

Ders #2

Otomatik Kontrol

Laplas Dönüşümü

Prof.Dr.Galip Cansever



Pierre-Simon Laplace, 1749-1827

Matematiçi ve Astronomdur.

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html>

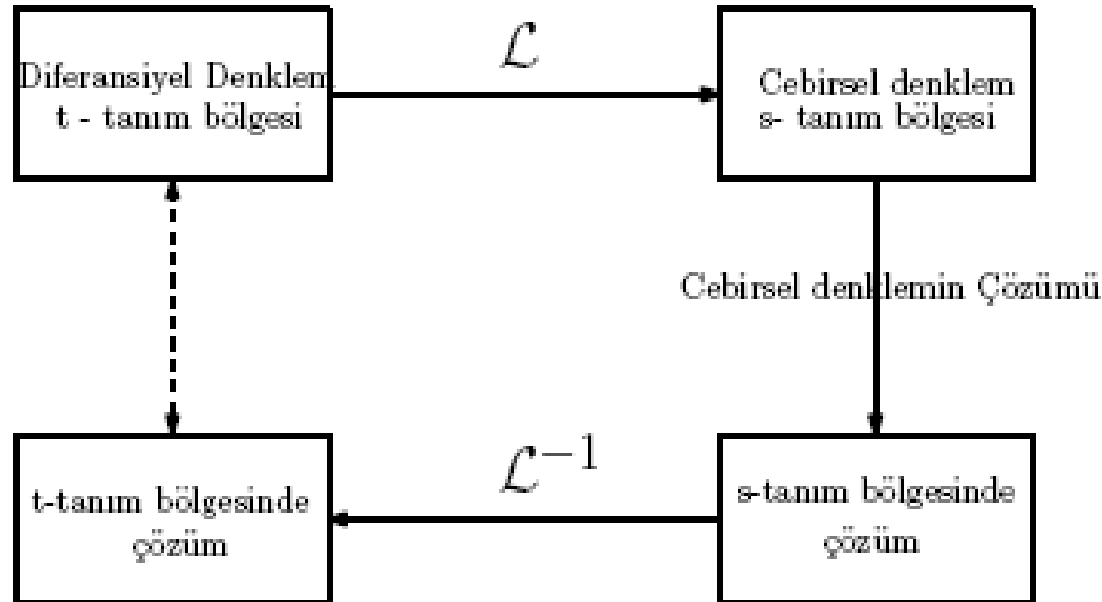
LAPLAS DÖNÜŞÜMÜ

Zamanla değişen bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplas dönüşümü

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s > 0$$

İle elde edilir ve gösterimi: $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Diferansiyel denklemlerin Çözümünde Laplace dönüşümü



Laplace dönüşümü, diferansiyel denklemlerin cebirsel ifadelerle dönüştürülerek çözümlerinin kolayca elde edilmesi amacıyla kullanılır.

Teorem: Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

İspat: Bu dönüşümün lineer olması için lineer olma şartlarını sağlaması gerekir;

$$1) \quad \mathcal{L}(f + g) \stackrel{?}{=} \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$2) \quad \mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (f(t) + g(t))e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= F(s) + G(s) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} cf(t)e^{-st} dt = c \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = c\mathcal{L}(f(t))$$

Lineer olmanın her iki şartını da sağladığı için Laplas dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Bazı Önemli Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

Örnek: $f(t) = 1$ İse $f(t)$ nin Laplas dönüşümü nedir? $F(s) = ?$

$$\int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-sR} - 1}{-s} = \frac{1}{s}$$

Örnek: $e^{at}f(t)$ nin Laplas dönüşümü nedir? $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = ?$

(Bu ifadeye üstel öteleme de adı verilir.)

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{(a-s)t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt$$

Şayet $s_1 := s - a$ sabit dönüşümü yapılırsa

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s_1)t} dt = F(s_1) = F(s - a)$$

Sonuç: Eğer $e^{at}f(t)$ nin Laplas dönüşümünü bulmak istiyorsak $f(t)$ 'nin Laplas dönüşümünü alıp s yerine $s-a$ yazmak yeterli olur.

Örnek: e^{at} nin Laplas dönüşümü nedir?

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \mathcal{L}(e^{at} \cdot 1) = \mathcal{L}(1)|_{s:=s-a} = \frac{1}{s-a}$$

Örnek: $e^{(a+jb)t}$ nin Laplas dönüşümü nedir?

$$\mathcal{L}(e^{(a+jb)t}) = \mathcal{L}(e^{(a+jb)t} \cdot 1) = \mathcal{L}(1)|_{s:=s-(a+jb)} = \frac{1}{s - (a + jb)}$$

Örnek: $\cos(at)$ nin Laplas dönüşümü nedir?

Cos(at)'nin euler dönüşümü: $\cos at = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}\right) = \frac{1}{2} [\mathcal{L}(e^{jat}) + \mathcal{L}(e^{-jat})]$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - ja} + \frac{1}{s + ja} \right] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$$

Benzer şekilde **sin(at)**'nin Laplas dönüşümü:

$$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$$

Adi Diferansiyel Denklemlerin Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri ve Çözümleri

$$y'' + Ay' + By = u(t)$$

şeklinde sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin $y(0) = y_0$ ve $y'(0) = y'_0$ ilk koşulları altında çözümleri Laplace dönüşümü ile kolaylıkla yapılabilir. Bunun için öncelikle $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$ ile $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ şeklinde hesaplanır. Daha sonrada

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

bulunur. Burada $y(t)$ nin türevleri mevcut olduğundan türev ve integral işlemlerinin Laplace dönüşümlerini öncelikle irdelemeliyiz.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

Kıs. türev. ayırma=(Türev alma,integral al) - \int_0^{∞} (Her ikisini de yap)

$$\begin{aligned} &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s e^{-st} f(t) dt \\ &= 0 - f(0) + s \underbrace{\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt}_{F(s)} = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

Örnek: $\frac{1}{s^2 - 4s + 5}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 4s + 5} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - 2)^2 + 1} \right\}$$

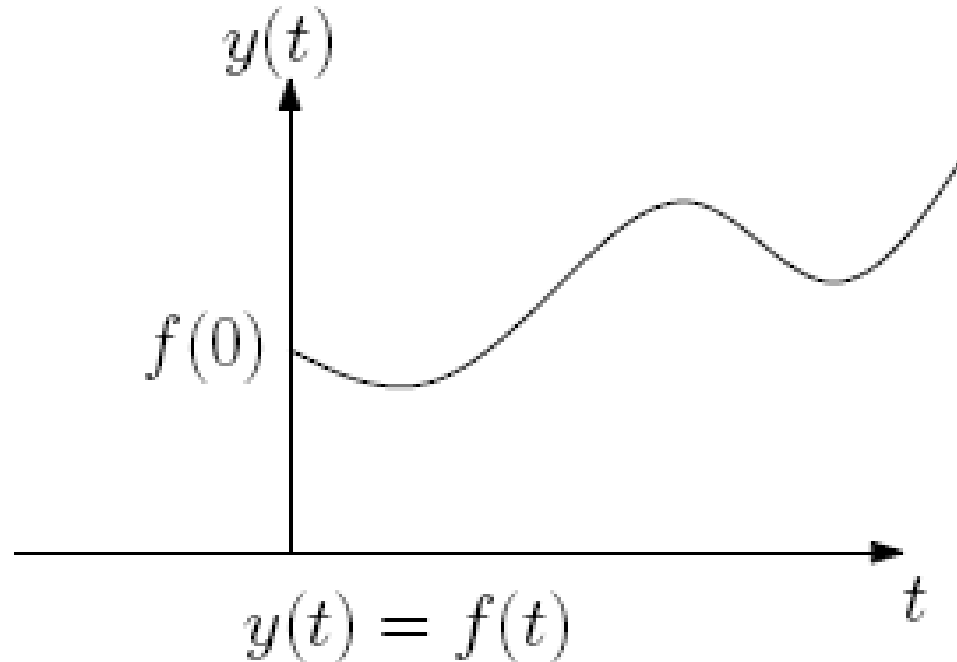
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin t = F(s)$$

Bizim örneğimizde s 'in yerini $s-2$ almıştır. O halde fonksiyonumuz $F(s-2)$ dir. ($a = 2$)

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$$

Bir fonksiyonu zaman eksenini üzerinde kaydırırsak, o fonksiyonun ötelenmiş halini elde ederiz.

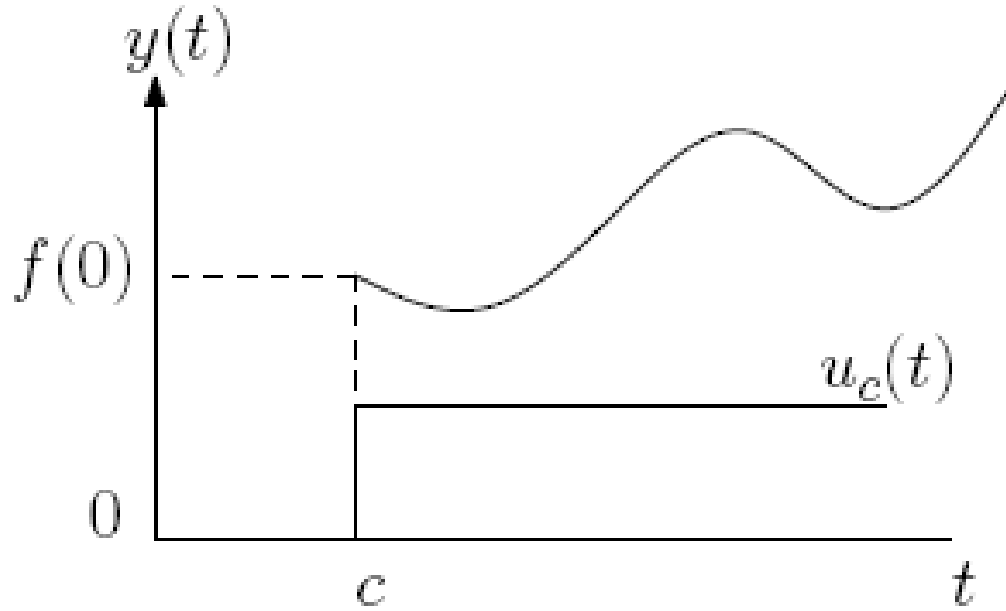
Fonksiyonların negatif bölgedeki değişimleri bilinmiyor olabilir.



Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunu pozitif zaman ekseninde c kadar kaydırduğumuzda $f(t)$ 'nin negatif zaman ekseninde c kadar davranışına ihtiyacımız ortaya çıkar.

Bu kısmı bilmediğimiz için kaydırılmış fonksiyonun ilk c birimlik süresi sıfır olmalıdır.

Dolayısıyla bunu oluşturabilmek için $f(t)$ fonksiyonu c kadar ötelenmiş birim basamak fonksiyonu ile çarpmamız gerekir.



$$y(t) = u_c(t)f(t - c)$$

Teorem: $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s)$

İspat:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \int_c^{\infty} e^{-st}f(t-c)dt$$

Burada $\zeta := t-c$ dönüşümünü yaparsak işlemlerimiz kolaylaşacaktır, şöyle ki:

$$\int_c^{\infty} e^{-st}f(t-c)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(\zeta+c)}f(\zeta)d\zeta = e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-\zeta s}f(\zeta)d\zeta = e^{-sc}F(s)$$

Örnek: $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = t - u_2(t)(t-2)$$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

NOT: $0 - \infty$ arasında tanımlanmış **sint** fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu $\pi/2$ kadar zaman ekseninde sağa doğru itelersek, Laplas değeri:

$$\mathcal{L}\{\sin t\} \longrightarrow \mathcal{L}\{u_{\pi/2} \sin(t - \pi/2)\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} \not\longrightarrow \mathcal{L}\{\sin(t - \pi/2)\} \quad \text{Değildir.}$$

Örnek:

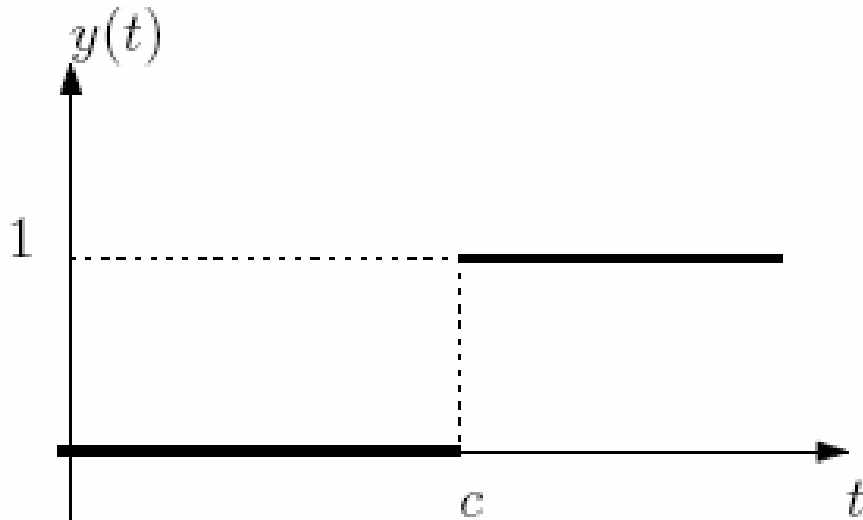
$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \pi/4 \\ \sin t + \cos(t - \pi/4) & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

İfadesinin Laplas dönüşümünü bulunuz.

