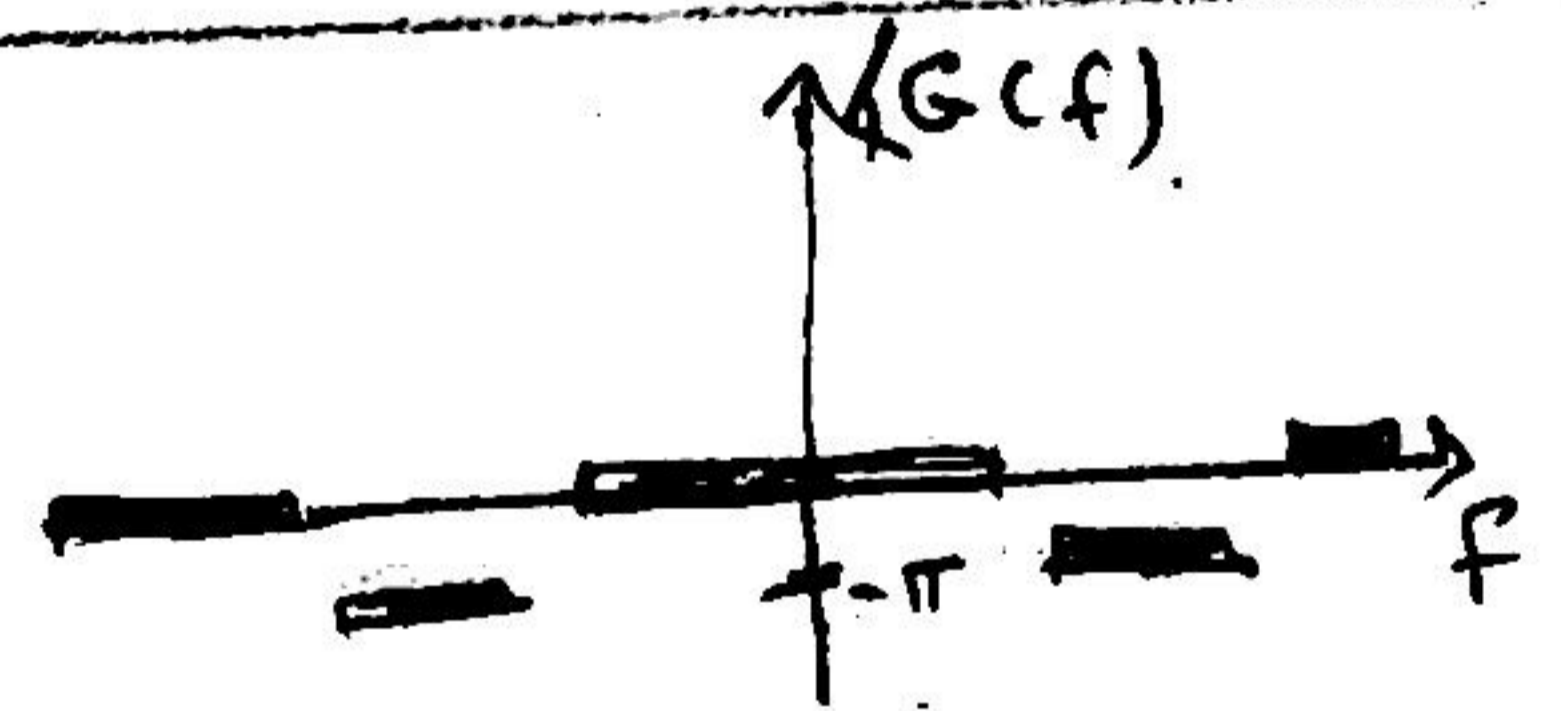
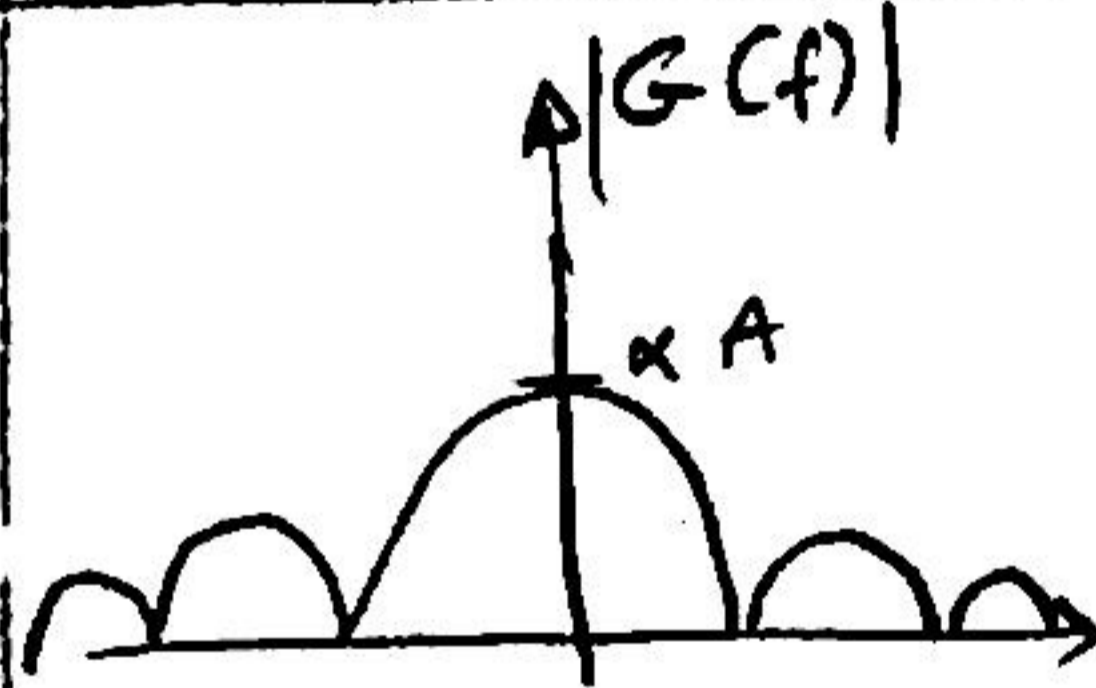
$$G(f) = \frac{1}{2j} [\delta(f-f_c) - \delta(f+f_c)]$$



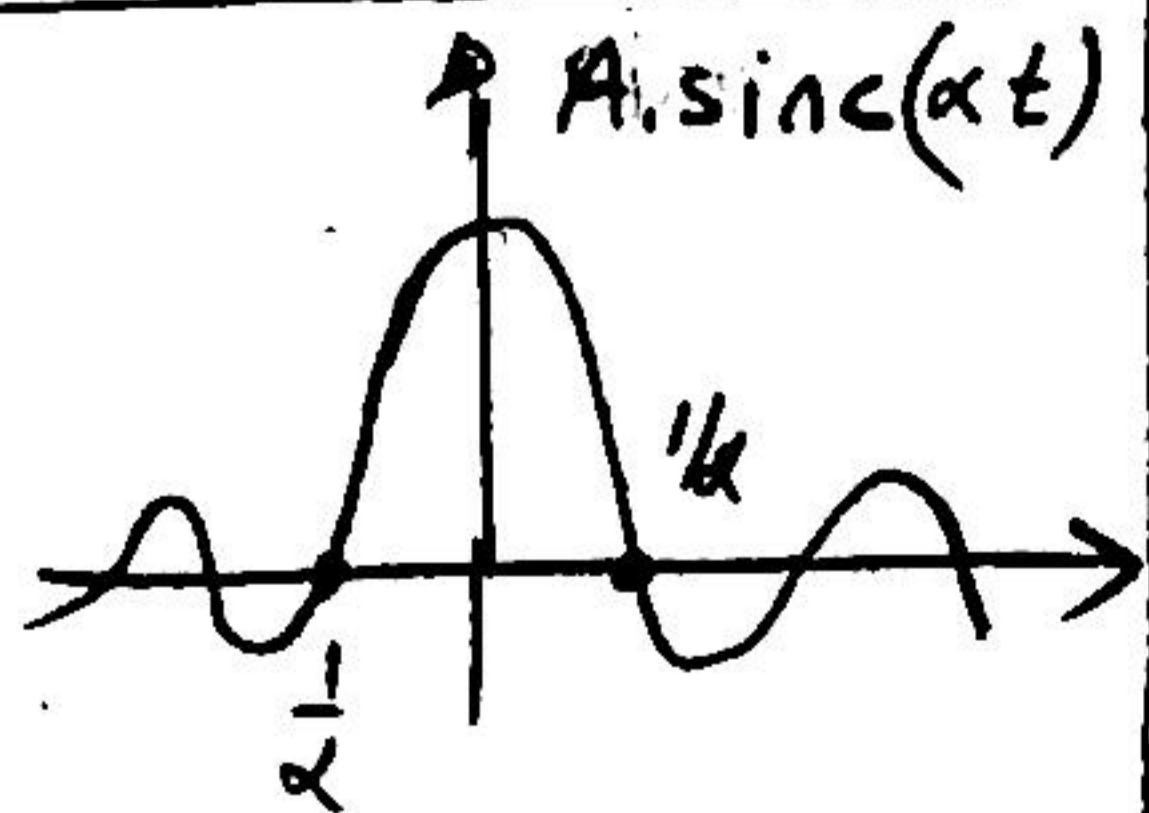
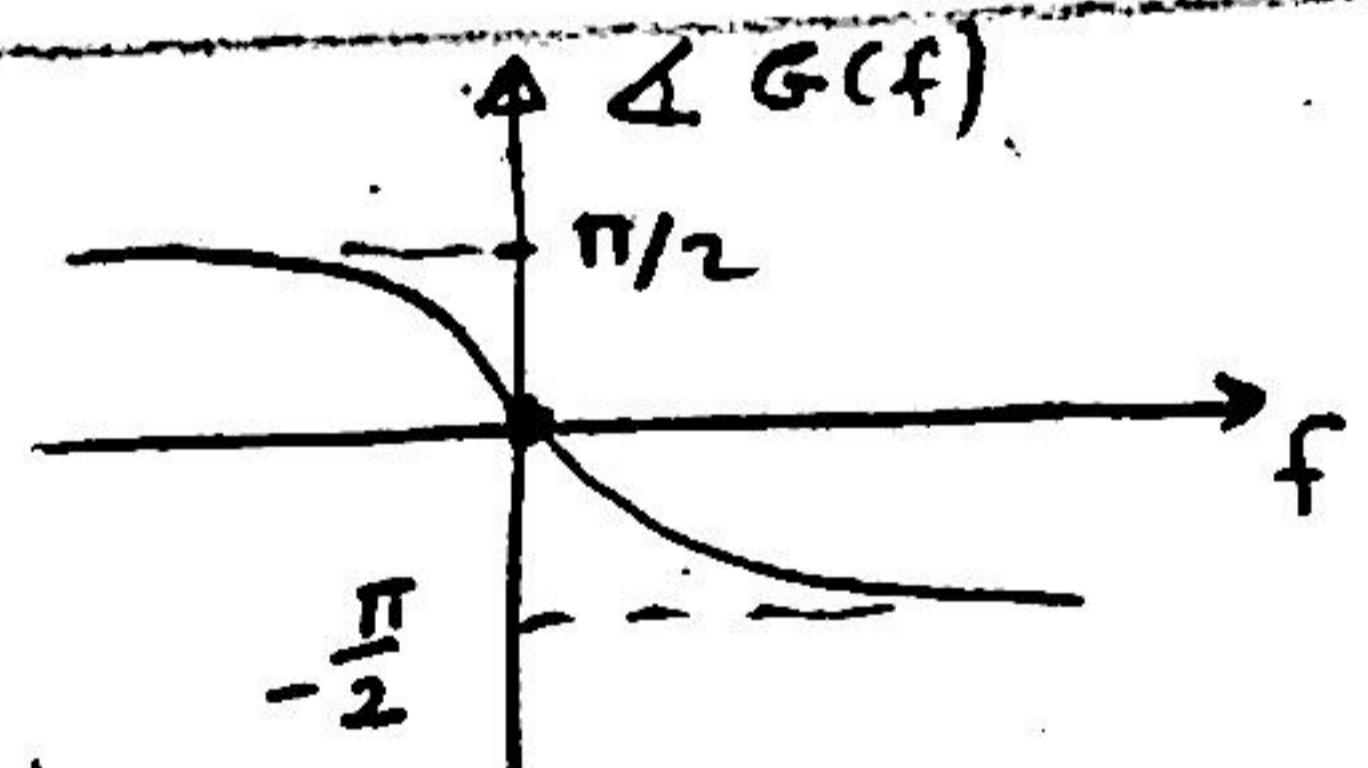
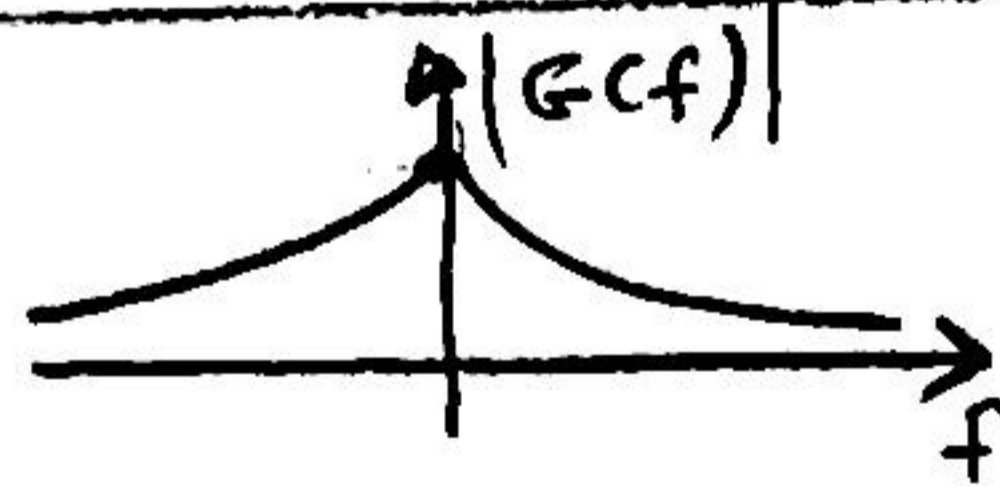
$$G(f) = \frac{1}{2\pi f_j} + \frac{1}{2} \delta(f)$$



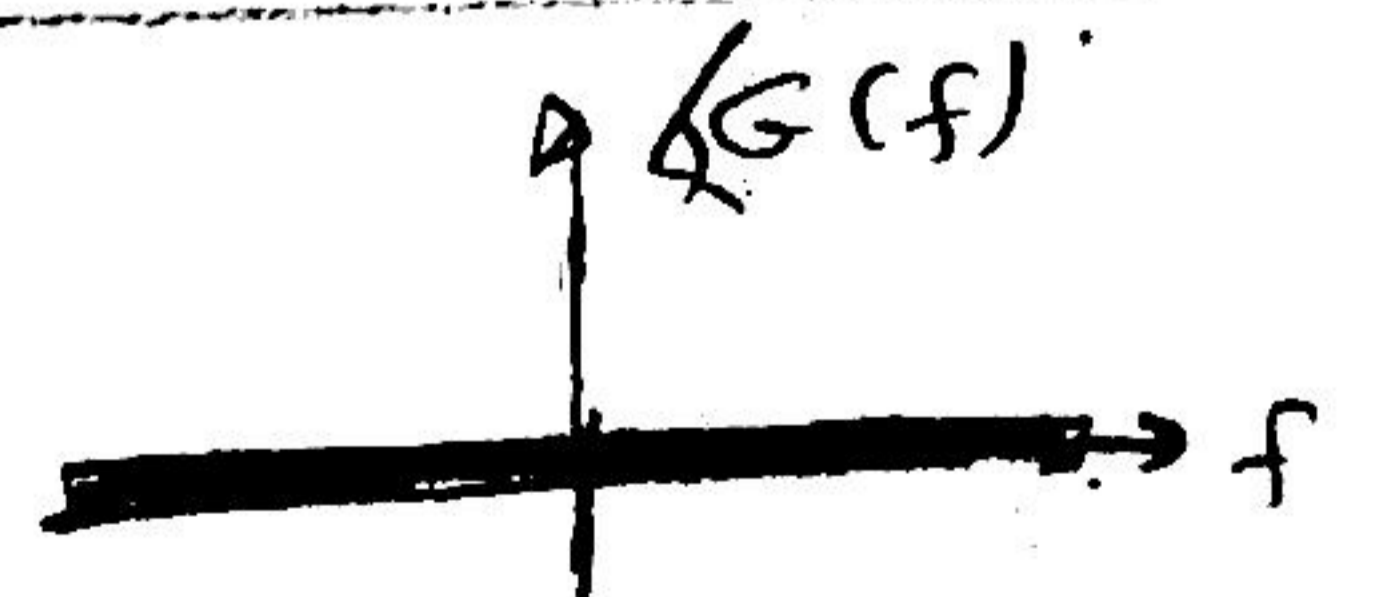
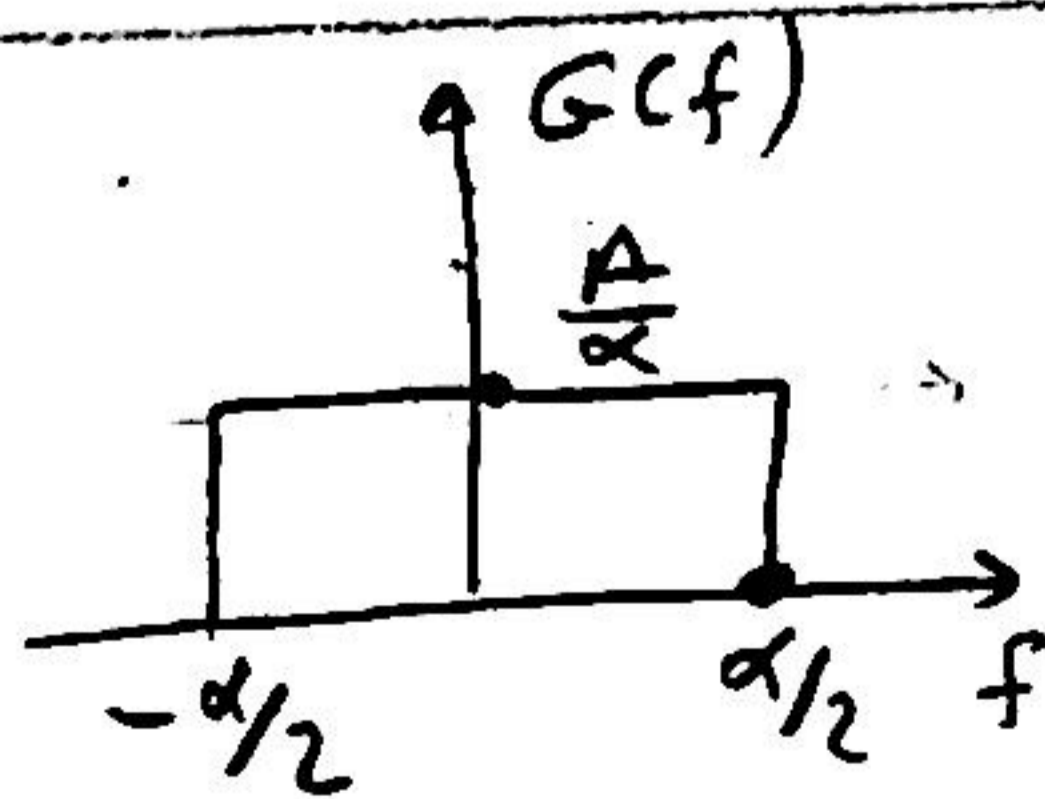
$$G(f) = A \times \frac{\sin \pi f \alpha}{\pi f \alpha} = A \alpha \text{sinc}(f \alpha)$$



$$G(f) = \frac{1}{a + 2\pi j f}$$

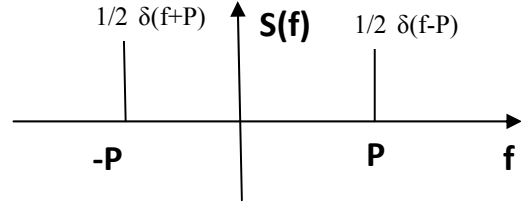
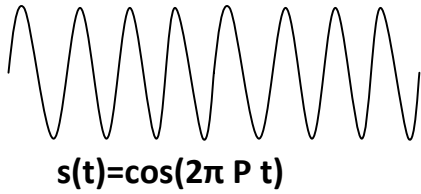


$$G(f) = \frac{A}{\alpha} \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

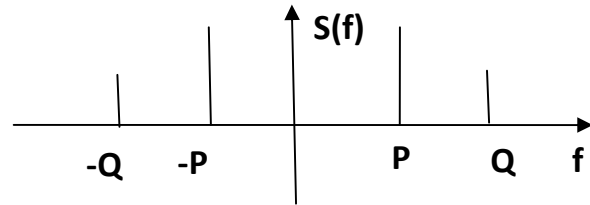
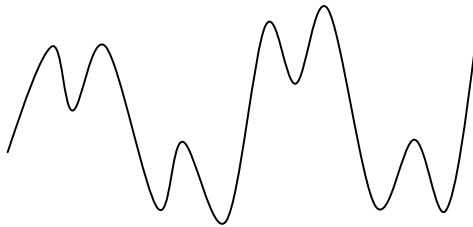


FURIER DONUSUMU (OZET)

$$F\{\cos 2\pi Pt\} = \frac{1}{2} [\delta(f-P) + \delta(f+P)]$$



$$S(f) = \frac{1}{2} \delta(f-P) + \delta(f+P)$$



$$s(t) = 10\cos(2\pi Pt) + 4\cos(2\pi Qt)$$

$$S(f) = \frac{1}{2} [5\delta(f-P) + 5\delta(f+P) + 2\delta(f-Q) + 2\delta(f+Q)]$$

Trigonometri

$$\cos X \cos Y = \frac{1}{2} (\cos(X+Y) + \cos(X-Y))$$

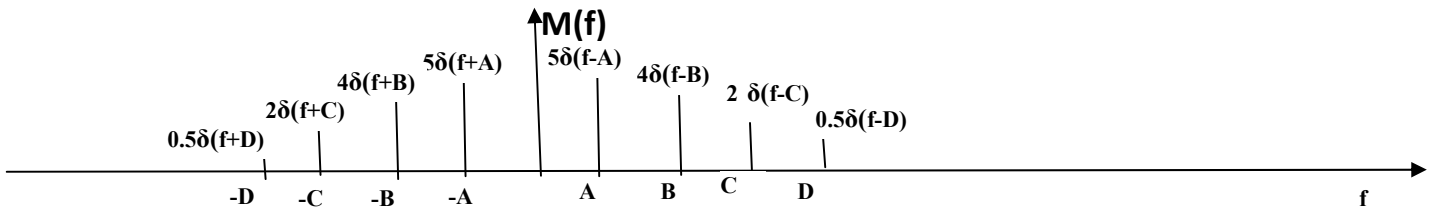
$$\begin{aligned} \cos X (10 \cos A + 8 \cos B + 4 \cos C + \cos D) \\ = 10 \cos X \cos A + 8 \cos X \cos B + 4 \cos X \cos C + \cos X \cos D \\ = 5 \cos(X-A) + 5 \cos(X+A) \\ + 4 \cos(X-B) + 4 \cos(X+B) \\ + 2 \cos(X-C) + 2 \cos(X+C) \\ + 0.5 \cos(X-D) + 0.5 \cos(X+D) \end{aligned}$$

Simdi soyle bir m(t) isareti verilsin

$$m(t) = 10 \cos 2\pi At + 8 \cos 2\pi Bt + 4 \cos 2\pi Ct + \cos 2\pi Dt$$

m(t) isaretinin Furier donusumu sekildeki gibidir.

$$m(t) = 10 \cos 2\pi At + 8 \cos 2\pi Bt + 4 \cos 2\pi Ct + \cos 2\pi Dt$$



Simdi $s(t) = \cos 2\pi X m(t)$ isareti verilsin.

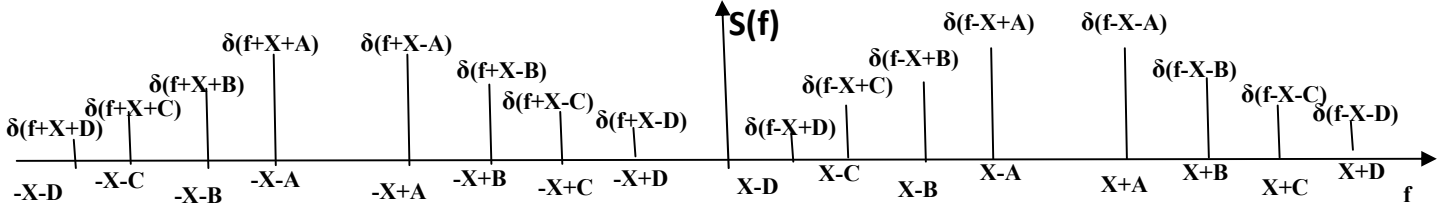
$$s(t) = \cos 2\pi X m(t) = \cos 2\pi X (10 \cos 2\pi At + 8 \cos 2\pi Bt + 4 \cos 2\pi Ct + \cos 2\pi Dt)$$

Bu isaretin Furier donusumu ne olur. Veya Hangi frekanslarda isaretler bulunur ona bakalim .

1) Carpimdan dolayi X-A ve X+A, X-B ve X+B, X-C ve X+C, X-D ve X+D, frekanslarinda isaretler bulunacaktır.

2) X,A,B,C,D frekanslarinda isaret yoktur. (Carpimin icinde $\cos(2\pi At)$, $\cos(2\pi Bt)$, $\cos(2\pi Ct)$ gibi terimler yoktur.)

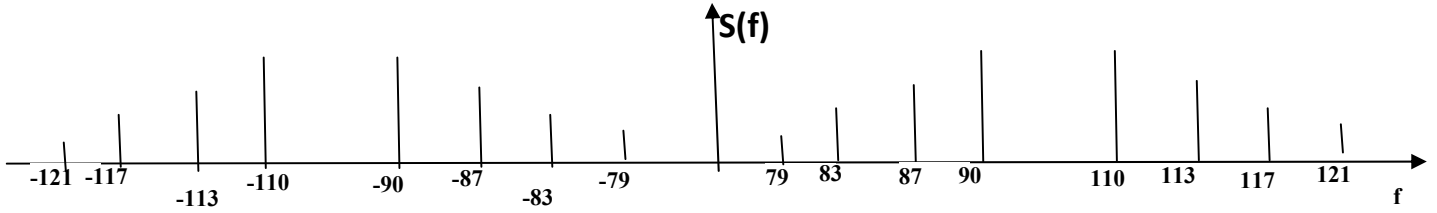
$$s(t) = \cos 2\pi X (10 \cos 2\pi At + 8 \cos 2\pi Bt + 4 \cos 2\pi Ct + \cos 2\pi Dt)$$



Ornek olarak rakamlarla ifade edecek olursak.

X=100, A=10, B=13, C=17, D=21 olsun. X+A=110, X+B=113, X+C=117, X+D=121, X-A=90, X-B=87, X-C=83, X-D=79,

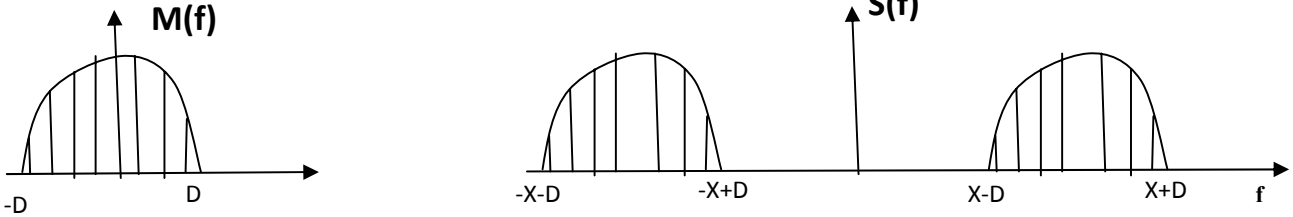
$$s(t) = \cos 2\pi 100 (10 \cos 2\pi 10t + 8 \cos 2\pi 13t + 4 \cos 2\pi 17t + \cos 2\pi 21t)$$



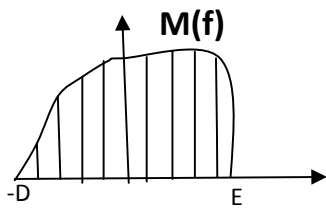
Yukaridan gordugumuz gibi S(f) spektrumu M(f) spektrumunun X kadar saga ve sola kaymis sekilleridir.

Simdi genel olarak spektrumu sekildeki gibi verilen bir m(t) isaretin $\cos(2\pi Xt)$ ile carpilmasindan olusan yeni s(t) isaretinin spektrumu S(f) ne olur ona bakalim.