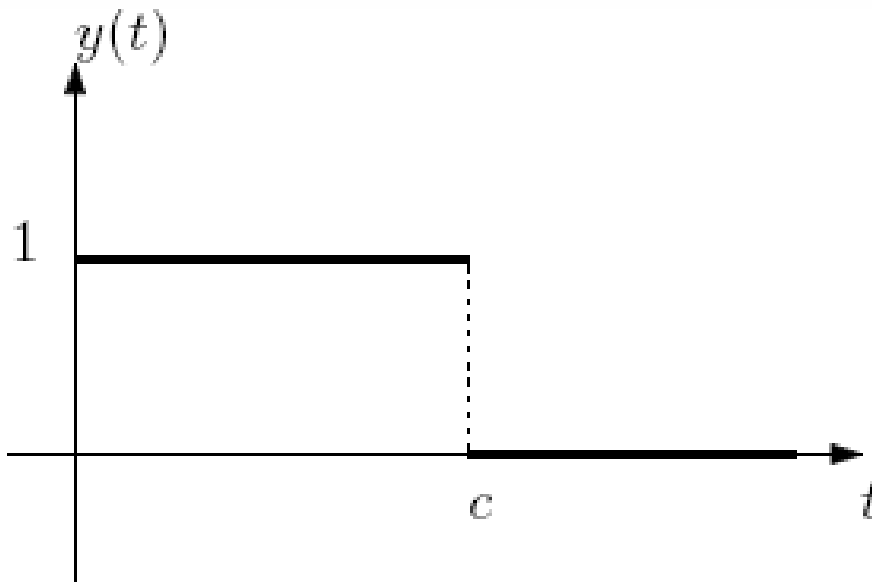
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t) \cos(t - \pi/4)\}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi/4} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1 + se^{-\pi/4}}{s^2 + 1}$$

Sıçramalı Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

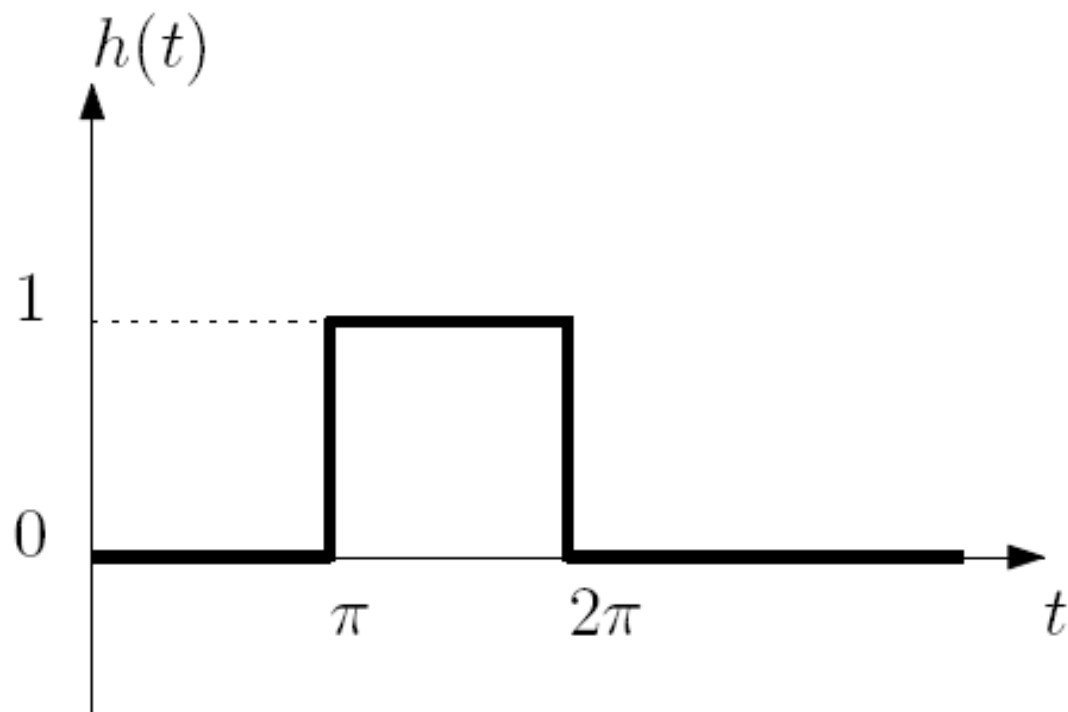


$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$



$$y(t) = 1 - u_c(t)$$

Örnek: $h(t) = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t)$ $t \geq 0$ Fonksiyonunu çiziniz.



Örnek: $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = ?$

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

Örnek: t^n ifadesinin Laplas dönüşümünü bulunuz. $\mathcal{L}\{t^n\} = ?$

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = t^n \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n e^{-st}}{-s} = \frac{t^n}{e^{st}} \cdot \frac{1}{-s} = 0$$

Dikkat edilecek olursa t sonsuza giderken son kesirli ifadenin payı ve paydası sonsuza gitmektedir. Bu durumda L'hospital kuralı uygulanırsa kesirli ifadenin payı n adımda sifira giderken payda sabit kalmaktadır. Sonuç sifir olur.

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = 0 - 0 + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \dots = \frac{n(n-1) \cdots 1}{s^n} \mathcal{L}\{t^0\} = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

Ters Laplas Dönüşümleri

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ şeklinde sembolize edilir. Kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılır, böylece karmaşık ifadeler sadeleştirilerek Laplas dönüşümü bilinen ifadeler haline dönüştürülür.

Örnek: $\frac{1}{s(s+3)}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+3)} \right\} = ?$$

$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3}$ Terimlerin ayrı ayrı ters dönüşümlerini alacak olursak;

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+3)} \right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Örnek: $\frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)} \right\} = ?$$

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)} = \frac{-1/2}{(s + 1)^2} + \frac{A}{(s + 1)} + \frac{3/4}{(s - 1)}$$

Eşitliğin her iki tarafı s in bütün değerleri için eşit ise $s=0$ içinde eşittir. Bu durumda;

$$-1 = -\frac{1}{2} + A - \frac{3}{4} \quad \boxed{A = 1/4}$$

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)} = \frac{-1/2}{(s + 1)^2} + \frac{1/4}{(s + 1)} + \frac{3/4}{(s - 1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)} \right\} = -0.5te^{-t} + 0.25e^{-t} + 0.75e^t$$

Örnek: $\frac{3s + 2}{s^2 + 4s + 20}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

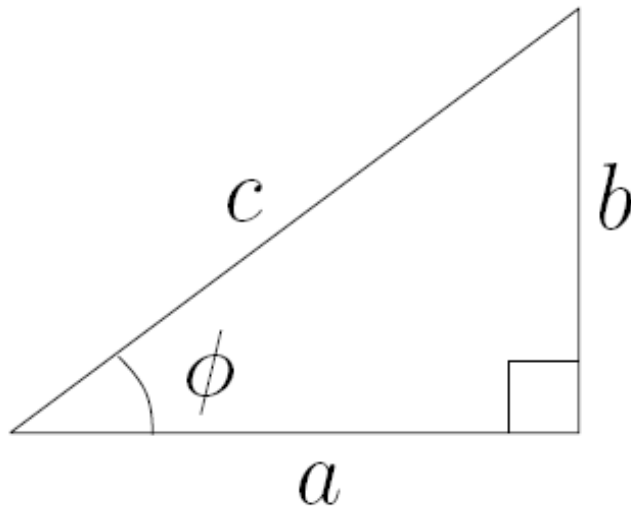
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s + 2}{s^2 + 4s + 20} \right\} = ?$$

$$F(s) = \frac{3s + 2}{(s + 2)^2 + 4^2} = 3 \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 4^2} - \frac{4}{(s + 2)^2 + 4^2}$$

Ters Laplas Dönüşümü

$$= 3e^{-2t} \cos 4t - 4e^{-2t} \sin 4t$$

Hatırlama: $a \cos r\theta + b \sin r\theta = c \cos(r\theta - \phi)$



$$f(t) = e^{-2t} [3 \cos 4t - 4 \sin 4t]$$

$$= e^{-2t} \cdot 5 \cdot \cos(4t + \tan^{-1}(4/3))$$

Yüksek Mertebeden Türevlerin Hesaplanması

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = ?$$

$f''(t) = [f'(t)]'$ şeklinde yazılabilir.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$= s^2F(s)$$

$$\begin{aligned} sf(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned} \text{ ise}$$

Darbe (İmpuls) Fonksiyonu

Darbe fonksiyonu sistemelerin davranışları hakkında bilgi edinmek için kullanılır.

Darbe fonksiyonu, kuvvetin, gerilimin veya benzer fonksiyonların sisteme çok kısa süre içerisinde çok büyük değerler alacak şekilde uygulanması ile oluşturulur.

Istaka ile bilardo topuna vurmak buna örnek olabilir. Bu vuruş sonrası topun dinamik davranışı, ilk değerleri sıfır kabul edilen bir sistemin darbe yanıtı şeklinde ele alınabilir.

Futbolda ise verilen bir pasa veya ortaya şut çekilmesi, vole vurulması sonrası topun dinamik davranışı, ilk değerleri sıfır olmayan bir sistemin darbe yanıtı şeklinde ele alınabilir.

$$ay'' + by' + cy = u(t)$$

formunda diferansiyel denklemler doğurur. İşte burada $u(t)$ darbe şeklinde bir fonksiyondur ve $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığında çok büyük değerler alan ama diğer tüm zaman diliminde sıfır değerini alan bir fonksiyondur. Şimdi

$$I(\tau) \triangleq \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} u(t) dt$$

şeklinde bir integral tanımlayalım. Açıktır ki $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığının dışında $u(t) = 0$ olduğundan

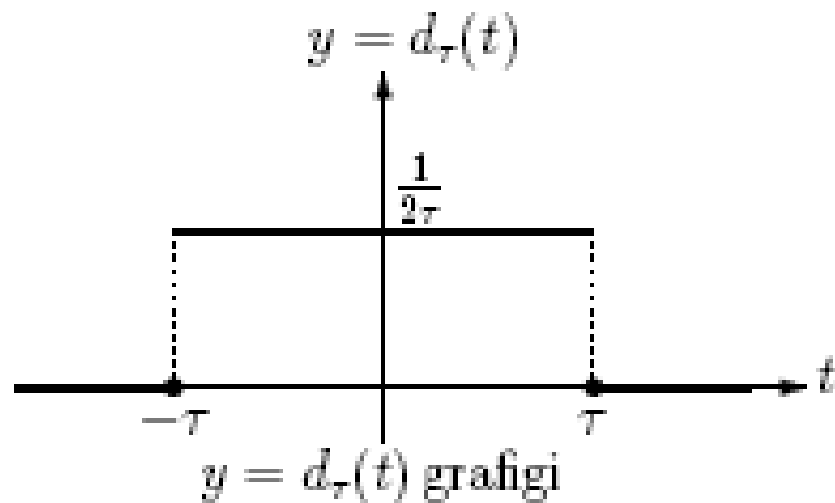
$$I(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt$$

yazılabilir. Bu integral aslında darbenin büyüklüğü hakkında bir metrik tanımlar. Örneğin mekanik bir sistemde $u(t)$ bir kuvvet fonksiyonu ise, $I(\tau)$, $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığında *toplam kuvvet darbesi* olarak adlandırılır.