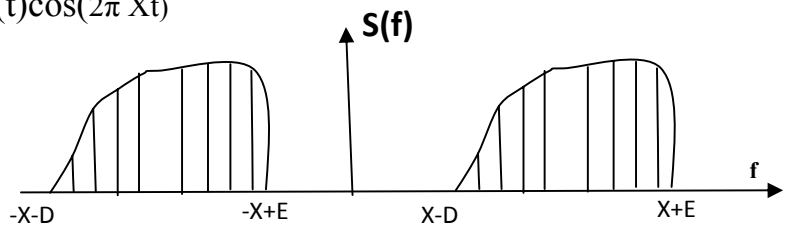
$$s(t) = m(t) \cos(2\pi Xt)$$



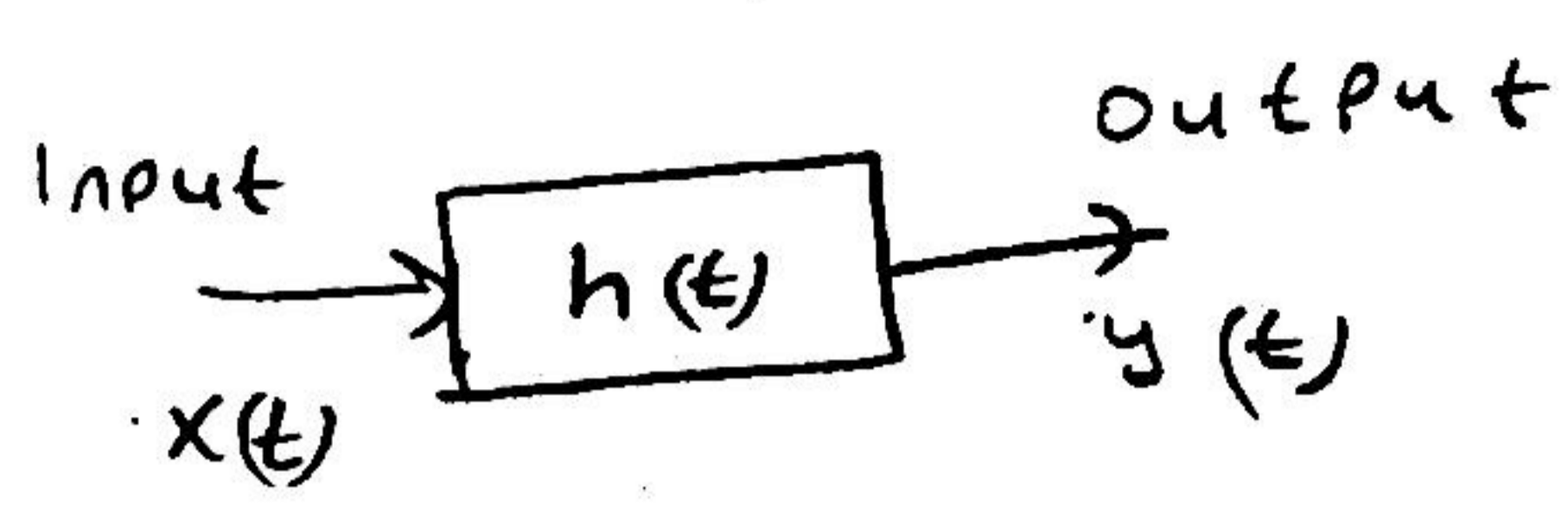
Reel zamanda olusan gercek isaretlerin spektrumlari simetriktir. Eger simetrik olmayan bir isaret olursa onunda $\cos(2\pi Xt)$ ile carpi,dan sonraki spektrumu sekildeki gibi olacaktir.



$$s(t) = m(t) \cos(2\pi X t)$$



Transmission of signals in Linear systems.



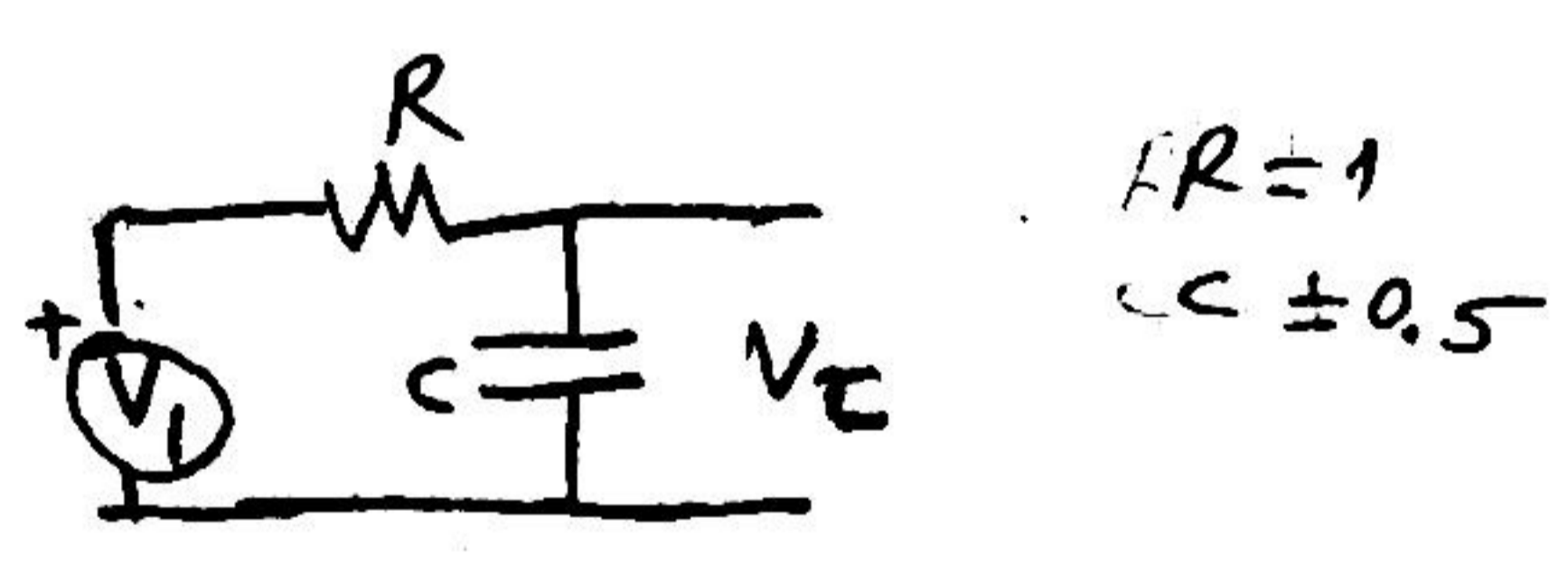
$h(t) \Rightarrow$ impulse response

$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$

$H(f) =$ transfer function

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Example: Calculate transfer function for the following circuit. Draw amplitude and phase spectrum.



$$-V_1 + RI + V_c = 0$$

$$-V_1 + R C \frac{dV_c}{dt} + V_c = 0$$

$$RC \frac{dV_c}{dt} + V_c = V_1$$

$$F \left\{ RC \frac{dV_c}{dt} + V_c \right\} = F \left\{ V_1 \right\}$$

$$RC j2\pi f V_c(f) + V_c(f) = V_1(f)$$

cm33

$$[RC 2\pi f + 1] V_c(f) = V_1(f)$$

$$\frac{V_c(f)}{V_1(f)} = \frac{1}{j2\pi f RC + 1} = H(f)$$

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f 1.05 + 1} = \frac{1}{j\pi f + 1}$$

f	$H(f) = \frac{1}{j\pi f + 1}$	$ H(f) $	$\angle H(f)$
0	$\frac{1}{j\pi 0 + 1} = 1$	1	0°
0.1	$\frac{1}{j\pi 0.1 + 1} = 0.91 - 0.28i$	0.95	-17.1°
0.2			
0.3			
1			
10			
∞	0	0	-90°

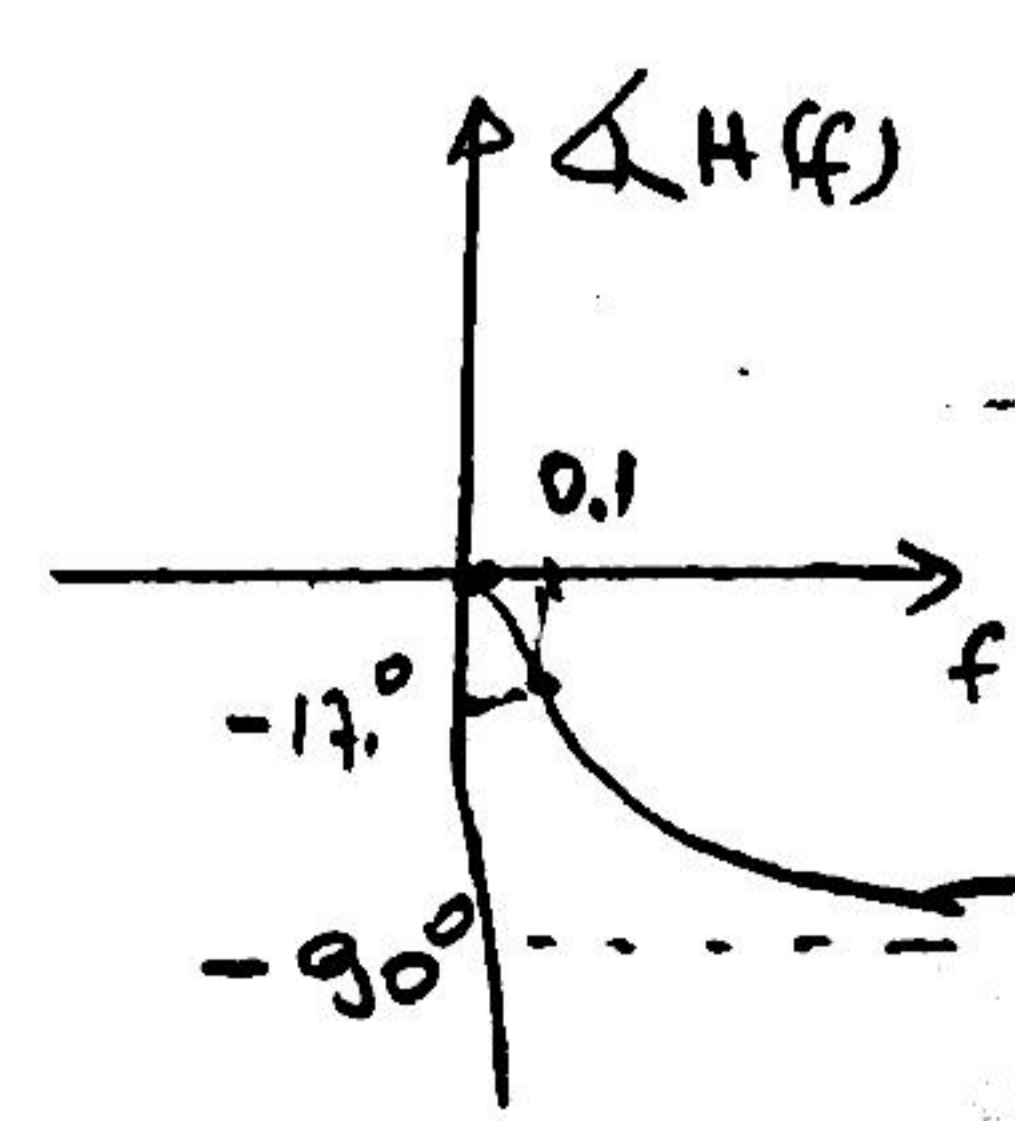
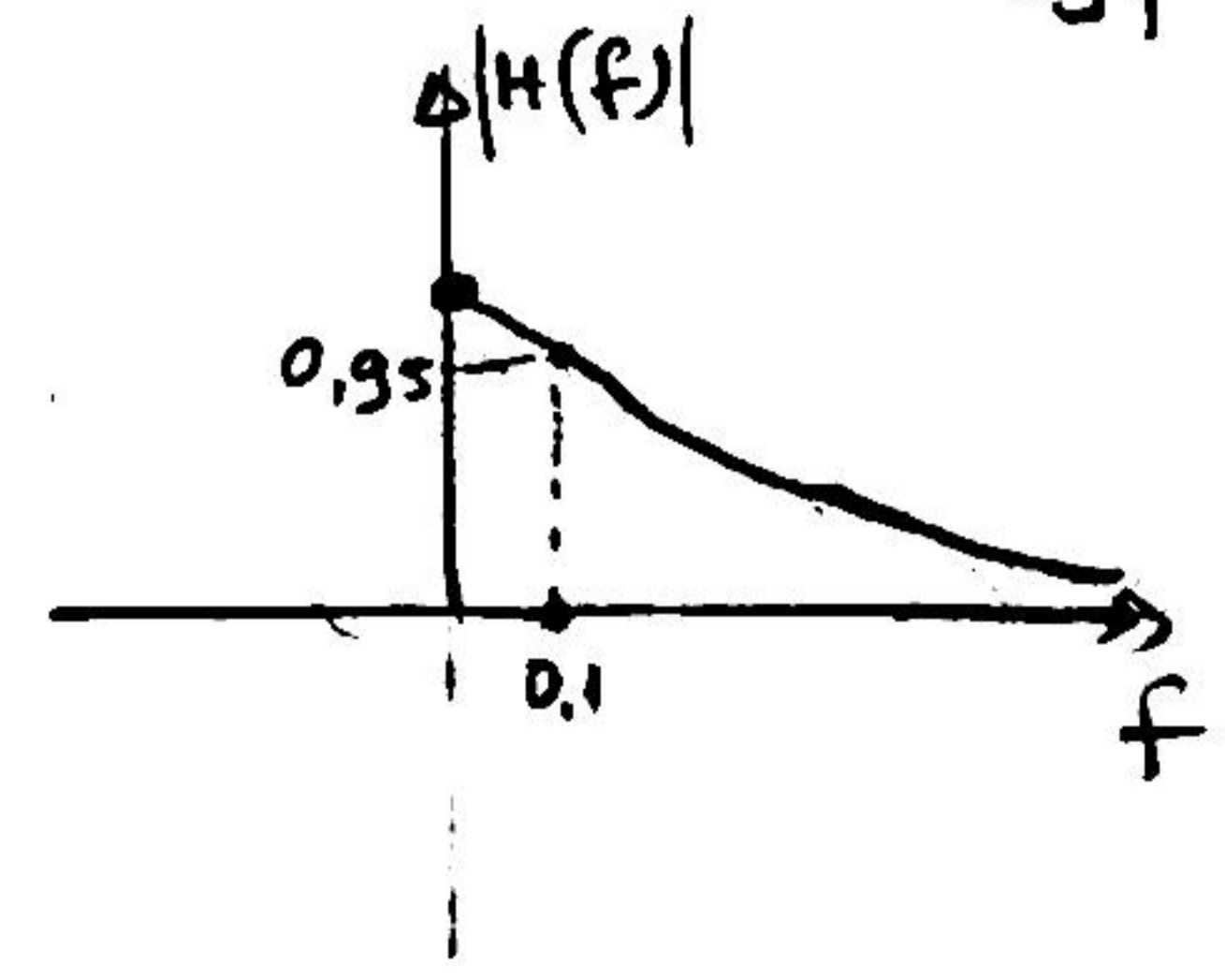
$$\frac{1}{j\pi 0.1 + 1} = \frac{1 - j\pi 0.1}{(1 + j\pi 0.1)(1 - j\pi 0.1)} = \frac{1 - j\pi 0.1}{1^2 + (0.1\pi)^2}$$

$$= \frac{1 - j 0.314}{1.098} = 0.91 - 0.28i$$

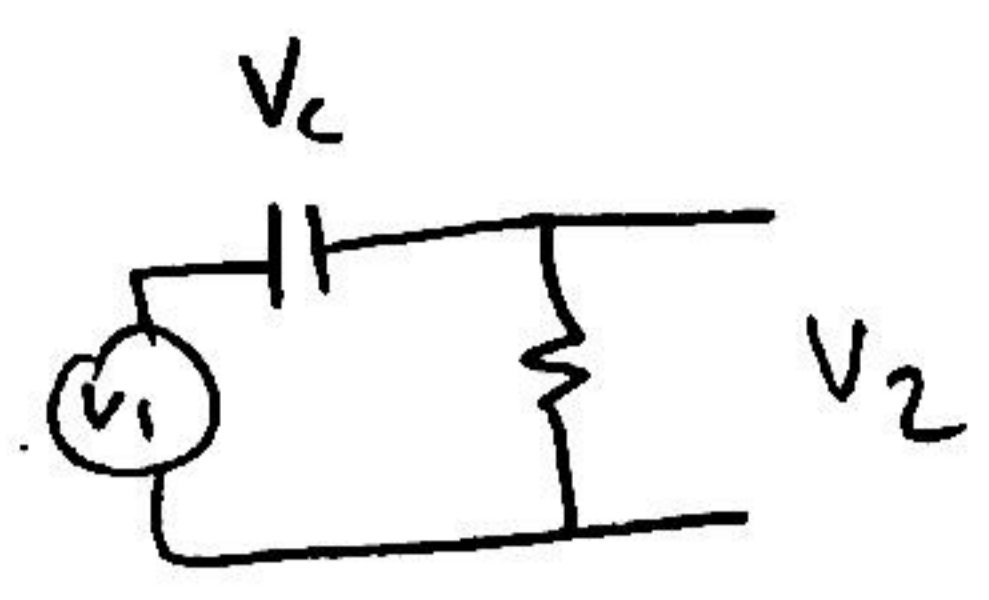
$$H(0.1) = 0.91 - 0.28i$$

$$|H(0.1)| = \sqrt{0.91^2 + 0.28^2} = \sqrt{0.906} = 0.95$$

$$\angle H(0.1) = \tan^{-1} \frac{-0.28}{0.91} = \pm 0.29 \text{ radian} = -17.1^\circ$$



calculate Transfer function for the following circuit



$$-V_1 + V_c + RI = 0$$

$$I = c \frac{dV_c}{dt}$$

$$F\{I(f)\} = F\left\{c \frac{dV_c}{dt}\right\}$$

$$I(f) = c j2\pi f V_c(f)$$

$$-V_1(f) + V_c(f) + RI(f) = 0$$

$$-V_1(f) + \frac{1}{j2\pi f c} I(f) + RI(f) = 0$$

$$\left[\frac{1}{j2\pi f c} + R \right] I(f) = V_1(f)$$

$$I(f) = \frac{V_2(f)}{R}$$

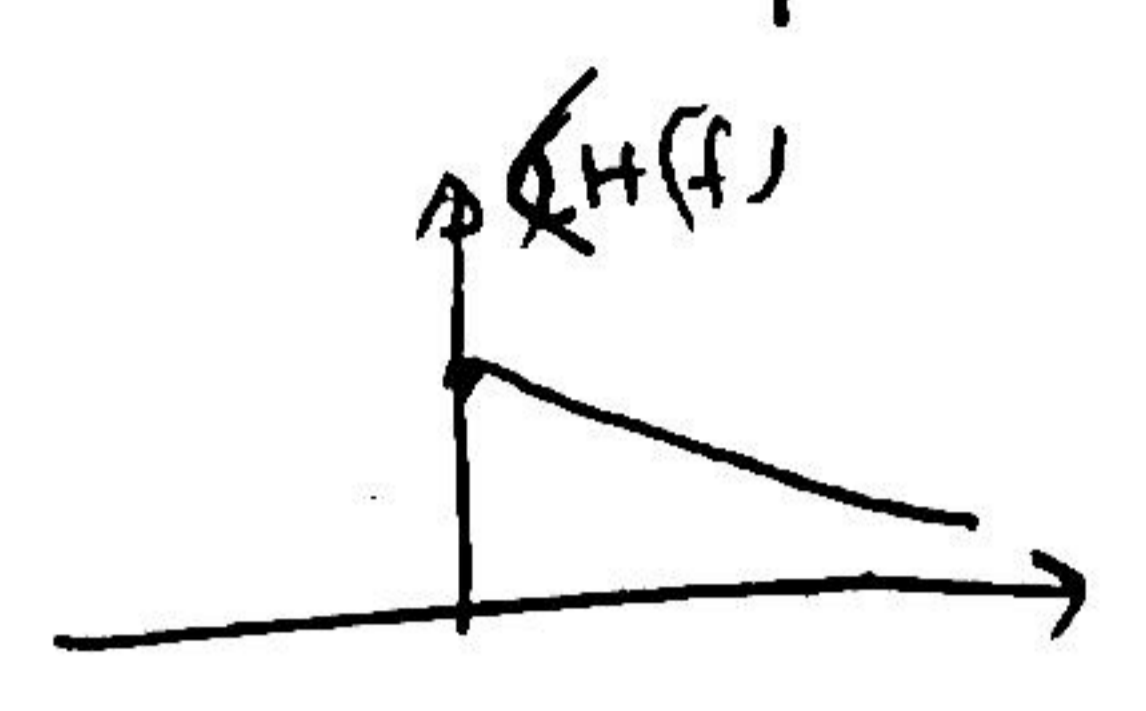
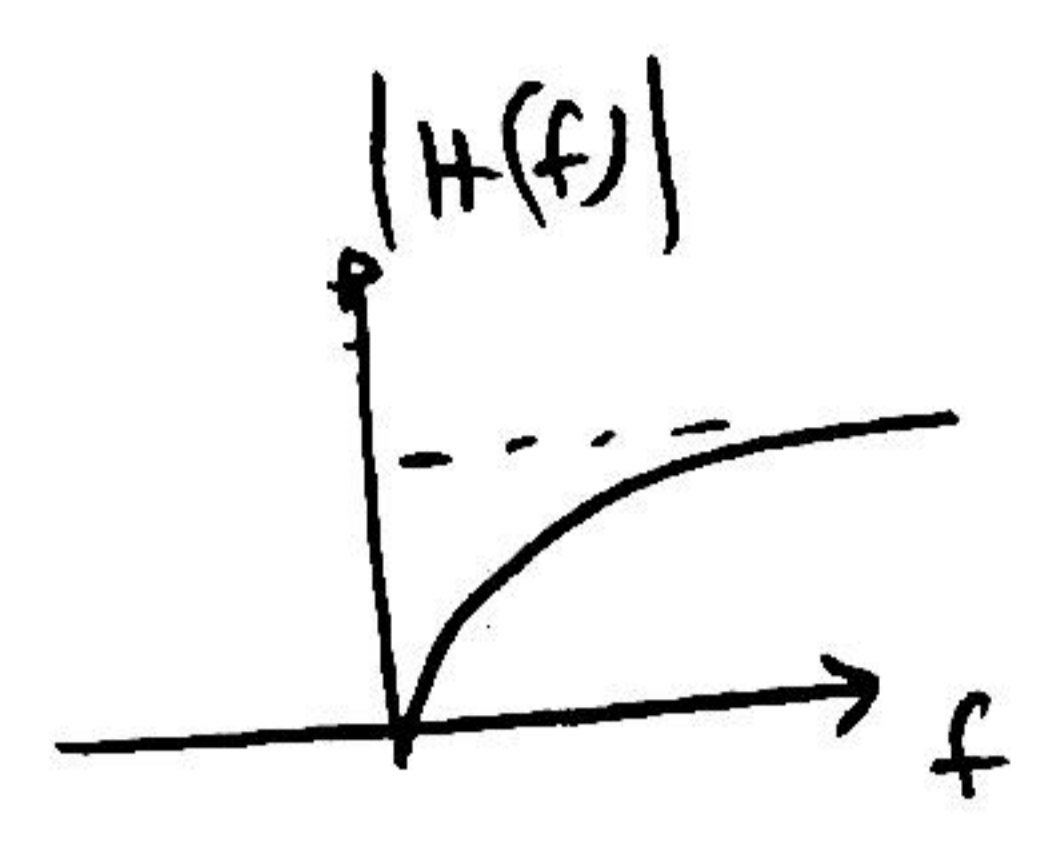
$$\left[\frac{1}{j2\pi f c} + R \right] \frac{V_2(f)}{R} = V_1(f)$$

$$\frac{V_2(f)}{V_1(f)} = \frac{1}{\frac{1}{j2\pi f c} + 1} = \frac{j2\pi f c R}{j2\pi f c R + 1}$$

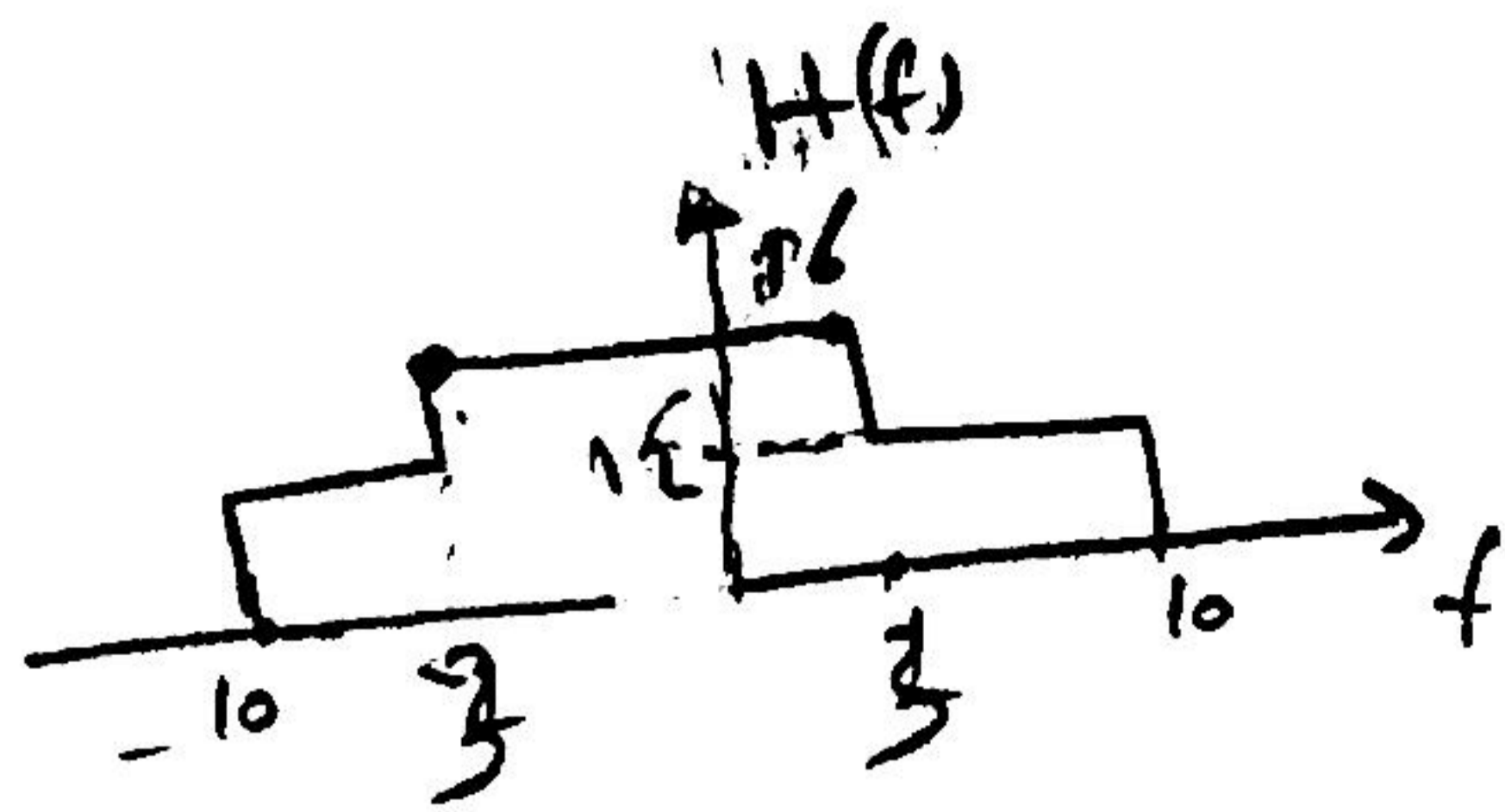
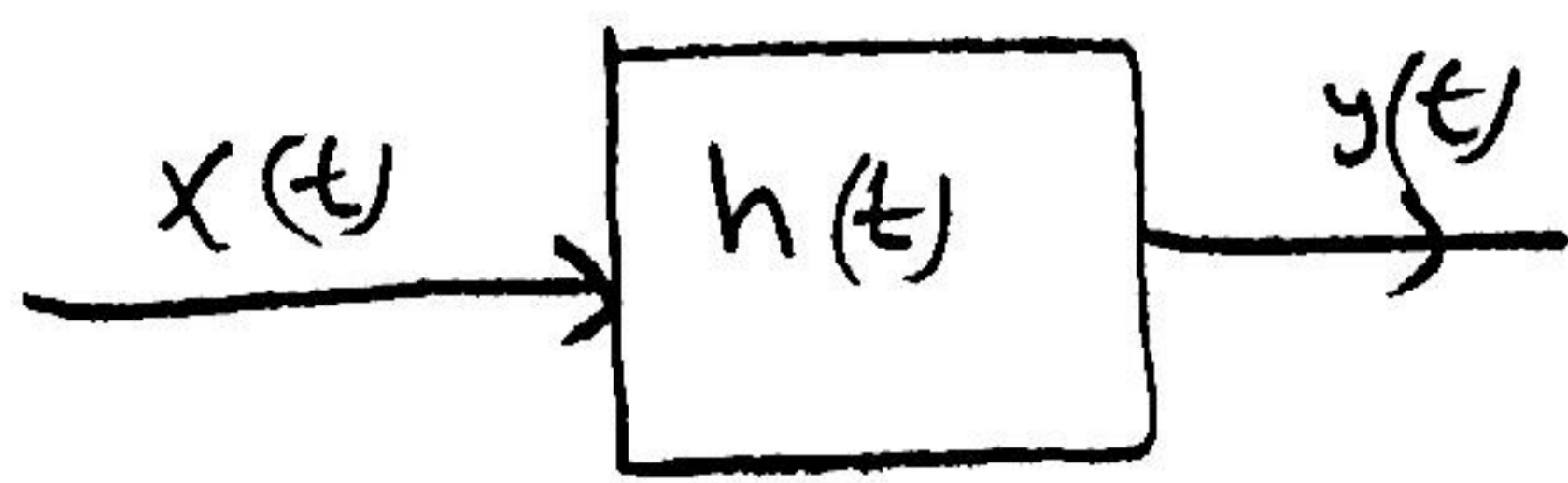
$$R = 1 \quad c = 0.5$$

$$\frac{V_2(f)}{V_1(f)} = \frac{\pi f j}{\pi f j + 1} = H(f)$$

f	H(f)	H(f)	∠H(f)