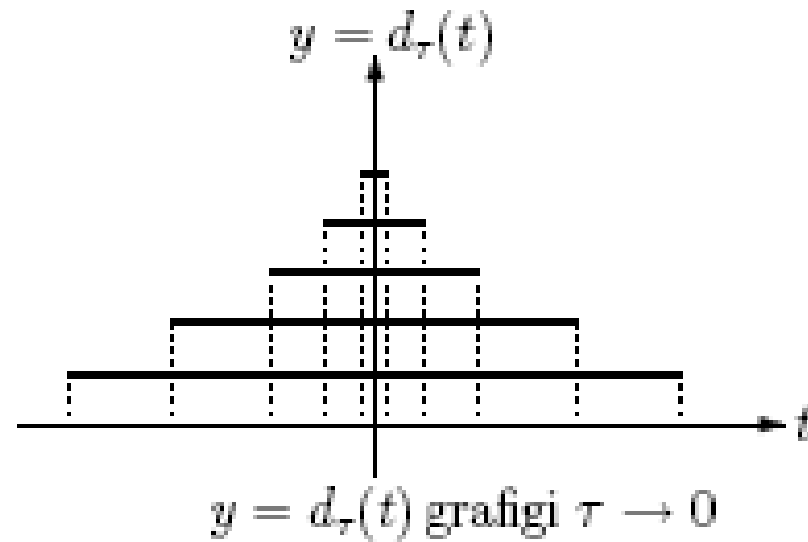
Şimdi özel bir durum olarak $t_0 = 0$ kabul edelim ve $u(t)$ işaretini şu şekilde tanımlayalım:

$$u(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & -\tau < t < \tau \\ 0 & t \leq -\tau \text{ veya } t \geq \tau, \end{cases}$$

Burada τ çok küçük pozitif bir sabit olsun. İlgili durum Şekilde gösterilmektedir.



$\tau \rightarrow 0$ ' giderken, grafik:



Açıktır ki bu durumda τ nun değeri sıfırdan farklı olacak şekilde ne olursa olsun, $I(\tau) = 1$ olur. Şimdi τ yu giderek küçültelim. Bu durumda açıktır ki

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = 1$$

olur. İşte bu bizi ideal duruma götürür. O da tam $t = 0$ da genliği bire eşit olan ama diğer tüm zaman diliminde değeri sıfıra eşit olan bir fonksiyondur. İşte bu fonksiyona **birim darbe fonksiyonu (unit impulse response)** adı verilir. Biz özel olarak birim darbe fonksiyonunu $\delta(t)$ ile sembolize edeceğiz. O halde $\delta(t)$ için şu özellikler yazılabilir:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Bu delta fonksiyonuna Dirac* fonksiyonu da adı verilir.

* **Paul A.M. Dirac (1902-1984)**, İngiliz matematikçi ve fizikçisi, 1933 senesinde Nobel ödülü aldı.(Kuantum mekaniği üzerindeki çalışmaları nedeniyle.)

$\delta(t)$, $t = 0$ için tanımlanmış bir fonksiyondur. Ancak herhangi bir t_0 noktası içinde ötelenmiş olarak $\delta(t-t_0)$ şeklinde de tanımlanabilir. Bu durumda özellikleri

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Şimdi $\delta(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmaya çalışalım:
Açıktırki

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\}, \quad \text{yazılabilir.}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} dt = -\frac{1}{2s\tau} e^{-st} \Big|_{t=t_0 - \tau}^{t=t_0 + \tau}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2s\tau} e^{-st_0} (e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0}$$

Ancak $\tau \rightarrow 0$, $(\sinh s\tau/s\tau)$ tanımsızdır. Bu durumda limit ancak L'Hospital kuralı ile bulunabilir. Bu durumda

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s \cosh s\tau}{s} = 1$$

Bu durumda açıktır ki

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$$

Özel olarak $t_0 = 0$ kabul edilirse

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

elde edilir.

Örnek: $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$

şeklide yanıtlanmış bir sistem için $u(t) = 2e^{-2t}$ $t \geq 0$ şeklinde bir giriş olsun. Şayet $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ ise sistem yanıtı $y(t)$ ne olur?

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)} = -\frac{1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$y(t) = -e^{-2t} + 2/3e^{-t} + 1/3e^{-4t} \quad t \geq 0$$

şeklde hesaplanır.

Periyodik Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

Tanım (Periodik Fonksiyon:) Bir $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t+T) = f(t)$$

$\forall t$ için ise bu $f(t)$ fonksiyonu $T > 0$ periodiktir denir. Periodik bir fonksiyonu tanımlamak için genellikle pencereleme tectiği kullanılır, şöyleki:

$$f_T(t) = f(t)[1 - w_T(t)] = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{aksi durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $f_T(t)$ pencerelemiş fonksiyonu göstermektedir. $f_T(t)$ nin Laplace dönüşümü ise

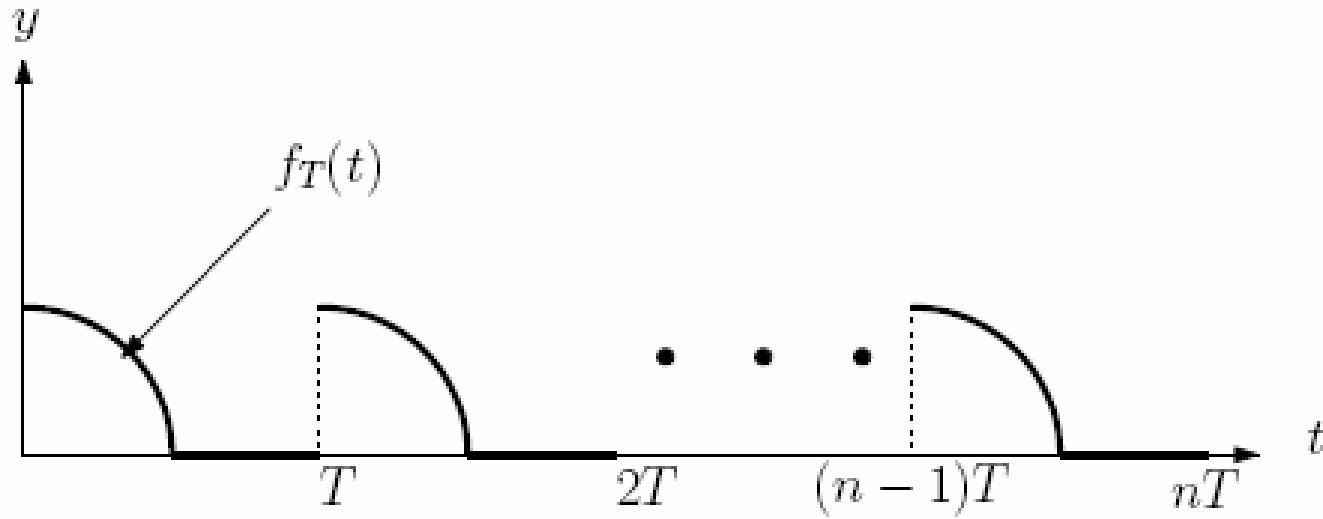
$$F_T(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_T(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Pencerelemiş yukarıdaki fonksiyon ilk T süre için tanımlanmıştır. Bu fonksiyonun k periyot kadar sağa ötelenmesi durumunda pencerelemiş fonksiyon

$$f_T(t - kT)u_{kT}(t) = \begin{cases} f(t - kT), & kT \leq t \leq (k + 1)T \\ 0, & \text{aksi durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda $[0, nT]$ süresi içinde ötelenmiş fonksiyonların toplanması f_{nT} şeklinde gösterilebilir:

$$f_{nT}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_T(t - kT)u_{kT}(t).$$



Bu durumda fonksiyonun tümü

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t - nT)u_{nT}(t)$$

şeklinde gösterilebilir.

Teorem f , $[0, T]$ aralığında parçalı sürekli, T periyodik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

İspat: Biliyoruz ki

$$\mathcal{L}\{f_T(t - kT)u_{kT}(t)\} = e^{-kTs} \mathcal{L}\{f_T(t)\} = e^{-kTs} F_T(s)$$

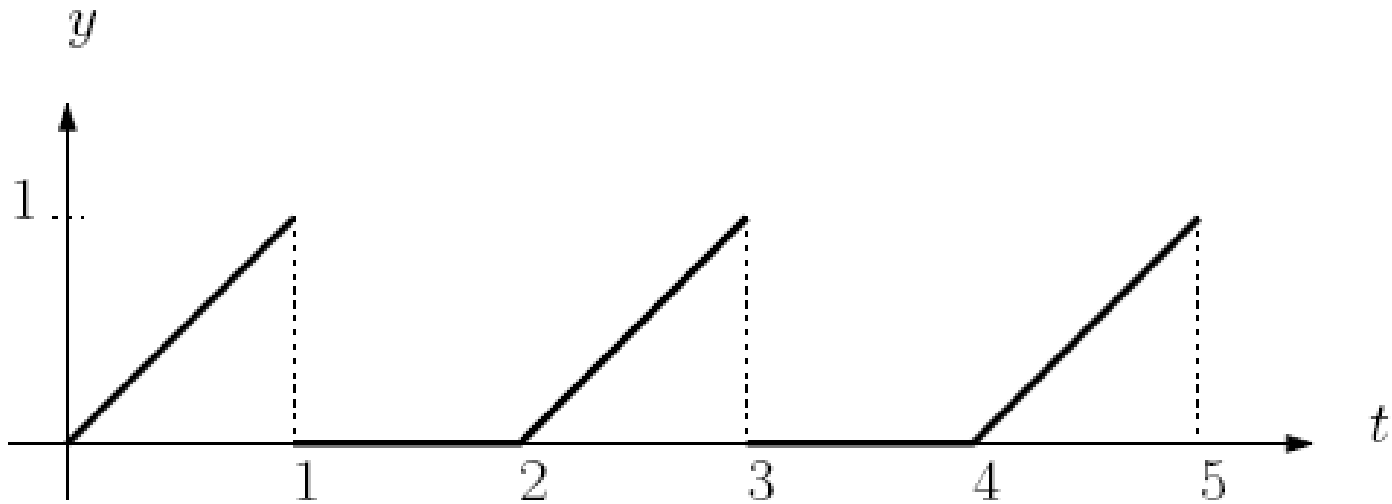
şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan Laplace dönüşümünün lineer oluşundan dolayı,

$$\begin{aligned} F_{nT}(s) &= \int_0^{nT} e^{-st} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}\{f_T(t - kT)u_{kT}(t)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTs} F_T(s) = F_T(s) \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-sT})^k = F_T(s) \frac{1 - (e^{-sT})^n}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

Burada $sT > 0$ olduğu düşünülürse $e^{-sT} < 1$ olur. Bu durumda

$$F(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nT} e^{-sT} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} F_T(s) \frac{1 - (e^{-sT})^n}{1 - e^{-sT}} = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

Örnek: Aşağıdaki şekildeki fonksiyonun Laplas dönüşümünü bulunuz.



$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Şekildeki fonksiyonun periyodu 2 dir, $T=2$.

$$F_T(s) = \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 s^{-st} t dt = \frac{1 - e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(1 - e^{-2s})} - \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}$$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun ters Laplas dönüşümünü hesaplayınız

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}$$

Çözüm: Açıkta ki paydada bulunan $(1 - e^{-2s})$ şeklindeki terim bu ifadenin periyodik, hatta periyodunda $T = 2$ olduğunu ortaya koymaktadır. Bu durumda

$$F_T(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{F_1(s)} - \underbrace{\frac{e^{-s}}{s}}_{F_2(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} = u_1(t) \quad \text{olduğundan}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{elde edilir.}$$

Son değer teoremi Bu teorem bir fonksiyonun kararlı hal değerinin s-tanım bölgesinde hesaplanmasında kullanılır. Şayet $sY(s)$ 'in tüm kutupları s-düzleminin solunda ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

Otomatik Kontrol

Fiziksel Sistemlerin Modellenmesi

- Elektriksel Sistemler
- Mekaniksel Sistemler

Prof.Dr.Galip Cansever

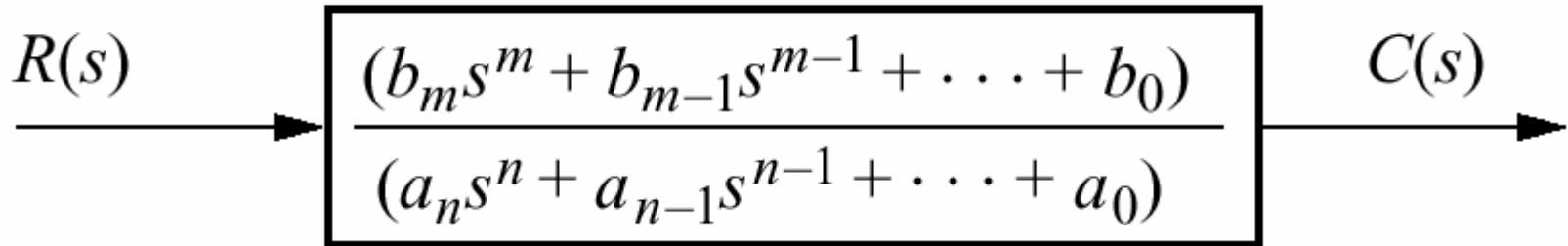
Kontrol sistemlerinin analizinde ve tasarımında en önemli noktalardan bir tanesi sistemlerin matematiksel ifade edilmesidir.

Transfer fonksiyonu metodu ve durum değişkenleri metodu en çok kullanılan modelleme yöntemleridir. (Transfer fonksiyonu metodu sadece lineer sistemlere uygulanabilir.)

Transfer Fonksiyonu:

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek bir sistemin cevap fonksiyonu (çıkışı) ile sürücü fonksiyonu (giriş) arasındaki Laplas transformasyonları oranına transfer fonksiyonu denir.

Transfer fonksiyonu sistemin dinamik karakteristiklerini tanımlar. Sistem özelliğidir. Sistemin fiziksel yapısı hakkında bilgi vermez, farklı fiziksel sistemlerin transfer fonksiyonları aynı olabilir.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}$$

Örnek: $\frac{dx}{dt} + 2x = r(t)$ için transfer fonksiyonunu oluşturunuz.

Başlangıç koşullarını 0 kabul ederek iki tarafın Laplas dönüşümünü alalım:

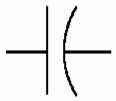

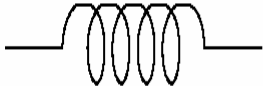
$$sX(s) + 2X(s) = R(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{s + 2}$$

Elektriksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları

Elektriksel sistemlerin modellenmesinde lineer ve pasif üç devre elemanı yaygın olarak kullanılır.

Direnç, Endüktans ve Kapasitans

	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
Capacitor					
	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Resistor					
	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$	$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$
Inductor					

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t) = V$ (volts), $i(t) = A$ (amps), $q(t) = Q$ (coulombs), $C = F$ (farads), $R = \Omega$ (ohms), $G = \mathcal{U}$ (mhos), $L = H$ (henries).

Kapasitör için:

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

Direnç için:

$$V(s) = RI(s)$$

Endüktör için:

$$V(s) = LsI(s)$$

Transfer fonksiyonu tanımlayacak olursak:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s)$$

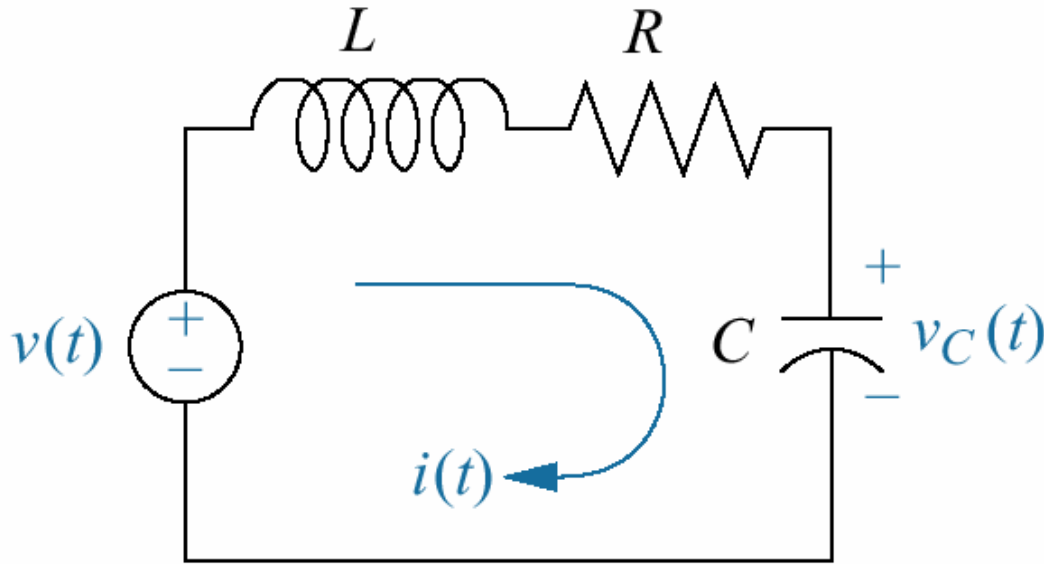
Elektriksel devrelerin matematiksel modellenmesinde Kirşof yasalarından faydalanılır:

Bir kapalı çevrimde gerilimlerin toplamı sıfırdır.

Bir noktaya gelen ve noktadan çıkan akımların toplamı sıfırdır.

Bu ilişkiler kurulduktan sonra devre için diferansiyel denklemler yazılır. Daha sonra Laplas dönüşümü yapılır ve transfer fonksiyonu elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki devrede kapasitör gerilimi $V_c(s)$ ve giriş gerilimi $V(s)$ yi ilişklendiren transfer fonksiyonunu yazınız.



Kontrol tasarımcısı ilk önce giriş ve çıkışı belirlemelidir. Ancak bu örnekte giriş ve çıkış bize verilmiştir. Giriş uygulanan $V(t)$ gerilimi çıkış ise kapasitör gerilimi, $V_c(t)$.

1. Yöntem Kirşof Gerilimler Yasası:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(\tau)$$

Başlangıç koşullarını sıfır kabul ederek Laplas dönüşümünü yapalım:

$$RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = V(s)$$

Denklemi düzenleyecek olursak:

$$V(s) = \left(R + Ls + \frac{1}{Cs} \right) I(s)$$

Dikkat edilecek olursa uygulanan gerilim; çevrimdeki devre elemanlarının empedansları toplamı çarpı devre akımıdır.

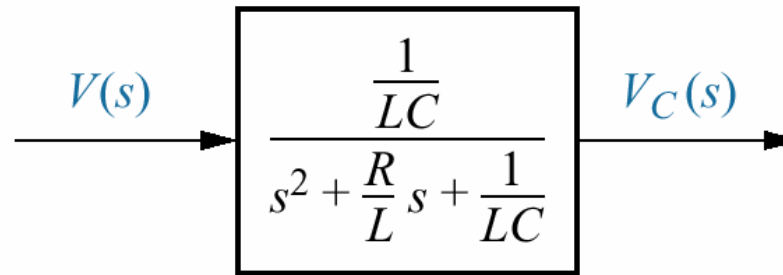
$$I(s) = \frac{V(s)}{\left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right)}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} \quad \text{'i elde etmeye çalışıyoruz.}$$

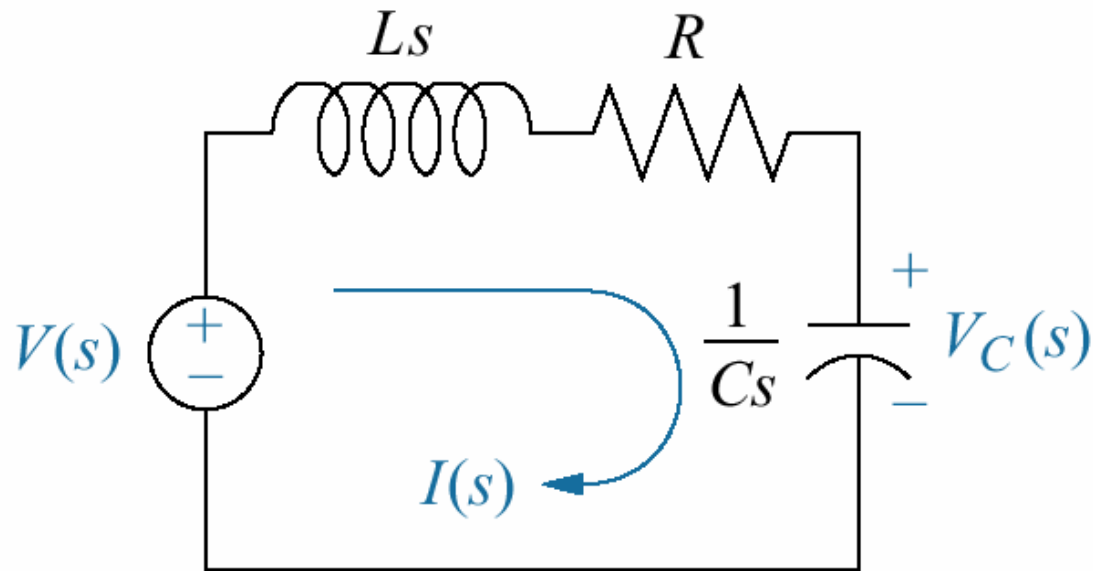
$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} \frac{V(s)}{\left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right)} \quad \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{Cs} \frac{1}{\left(\frac{RCs + LCs^2 + 1}{Cs}\right)}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$



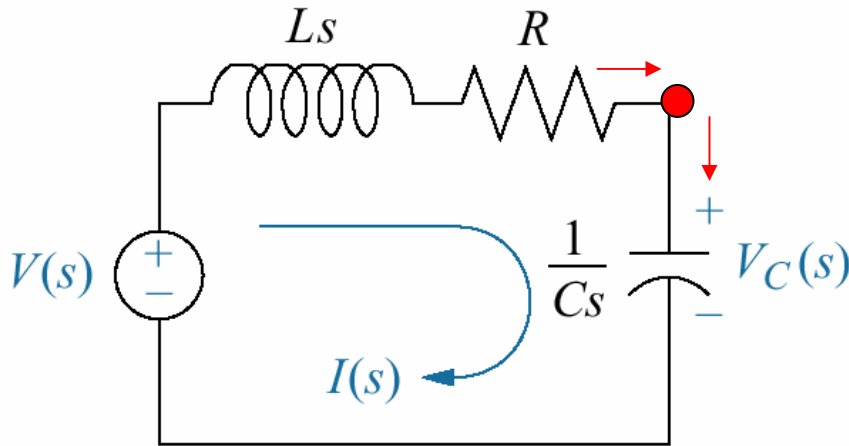
Aslında devreyi çözmeye başlamadan devre elemanlarının devre üzerinde empedans değerlerini yazabiliriz.



2. Yöntem Kirşof Akımlar Yasası:

Bir noktadan çıkan akımları pozitif, noktaya gelen akımları negatif kabul edeceğiz.

Bizim devremizde akımlar; kapasitör içinden geçen akım ve seri bağlı direnç ve endüktörden geçen akımdır.



$$\frac{V_c(s)}{\frac{1}{Cs}} + \frac{V_c(s) - V(s)}{R + Ls} = 0$$

Çözecek olursak:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

3. Yöntem Gerilim Bölücü:

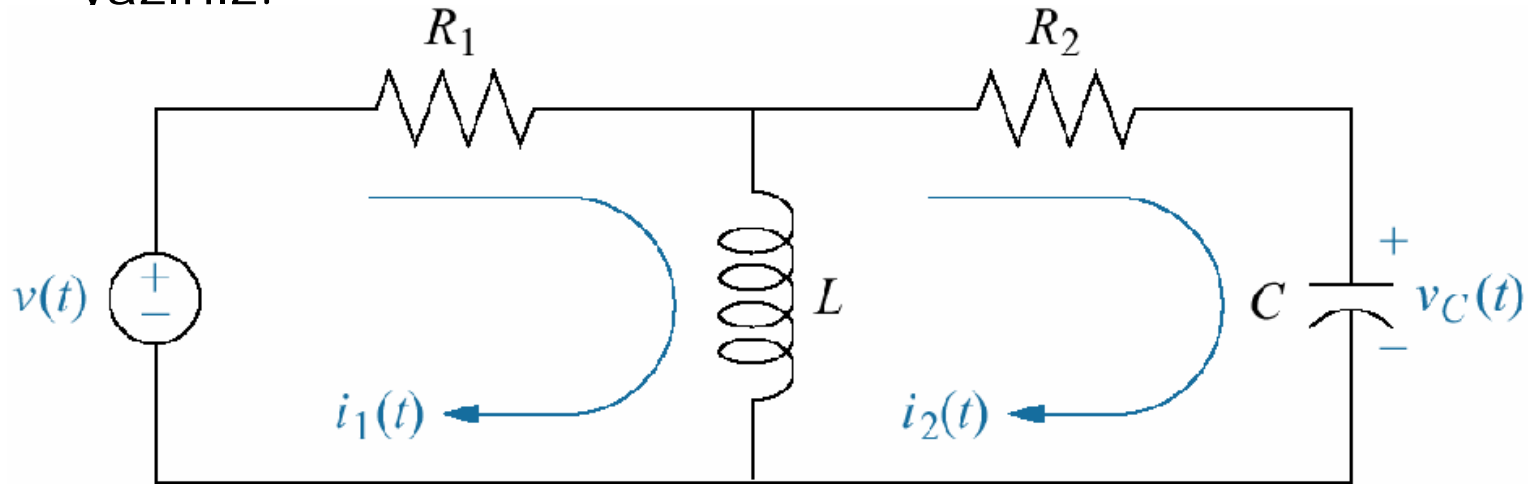
Kapasitör uçlarındaki gerilim uygulanan gerilimin bir kısmıdır. Dolayısıyla kapasitör empedansını toplam empedansa bölerek de kapasitör gerilimini bulabiliriz.