Example Calculate the output $y(t)$ for the following system



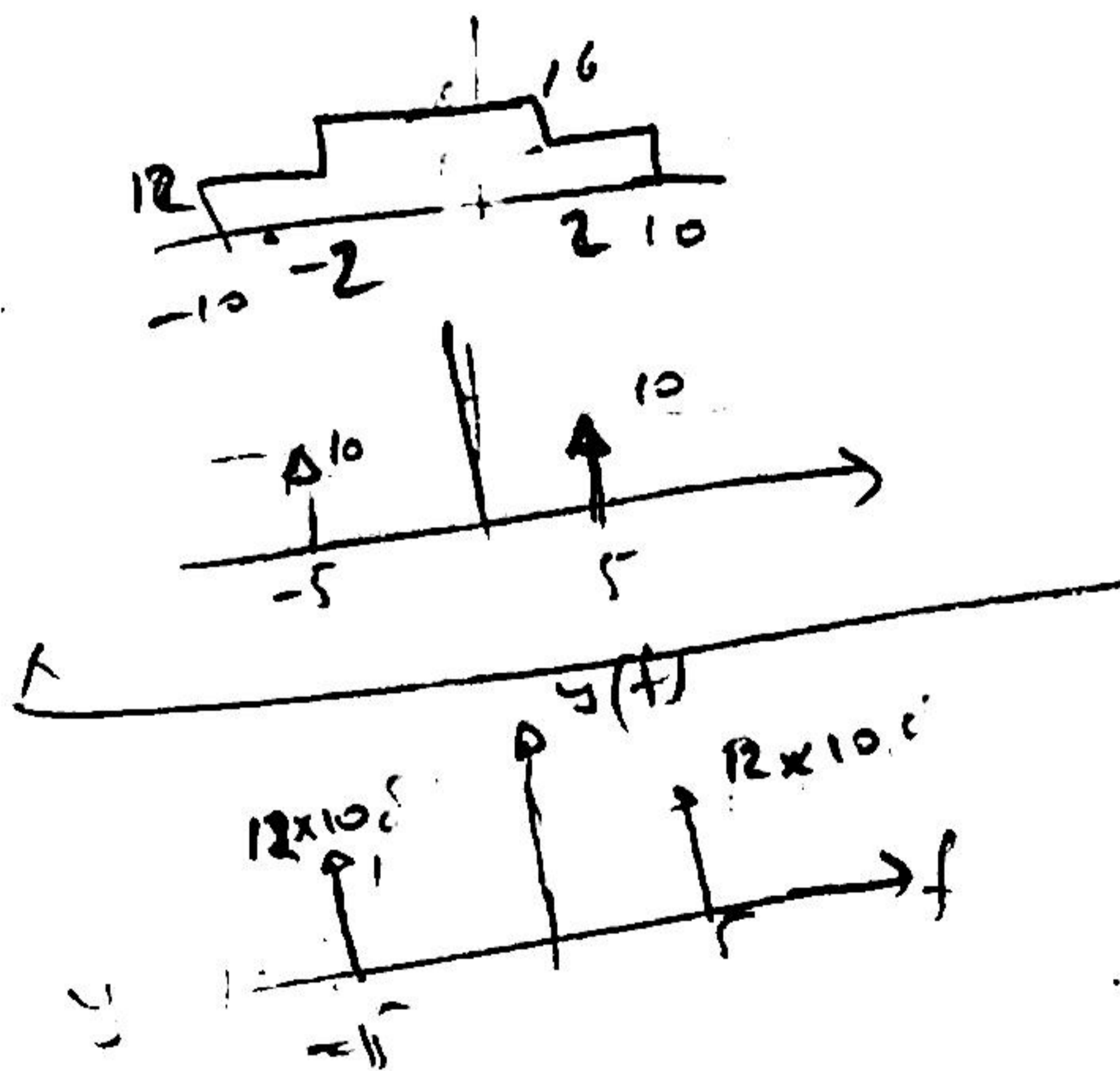
$$x(t) = 20 \cos(10\pi t)$$

Answer $f \{ \cos 2\pi f_c t \} = \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$

$$f \{ 20 \cos(10\pi t) \} = 20 f \{ \cos 2\pi \cdot 5 t \} =$$

$$= 20 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f - 5) + \delta(f + 5)] = 10 [\delta(f - 5) + \delta(f + 5)]$$

$$y(f) = H(f) x(f) =$$

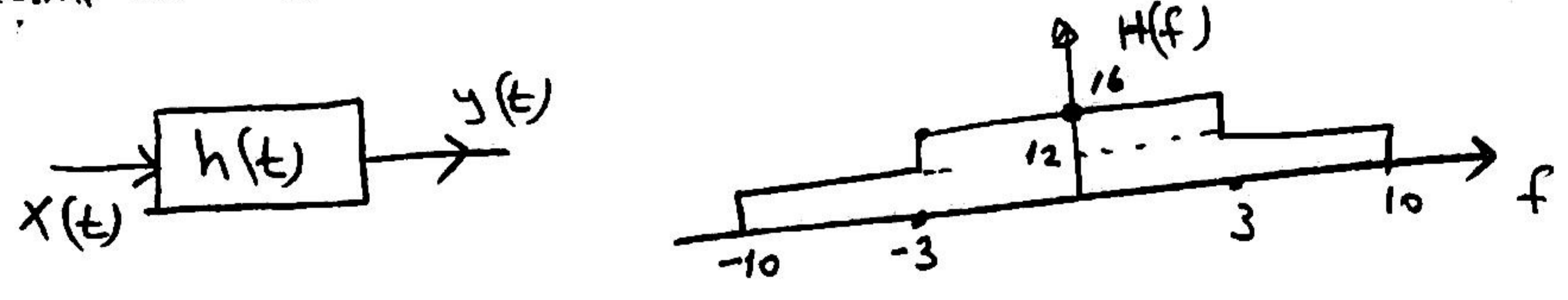


$$y(f) = 120 \delta(f + 5) + 120 \delta(f - 5)$$

$$y(f) = 240 \left(\frac{1}{2} [\delta(f + 5) + \delta(f - 5)] \right)$$

$$y(t) = 240 \cos 2\pi \cdot 5 t$$

Example: Calculate $y(t)$ for the following system



$$x(t) = 7 \cos 4\pi t + 9 \cos 10\pi t$$

Answer: $x(t) = 7 \cos(2\pi \cdot 2 t) + 9 \cos(2\pi \cdot 5 t)$
 $f_1 = 2$ $f_2 = 5$

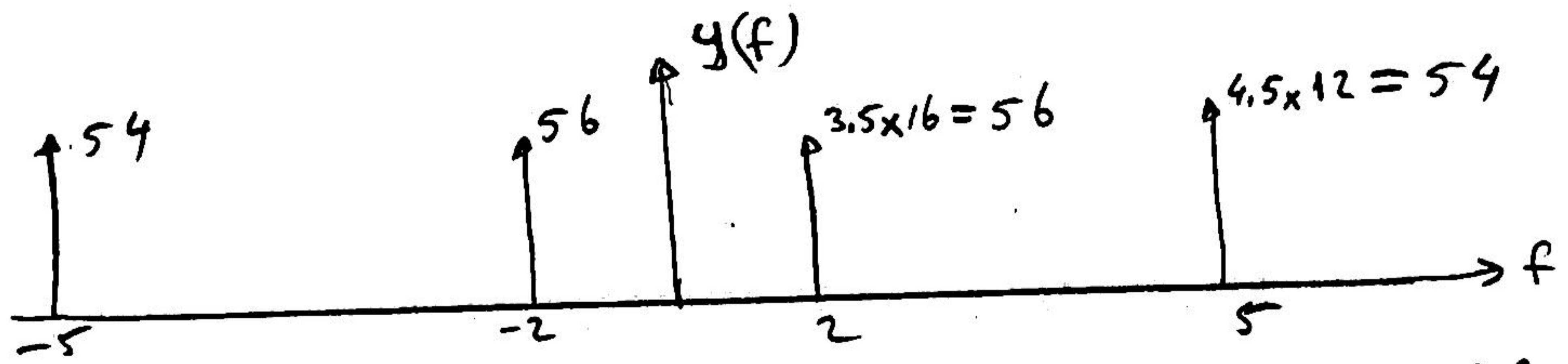
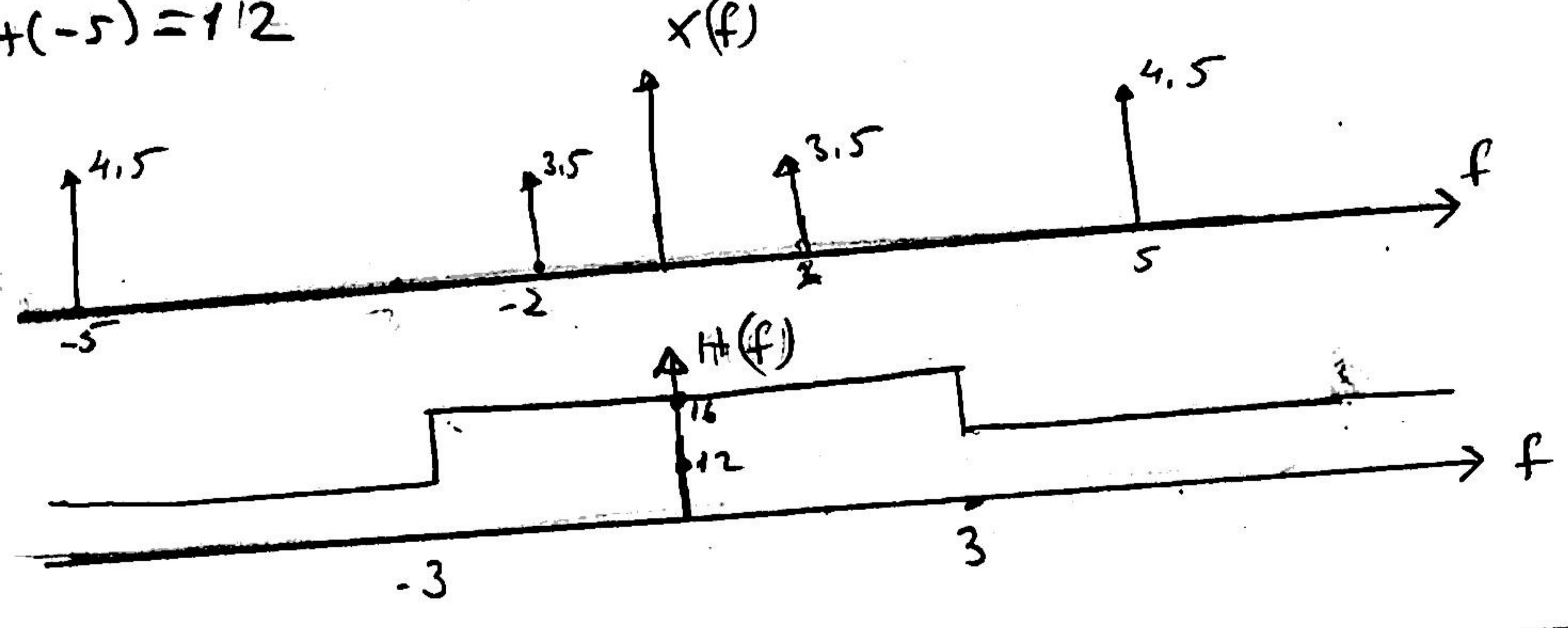
$$X(f) = 7 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f-2) + \delta(f+2)] + 9 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f-5) + \delta(f+5)]$$

1. $H(2) = 16$

$H(-2) = 16$

$H(5) = 12$

$H(-5) = 12$



$$y(f) = 54 \delta(f+5) + 56 \delta(f+2) + 56 \delta(f-2) + 54 \delta(f-5)$$

$$= 112 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f+2) + \delta(f-2)] + 108 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f+5) + \delta(f-5)]$$

$$y(t) = 112 \cos 2\pi \cdot 2 t + 108 \cos 2\pi \cdot 5 t$$

$$= 112 \cos 4\pi t + 108 \cos 10\pi t$$

Example: calculate $y(t)$ if $x(t) = 3 \cos 4\pi t + 7 \cos 9\pi t$

and $H(f) = \frac{40}{8\pi f j + 13}$



Answer: $x(f) = 3 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f+2) + \delta(f-2)] + 7 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f+4.5) + \delta(f-4.5)]$

we must find $H(2)$, $H(-2)$, $H(4.5)$, $H(-4.5)$

$$H(2) = \frac{40}{8\pi \cdot 2 j + 13} = 0.192 - 0.74j$$

$$H(-2) = \frac{40}{8\pi(-2)j + 13} = 0.192 + 0.74j$$

$$|H(2)| = \sqrt{0.192^2 + 0.74^2} = 0.76$$

$$\angle H(2) = \tan^{-1} \frac{-0.74}{0.192} = -1.31 \text{ radian}$$

$$|H(-2)| = 0.76$$

$$\angle H(-2) = 1.31 \text{ radian}$$

$$H(4.5) = \frac{40}{8\pi \cdot 4.5 j + 13} = 0.04 - 0.35j$$

$$|H(4.5)| = 0.352$$

$$\angle H(4.5) = -1.45 \text{ radian}$$

$$|H(-4.5)| = 0.352$$

$$\angle H(-4.5) = 1.45 \text{ radian}$$

$$y(t) = 3 \times 0.76 \cos(-4\pi t - 1.31) + 7 \times 0.352 \cos(9\pi t - 1.45)$$

$$y(t) = 2.28 \cos(4\pi t - 1.31) + 2.46 \cos 9\pi t - 1.45$$

Example: calculate $y(t)$ if $x(t) = 3 \cos 4\pi t + 7 \cos 9\pi t$

and $H(f) = \frac{40}{8\pi f j + 13}$



Answer: $x(f) = 3 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f+2) + \delta(f-2)] + 7 \cdot \frac{1}{2} [\delta(f+4.5) + \delta(f-4.5)]$

we must find $H(2)$, $H(-2)$, $H(4.5)$, $H(-4.5)$

$$H(2) = \frac{40}{8\pi \cdot 2 j + 13} = 0.192 - 0.74j$$

$$H(-2) = \frac{40}{8\pi(-2)j + 13} = 0.192 + 0.74j$$

$$|H(2)| = \sqrt{0.192^2 + 0.74^2} = 0.76$$

$$\angle H(2) = \tan^{-1} \frac{-0.74}{0.192} = -1.31 \text{ radian}$$

$$|H(-2)| = 0.76$$

$$\angle H(-2) = 1.31 \text{ radian}$$

$$H(4.5) = \frac{40}{8\pi \cdot 4.5 j + 13} = 0.04 - 0.35j$$

$$|H(4.5)| = 0.352$$

$$\angle H(4.5) = -1.45 \text{ radian}$$

$$|H(-4.5)| = 0.352$$

$$\angle H(-4.5) = 1.45 \text{ radian}$$

$$y(t) = 3 \times 0.76 \cos(-4\pi t - 1.31) + 7 \times 0.352 \cos(9\pi t - 1.45)$$

$$y(t) = 2.28 \cos(4\pi t - 1.31) + 2.46 \cos 9\pi t - 1.45$$

CM341

$$H(f) \Big|_{f=2} = \frac{40}{8\pi f j + 13} \Big|_{f=2} = \frac{40}{8 \times \pi \times 2j + 13} = \frac{40}{16\pi j + 13} = \frac{40(13 - 16\pi j)}{13^2 + (16\pi)^2} =$$

$$P = 13^2 + 50L^2 = 2691$$

$$= \frac{520}{2691} - \frac{640\pi}{2691} = 0.192 - 0.74j$$

$$H(f) \Big|_{f=4.5} = \frac{40}{8\pi \times 4.5j + 13} = \frac{40(13 - 36\pi j)}{13^2 + 36\pi^2} = \frac{40 \cdot 13}{P} - \frac{36 \times 40 \pi j}{P}$$

$$P = 13^2 + 36\pi^2 = 169 + 12791 = 12960$$

$$= \frac{520}{12960} - \frac{1440\pi j}{12960} = 0.04 - 0.35j$$

$$H(2) = 0.192 - 0.74j \rightarrow |H(2)| = \sqrt{0.192^2 + 0.74^2} = \sqrt{0.559} = 0.76$$

$$\angle H(2) = \tan^{-1} \frac{-0.74}{0.192} = -1.31 \text{ rad}$$

$$|H(4.5)| = \sqrt{0.04^2 + 0.35^2} = \sqrt{0.129} = 0.352$$

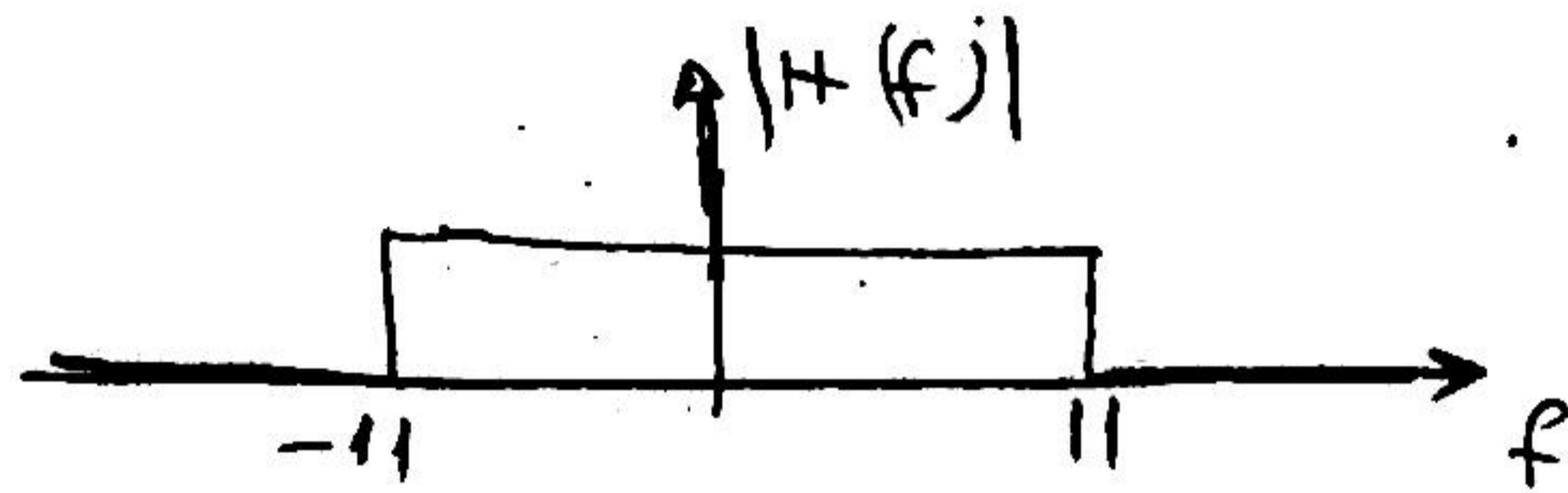
$$\angle H(4.5) = \tan^{-1} \frac{0.35}{0.04} = 1.45 \text{ radian}$$

$$y(t) = 3 \times 0.76 \cos(4\pi t - 1.31) + 7 \times 0.352 \cos(9\pi t - 1.45)$$

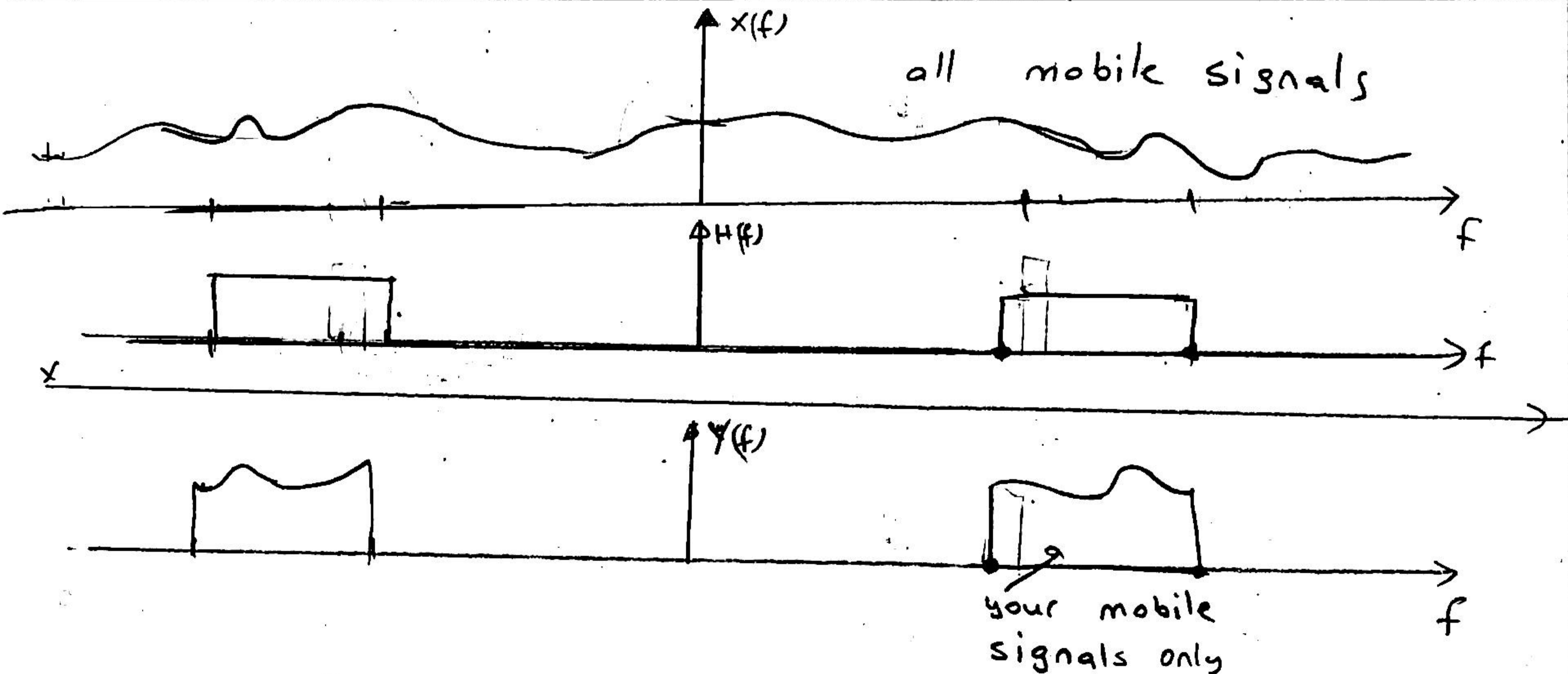
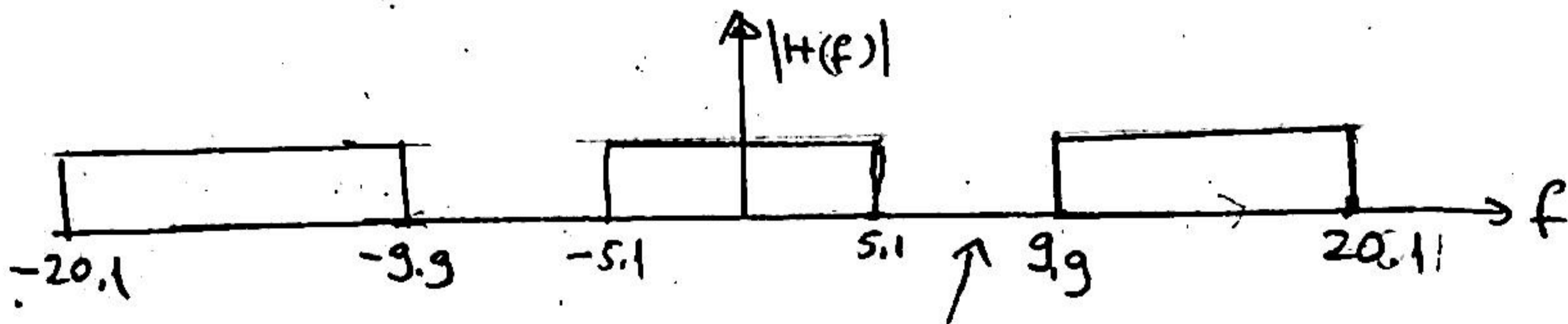
Filters