$$V_c(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} V(s)$$

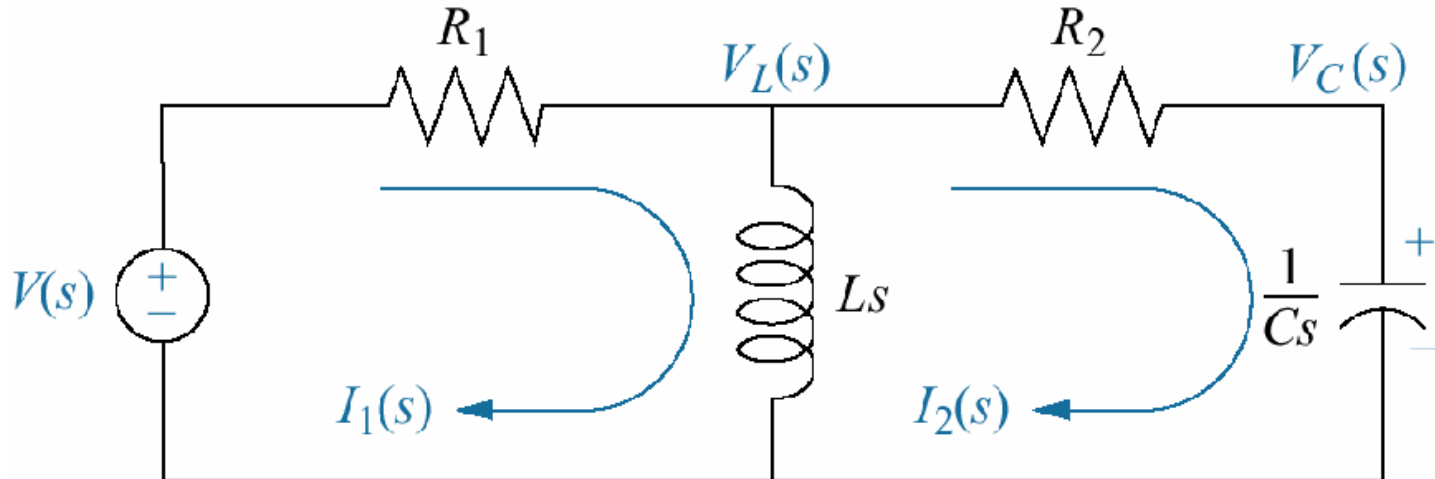
Bu örnekte tek çevreli bir elektriksel devremiz vardı, fakat çoğu elektriksel devreler birden çok döngü içerirler. Çok çevreli devrelerin transfer fonksiyonlarını elde edebilmek için:

1. Devre elemanlarının empedans değerleri yazılır
2. Çevrede akımın yönü seçilir
3. Çevrede Kirşof gerilimler yasası uygulanır
4. Çıkışı elde etmek için denklemler sırasıyla çözülür
5. Transfer fonksiyonu oluşturulur

Örnek: Aşağıdaki devrede $I_2(s)/V_2(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız.



Başlangıç koşullarını sıfır varsayarak devre elemanlarının empedanslarını yazalım



1. Çevrimde

$$R_1 I_1(s) + Ls I_1(s) - Ls I_2(s) = V(s)$$

2. Çevrimde

$$Ls I_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - Ls I_1(s) = 0$$

$I_1(s)$ ve $I_2(s)$ li terimleri birlikte yazacak olursak;

$$(R_1 + Ls) I_1(s) - Ls I_2(s) = V(s)$$

$$-Ls I_1(s) + (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) I_2(s) = 0$$

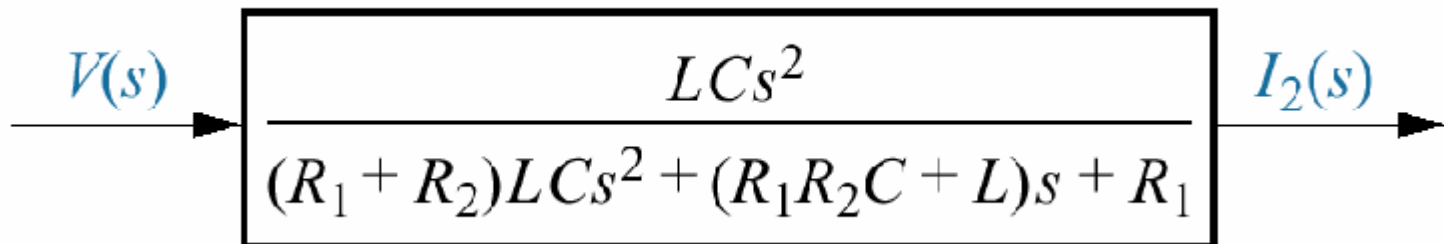
$I_2(s)$ i Çözmek için kramer yasasını kullanacak olursak;

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -Ls \\ -Ls & (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) \end{vmatrix}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & V(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{LsV(s)}{\Delta}$$

Transfer Fonksiyonu: $G(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)}$

$$G(s) = \frac{\frac{LsV(s)}{\Delta}}{V(s)} = \frac{Ls}{\Delta} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$



$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \quad (\text{F.50})$$

Solution via Matrix Inverse

If \mathbf{A} is nonsingular, we can premultiply Eq. (F.50) by \mathbf{A}^{-1} , yielding the solution \mathbf{x} . Thus,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{F.53})$$

For example, premultiplying both sides of Eq. (F.52) by \mathbf{A}^{-1} , where

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0526 & -0.0921 \\ 0.1053 & 0.0658 \end{bmatrix} \quad (\text{F.54})$$

we solve for $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ as follows:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0526 & -0.0921 \\ 0.1053 & 0.0658 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.987 \\ -0.276 \end{bmatrix} \quad (\text{F.55})$$

Solution via Cramer's Rule

Equation (F.53) allows us to solve for all unknowns, x_i , where $i = 1$ to n . If we are interested in a single unknown, x_k , then Cramer's rule can be used. Given Eq. (F.50), Cramer's rule states that

$$x_k = \frac{\det \mathbf{A}_k}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{F.56})$$

where \mathbf{A}_k is a matrix formed by replacing the k th column of \mathbf{A} by \mathbf{B} . For example, solve Eq. (F.52). Using Eq. (F.56) with

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

we find

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{75}{76} = 0.987 \quad (\text{F.57})$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{76} = -0.276$$

$$\left(\begin{array}{c} 1. \text{ Çevrimdeki} \\ \text{empedansları} \\ \text{n toplamı} \end{array} \right) \Big|_1 - \left(\begin{array}{c} \text{Ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \Big|_2 = \left(\begin{array}{c} 1. \text{ Çevrimde} \\ \text{uygulanan} \\ \text{Gerilimlerin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{c} \text{Ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \Big|_1 + \left(\begin{array}{c} 2. \text{ Çevrimdeki} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \Big|_2 = \left(\begin{array}{c} 2. \text{ Çevrimde} \\ \text{uygulanan} \\ \text{Gerilimlerin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

Çoğu zaman transfer fonksiyonunun bulunması için en kolay yöntem çevre gerilimleri değil, nod akımları yöntemidir.

Diferansiyel denklemlerin sayısı gerilimleri bilinmeyen nod'ların sayısı kadardır. Nod denklemlerini yazarken devre elemanlarını admitans olarak göstermek kolaylık sağlar.

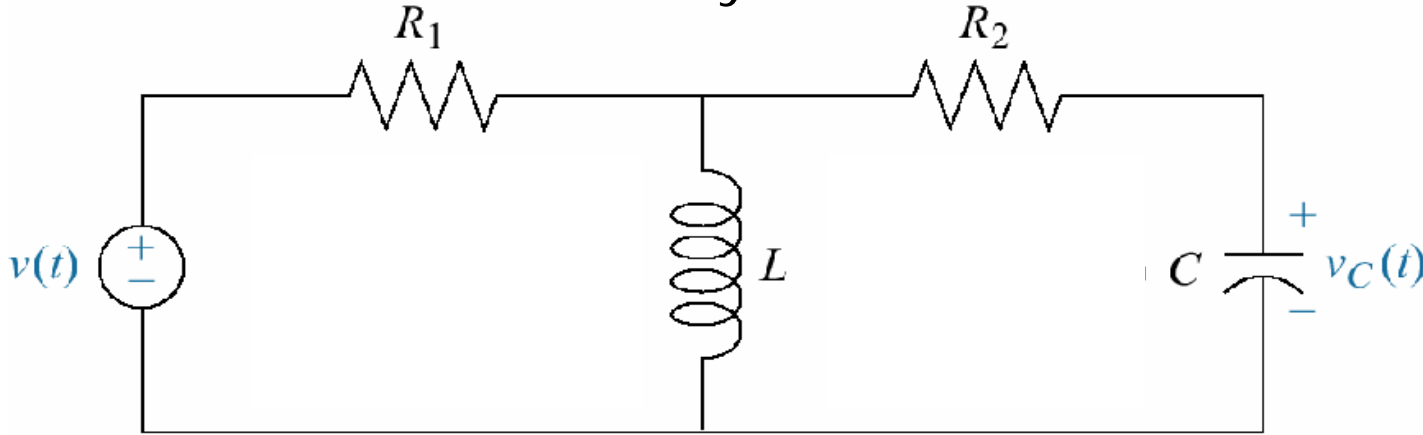
Admitans : Empedansın çarpmaya göre tersidir ve $Y(s)$ ile gösterilir;

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)}$$

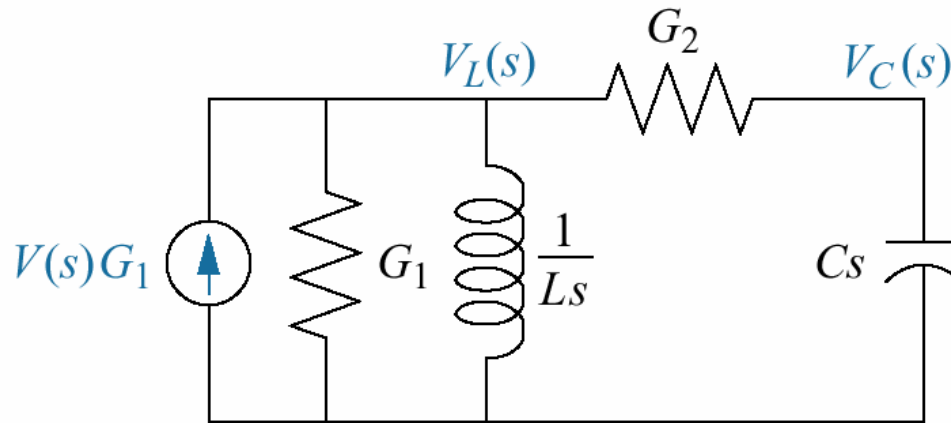
Nod akımları ile transfer fonksiyonunu elde edeceğiz:

1. Devre elemanlarının admitans değerleri yazılır
2. Gerilim kaynakları akım kaynakları cinsinden yazılır (Eğer kolaylık sağlayacaksa)
3. Nod'da Kirşof akımlar yasası uygulanır
4. Çıkışı elde etmek için denklemler sırasıyla çözülür
5. Transfer fonksiyonu oluşturulur

Örnek: Aşağıdaki devrede $V_c(s)/V(s)$ transfer fonksiyonunu nod akımlarını kullanarak yazınız.