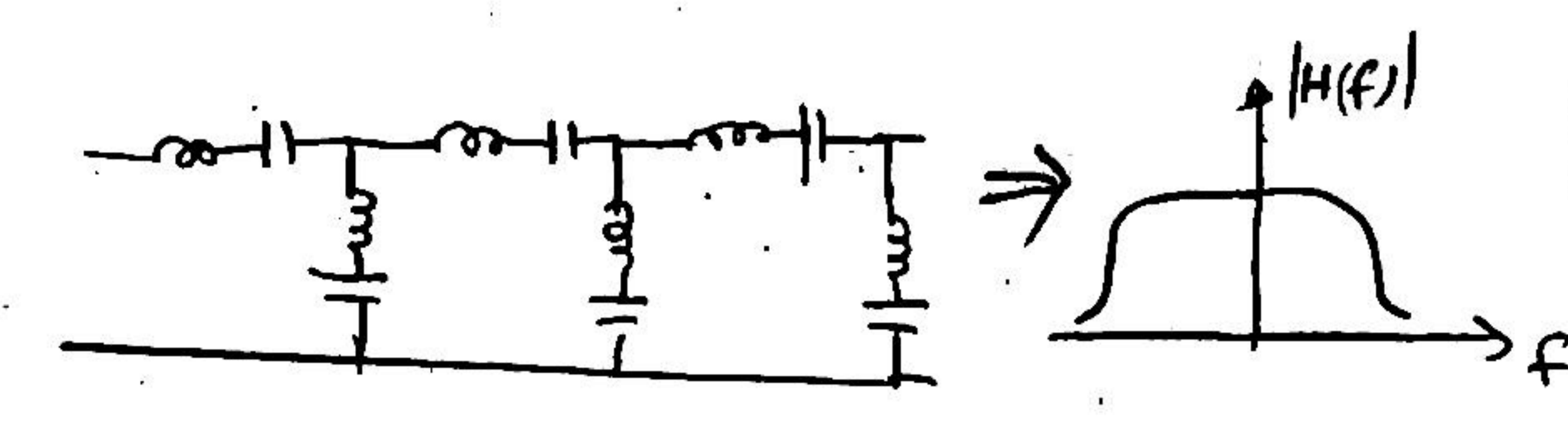
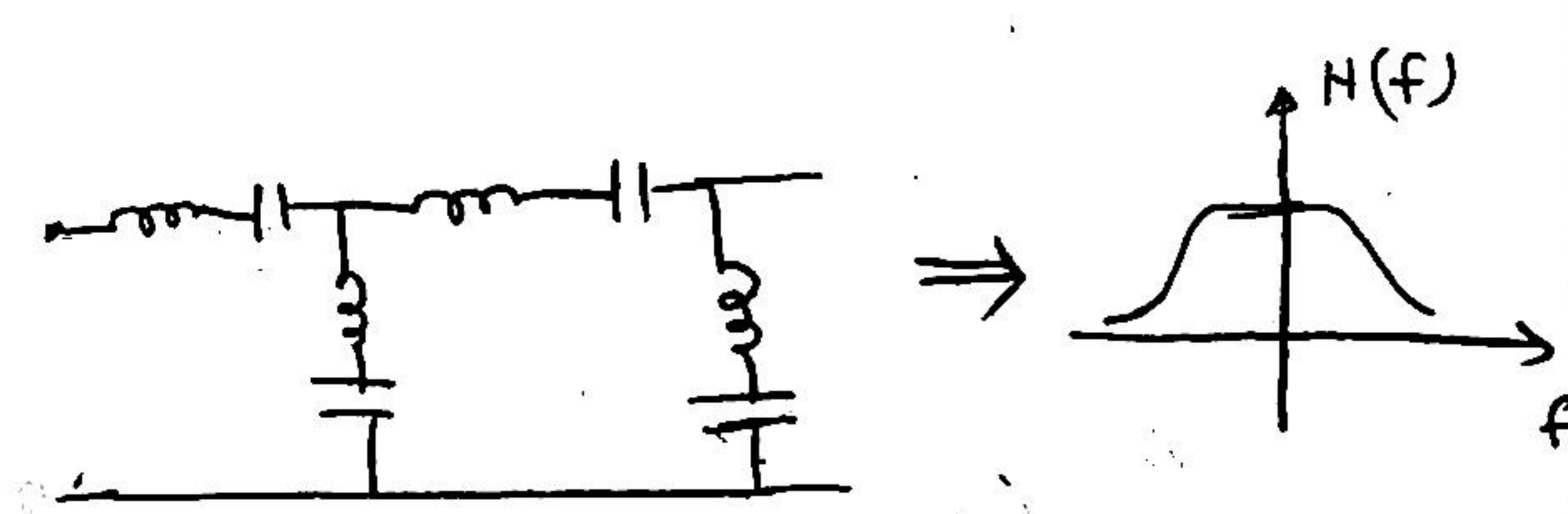
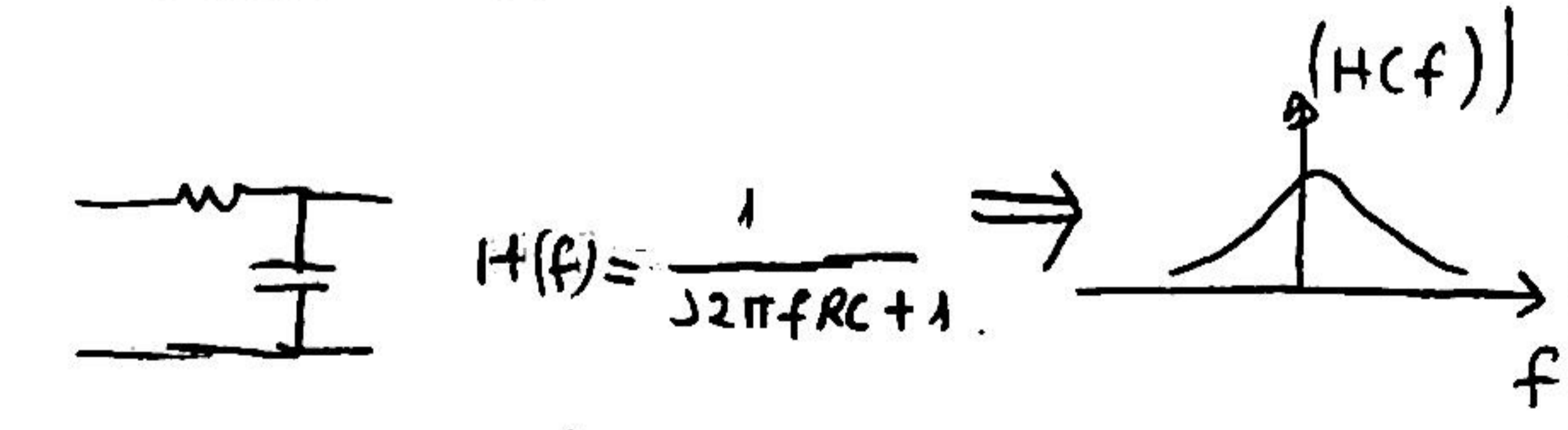
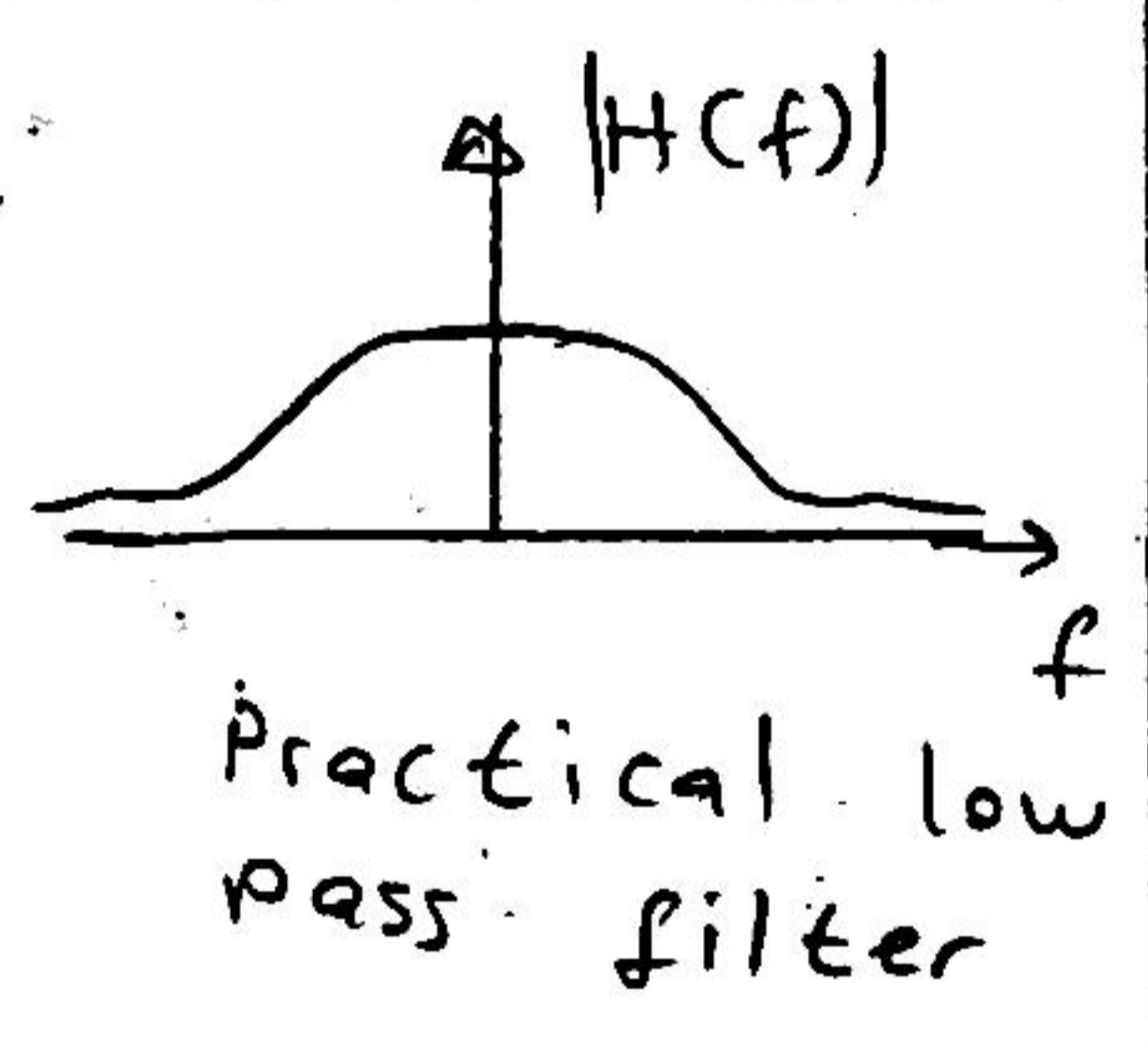
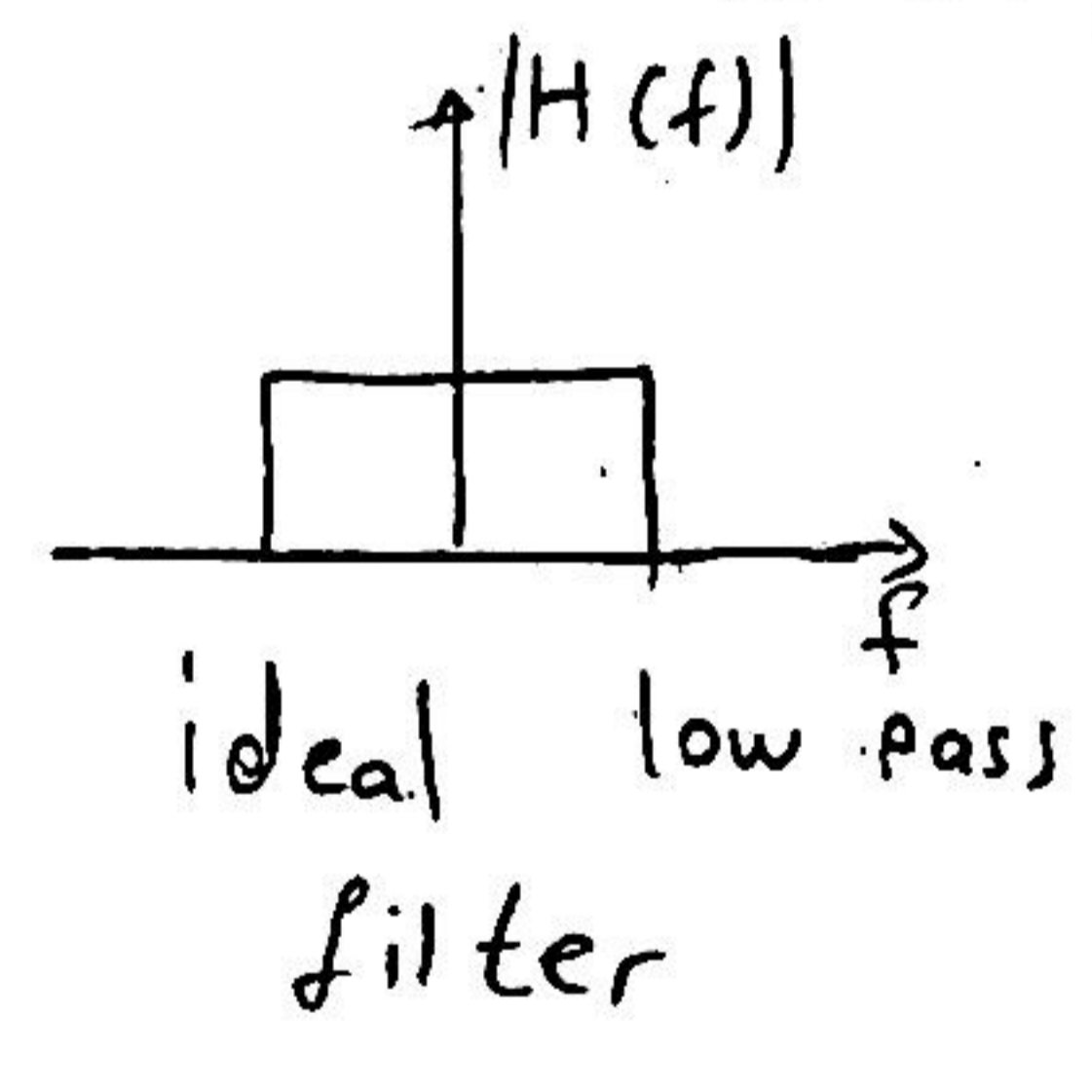
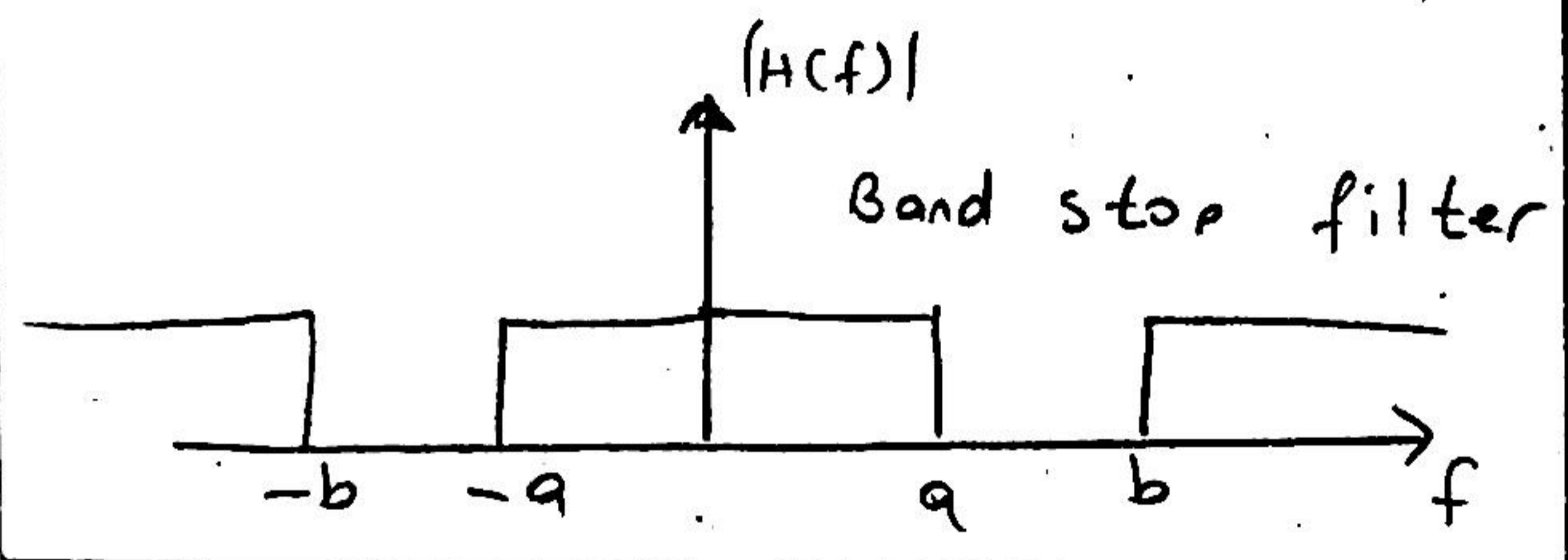
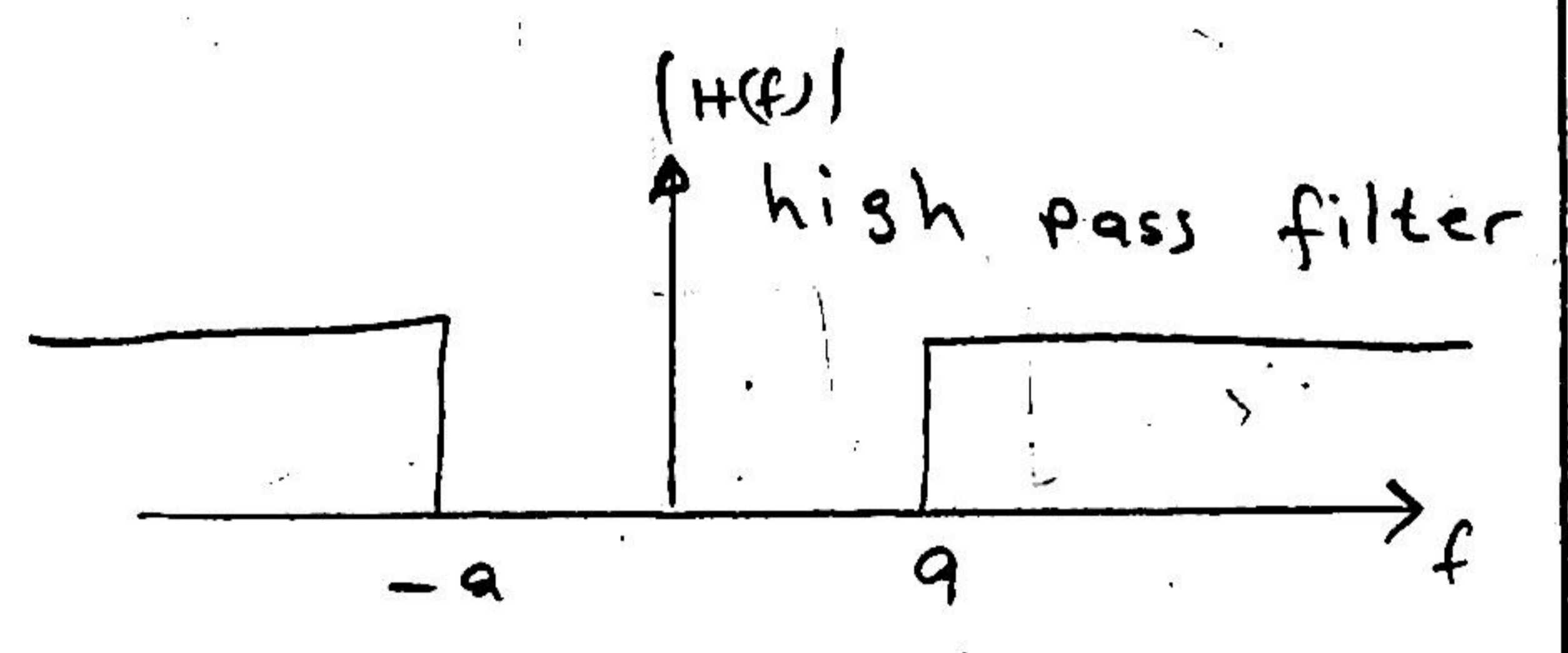
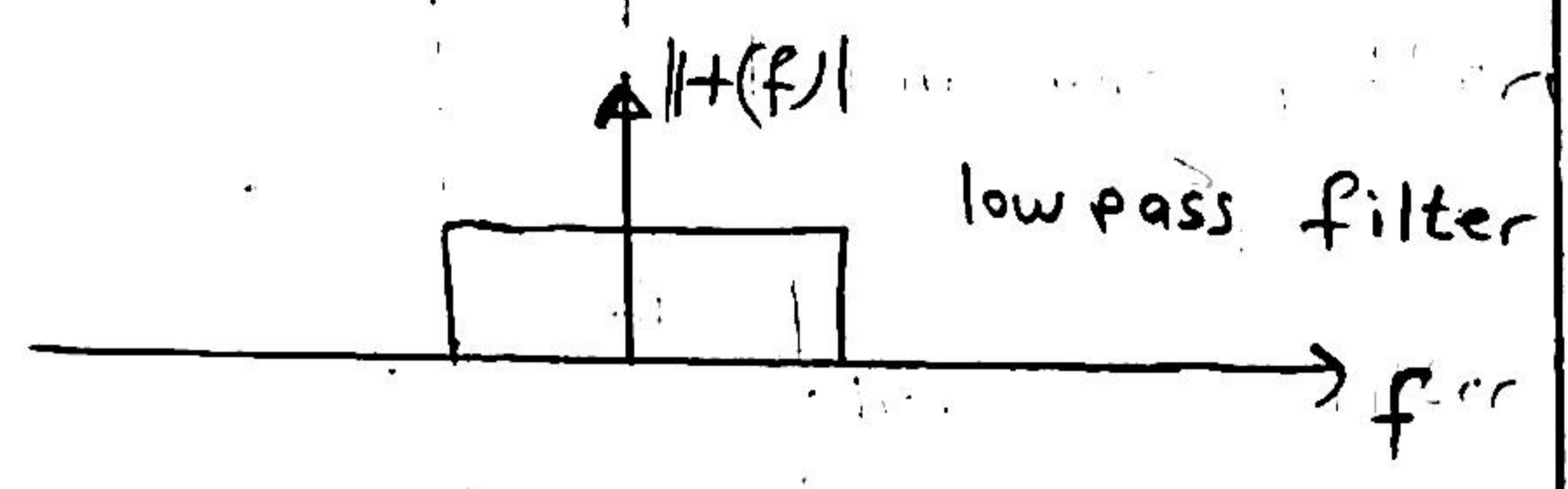
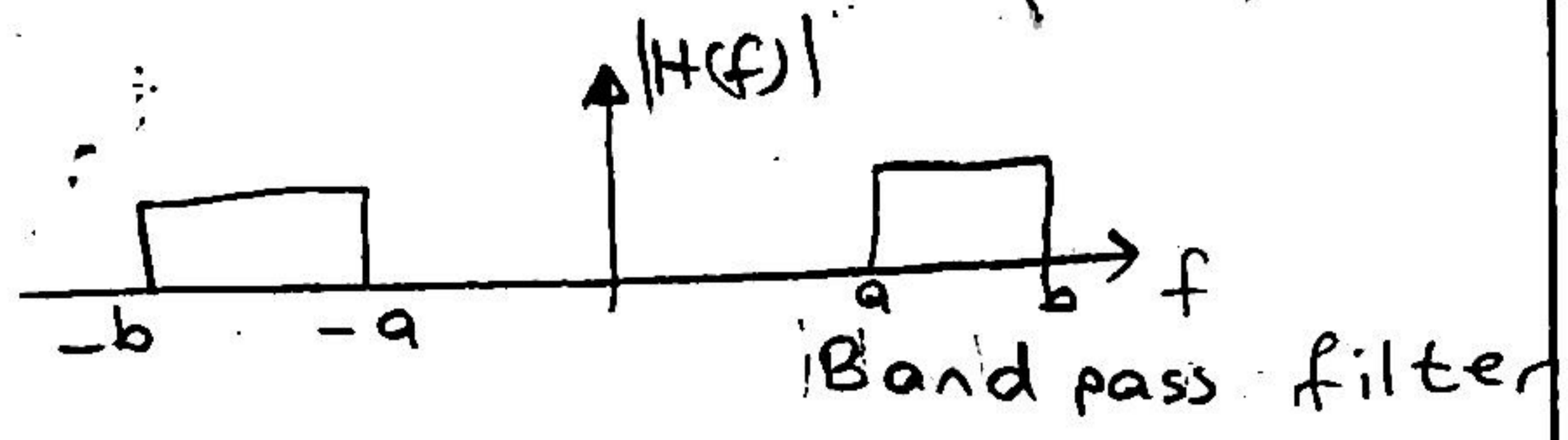
$$x(t) = \underbrace{3 \cos 2\pi 5t + 4 \cos 2\pi 10t}_{\text{Desired}} + \underbrace{2 \cos 2\pi 15t + 5 \cos 2\pi 20t}_{\text{Undesired}}$$



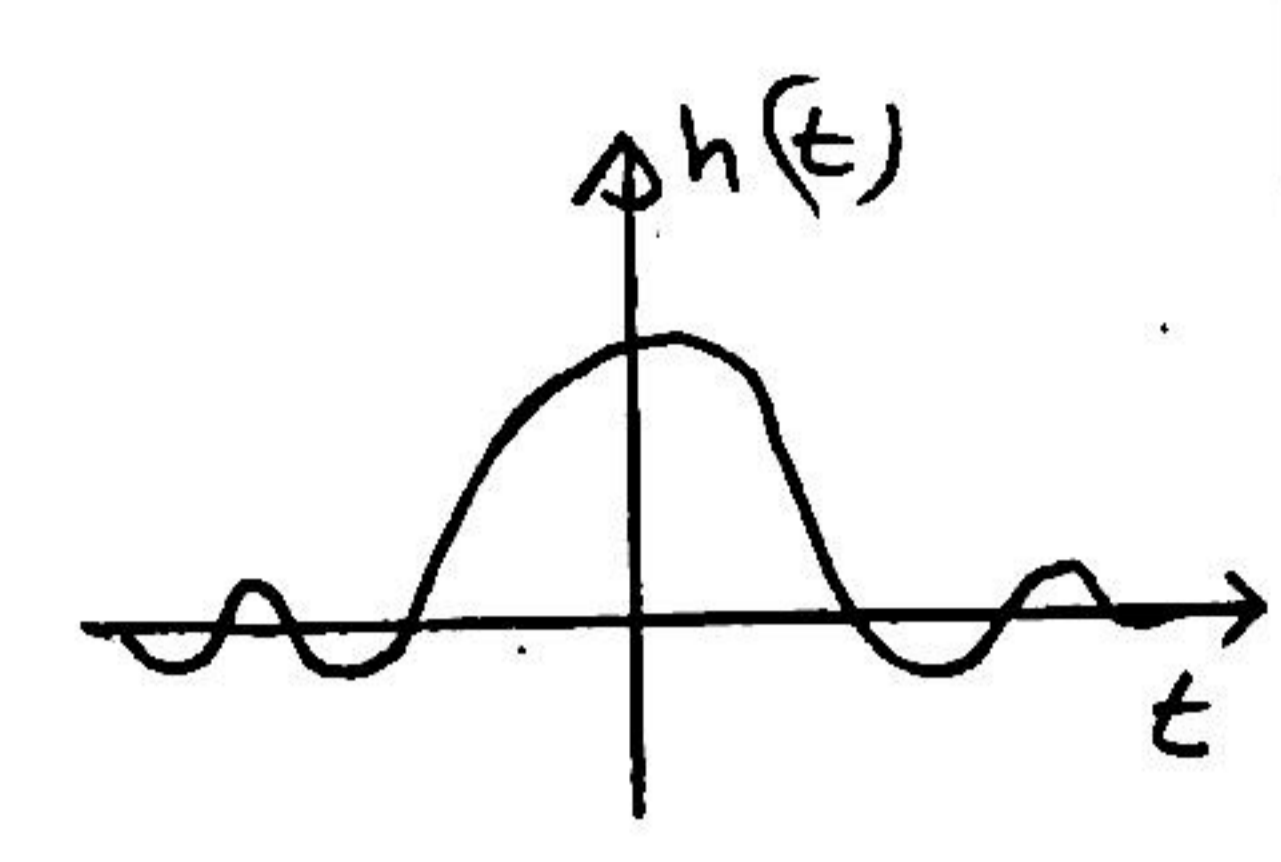
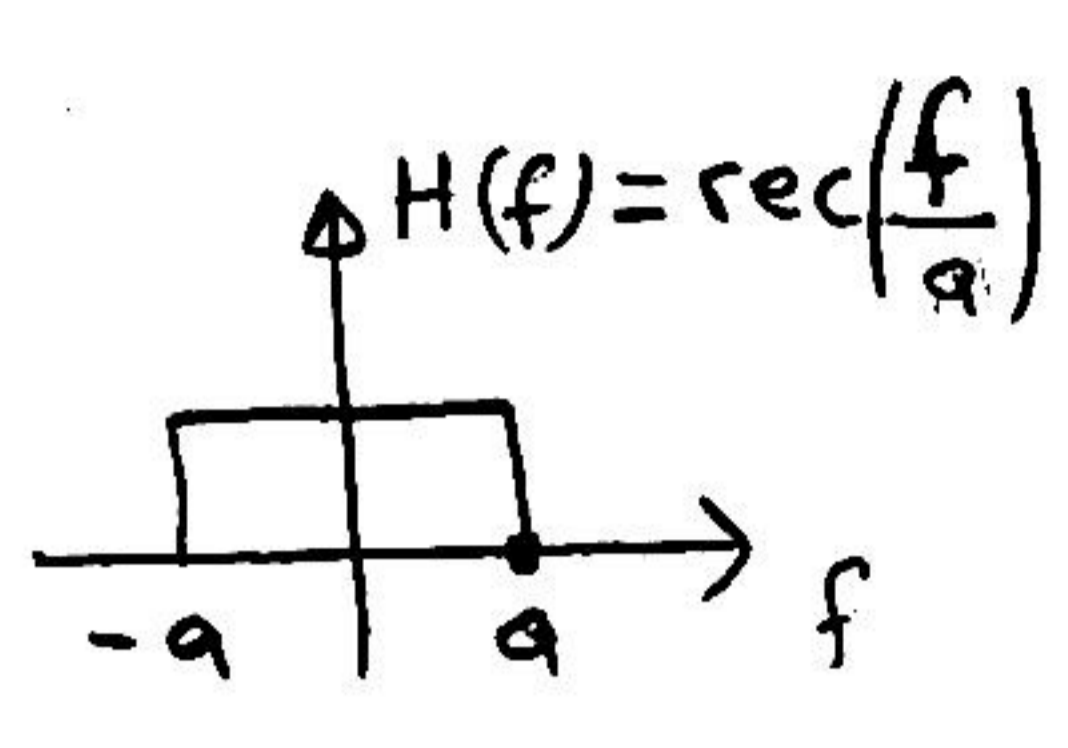
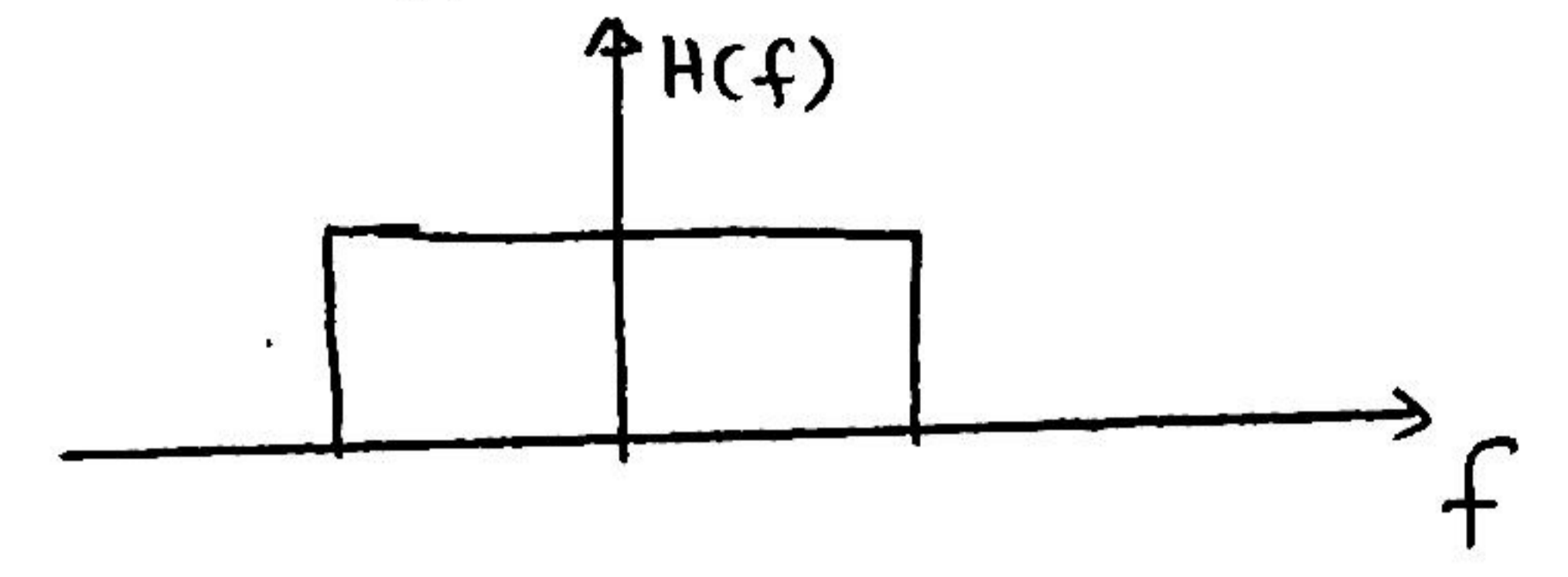
$$x(t) = \underbrace{3 \cos 2\pi 5t}_{\text{Desired}} + \underbrace{4 \cos 2\pi 10t}_{\text{Undesired}} + \underbrace{2 \cos 2\pi 15t + 5 \cos 2\pi 20t}_{\text{Desired}}$$