Gerilim kaynağını, akım kaynağına empedansları admitanslara dönüştürelim.



$$I(s) = Y(s)V(s)$$

$$G_1 V_L(s) + \frac{1}{Ls} V_L(s) + G_2 [V_L(s) - V_C(s)] = V(s)G_1$$

$V_C(s)$ nod'undaki akımların toplamı:

$$Cs V_C(s) + G_2 [V_C(s) - V_L(s)] = 0$$

$V_L(s)$ ve $V_C(s)$ 'leri düzenleyelim:

$$\left(G_1 + G_2 + \frac{1}{Ls} \right) V_L(s) - G_2 V_C(s) = V(s)G_1$$

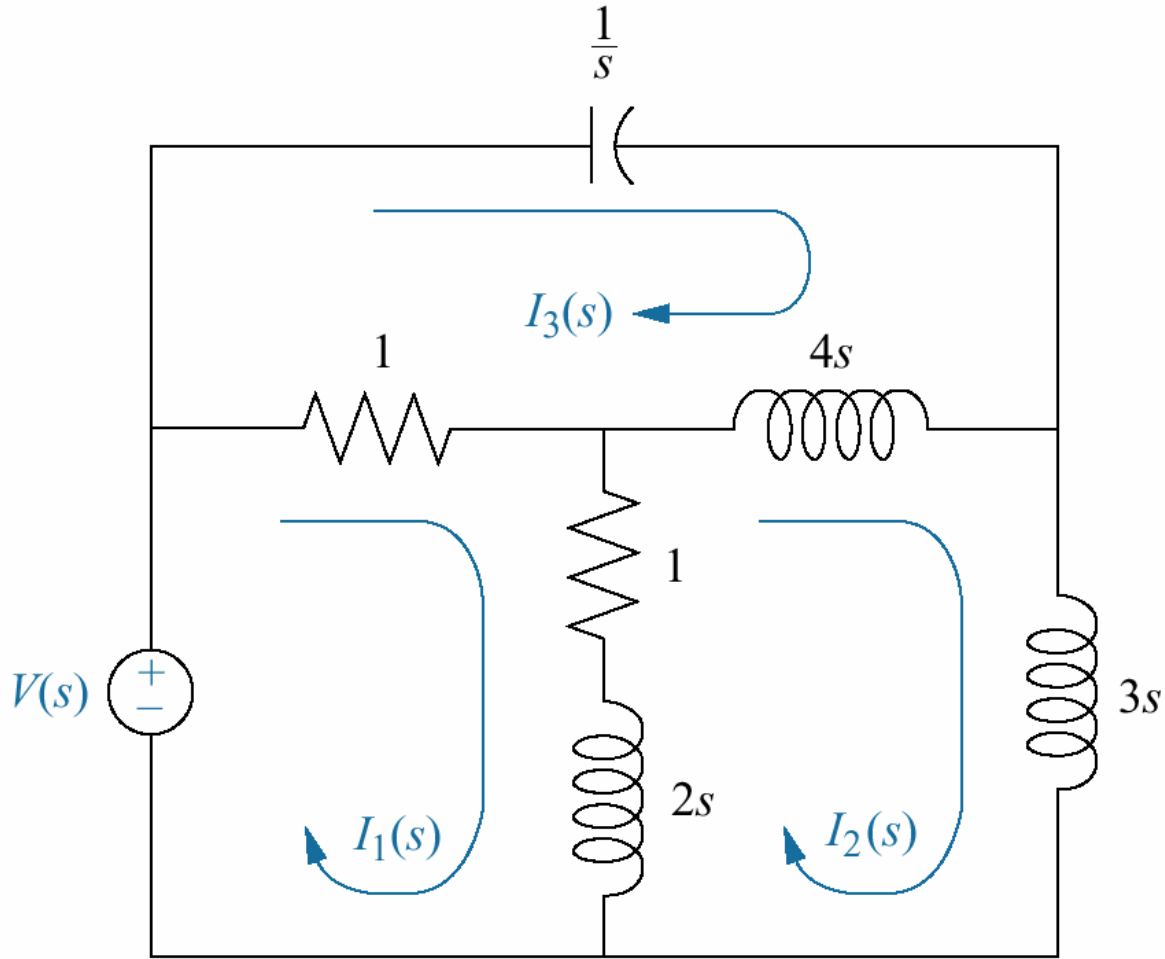
$$-G_2 V_L(s) + (G_2 + Cs) V_C(s) = 0$$

Sırayla çözdüğümüzde transfer fonksiyonu:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{G_1 G_2}{C} s}{(G_1 + G_2)s^2 + \frac{G_1 G_2 L + C}{LC} s + \frac{G_2}{LC}}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \text{1. Nod'a bağlı} \\ \text{admitansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right] V_L - \left[\begin{array}{l} \text{Ortak} \\ \text{admitansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right] V_C = \left[\begin{array}{l} \text{1. Nod'da} \\ \text{uygulanan} \\ \text{akımların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{l} \text{Ortak} \\ \text{admitansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right] V_L + \left[\begin{array}{l} \text{2. Nod'a bağlı} \\ \text{admitansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right] V_C = \left[\begin{array}{l} \text{2. Nod'da} \\ \text{uygulanan} \\ \text{akımların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Örnek: Aşağıdaki devrede çevre denklemlerini yazınız.



$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{l} \text{1. Çevredeki} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_1 - \left(\begin{array}{l} \text{1. ve 2.} \\ \text{Çevredeki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_2 - \left(\begin{array}{l} \text{1. ve 3.} \\ \text{Çevredeki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_3 = \left(\begin{array}{l} \text{1. Çevrede} \\ \text{uygulanan} \\ \text{Gerilimlerin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \\
- \left(\begin{array}{l} \text{1. ve 2.} \\ \text{Çevredeki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_1 + \left(\begin{array}{l} \text{2. Çevredeki} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_2 - \left(\begin{array}{l} \text{2. ve 3.} \\ \text{Çevredeki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_3 = \left(\begin{array}{l} \text{2. Çevrede} \\ \text{uygulanan} \\ \text{Gerilimlerin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \\
- \left(\begin{array}{l} \text{1. ve 3.} \\ \text{Çevredeki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_1 - \left(\begin{array}{l} \text{2. ve 3.} \\ \text{Çevredeki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_2 + \left(\begin{array}{l} \text{3. Çevredeki} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) I_3 = \left(\begin{array}{l} \text{3. Çevrede} \\ \text{uygulanan} \\ \text{Gerilimlerin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

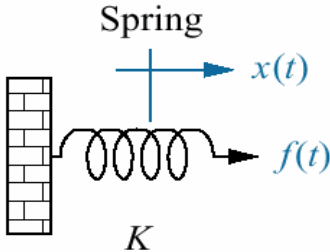
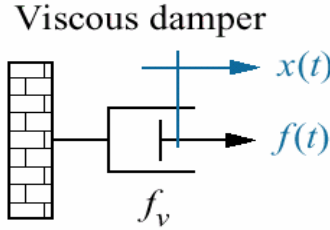
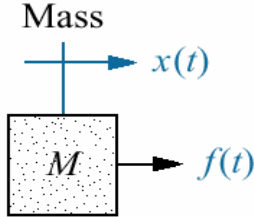
$$(2s + 2)I_1(s) - (2s + 1)I_2(s) - I_3(s) = V(s)$$

$$- (2s + 1)I_1(s) + (9s + 1)I_2(s) - 4sI_3(s) = 0$$

$$- I_1(s) - 4sI_2(s) + \left(4s + 1 + \frac{1}{s} \right) I_3(s) = 0$$

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları

(Düzlemsel Hareket)

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedance $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
<p>Spring</p> 	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
<p>Viscous damper</p> 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
<p>Mass</p> 	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	Ms^2

26 Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $f(t) = \text{N}$ (newtons), $x(t) = \text{m}$ (meters), $v(t) = \text{m/s}$ (meters/second), $K = \text{N/m}$ (newtons/meter), $f_v = \text{N-s/m}$ (newton-seconds/meter), $M = \text{kg}$ (kilograms = newton-seconds²/meter).

Mekaniksel sistemler ile elektriksel sistemler arasında analogi oluşturmamız mümkündür.

Örneğin, uygulanan kuvvet, uygulanan gerilimin; hız, akımın; yer değiştirme de yük'ün karşılığıdır.

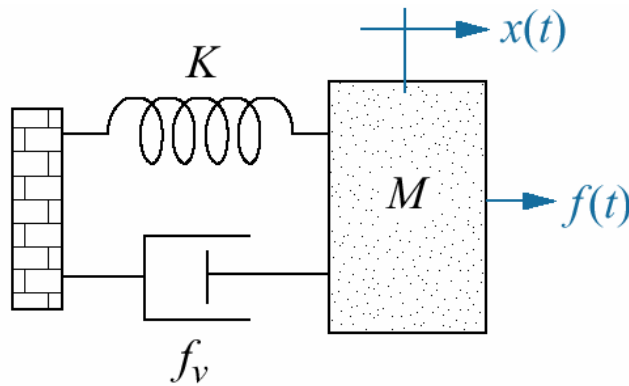
Mekaniksel Empedans:
$$Z_M(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$$

Yay elemanı:
$$F(s) = KX(s)$$

Sönüm elemanı:
$$F(s) = f_v s X(s)$$

Kütle:
$$F(s) = Ms^2 X(s)$$

Örnek:



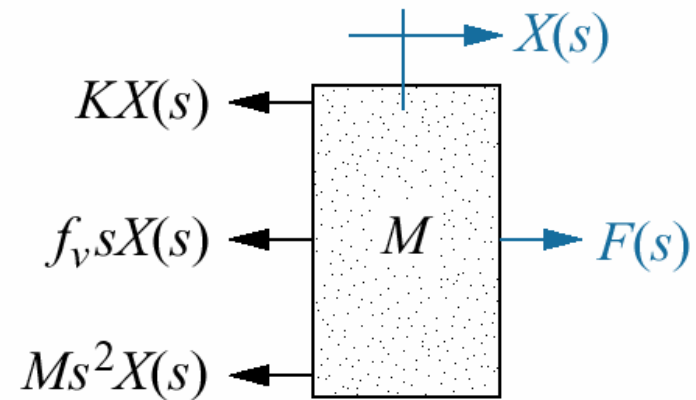
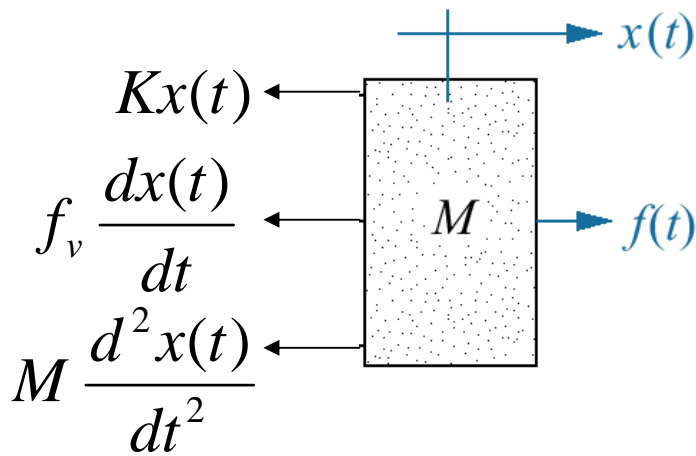
$X(s)/F(s)$ transfer fonksiyonunu bulunuz.

RLC devresine benziyor, mekaniksel sistemelerde diferansiyel denklem hareket denklemi ile yazılır ve bu mekaniksel sistemi tanımlar.

Elektriksel devrelerde akımın yönünü biz seçtiğimiz gibi mekaniksel sistemlerde de hareketin pozitif yönünü belirleriz ve serbest cisim diyagramını çizeriz.

Serbest cisim diyagramında cisme etkiyen tüm kuvvetler ve pozitif hareket yönü gösterilir. Kuvvetler zaman tanım aralığında veya Laplas dönüşümü ile (sıfır başlangıç koşulu varsayılarak) gösterilebilir.

Newton yasası uygulanarak, kuvvetler toplanır ve sıfıra eşitlenir.