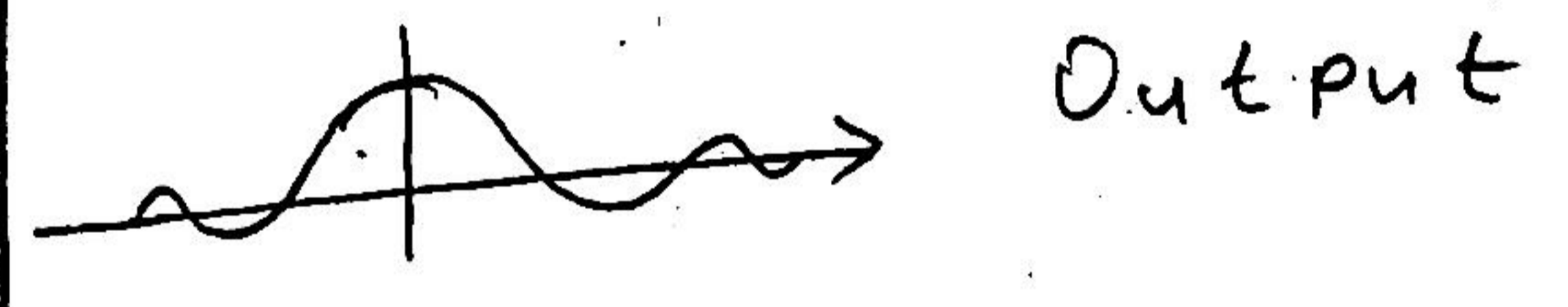
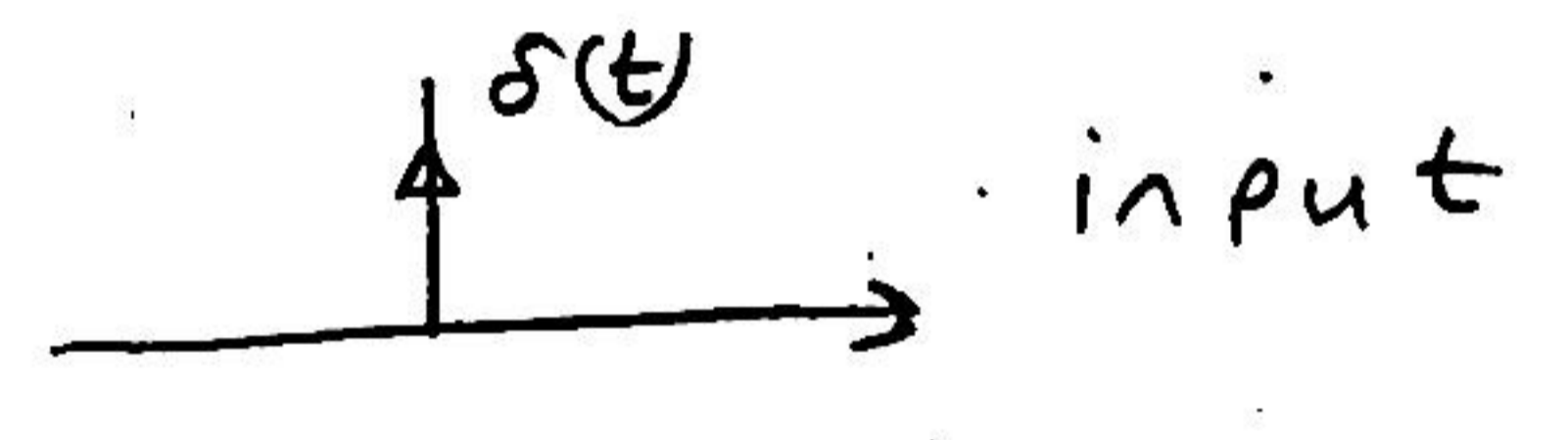
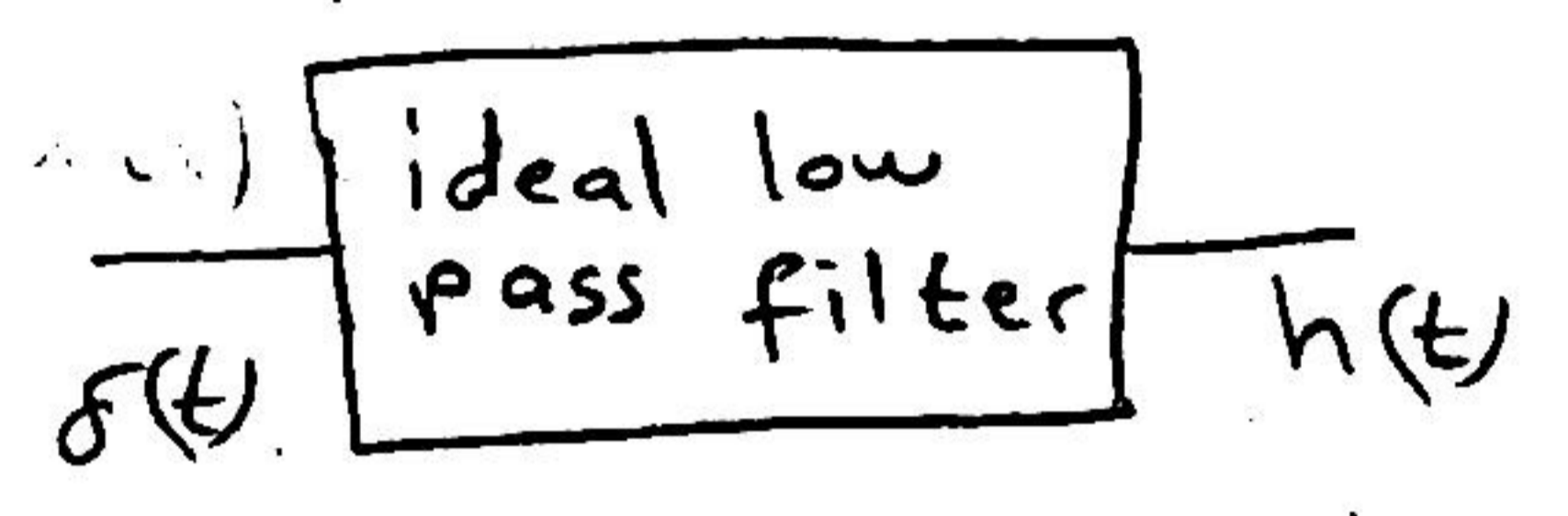
$H(f)$ = filter in your mobile



Ideal low pass filter

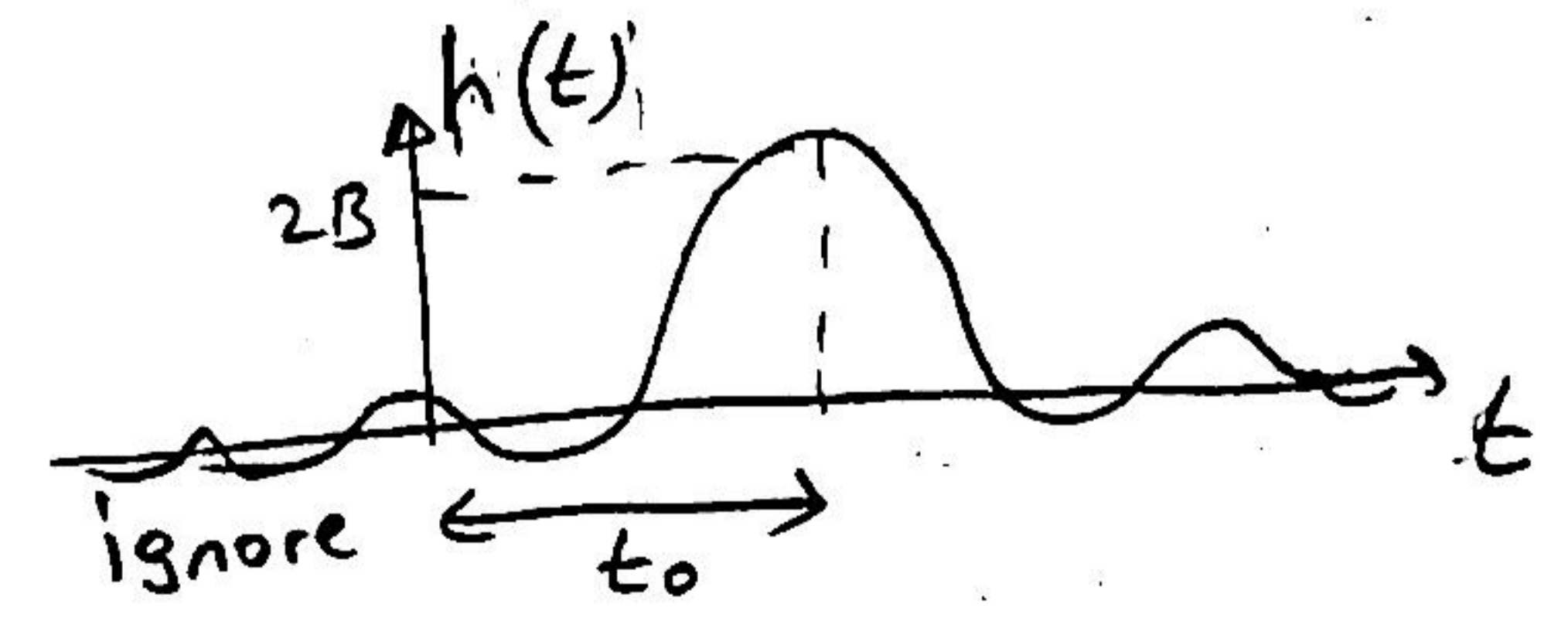


$h(t) \longleftrightarrow H(f)$



ideal low pass filter
Physically not realizable
(not possible)

$$H(f) = \begin{cases} k \cdot e^{-j2\pi f t_0} & 0 < f < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$



physically realizable filter

$$h(t) = \frac{\text{Sinc } 2\pi B(t-t_0)}{\pi(t-t_0)} = 2B \text{sinc}[2B(t-t_0)]$$

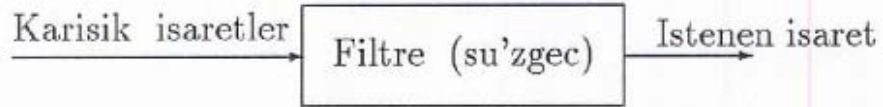
Filtre(suzgeç) Kavramı

Filtre kendisine giren işaretlerin bir kısmını çıkışa aynen veya kuvvetlendirerek iletirken diğer bir kısım işaretleri çıkışa zayıflatarak iletir veya hiç iletmeyen devrelerdir.

f?igure[hbt] “xqs502 basit bir elektrik filtresi (RC) devresi b) Sayısal filtre (A/D) bilgisayar prog (D/A) c) mekanik filtre yada damper sistemi

Klasik anlamda filtre bir elektrik devresi olmasına karşın, filtrenin yaptığı işi yapan mekanik, hidrolik veya pnوماتik devrelerde vardır. Bilgisayarların gelişmesiyle sayısal filtreler analog filtrelerin önüne geçmiştir. Sayısal filtreler analog/dijital dönüştürücü, bilgisayar programı, ve dijital/analog dönüştürücüden oluşur.

arabalarda kullanılan aksesuar sonumleyici... esasen rahatsız edici kuvvetleri yolcuya iletmeyen hidro-mekanik bir filtredir.



Filtreyi kullanacak kişinin isteği genelde frekansı ω_a ω_b arasında olan işaretleri geçirmesi diğer bütün işaretleri geçirmemesidir.

Örnek olarak şekil(ref: xqs501)de dönen bir milin titreşiminin genliğini ölçen sensör sistemi görülüyor. 50 devir/saniyede Ölçülen işaretin içinde $f = 50$ $\omega = 2\pi f = 314$ frekansında bir temel işaret ve buna ilave olarak milin kritik frekansları olan $\omega_1 = 290\text{rad/s}$, $\omega_2 = 340\text{rad/s}$ de iki işaret ve ölçme sisteminden veya diğer sebeplerden kaynaklanan parazit terimleri olacaktır. Şekil(ref: xqs503) de böyle bir işaret görülüyor.

f?igure[hbt] “xqs501 Dönen bir milde titreşim ölçümü.

f?igure[hbt] “xqs503 Milde ölçülen titreşim işareti

Bizden istenen motorun devir sayısı olan $\omega = 290$, $\omega = 314$, $\omega = 340$ civarındaki işaretlerin genlik ve fazlarının hesabıdır. İşaret gerçekte

$$r(t) = 0.2 \cos(100t - 20) + 0.3 \cos(150t + 50) + 6 \cos(290t + 40) \\ + 4 \cos(314t + 50) + 9 \cos(340t - 45) + 0.6 \cos(580t + 85)$$

xqs501

şeklinde dir. (haliyle bunu önceden bilmeye imkan yoktur, biz burada biliniyor varsaydık.) Bizden istenen aşağıdaki değerlerdir.

$$|R(290)|= 6 \quad \angle R(310) = 40$$

$$|R(314)|= 4 \quad \angle R(314) = 50$$

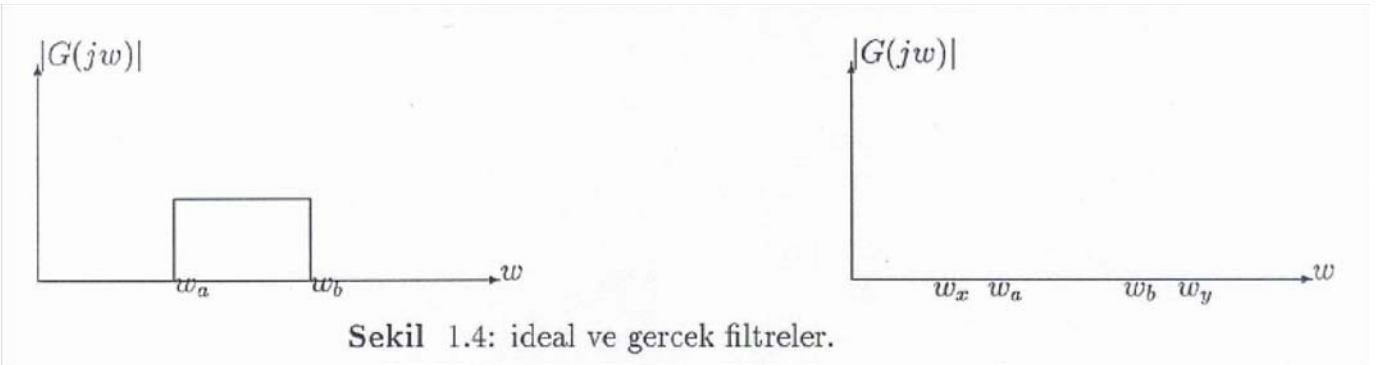
$$|R(340)|= 9 \quad \angle R(340) = -45$$

Daha once gordugumuz gibi isaretin Furier donusumunu (HFD,FFT) alarak bu sayilari bulabiliriz. Isaret bir bilgisayar diskinde veya teypde ise en kolay yol budur. Ancak bu isaret o anda hemen lazimsa mesela bir kontrol sisteminde geribeslemede kullanilacaksa Furier donusumunu almak icin bir kac periyotluk data lazimdir. Bir kac periyot beklemek ise geribesleme sistemine uygun dusmez. Ayrica diskteki veya teypdeki data cok uzunsa datanin tamaminin Furier donusumunu almak filtre kullanmaktan daha pahali (zaman ve isgucu) olabilir. Bu sebeple real-time?? sistemlerde filtreler ihtiyac vardir.

Tekrar problemimize donersek $r(t)$ isaretinden gercek isaret olan

$$r(t) = 6 \cos(290t + 40) + 4 \cos(314t + 50) + 9 \cos(340t - 45) \quad \#$$

isaretini sececek lineer sistemin (filtrenin) genlik karakteristiginin sekil(p32) deki gibi olmasi gerektigi aciktir. Burada $w_a = 290$ $w_b = 340$ secilebilir.



f?igure[hbt] “xqs507 ideal ve gercek filtreler.

Filtreyi kullanacak kisinin istegi genelde frekansi w_a w_b arasinda olan isaretleri gecirmesi diger butun isaretleri gecirmemesidir.

Fiziksel Sinirlamalar

Filtre elektrik (nadir olarak mekanik, elektromekanik, hidrolik, pnumatik) bir elemandir. Sayisal filtreler ise bir bilgisayar programidir.

Filtre lineer bir sistem olmak zorundadir. Nonlineer bir sistem giriste olmayan ilave frekanslar uretir. (Bkz.C.P.ref: xq4p506, ref: xq4p586, ref: xq4p604)

Bu ise filtre icin kabul edilemeyecek bir durumdur. (Bkz.C.P.ref: nolineer:harmoniksecemiyor)

Filtre kararlı bir sistem olmak zorundadır. Karasız bir sistemin genlik spektrumunu anlamsızdır.

Filtre gerçekleştirilebilir fiziksel bir sistemdir. Fiziksel bir sistemin genlik spektrumu sekil(ref: xqs507)deki gibi keskin koseli olamaz. Sekil(ref: xqs507.b) deki gibi olabilir. Bu da filtreden çıkan isarete istenen isaret bileşenlerinin değişik oranlarda zayıflatılmış olarak çıkmasına sebep olur ki bu da isaretin aslinin bozulması anlamına gelir. Mesela (ref: xqf501)deki filtre çıkışı

$$x(t) = 6\cos(290t + 40) + 4\cos(314t + 50) + 9\cos(340t - 45) \quad \#$$

olacak yerde

$$x(t) = 5.5\cos(290t + 40) + 4.6\cos(314t + 50) + 8.6\cos(340t - 45) \quad \#$$

olarak ölçülür. $x(t)$ $r_g(t)$ ye benzemekle beraber biraz bozulmuş olur.

Filtrenin Genlik ve Faz Spektrumu

İdeal filtre pratikte mümkün olmadığından filtrenin toleranslarının bir standartta belirtilmesi lazımdır.

İdeal filtrede genlik spektrumu

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= 0 & \omega < \omega_x & \quad \omega > \omega_y \\ |H(j\omega)| &= A & \omega_x < \omega < \omega_y \end{aligned} \quad \#$$

İdeal filtreden çıkan istenen isaret $x(t) = Ar(t)$ şeklinde bir katsayı ile çarpılarak çıkar, istenmeyen parazitlerde tamamen ortadan kaldırılır.

Filtre dinamik bir sistem olduğundan giriş etkisini hemen gösteremez, yani $x(t) = Ar(t)$ şeklinde verilen baginti gerçekçi değildir. girişin etkisi belli bir zaman sonra çıkışa yansır. O halde filtre karakteristiği

$$x(t) = Ar(t - q)$$

özelliklerini sağlarsa isaret bir miktar gecikerek çıkışa yansır, fakat bozulmaz. Mesela

$$r(t) = d_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + d_2\cos(\omega_2 t + \theta_2) + \dots + d_n\cos(\omega_n t + \theta_n) \quad \#$$

şeklindeki bir $r(t)$ giriş isareti çıkışa

$$\begin{aligned} x(t) = Ar(t - p) &= d_1A\cos(\omega_1(t - p) + \theta_1) + Ad_2\cos(\omega_2(t - p) + \theta_2) \\ &+ \dots + Ad_n\cos(\omega_n(t - p) + \theta_n) \end{aligned} \quad \text{xqf521}$$

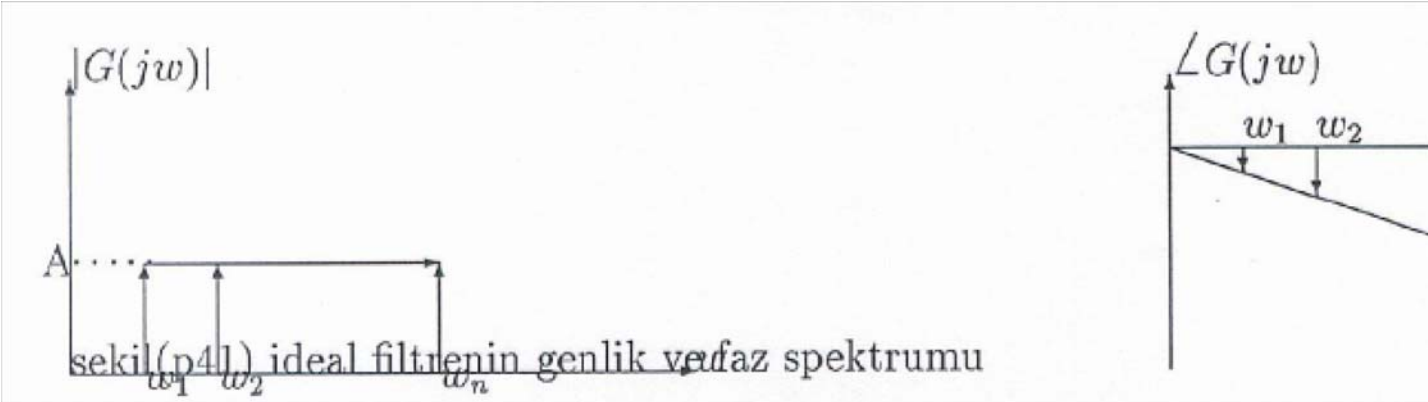
şeklinde yansiyorsa bu filtreden geçen işaretlerin bozulmadığı anlamına gelir. (ref: xqf521) esitliği

$$\begin{aligned} x(t) = Ad_1A\cos(\omega_1 t - \omega_1 p + \theta_1) &+ Ad_2\cos(\omega_2 t - \omega_2 p + \theta_2) \\ &+ \dots + Ad_n\cos(\omega_n t - \omega_n p + \theta_n) \end{aligned} \quad \#$$

şeklinde yazılsın.

Şimdi filtrenin girişi $r(t)$ ve çıkışı $x(t)$ den hareketle bu filtrenin genlik ve faz

spektrumunu çizelim. örnek olarak $w = w_1$ frekansında genlik k kat artmış yani $|G(jw_1)| = A$ faz da $-w_1 p$ kadar değişmiş, Yani $\angle H(jw) = -w_1 p$. Bu şekilde bütün frekanslar için spektrumunu çizsek.



Şekil(p41) den de görüldüğü gibi ideal filtrenin frekans spektrumu isaretin geçmesi gereken frekanslarda w eksenine paralel sabit bir doğru olmalı. Ideal faz spektrumu ise orijinden geçen $\angle G(jw) = -wp$ doğrusu olmalıdır. Haliyle $p = 0$ için $\angle G(jw) = 0$ olması da isareti bozmayacaktır. Ancak bu durum gerçekçi değildir. Çünkü isaretin filtreye girmesi ile çıkması arasında mutlaka çok küçük de olsa p kadar bir süre gerekir.

Gerçek filtrenin genlik spektrumunda keskin köşeler olamayacağından, gerçek filtrenin genlik spektrumunda

$$\begin{aligned} |H(jw)| &\leq B & w < w_x & \quad w > w_y \\ |H(jw)| &\geq A & w_a < w < w_b \\ A &\gg B \end{aligned}$$

xqf531

sartları sağlanmalıdır. Şeklinde olmalıdır. Burada $w_a < w < w_b$ bölgesine **geçirme bandı**, $w < w_x$ $w > w_y$ bölgesine **sondurma bandı** denir. $w_x < w < w_a$ ve $w_b < w < w_y$ bölgesine **geçis bandı** denir.

Filtre dizany ederken $|H(jw)|$ ile çalışmak yerine $|H(jw)|^2$ ile çalışmak daha kullanışlıdır. Filtre karakteristikleri (ref: xqf531) deki formdan ziyade $|H(jw)|^2$ yi kullanarak aşağıdaki formda verilir.

$$\begin{aligned} |H(jw)|^2 &\leq B & w < w_x & \quad w > w_y \\ |H(jw)|^2 &\geq A & w_x < w < w_y \\ A &\gg B \end{aligned}$$

xqf532

Literatürde Filtrenin genlik spektrumunu belirlerken A, B harfleri yerine

$$|H(jw)|^2 \leq \frac{1}{1+\lambda^2} \quad w < w_x \quad w > w_y$$

$$|H(jw)|^2 \geq \frac{1}{1+\epsilon^2} \quad w_x < w < w_y$$

#

notasyonlari kullanilir.

Filtrelerin Guruplandirilmesi

Filtre hakkında epey soylememize ragmen mesela soyle bir cumleye raslasak "3. dereceden bant geciren sayisal Butterworth filtre" su ana kadarki yazilanlarla bu cumle hala anlmaz. Filtreler imal edilis sekline gore, gecirdigi bant araligina gore, dizayn edilis sekline gore degisik guruplara ayrilir. Bu bolumde filtre ile ilgili terminolojisi verilecektir.

Yapisina Gore Filtreler

Filtreler yapısına (imal edilis sekline) gore sekil(ref: xqs551)deki gibi guruplandirilabilir. ??[hbt]

Filtreler			
Analog Filtreler		Sayisal Filtreler	
Aktif Filtreler	Pasif Filtreler	Ardisil Filtreler Rekursif(IIR)	Ardisil olmayan Filtreler Nonrekursif (FIR)

"xqs551 Filtrelerin Guruplandirilmesi

Bu filtre guruplarini kisaca anlatalim.

Analog filtre, elektrik ve elektronik elemanlardan meydana gelmis bir elektrik devresidir.

Pasif filtreler direnc, bobin, kondansator, (RLC) elemanlarindan meydana gelen devrelerdir. Calismalari icin disaridan enerji almaya ihtiyaci olmadigi icin pasif filtre olarak adlandirilir.

Aktif filtreler ise yariiletken teknolojisinin gelismesiyle ortaya cikmistir. Direnc kondansator, OPAM(islemsel kuvvetlendirici) ve tranzistorden meydana gelir. Aktif filtrelerde imalati pahali olan bobin kullanilmadigi icin dusuk frekanslarda pasif filtrelerin yerini almistir. Tranzuistor ve OPAM calisabilmeleri icin diasidan enerjiye ihtiyaclari vardir. Dusuk frekanslarda aktif filtreler pasif filtrelerden cok daha ucuzdur. Yuksek frekanslarda aktif filtrelerde doyma, gurultuye karsi duyarlilik gibi problemler vardir.

Sayisal filtreler temel itibariyle bir bilgisayar programidir. Analog filtrelerin girisleri analog (surekli) isaretler olmasina karsilik sayisal filtrelerin girisleri ve cikislari ayrik degerlerdir. Nonrekursif filtrelerde geribesleme yoktur, filtre cikisini filtre girisini olarak kullanmaz. Genel yapisi

$$y(n) = \sum_{j=0}^p b_j x(n-j)$$

seklindedir.

Rekursif filtrelerde filtre cikisi giris olarak kullanilir, bu yuzden kararsizlik ve yuvarlatma hatalarinin ardisil olarak buyumesi sozkonusu olabilir. Genel yapisi

$$y(n) = \sum_{j=1}^k a_j y(n-j) + \sum_{j=0}^p b_j x(n-j)$$

seklindedir.

Nonrekursif filtrelerin girislerine bir impuls uygulansa geribesleme olmadigi icin, impulsin etkisi belli bir zaman sonra biter ve cikis sifir olur. Bu yuzden Nonrekursif filtrelere **Sonlu impuls cevapli (Finite Impuls Response(FIR))filtreler** denir. Rekursif filtrede girise bir impuls uygulansa impulsin etkisi sonsuza kadar devam eder. Bu yuzden bu tip filtrelere **sonsuz impuls cevapli (Infinite Impuls Response(IIR)) filtreler** denir. Sayisal filtre dizayni konusunda bu konular genisce aciklanacaktır.

Filtrenin derecesi

Filtrenin transfer fonksiyonu (ref: xqf434) esitligiyle verilmisti. $H(j\omega)$ 'nin pay ve paydasi $(j\omega)$ 'nin kuvvetlerine gore duzenlenmistir. paydadaki $(j\omega)$ 'nin en buyuk derecesi filtrenin derecesidir. (ref: xqf434) esitliginde filtrenin derecesi n dir. filtrenin derecesi buyudukce filtrenin genlik karakteristigi ideal genlik karakteristigine yaklasir. Sekil(xqs537) de bu durum gosterilmistir.

f?igure[hbt] “xqs537 Filtrenin deresinin genlik spektrumuna etkisi

Gecirdigi Frekans Araligina Gore

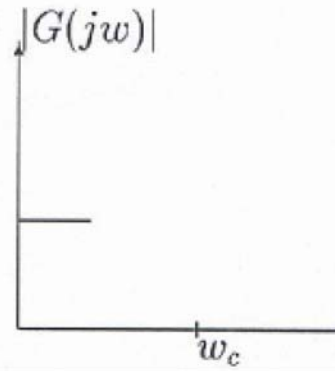
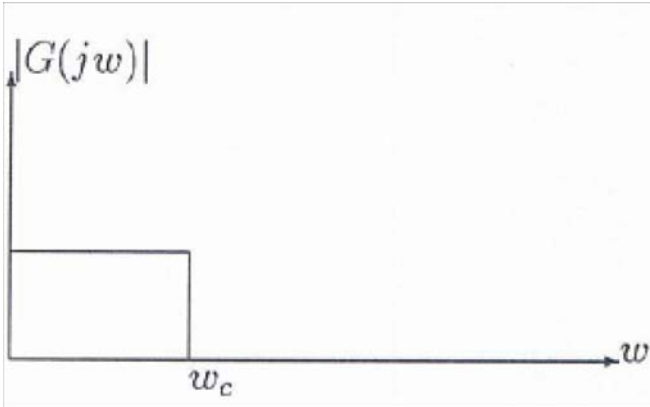
Filtreler gecirdigi frekans araligina gore asagidaki sekilde guruplandirilir. $\omega = 0$ ile bir $\omega = \omega_c$ arasindaki frekanslari gecirip diger butun frekanslari olduren filtre **Alcak frekanslari geciren filtre** veya kisaca **alcak geciren filtre (AGF)** olarak adlandirilir.

Benzer sekilde

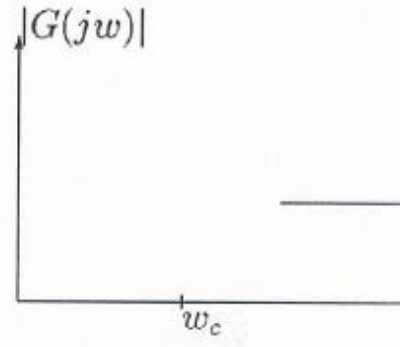
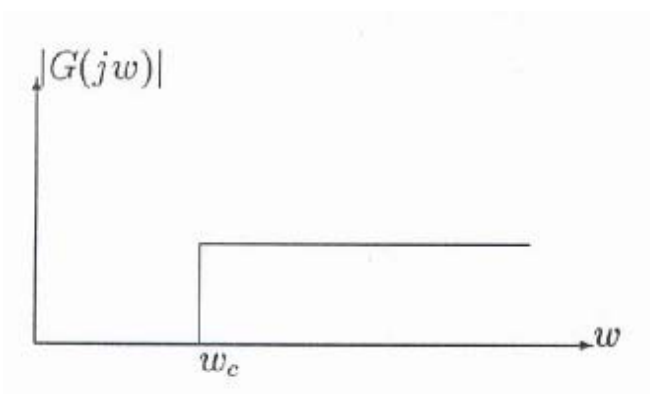
$\omega = 0$ ile bir $\omega = \omega_c$ arasindaki frekanslari oldurup diger butun frekanslari geciren filtre **Yuksek frekanslari geciren filtre** veya kisaca **yuksek geciren filtre (YGF)**,

$\omega = \omega_a$ ile bir $\omega = \omega_b$ arasindaki frekanslari gecirip diger butun frekanslari olduren filtre **bant geciren filtre (BGF)**,

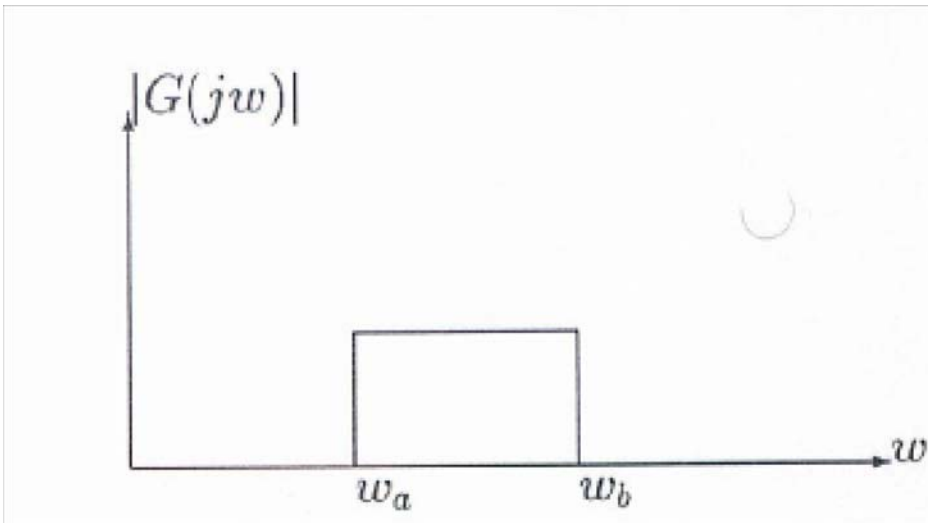
$\omega = \omega_a$ ile bir $\omega = \omega_b$ arasindaki frekanslari oldurup diger butun frekanslari geciren filtre **bant sonduren filtre (BSF)**, olarak adlandirilir.



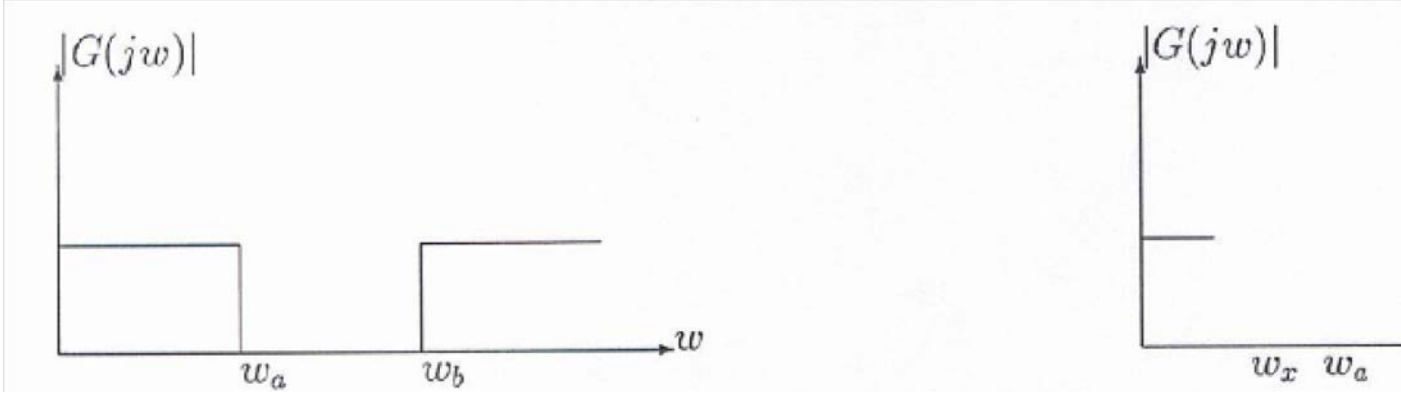
a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir alcak geciren filtre .



a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir yuksek geciren filtre.



a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir bant geciren filtre .



a)ideal, b)fiziksel gerceklenebilir bant sonduren filtre.

Dizayn Edilme Sekline Gore Filtreler

Filtre dizayni temel itibariyle (ref: xqf434) esitligindeki $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ve n katsayilarinin hesabidir. Filtre dizayn problemini su sekilde ozetleyebiliriz: Bu katsayilari o sekilde hesapla ki elde edilen filtre karakteristigi ideal filtre karakteristigine benzesin. Bu katsayilari hesaplama teknigine gorede filtreler guruplandirilir.

Sekil (ref: xqs563.a) de genlik karakteristigi gorulen Butterworth filtrelerde gecirme ve sondurma bandinda dalgalanma yoktur.

1.tip Chebbshew filtrelerin genlik karakteristiginde gecirme bandinda esit genlikli dalgalanmaya musade edilir sondurma bandinda dalgalanma yoktur.

2.tip Chebbshew filtrelerin genlik karakteristiginde gecirme bandinda dalgalanma yoktur, sondurma bandinda esit genlikli dalgalanmaya musade edilir

Eliptik (Cauer) tipi filtrelerde hem gecirme hem sondurma bandinda esit genlikli dalgalanmaya musade edilir.

Sekil (ref: xqs563.b),(ref: xqs563.c),(ref: xqs563.d de Chebbshew.1, Chebbshew.2, Eliptik filtrelerin genlik karakteristigi goruluyor.

f?igure[hbt] "xqs563 Degisik tipde filtrelerin genlik karakteristigi. a)Butterworth b)Chebbshew.1, c)Chebbshew.2, d)Eliptik

Bessel tipi filtrelerin genlik spektrumlari Butterworth tipi filtrelerin genlik sppektrumlarına benzer fakat faz spektrumları daha iyidir.

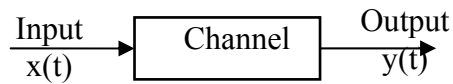
Kaliteli filtre karakteristigi ideal filtreye benzeyen ve maliyeti dusuk olan(derecesi dusuk olan) filtredir. Bu acidan baktigimizda filtrelerin hangisinin isimize daha iyi yaradigina karar verebiliriz. 9.derecedeki Butterworth filtrenin genlik spektrumu ile 5.dereceden chebbshhew filtrenin ve 3.dereceden eliptik filtrenin genlik spektrumları birbirine cok yakindir. Ancak faz spektrumları acisinden baktigimizda isareti en fazla

bozan faz spektrumuna sahip filtre eliptik filtredir. Bu kriterler gozonunde tutularak kullanildig yere ve kullanma gayesine uygun olarak hangi filtrenin o is icin en iyi filtre olduguna karar verilir.

Sonular

?????

SIGNAL DISTORTION in TRANSMISSION

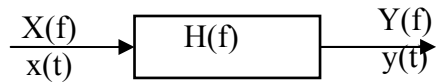


$$y(t)=10 x(t) \quad (\text{No distortion})$$

$$y(t)=-20 x(t) \quad (\text{No distortion})$$

$$y(t)= x(t-1) \quad (\text{No distortion. Only time delay})$$

$$y(t)=10 x(t-1) \quad (\text{No distortion. Time delay and amplification})$$



$$Y(f) = H(f) X(f)$$

$$H(f) = A+jB = K e^{-j \omega t_d} \quad |H(f)| =K \quad \angle H(f) = -\omega t_d = -2 \pi f t_d$$

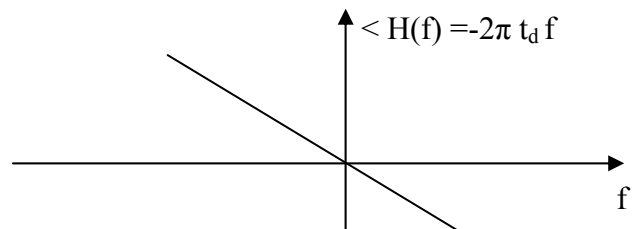
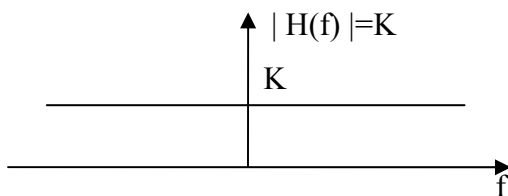
$$Y(f) = H(f) X(f) = K e^{-j \omega t_d} X(f)$$

$$y(t)=K x(t-t_d) \quad (\text{time shifting theorem})$$

Distortionless transmission is satisfied if

$$H(f) = K e^{-j \omega t_d}$$

Amplitude spectrum is constant, phase spectrum is a straight line.



If $H(f) = K e^{-j \omega t_d \pm j \pi}$ then

$$H(f) = K e^{-j \omega t_d} e^{\pm j \pi} = K e^{-j \omega t_d} (-1) = -K e^{-j \omega t_d}$$

Then the system is also distortionless.

Result: if

$$H(f) = K e^{-j \omega t_d \pm j \pi}$$

then the system is distortionless.

The output is undistorted if it differs from the input only by a multiplying constant and a finite time delay.

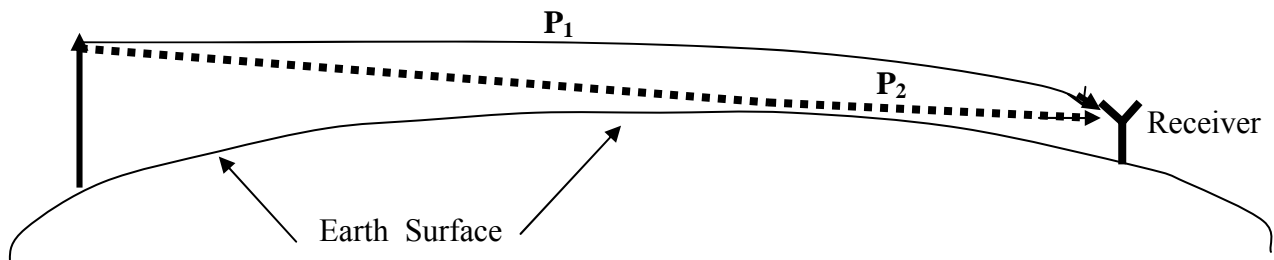
Amplitude distortion $|H(f)| \neq K$ (Channel amplitude characteristic changes with frequency)

Delay distortion (Phase distortion) $\angle H(f) \neq -\omega t_d \pm \pi$
(Channel phase characteristic changes with frequency)

Multipath Distortion:

Multipath distortion mainly occurs in radiowave communications systems.

Transmitter



s

Signal comes from the transmitter to receiver by two paths. Signals at the receiver

$$P_1 = A_1 \cos [2 \pi f (t-t_1)]$$

$$P_2 = A_2 \cos [2 \pi f (t-t_2)]$$

Total signal is $P_1 + P_2$

$$P_1 + P_2 = A_1 \cos [2 \pi f (t-t_1)] + A_2 \cos [2 \pi f (t-t_2)]$$

Assume $A_1 = A_2 = A$ and $t_2 = t_1 + \frac{1}{2f}$

$$P_1 + P_2 = A \cos [2 \pi f t - 2 \pi f t_1] + A \cos [2 \pi f t - 2 \pi f t_2] \\ + A \cos [2 \pi f t - 2 \pi f t_1] + A \cos [2 \pi f t - 2 \pi f t_1 - 2 \pi f \frac{1}{2f}]$$

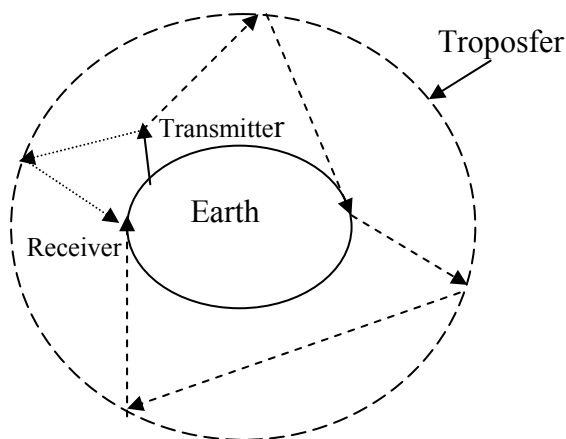
Using $\cos (x-\pi) = -\cos x$

$$P_1 + P_2 = A \cos [2 \pi f t - 2 \pi f t_1] - A \cos [2 \pi f t - 2 \pi f t_1] = 0$$

i.e the signal at the receiver is zero, although the original signal is not zero.

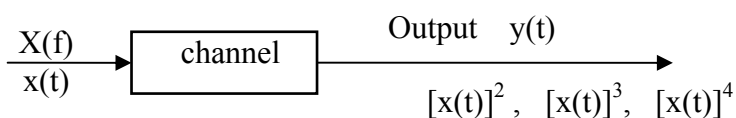
In practice $A_1 \neq A_2$ and $t_2 \neq t_1 + \frac{1}{2f}$. But sometimes $P_1 + P_2$ can be very near to zero.

Multipath distortion due to travelling around the world.



Signal reaches to receiver by two paths and causes distortion. ...

Nonlinear distortion



Sometimes channel produce nonlinear effect. In most cases these nonlinear effects can be represented by square, triple, quadrature terms.

$$y(t) = a x(t) + b [x(t)]^2 + c [x(t)]^3 + d [x(t)]^4 + \dots$$

Assume $x(t)$ contains 0 to w frequency components.

$$x(t)]^2$$

Signal Distortion in Transmission



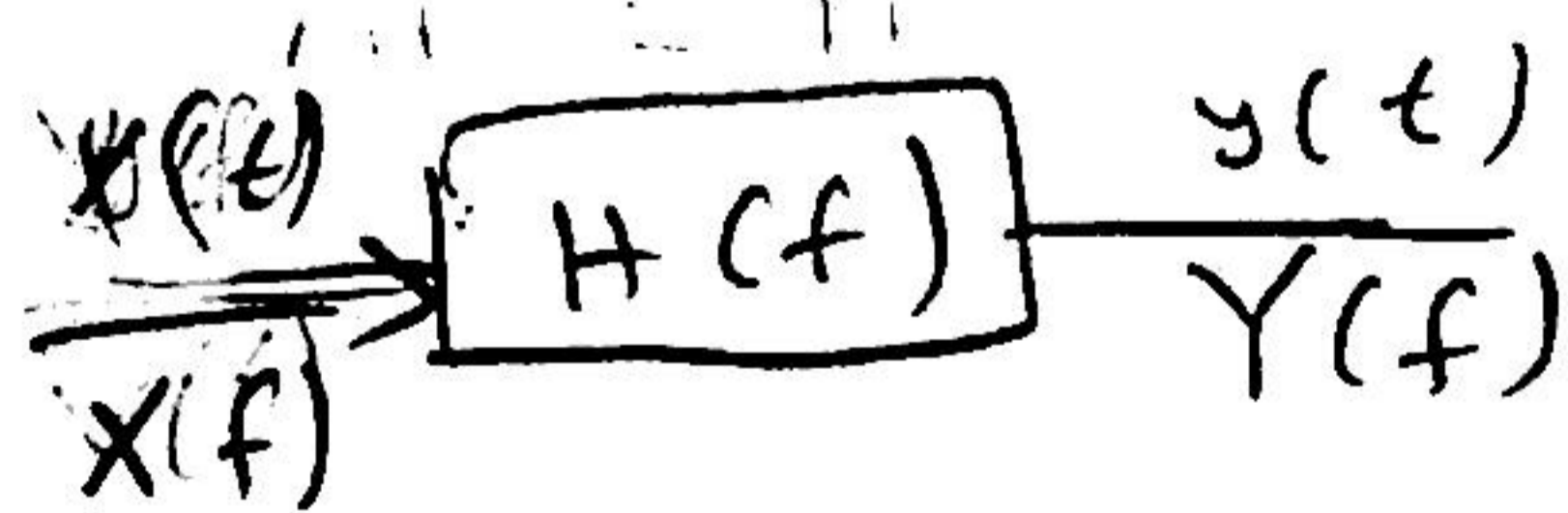
$$y(t) = 2x(t) \text{ (no distortion)}$$

$$y(t) = -2x(t) \text{ (no distortion)}$$

$$y(t) = x(t - \tau) \text{ (no distortion)}$$

The output is undistorted if it differs from the input only by a multiplying constant and a finite time delay.

$$y(t) = Kx(t - \tau)$$



$$Y(f) = H(f) X(f)$$

$$H(f) = A + jB = K e^{-j\omega\tau}$$

$$|H(f)| = K$$

$$\angle H(f) = -\omega\tau$$

$$Y(f) = H(f) X(f)$$

$$Y(f) = K e^{-j\omega\tau} X(f) \quad 471$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $y(t) = K x(t - \tau)$

Distortionless transmission is satisfied if

$$H(f) = K e^{-j\omega\tau}$$

if $H(f) = K e^{-j\omega\tau + j\pi n}$

then $= K e^{-j\omega\tau} \cdot e^{j\pi n}$

$$= K e^{-j\omega\tau} (-1)^n$$

$$= -K e^{-j\omega\tau}$$

then the system is also distortionless.

Result

$$H(f) = K e^{-j\omega\tau + j\pi n}$$

then the system is distortionless

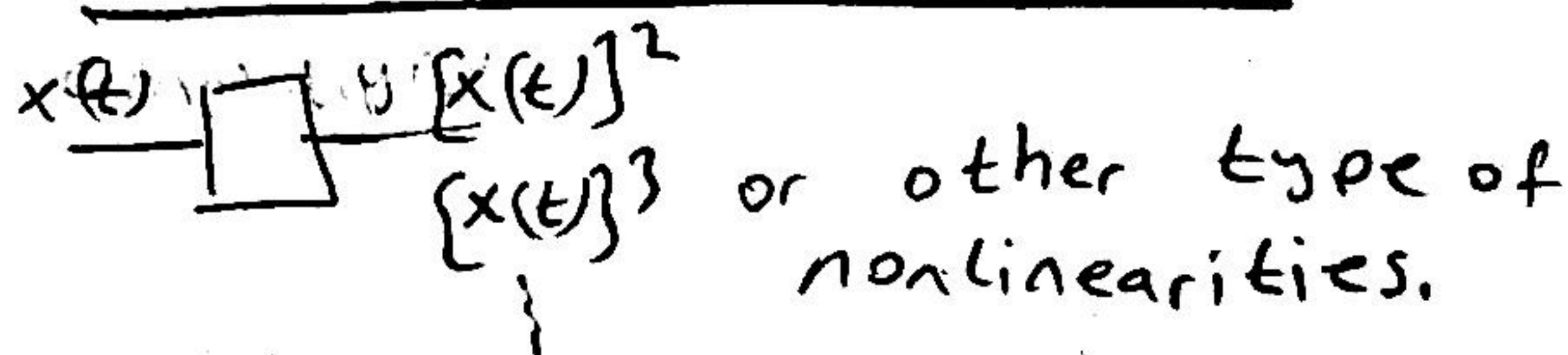
Amplitude distortion

$$|H(f)| \neq K$$

Delay distortion

$$\angle H(f) \neq -\omega\tau + \pi n$$

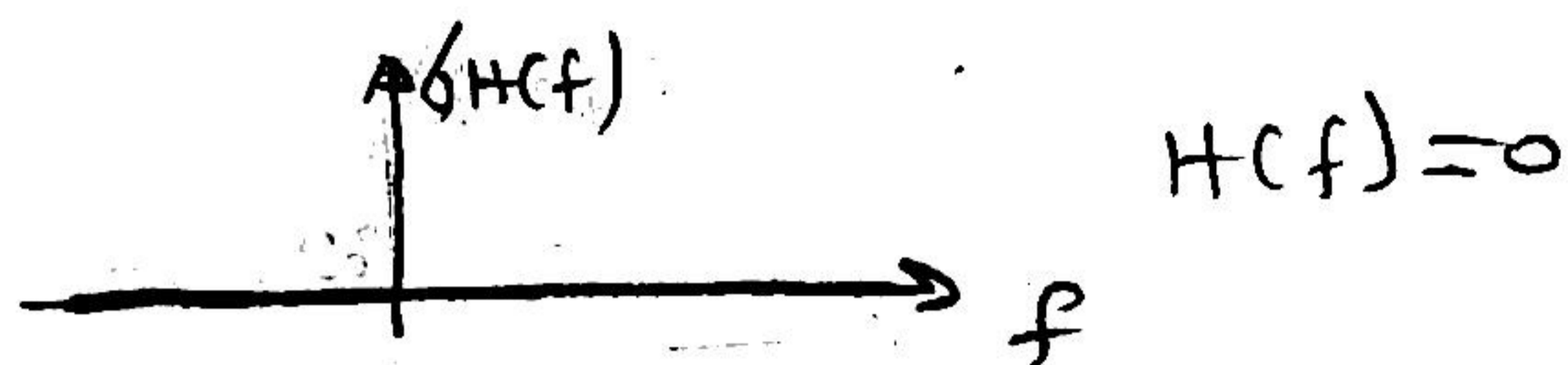
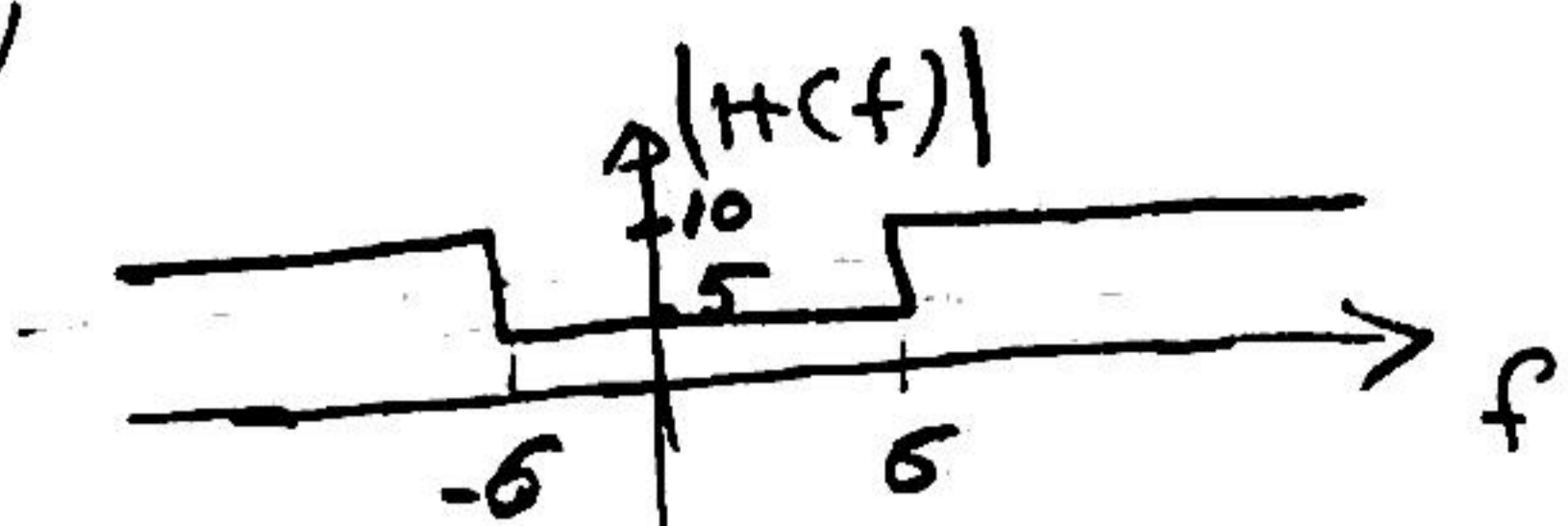
NonLinear distortion



Problem Examine the distortion in the following system 472
system



$$x(t) = 2 \cos 2\pi 3t + 8 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$$



Since $H(f)$ is not constant the system has distortion.