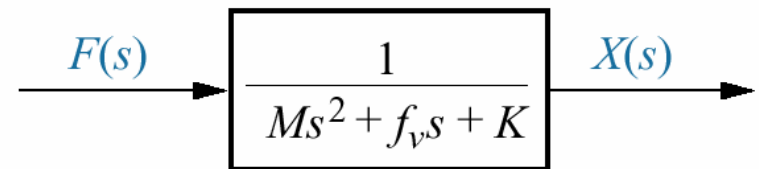


Kuvvetleri toplayıp sifıra eşitleyecek olursak;

$$Ms^2 X(s) + f_v sX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$(Ms^2 + f_v s + K)X(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}$$



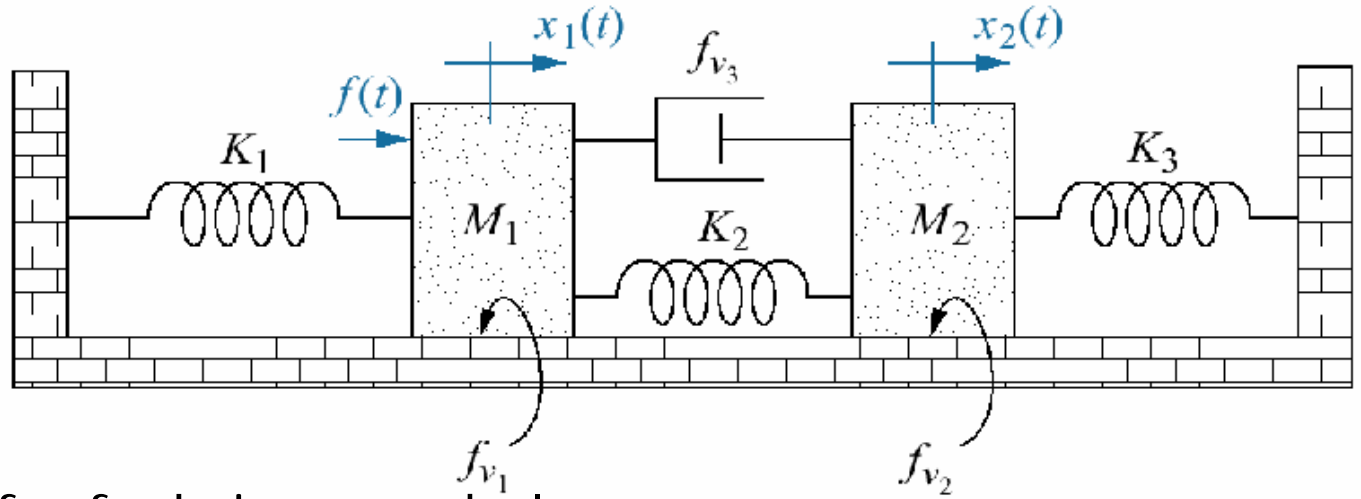
Çoğu mekaniksel sistemler, çok çevrimli çok nod'lu elektriksel devrelere benzemektedir ve sistemi tanımlamak için birden fazla diferansiyel denklem gerekir.

Mekaniksel sistemlerde gerekli olan hareket denklemlerinin sayısı, lineer olarak bağımsız hareketlerin sayısına eşittir.

Lineer bağımsızlığın manası hareket noktasının diğer hareket noktaları sabitlendiği halde hareket edebilmesidir. Lineer bağımsızlığın bir diğer manası serbestlik derecesidir.

Elektriksel sistemlerden örnek verecek olursak; iki çevreli bir devrede her bir akım diğer çevrenin akımının etkisi altındadır. Eğer çevrelerden birini açık devre yaparsak, diğer çevrede gerilim kaynağı varsa o çevrede akım akmaya devam eder.

Örnek:

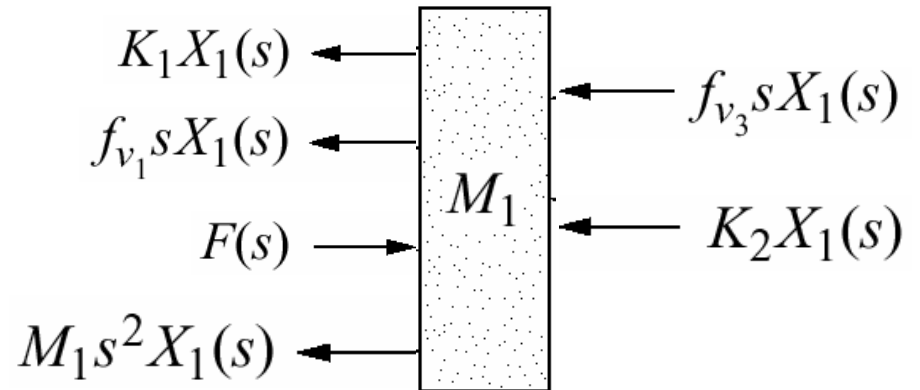


$X(s)/F(s)$ transfer fonksiyonunu bulunuz.

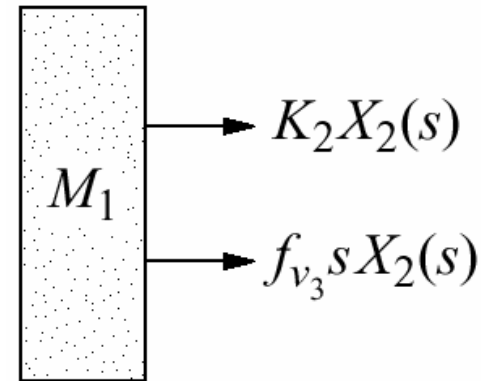
Her iki kütle yatay doğrultuda biri sabit iken hareket ettirilebileceği için sistemin serbestlik derecesi ikidir.

İki denklem iki kütle için serbest cisim diyagramından elde edilecektir.

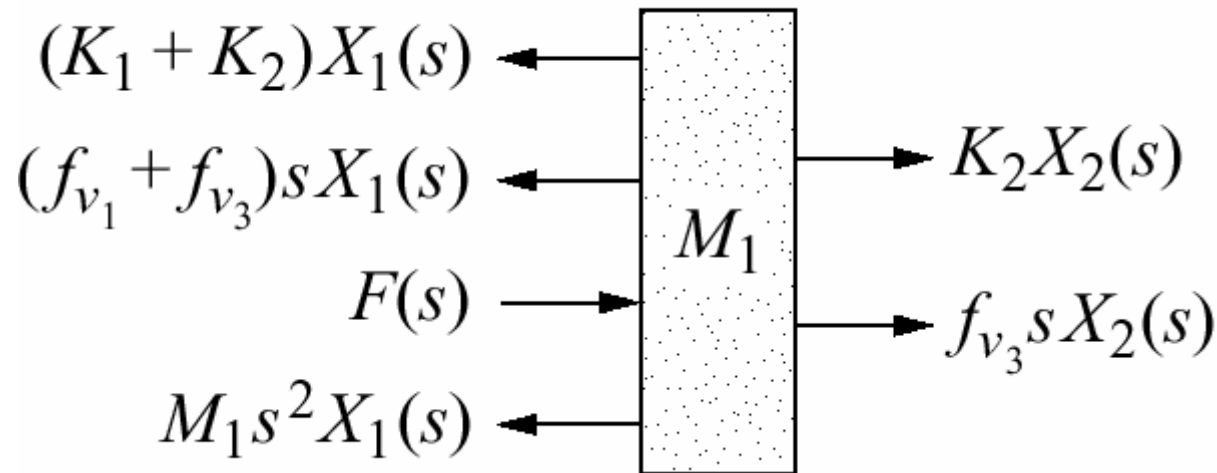
Eğer M_2 'yi sabit tutup M_1 'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



Eğer M_1 'yi sabit tutup
 M_2 'i sağa doğru hareket
 ettirecek olursak

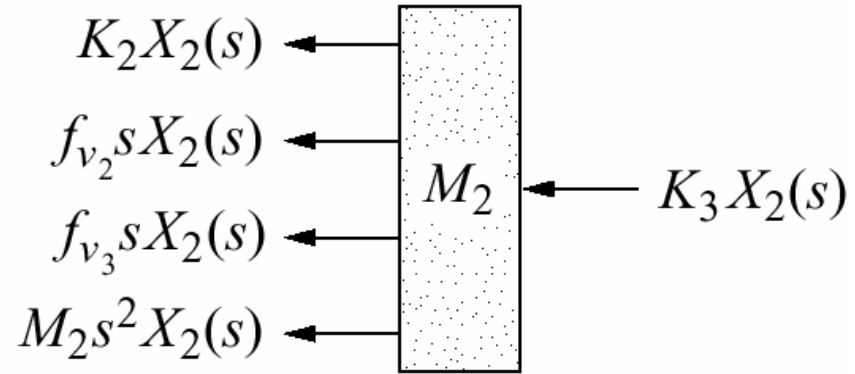


M_1 üzerine süperpozisyon uygulanacak olursa:

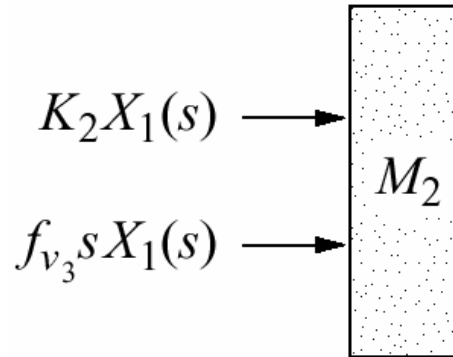


Aynı işlemleri M_2 için yapalım:

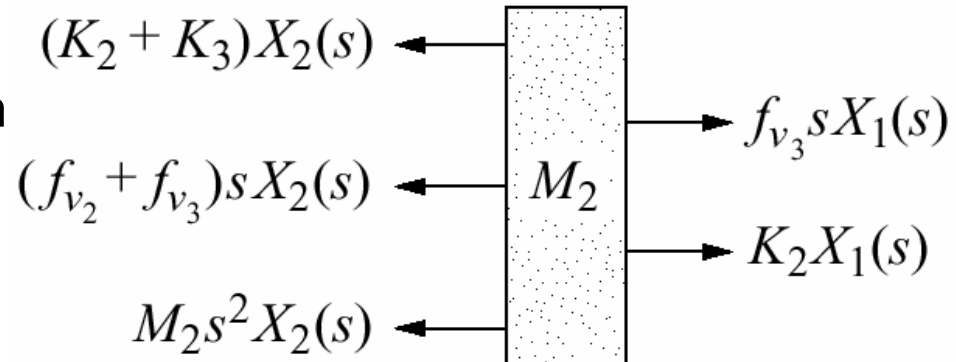
Eğer M_1 'yi sabit tutup M_2 'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



Eğer M_2 'yi sabit tutup M_1 'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



M_2 üzerine süperpozisyon uygulanacak olursa:

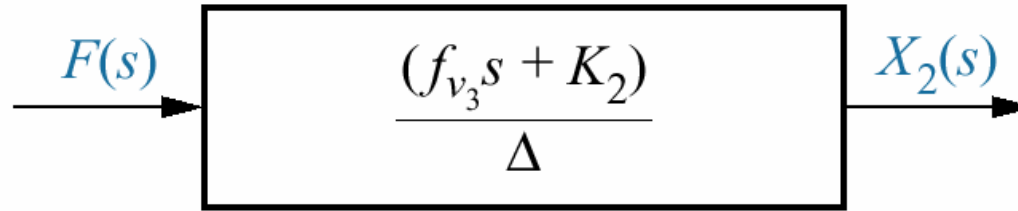


$$\left[M_1 s^2 + (f_{v1} + f_{v3})s + (K_1 + K_2) \right] X_1(s) - (f_{v3}s + K_2) X_2(s) = F(s)$$

$$-(f_{v3}s + K_2) X_1(s) + \left[M_2 s^2 + (f_{v2} + f_{v3})s + (K_2 + K_3) \right] X_2(s) = 0$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{(f_{v3}s + K_2)}{\Delta}$$

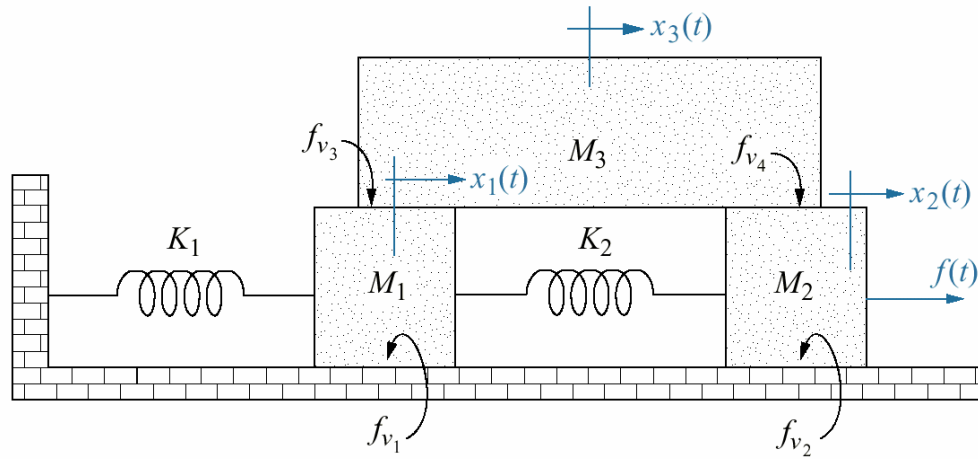
$$\Delta = \begin{bmatrix} M_1 s^2 + (f_{v1} + f_{v3})s + (K_1 + K_2) & -(f_{v3}s + K_2) \\ -(f_{v3}s + K_2) & M_2 s^2 + (f_{v2} + f_{v3})s + (K_2 + K_3) \end{bmatrix}$$



$$\left(\begin{array}{l} \text{X1 deki} \\ \text{harekete ba\u011flı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) X_1 - \left(\begin{array}{l} \text{X1 ve X2 deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) X_2 = \left(\begin{array}{l} \text{X1'e uygulanan} \\ \text{Kuvveterin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{l} \text{X1 ve X2 deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) X_1 + \left(\begin{array}{l} \text{X2 deki} \\ \text{harekete ba\u011flı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) X_2 = \left(\begin{array}{l} \text{X2'e uygulanan} \\ \text{Kuvveterin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