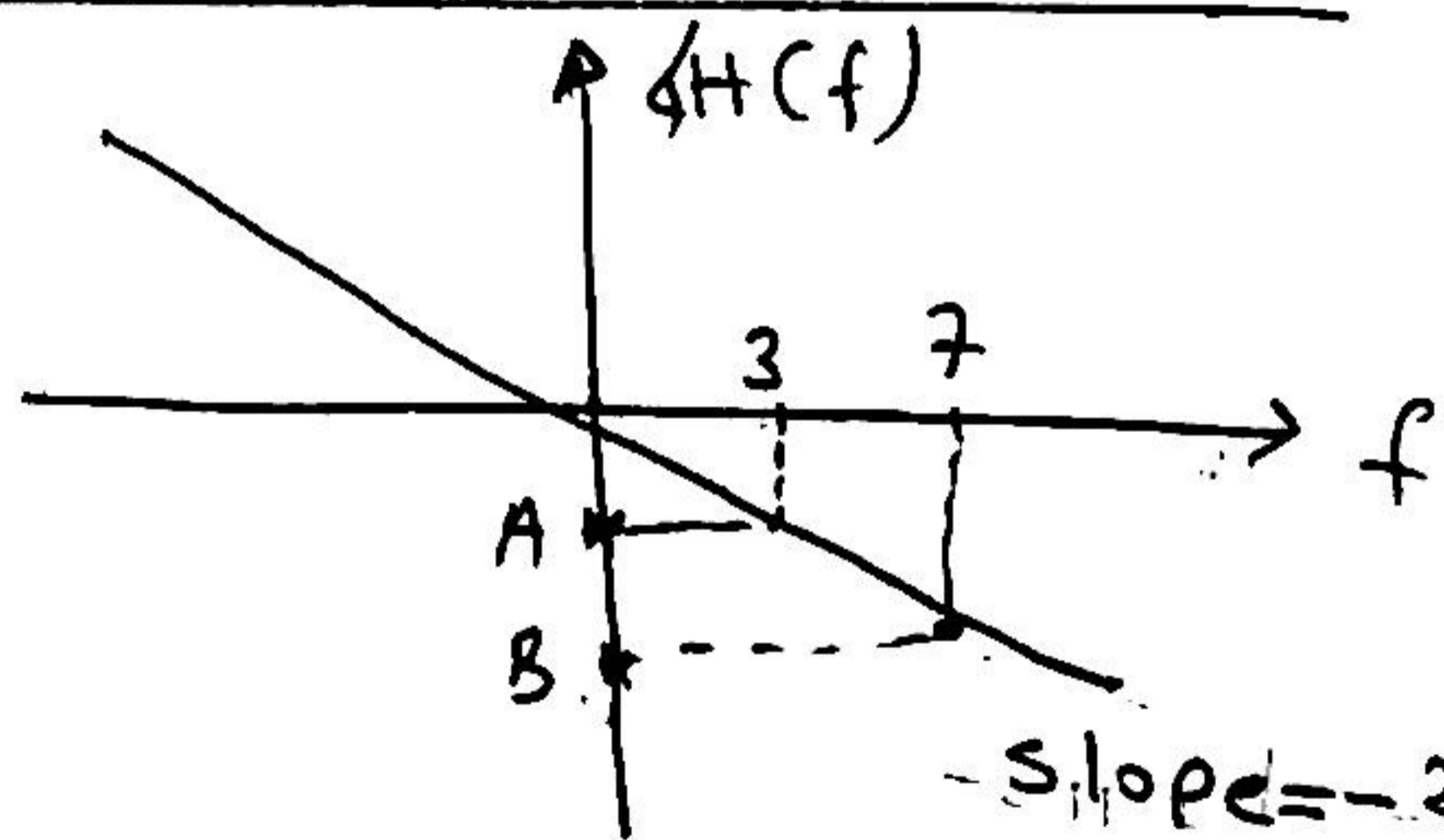
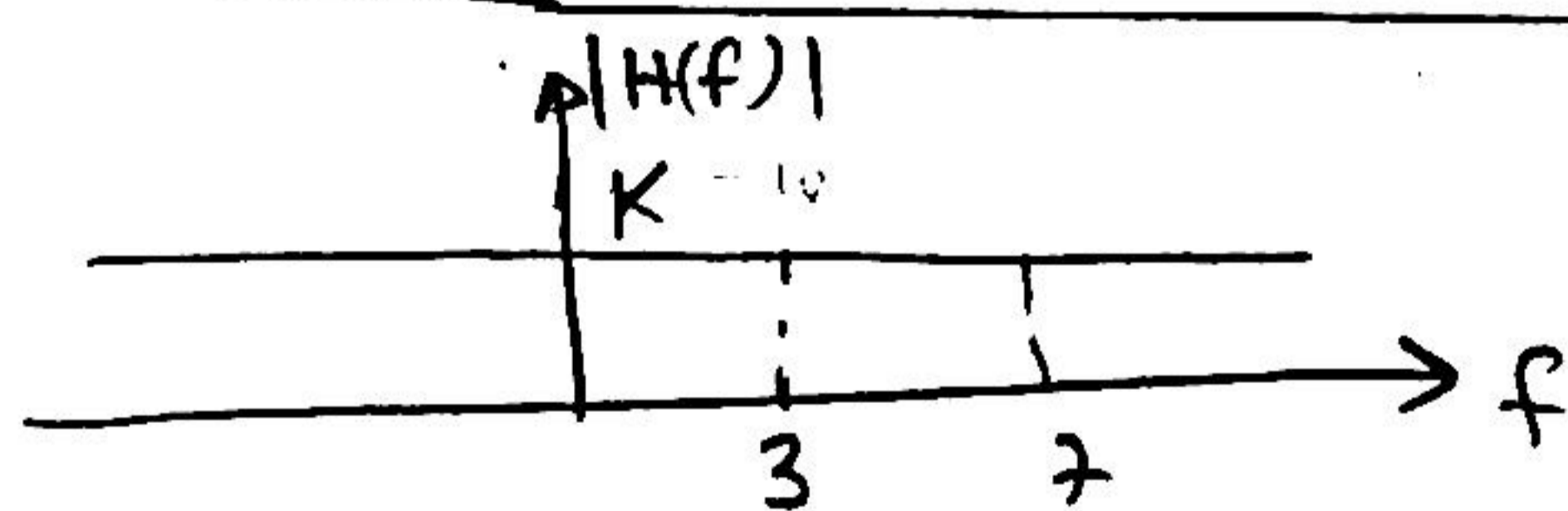
$$y(t) = 2 \times 5 \cos(2\pi 3t + 0) + 8 \times 10 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$$

$$= 10 \cos(2\pi 3t) + 80 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$$

$y(t) \neq K x(t)$ distortion exists
 $y(t) \neq K x(t - td)$

Example problem. Draw a distortionless $H(f)$ and calculate output if input is

$$x(t) = 2 \cos 2\pi 3t + 8 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$$



$$H(f) = -w td = -2\pi f td$$

As an example set $K=10$ $td=0.1$

$$A = \text{slope} \times 3 = -2\pi(0.1) \times 3 = -0.6\pi = -1.88 \text{ radian} = -108^\circ$$

$$B = \text{slope} \times 7 = -2\pi(0.1) \times 7 = -1.4\pi = -4.21 \text{ radian} = -252^\circ$$

$$y(t) = 2 \times 10 (\cos 3t - 108) + 8 \times 10 \cos(2\pi 7t + 20 - 252)$$

$$= 20 \cos(3t - 108) + 80 \cos(2\pi 7t - 232)$$

$$x(t) = 2 \cos 2\pi 3t + 8 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$$

$$x(t-0.1) = 2 \cos\{2\pi 3(t-0.1)\} + 8 \cos\{2\pi 7(t-0.1) + 20\}$$

$$= 2 \cos[2\pi 3t - 2\pi \times 3 \times 0.1] + 8 \cos[2\pi 7t - 2\pi \times 7 \times 0.1 + 20]$$

$$= 2 \cos[2\pi 3t - 108^\circ] + 8 \cos[2\pi 7t - 232^\circ]$$

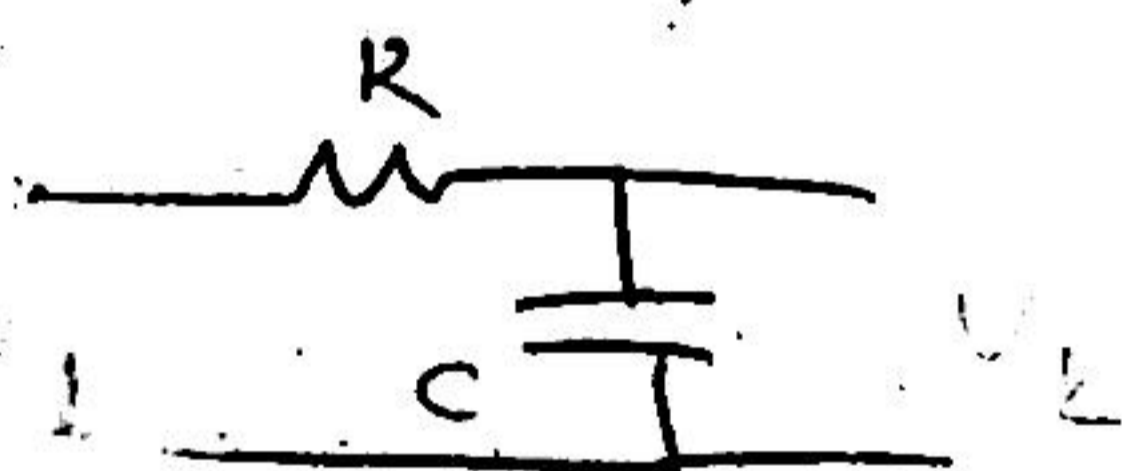
$$10x(t-0.1) = 20 \cos(2\pi 3t - 108^\circ) + 80 \cos(2\pi 7t - 232^\circ)$$

$$y(t) = 10x(t-0.1)$$

no distortion.

Example problem: Examine the distortion of the following circuit. If input is

$x(t) = 2 \cos 3t + 8 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$ calculate the output.



$$H(f) = HCF$$

$$C = 0.2 \quad R = 1$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{j\omega CR + 1} = \frac{1}{j\omega 0.2 + 1} = \frac{5}{j\omega + 5}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\omega^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 5^2}} = |HCF|$$

Since $|H(f)|$ is not constant the system has distortion.

$$\angle H(j\omega) = 0 - \tan^{-1} \frac{\omega}{5} = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{5} = \angle H(f)$$

$$|H(f)|_{f=3} = \frac{5}{\sqrt{(2\pi 3)^2 + 25}} = 0.256$$

$$\angle H(f) \Big|_{f=3} = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{5} = -75^\circ$$

$$\Big| H(f) \Big|_{f=7} = \frac{5}{\sqrt{(2\pi \cdot 7)^2 + 25}} = 0.22$$

$$\angle H(f) \Big|_{f=7} = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{5} = -83^\circ$$

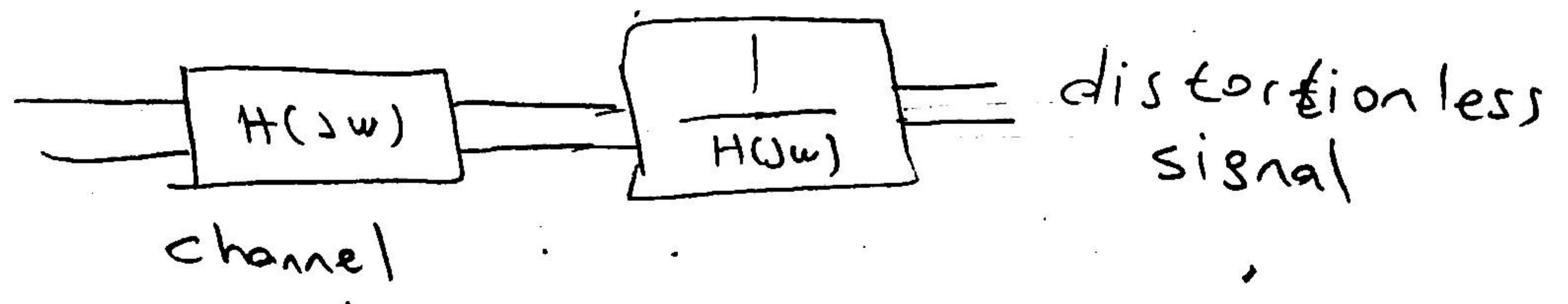
$$x(t) = 2 \cos 3t + 8 \cos(2\pi 7t + 20^\circ)$$

$$y(t) = 2 \times 0.256 \cos(2\pi 3t - 75^\circ) + 8 \times 0.22 \cos(2\pi 7t - 83^\circ + 20^\circ)$$

$$y(t) = 0.512 \cos(2\pi 3t - 75^\circ) + 1.76 \cos(2\pi 7t - 63^\circ)$$

$$y(t) \neq k x(t) \quad \text{or} \quad y(t) \neq k x(t - t_d)$$

Compensation for distortion
 channel distortion can be reduced by
Equalization circuits.



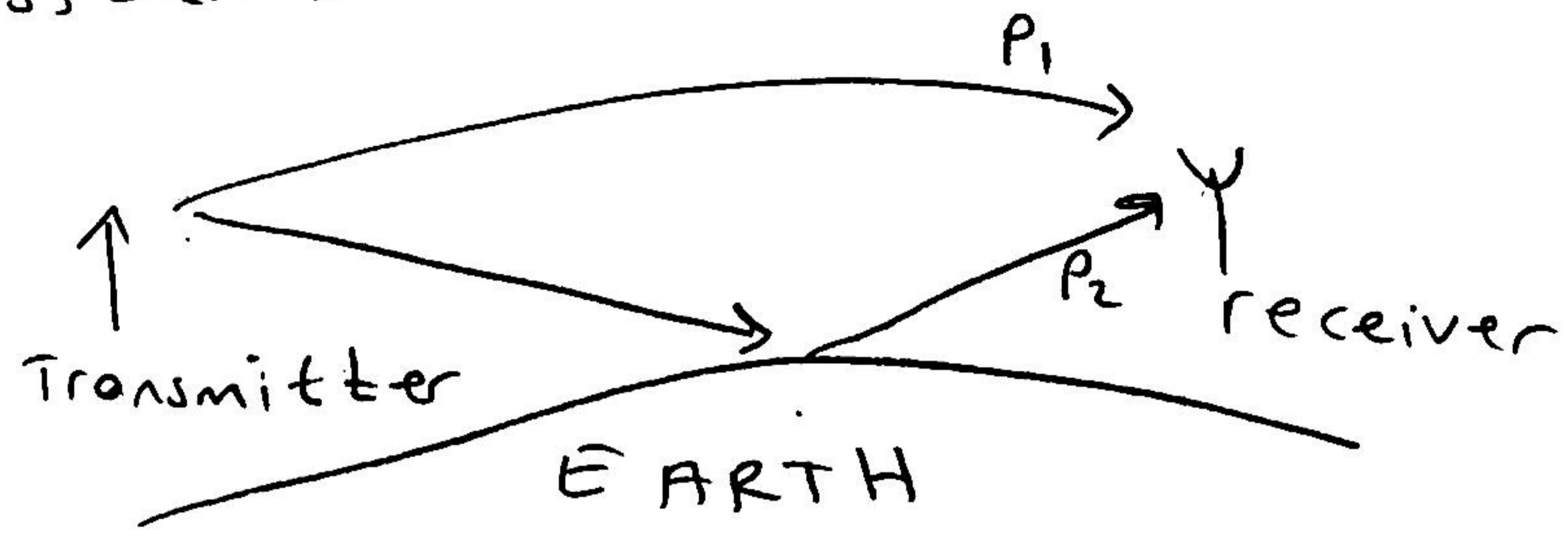
However $\frac{1}{H(j\omega)}$ cannot be realized (made)

exactly but can be built approximately

Examples

Multipath distortion

multipath distortion occurs in mainly radio systems



$$P_1 = A_1 \cos [2\pi f_1 (t - t_1)]$$

$$P_2 = A_2 \cos [2\pi f_1 (t - t_2)]$$

receiver gets $P_1 + P_2$

Assume $A_1 = A_2 = A$ $t_2 = t_1 + \frac{1}{2f_1}$

$$P_1 + P_2 = A \left\{ \cos [2\pi f_1 (t - t_1)] + \cos [2\pi f_1 (t - (t_1 + \frac{1}{2f_1}))] \right\}$$

$$= A \left\{ \cos [2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_1] + \cos [2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_1 - \pi] \right\}$$

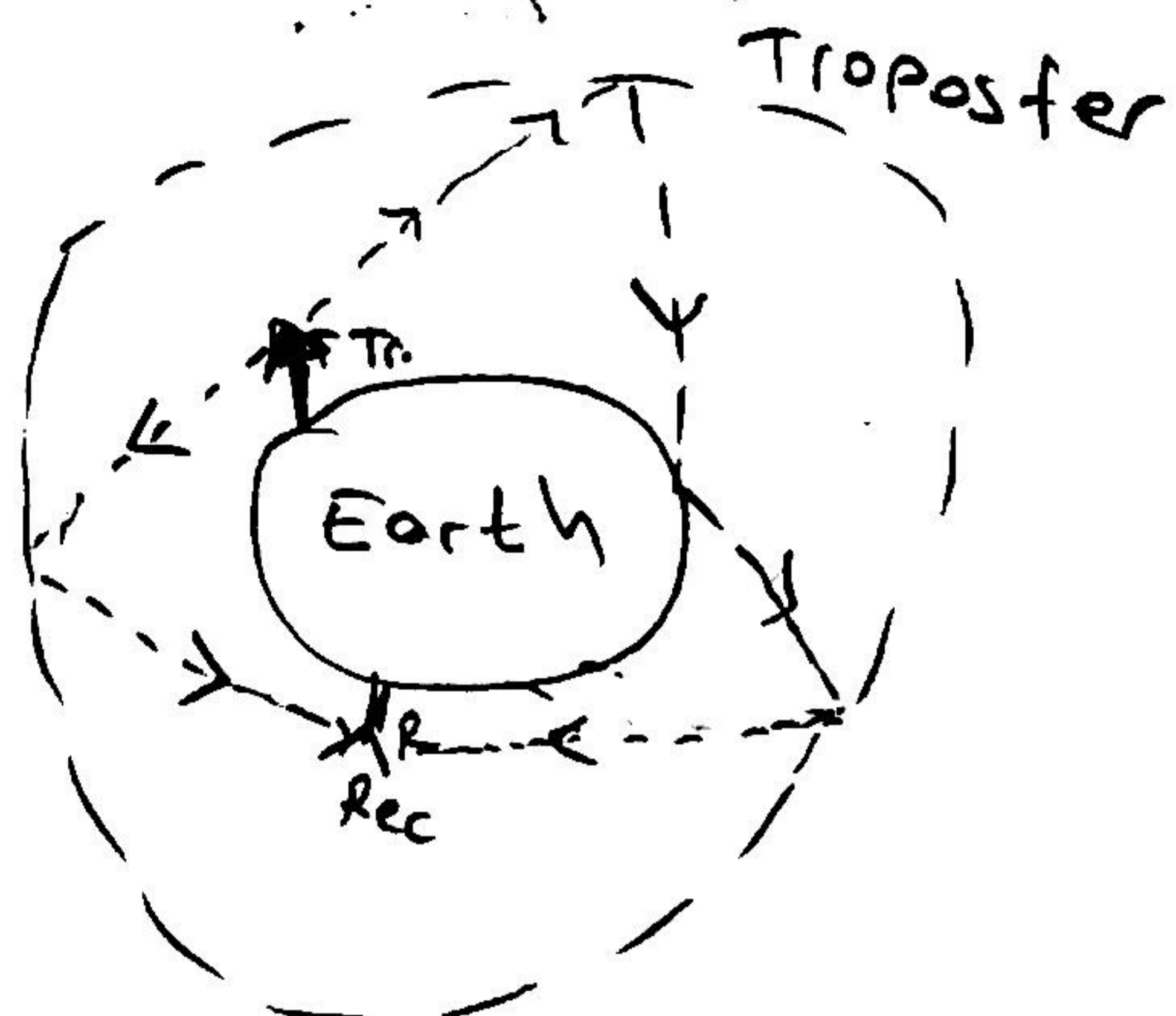
$$= A \left\{ \cos [2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_1] - \cos [2\pi f_1 t - 2\pi f_1 t_1] \right\}$$

$$= A \cdot 0 = 0$$

i.e. no signal at the receiver.

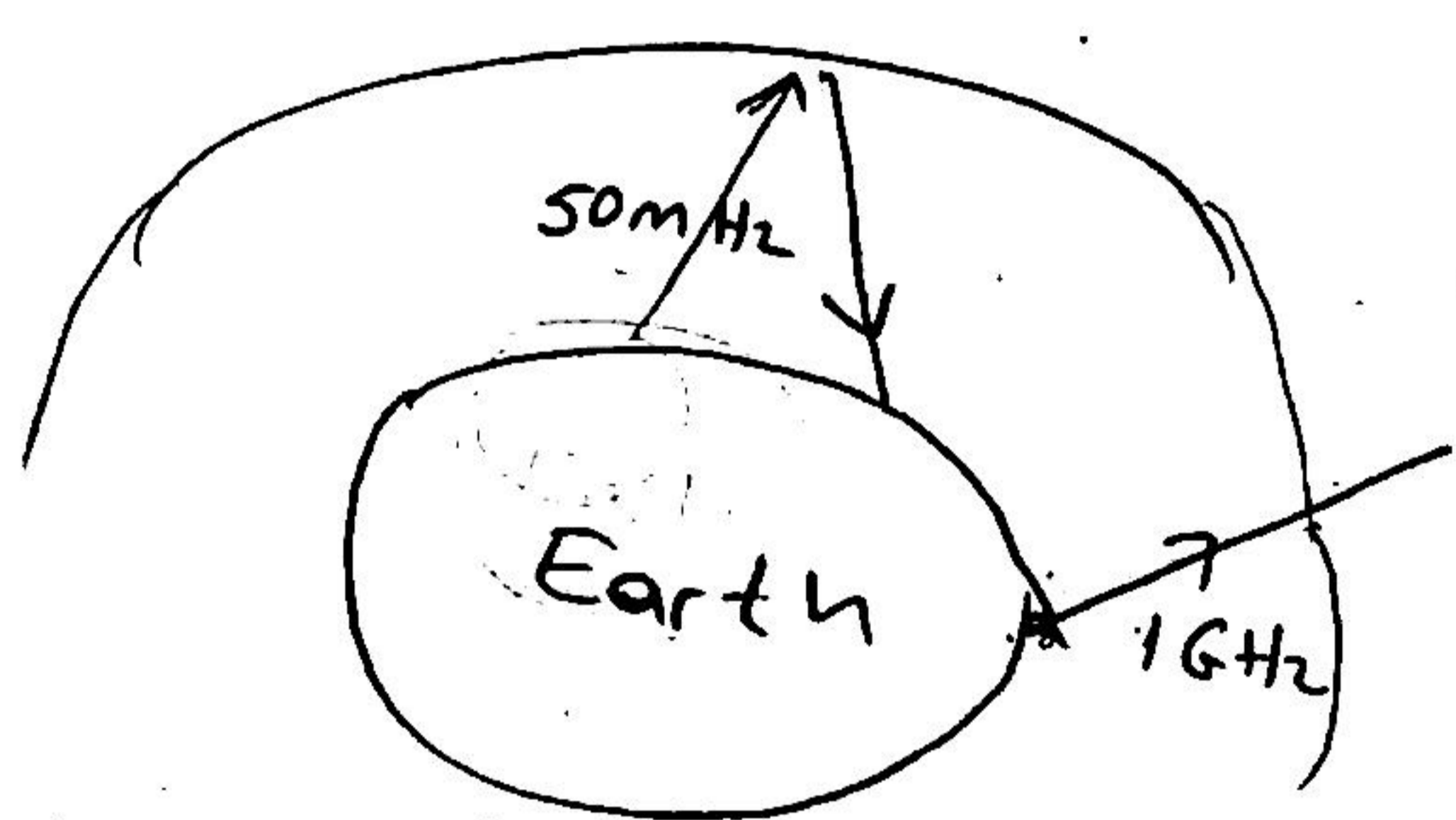
In practice $A_1 \neq A_2$ and $t_2 \neq \frac{1}{2f_1}$ but

sometimes $P_1 + P_2$ can become very close to zero.

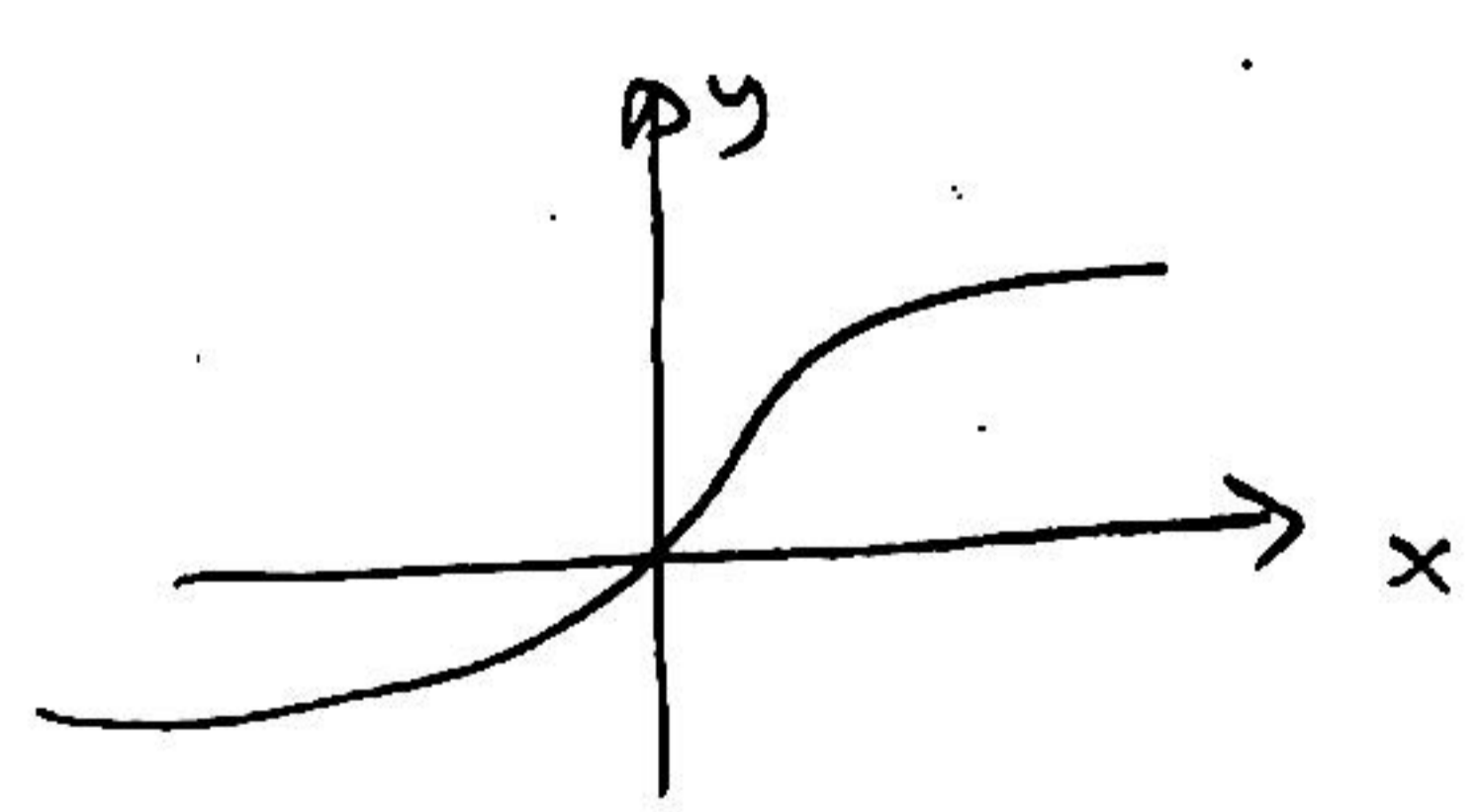


Multipath may cause distortion

Note: Small frequencies reflects from Troposphere while microwaves penetrates troposphere and goes to sky.



Nonlinear distortion:



$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots$$

$$Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X * X(f) + a_3 X * X * X(f) + \dots$$

if $x(f)$ has bandwidth $0-w$
 $X * X(f)$ " " $0-2w$
 $X * X * X(f)$ " " $0-3w$

distorted signals above $f > w$ can be removed by filter. But additional distorted signals $f < w$ cannot be removed and causes problem.

İyonosfer (30 MHz'in altındaki frekanslarda) ve gezgin hücreli radyo (mobile cellular radio) kanalları gibi fiziksel kanallar yoluyla işaretin yayını için iyi bir model örneği, (1.3)'deki eşitliğin özel bir durumuna karşı düşmekte olup, bu modelin zamanla-değişen impuls yanıtı

$$h(\tau; t) = \sum_{k=1}^L a_k(t) \delta(\tau - \tau_k) \quad (1.4)$$

biçimindedir. Burada $\{a_k(t)\}$ L adet yayını yolu (çok yollu yayını) için zamanla-değişen zayıflatma katsayılarını tanımlar. (1.4)'deki eşitlik (1.3)'de yerine konursa, alıcı tarafta elde edilen işaret

$$r(t) = \sum_{k=1}^L a_k(t) s(t - \tau_k) + n(t) \quad (1.5)$$

şeklinde olur. Böylece alınan işaret, her bir bileşeni $\{a_k\}$ katsayısı ile zayıflatılmış ve $\{\tau_k\}$ süreleri ile geciktirilmiş L adet çok yollu bileşenden oluşur.

1.2.2.3 Alıcı (Receiver)

Alıcı, iletim ortamından gelen işaret üzerinde iletim kayıplarına karşı kuvvetlendirmenin yapıldığı ve giriş işaretinin yeniden elde edilmesi amacıyla demodülasyon ve kod çözme işlemlerinin gerçekleştirildiği kısımdır. Ancak hatırlanacağı üzere, analog haberleşme sistemlerinde kod çözme işlemine gerek yoktur.

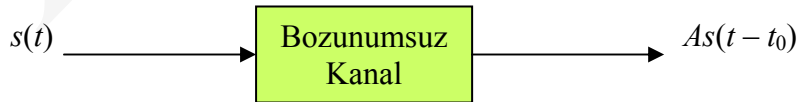
Böylece, elektriksel olarak elde edilen işaret çıkış dönüştürücüsü yardımıyla ilgili veri biçimine (görüntü, ses, konuşma, vb.) çevrilir ve değerlendirilmeye tabi tutulur.

1.3 Bir Haberleşme Sistemini Etkileyen Unsurlar

Bir haberleşme sisteminde kanalın iki önemli özelliği iletişimi etkiler:

- Bozunum (distortion)
- Gürültü (noise)

Eğer kanaldaki işaretin değişmesi, sadece bir sabit ile çarpım ve/veya bir zaman gecikmesi ile ifade edilebilirse kanal bozunumsuzdur, aksi durumda, bozunumludur denir. Şekil 1.8'de bozunumsuz bir kanalın $s(t)$ giriş işaretine yanıtı gösterilmektedir.



Şekil 1.8 Bozunumsuz bir kanalın $s(t)$ girişine yanıtı.

Kanalın diğer bir önemli etkisi de rasgele gürültüdür. Gürültüsüz bir ortamda işaretin iletimi son derece basittir. Ancak pratik uygulamaların çoğunda rasgele gürültü daima vardır. Haberleşme sistemlerinin tasarımında, gürültü içerisinde işaretin seçilebilirliğini sağlayıcı önlemler alınır.

Kullanım alanlarına göre, haberleşme sistemlerinde genel olarak beklenenler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Konuşma naklinde: Alıcı uçta elde edilen konuşmaların anlaşılır olması esastır. Konuşanı sesinde tanıma önemli değildir.

Veri (Data) naklinde: Alıcı uçta elde edilen ikili sayıların doğru olarak alınması gerekir. Genellikle “1” veya “0”ın alıcı tarafta doğru olarak belirlenmesi gerekir.

Müzik naklinde: Alıcıda alınan seslerin orijinaline uygun olması beklenir. Doğal oluşum bozulmamalıdır.

Resim naklinde: Alıcı tarafta elde edilen resim aslına benzemelidir. İdeal olanı, aslının kopyası olmasıdır.

Bahsedilen bu beklentilerin sağlanması, haberleşme sistemi kurulurken, aşağıda verilecek olan özelliklerin dikkate alınması ile mümkün olur. Bu özellikler;

- 1- **Bant genişliği (Bandwidth):** İşaretin frekans bileşenlerinin bilinmesi, uygun kanal bant genişliğinin tahmini için gereklidir.
- 2- **Bozunum (Distortion):** İletim yolunda işaretin bozulmadan nakli için şekil değiştirmemesi gerekir. Genlik ve faz bozumu olarak sınıflandırılır.
- 3- **Zayıflama (Attenuation):** İşaretin iletim zayıflamasının az olması istenir. Aksi durumda işareti gürültüden ayırtmak güçleşir. Bu yüzden seviye ölçümleri (**desi-Bell = dB**) yapılır.
- 4- **İşaretin gürültüye oranı (Signal-to-Noise Ratio, SNR):** SNR, işaret gücünün gürültü gücüne oranı olarak tanımlanır. Habere ait işaret ile gürültü arasındaki bu oranın yeterli olması gerekir. Haberleşmedeki işarete bağlı olarak bu oran yeterince büyük olmalıdır.
- 5- **Kanallar arası etki (Crosstalk):** Çok kanallı haber naklinde kanalların birbirini bozmaması gerekir. Bunu sağlayıcı tedbirler alınır.
- 6- **Haber gönderme hızı (Communication speed):** Haber miktarına (enformasyona) bağlı olarak, haber gönderme hızı frekans bant genişliğine bağlı olarak değişim gösterir. Hızın bir ölçüsü olarak bant genişliği kavramı, hem işaretlere hem de sistemlere uygulanır. Şöyle ki, zamanla hızlı değişim gösteren bir işaretin frekans içeriği veya spektrumu geniş aralıkta dağılım gösterir ve bu işaret geniş bir bant genişliğine sahiptir denir. Sonuç olarak, verilen bir haber miktarını nakletmek için gereken zaman, bant genişliği ile ters orantılıdır.

1.3.1 Enformasyon ve Bant Genişliği

Eğer, bir haberleşme sisteminin temel amacı bilginin (enformasyonun) bir noktadan diğerine nakli ise, bu durumda sistemlerin birbirlerine olan bağıl üstünlüklerini ve performanslarını gönderilen enformasyon miktarını ölçmeksizin açıklamak mümkün değildir. Bir TV sisteminde nakledilen enformasyon miktarı ile bir terminalden merkezi bilgisayara transfer edilen enformasyon miktarının karşılaştırılması buna örnek olarak verilebilir.

1940 yıllarında Bell Telefon laboratuvarı araştırmacılarından **C. E. Shannon**, enformasyon ve hatasız nakil edilebilecek ortalama enformasyon miktarına ilişkin ilk önemli sonuçları yayınlamış ve bunu takiben bağımsız bir disiplin olarak *Enformasyon Teorisi* geliştirmiştir. Oldukça teorik olan bu konu, burada tartışılmayacaktır. Ancak, enformasyon ile bant genişliği arasındaki ilişki özellikle incelenecektir. Bunun için, bir müzik yayınının transmisyonunu ele alalım. İnsan kulağının işitebileceği enformasyon 0 Hz'in biraz üzerinden 15 KHz'e kadar olan bölgededir. Bu nedenle, eğer bu müzik yayını bir radyo istasyonundan dinliyorsak tüm enformasyonun işitilebilmesi için istasyon en az 15 KHz'lik bir bant genişliği kullanmalıdır. Halbuki, standart genlik modülasyonlu (AM) istasyonlarda ayrılan bant genişliği 10 KHz'dir. Bu durumda, müzik yayınındaki bazı bilgiler işitilmeyecek, kırılmalar olacaktır. Diğer taraftan, frekans modülasyonu (FM) kullanan istasyonlar için daha fazla bant genişliği ayrılmıştır (yaklaşık olarak 200 KHz). Bu yöntemle, 15 KHz'e kadar enformasyonun alıcıda

tekrar elde edilebilmesi sağlanacaktır. Bu örnek sayesinde FM bandı ile AM bandının doğruluğu (fidelity) karşılaştırılmıştır. Daha fazla bant genişliği, daha çok enformasyon nakline imkan vermiştir. Bant genişliği ile enformasyon arasındaki formüller ilişki, yine Bell Telefon laboratuvarı araştırmacılarından **R. Hartley** tarafından 1929 yılında geliştirilmiştir.

Hartley Kuralı: Gönderilecek olan enformasyon miktarı, kullanılan bant genişliği ve iletim zamanının çarpımı ile orantılıdır. Başka bir deyişle; daha büyük bant genişliği, daha fazla enformasyon geçişine imkan sağlar. Hartley kuralı denklem şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\text{Enformasyon} \sim \text{Bant genişliği} \times \text{İletim zamanı.}$$

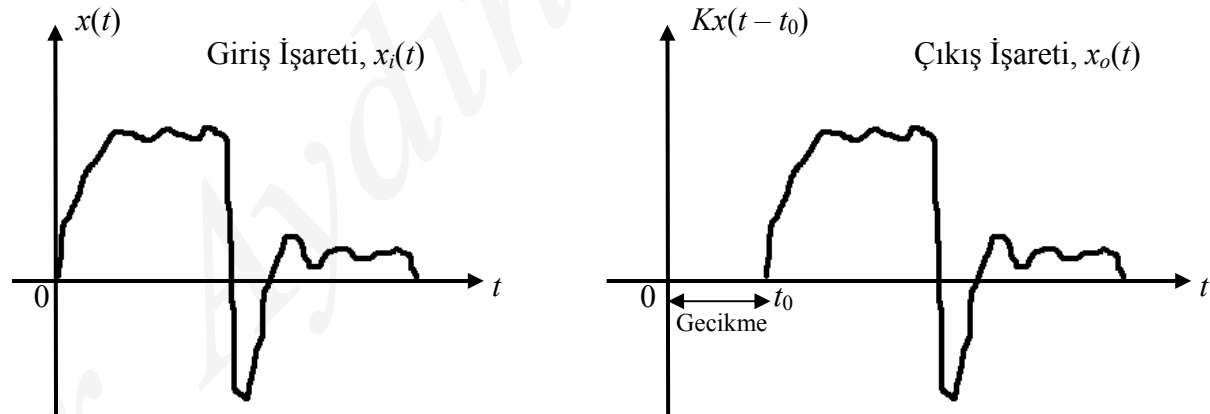
Belirtmekte fayda vardır ki, pek çok haberleşme sistemi enformasyon teorisini kullanmaksızın geliştirilmiştir. Ancak, günümüzde *sayısal haberleşme* gibi modern tekniklerin tasarımında en iyi (optimum) işaret ve haberleşme için enformasyon teorisinden faydalanılmaktadır.

1.3.2 İletim Bozuklukları (Transmission Distortions)

Habere ait işaretin, aslına uygun bir biçimde bozulmadan iletimi için alıcı taraftaki çıkış işareti şu iki şartı sağlamalıdır:

- 1- Çıkış işareti, giriş işaretinin genliğinin küçülmüş veya büyümüş şekli olmalıdır. Yani, giriş işaretinin biçiminde bir bozulma olmamalıdır.
- 2- Çıkış işareti, giriş işaretinin zaman ekseninde bir miktar kaymış şekli olmalıdır. Yani, bir gecikme söz konusudur. Elektromanyetik dalgaların sonlu yayılım hızı yüzünden bu gecikmeyi hiçbir zaman sıfır yapmak mümkün değildir.

Bu iki şartın biçimsel gösterimi, Şekil 1.9'da verilmiştir.



Şekil 1.9 Bozunumsuz iletimde giriş ve çıkış işaretleri.

Bu iki koşulu sağlayan bir haberleşme sisteminin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$x_i(t) = x(t)$ ise $x_o(t) = Kx(t - t_0)$ olmalıdır. Fourier dönüşümü yardımıyla,

$$X_o(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (1.6a)$$

$$X_i(\omega) = X(\omega) \quad (1.6b)$$

yazılabilir. Transfer fonksiyonu tanımını kullanarak,

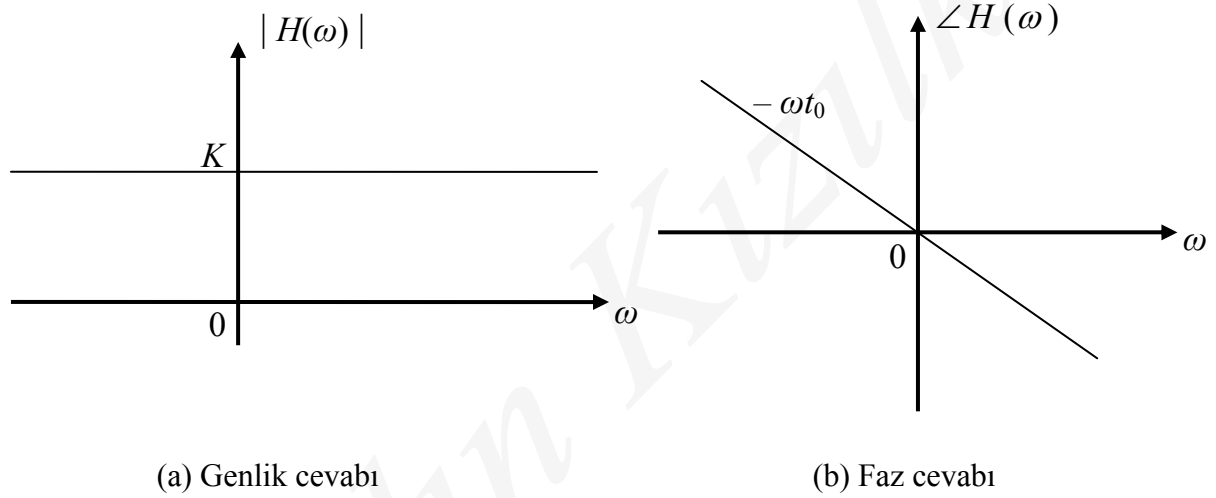
$$\text{Transfer fonksiyonu} = H(\omega) = \frac{X_o(\omega)}{X_i(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \quad (1.6c)$$

elde edilir. Faz ve genlik fonksiyonları ise,

$$|H(\omega)| = K \quad (1.6d)$$

$$\angle H(\omega) = -\omega t_0 \quad (1.6e)$$

olarak belirlenir. Bu sonuçlardan görülmektedir ki, ideal bir sistemin genlik cevabı sabit; faz cevabı ise frekansın doğrusal (lineer) bir fonksiyonudur. (1.6d) ve (1.6e) eşitliklerinin grafiksel yorumu Şekil 1.10'da verilmiştir.



Şekil 1.10 Bozunumsuz bir sistemin genlik ve faz cevapları.

Burada K , seviye değişmesini t_0 ise gecikmeyi göstermektedir. Zaman-gecikme parametreleri olarak iki tanım verilebilir:

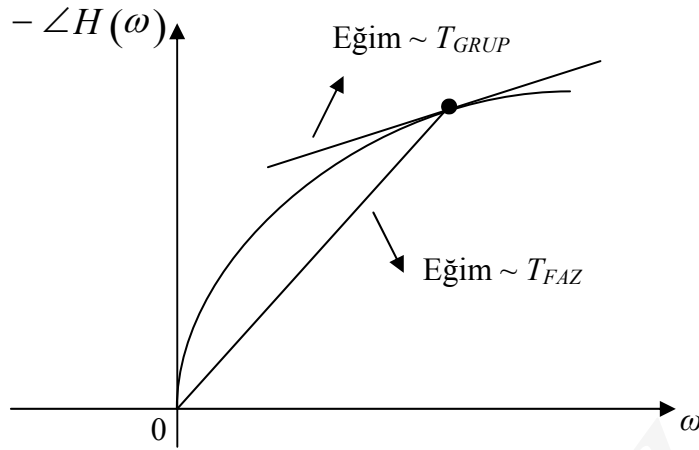
Tanım1: Faz Gecikmesi

$$T_{FAZ}(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega} \quad (1.7a)$$

Tanım2: Grup Gecikmesi

$$T_{GRUP}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(\omega) \quad (1.7b)$$

Bu iki tanımdan da görülmektedir ki, faz gecikmesi, verilen bir frekansta o noktadan sıfır frekansa (DC frekans) olan doğrunun eğimi ile orantılıdır. Grup gecikmesi ise, belirli frekanstaki teğet doğrunun eğimi ile orantılıdır. Faz ve grup gecikmelerinin, (1.7a) ve (1.7b), grafiksel yorumu Şekil 1.11'de gösterilmiştir.



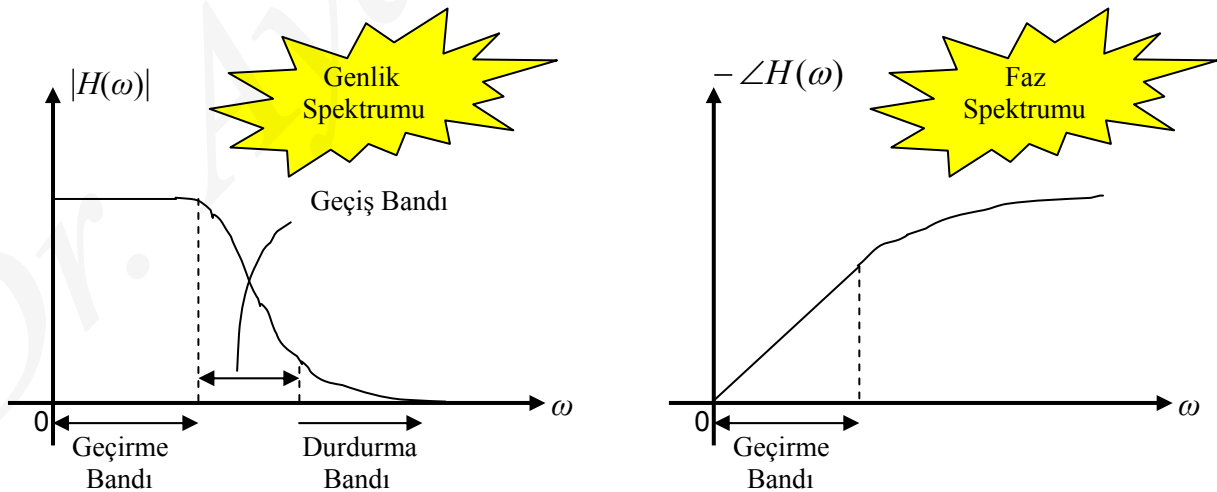
Şekil 1.11 Faz ve Grup gecikmelerinin grafiksel gösterimi.

Buna göre, sabit genlik ve doğrusal faz cevaplı olan bir sistemin (Tüm geçiren LTI filtre, All-pass filter) T_{FAZ} ve T_{GRUP} gecikmeleri bulursa

$$T_{FAZ}(\omega) = T_{GRUP}(\omega) = t_0 \quad (1.8)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, ideal sistemlerde Faz ve Grup gecikmeleri aynı olup işaretin geçiş sırasındaki tam gecikmesini gösterir. En genel durumda (uygulamada), genlik cevabı sabit değildir ve faz cevabı da doğrusal olmaz. Bu nedenle, tam gecikmeyi doğru olarak hesaplamak oldukça güçtür.

Bozunumsuz bir geçiş için bulunan koşullar ($|H(\omega)| = K$, $\angle H(\omega) = -\omega t_0$), kullanılan işaretin frekans bandı için uygulanır. Bu bandın dışında genlik cevabı, hızlı bir biçimde **sıfıra** yaklaşır. Böylece arzu edilmeyen frekans bileşenleri bastırılır (bakınız, Şekil 1.12).



Şekil 1.12 İdeal geçirme bantlı bir sistemin genlik ve faz spektrumları.

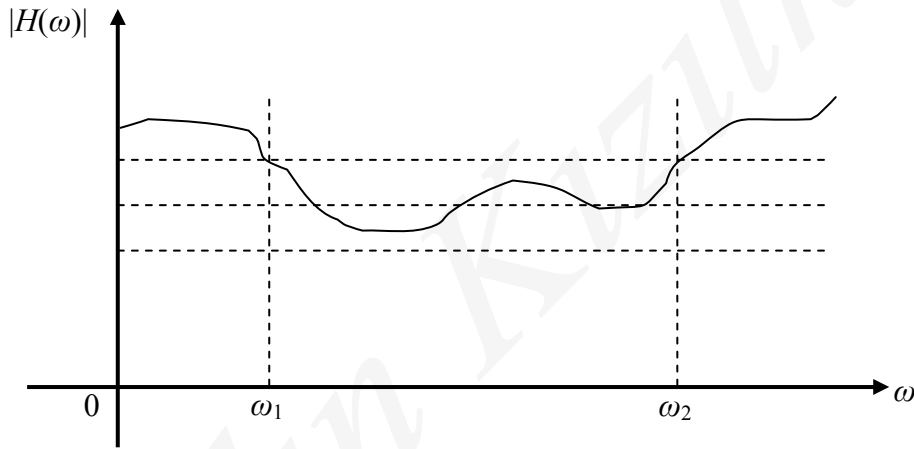
$|H(\omega)| = K$ ve $t_0 = -\angle H(\omega) / \omega$ büyüklüklerinin sabit olma şartı her zaman sağlanamaz. Bu yüzden, habere ait işarette bu işareti oluşturan sinüzoidal bileşenlerin fazı veya genliği bakımından veya zaman bakımından bozukluklar ortaya çıkar.

1.3.2.1 Doğrusal Bozulmalar (Linear Distortions)

$|H(\omega)|$ ve $\angle H(\omega)$ fonksiyonlarının frekansa bağımlı olmaları sonucu ortaya çıkan bozulmalardır. İki şekilde oluşurlar;

1- Zayıflama bozuklukları:

Eğer genlik cevabı $|H(\omega)|$ frekansa bağılı olarak değişim gösteriyorsa zayıflama bozukluğu oluşur. Zayıflama, frekansa göre değişimi artan bir eğri olabileceği gibi dalgalı bir eğilim de gösterebilir (Şekil 1.13).



Şekil 1.13 Frekans bandı içinde zayıflama.

Ses nakleden bir kanalda frekans arttıkça zayıflama artarsa, etkin olarak nakledilen frekans bandı daralır. Bunun sonucu olarak sesin anlaşılabilirliği azalır.

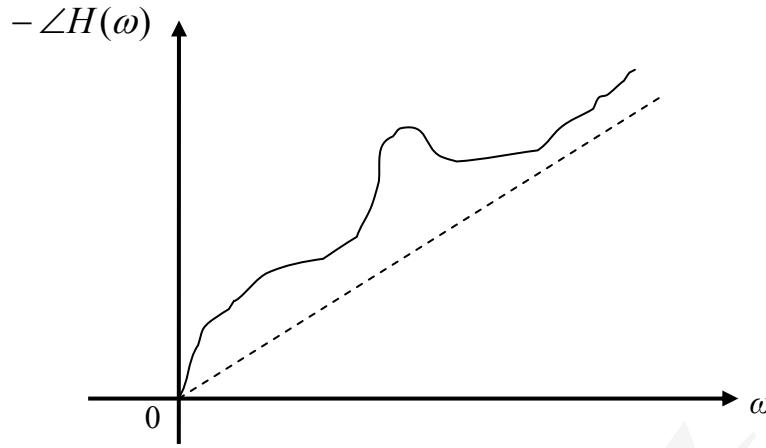
Zayıflama bozuklukları, transmisyona yapılan frekans bandı içerisinde en küçük ve en büyük zayıflamalar arasındaki fark ile belirtilmiştir. Uygulamada, belirli sınırlar içerisinde kalmak şartıyla haberin anlaşılmasına zarar vermeyecek kadar genlik değişimlerine izin verilir.

2- Faz bozukluğu veya iletim (transmisyon) zamanı bozuklukları:

İletim zamanının frekans ile değişmesi sonucu oluşur. ω frekanslı bir işaretin bir transmisyon yolunda ilerleme hızı,

$$v = \frac{1}{t_0} = \frac{\omega}{-\angle H(\omega)} \quad (1.9)$$

'dir. Habere ait işaret birçok frekans bileşenlerinden oluştuğundan dolayı, tüm frekansların aynı hızla yayılması yani aynı anda alıcı uca ulaşması gerekir. Ancak, farklı frekanslı bileşenlerin yayılım hızları aynı olmadığı takdirde bozulmalar meydana gelir. Bu durum Şekil 1.14'de gösterilmiştir.



Şekil 1.14 Faz bozulması.

Transmisyon zamanına ilişkin bozukluğun büyüklüğü, habere ait işaret bandının alt ve üst frekanslarının transmisyon zamanları ile 800 Hz'lik frekansın transmisyon zamanı arasındaki farkın büyüklüğü ile ölçülür. Transmisyon zamanı farkı, yaklaşık olarak, 800 Hz ile üst sınır frekansı arasında 5 ms; 800 Hz ile alt sınır frekansı arasında 10 ms olmalıdır.

1.3.2.2 Harmonik Bozulmalar (Harmonic Distortions)

Haberi nakleden transmisyon ortamının doğrusal olmamasından dolayı kaynaklanan bozukluklardır. Bu durumlarda, işaretin genlik ve fazında oluşan bozuklukların yanı sıra bir de frekansında değişimler söz konusudur. Bu tür sistemlere doğrusal olmayan sistemler (nonlinear systems) adı verilir. Harmonik bozulmanın diğer bir adı da *genlik bozulması*dır. Genel olarak, bir dalga biçimini zaman domeninde analiz ederken *genlik bozulması* terimi, frekans domeninde analiz ederken ise *harmonik bozulma* terimi kullanılır.

Harmonik bozulmanın çeşitli dereceleri vardır. İkinci derece harmonik bozulma, ikinci harmoniğin genliğinin temel frekansın genliğine oranıdır. Üçüncü derece harmonik bozulma ise, üçüncü harmoniğin genliğinin temel frekansın genliğine oranıdır. Daha yüksek dereceden harmonik bozulmalar da benzer şekilde ifade edilir. İşaretin başlangıçtaki giriş frekansı ilk harmoniktir ve bu frekansa *temel frekans* denir. İkinci ve daha yüksek dereceden harmoniklerin birleşik genliklerinin temel frekansın genliğine oranına *toplam harmonik bozulma* (THB) adı verilir ve matematiksel olarak

$$\text{THB yüzdesi} = \frac{V_{\text{ikinci ve daha yüksek}}}{V_{\text{temel}}} \times 100 \quad (1.10)$$

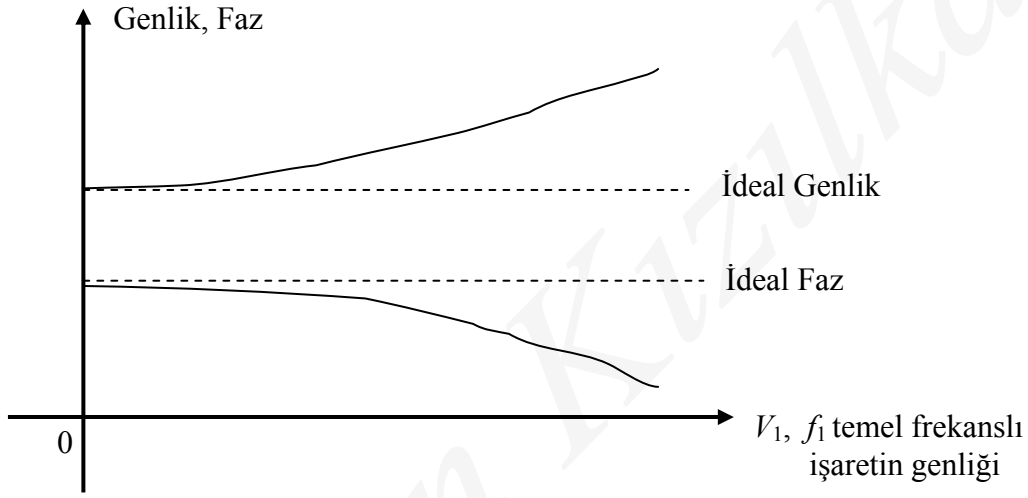
biçimde verilir. Burada THB yüzdesi, toplam harmonik bozulma yüzdesini; $V_{\text{ikinci ve daha yüksek}}$, ikinci ve daha yüksek dereceden harmoniklerin genliklerinin karelerinin toplamının karekök değeridir. V_{temel} , temel frekansın (1.harmoniğin) genlik değerini ifade etmektedir.

Örneğin, f_1 frekanslı habere ait olan bir işaret doğrusal olmayan bir sistemin girişine uygulanırsa f_1 temel frekansının yanında f_2, f_3, f_4, \dots gibi harmonikler de ortaya çıkar. V_1 , temel frekansın genliğini; V_2, V_3, V_4, \dots harmoniklerin genliklerini göstermek üzere (1.10) eşitliğinden toplam harmonik bozulma,

$$\text{THB yüzdesi} = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \dots}}{V_1} \times 100 \quad (1.11)$$

ifadesi ile bulunur.

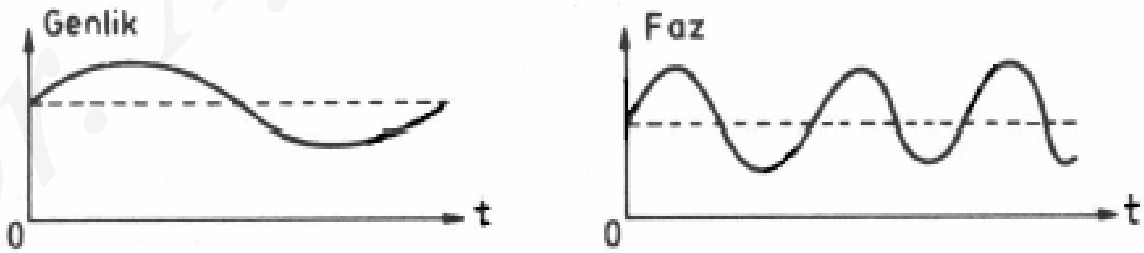
Konuşma işareti taşıyan kanallar için izin verilen THB yüzdesi 5'den küçük olmalıdır. Ses ve müzik yayınları için THB yüzdesi 1 civarındadır. Harmonik bozulmaları daha çok transformatörler, demir çekirdekli elemanlar, ve kuvvetlendiriciler oluşturur. Grafik olarak Şekil 1.15'de gösterildiği üzere, sistemin genlik ve faz büyüklükleri sabit bir frekansta işaretin genliğine göre değişim gösterir.



Şekil 1.15 Harmonik bozulma.

1.3.2.3 Modülasyon Bozulmaları (Modulation Distortions)

Transmisyon ortamına ait faz ve genlik cevaplarının zamanla değişmesi sonucu ortaya çıkar, ve Genlik ve Faz modülasyonu bozulmaları olarak ikiye ayrılırlar (Şekil 1.16).



Şekil 1.16 Modülasyon bozulmaları.

İki veya daha fazla frekans doğrusal olmayan bir cihazda yükseltildiğinde, istenmeyen toplam ve fark frekanslarının oluşması olarak tarif edilen modülasyon bozulmalarına *modülasyonlar arası bozulma* (intermodulation distortions, IMD) da denir. Harmonik bozulmaların çeşitli