Örnek:



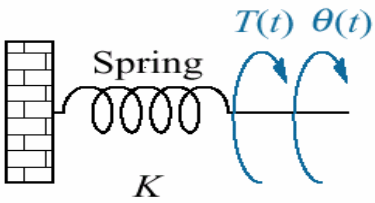
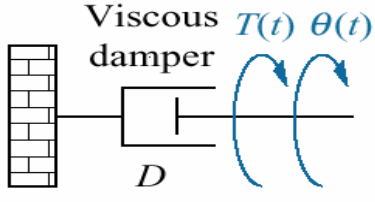
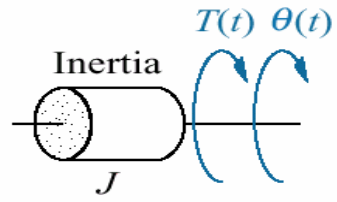
Yukarıdaki mekaniksel sistemin hareket denklemlerini direk yazınız.

$$\left[M_1 s^2 + (f_{v1} + f_{v3})s + (K_1 + K_2) \right] X_1(s) - K_2 X_2(s) - f_{v3} s X_3(s) = 0$$

$$-K_2 X_1(s) + \left[M_2 s^2 + (f_{v2} + f_{v4})s + K_2 \right] X_2(s) - f_{v4} s X_3(s) = F(s)$$

$$-f_{v3} s X_1(s) - f_{v4} s X_2(s) + \left[M_3 s^2 + (f_{v3} + f_{v4})s \right] X_3(s) - f_{v4} s X_3(s) = 0$$

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları (Dairesel Hareket)

Component	Torque- angular velocity	Torque- angular displacement	Impedance $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
 <p style="text-align: center;">Spring K</p>	$T(t) = K \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
 <p style="text-align: center;">Viscous damper D</p>	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
 <p style="text-align: center;">Inertia J</p>	$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $T(t)$ = N-m (newton-meters), $\theta(t)$ = rad (radians), $\omega(t)$ = rad/s (radians/second), K = N-m/rad (newton-meters/radian), D = N-m-s/rad (newton-meters-seconds/radian), J = kg-m² (kilogram-meters² = newton-meters-seconds²/radian).

Dairesel hareket eden mekaniksel sistemler düzlemsel hareket eden mekaniksel sistemler gibi ele alınır. Kuvvet'in yerini tork, düzlemsel yer değiştirmenin yerini açısai yer değiştirme alır. Ayrıca kütle yerine atalet ifadesi kullanılır.

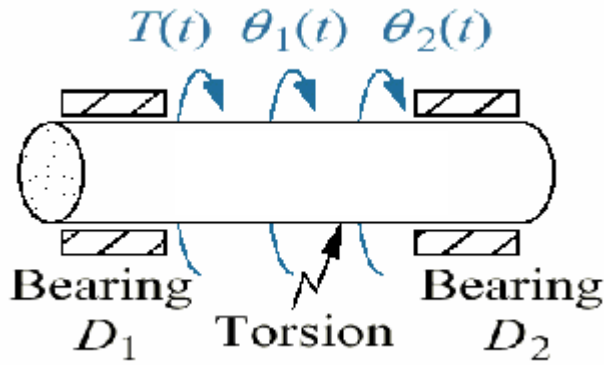
Serbestlik derecesi ise düzlemsel harekette yer değiştirme ile belirlenirken dairesel harekette dönebilme ile belirlenir.

Önce, hareket noktalarını sabit tutularak cismi döndürürüz ve oluşacak torkları serbest cisim diyagramı üzerinde gösteririz.

Sonra cismi sabitleyip sırasıyla bitişik hareket noktaları döndürülerek oluşacak torklar serbest cisim diyagramında gösterilir. Her bir hareket noktası için bu işlemi tekrarlanır.

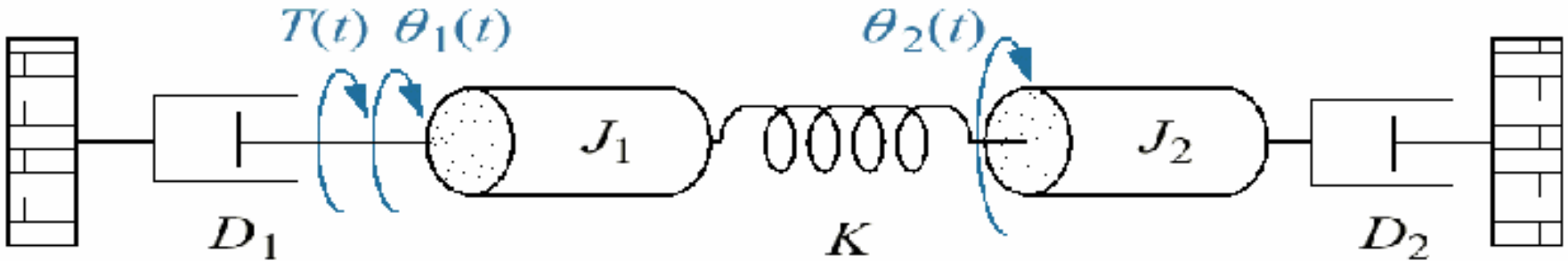
Tüm serbest cisim diyagramlarında tork'lar toplanır ve sıfıra eşitlenir.

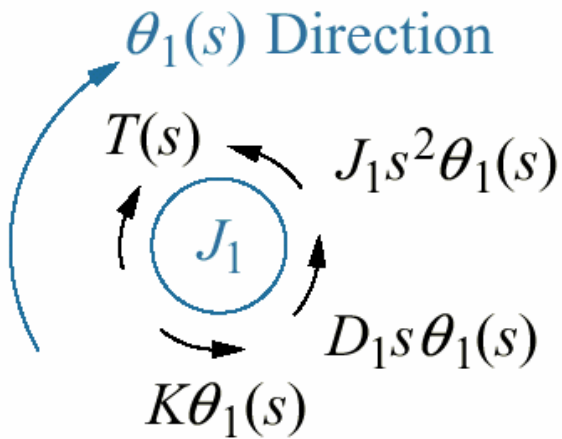
Örnek:



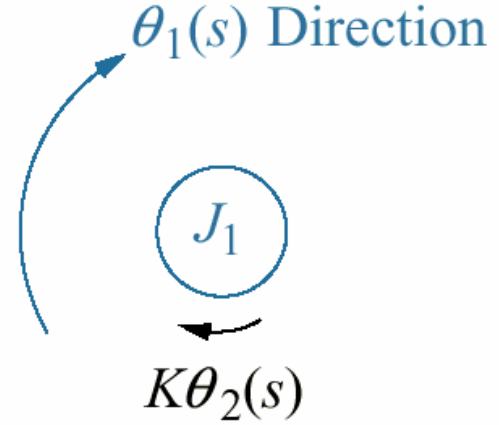
Sistemin, $\theta_2(s)/T(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız. Çubuk her iki taraftan yataklanmıştır ve burulmaya maruz kalmaktadır. Sağ tarafa tork uygulanırken yer değiştirme sol taraftan ölçülmektedir.

Burada çubuğun burulmasını iki atalet arasında bulunan yay gibi düşünebiliriz.

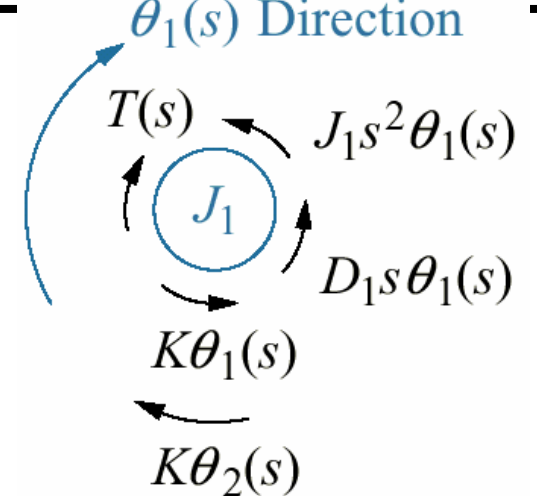




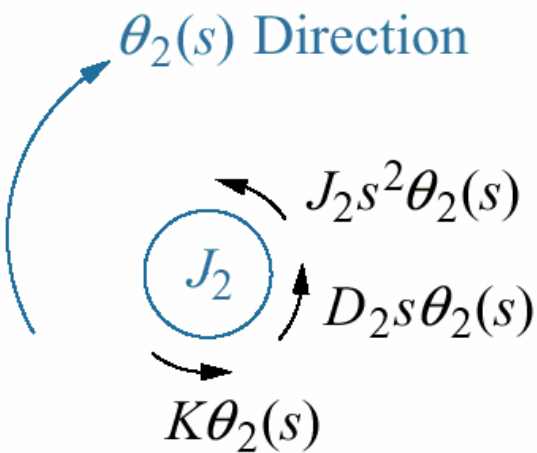
J_1 üzerindeki J_1 'nin hareketiyle oluşan Torklar



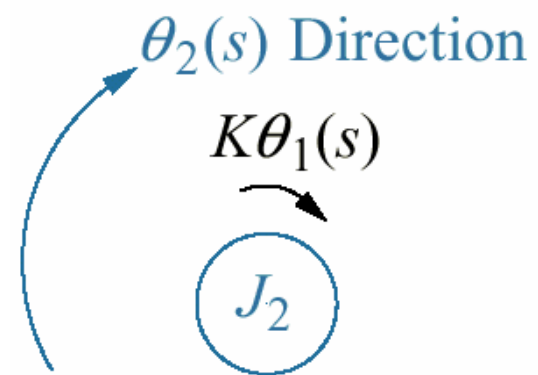
J_1 üzerindeki J_2 'nin hareketiyle oluşan Torklar



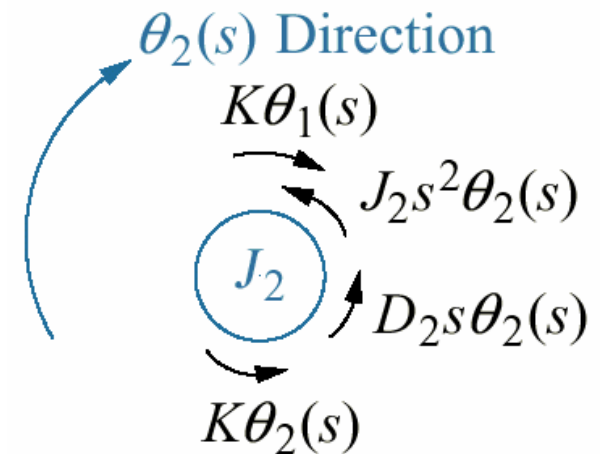
J_1 üzerindeki oluşan toplam Torklar



J_2 üzerindeki J_2 'nin hareketiyle oluşan Torklar



J_2 üzerindeki J_1 'nin hareketiyle oluşan Torklar



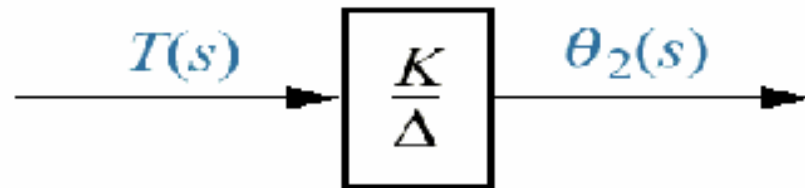
J_2 üzerindeki oluşan toplam Torklar

Her iki atalettteki torkları topladığımızda, hareket denklemini elde ederiz:

$$\left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right) \theta_1(s) - K \theta_2(s) = T(s)$$

$$-K \theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right) \theta_2(s) = 0$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{\Delta}$$

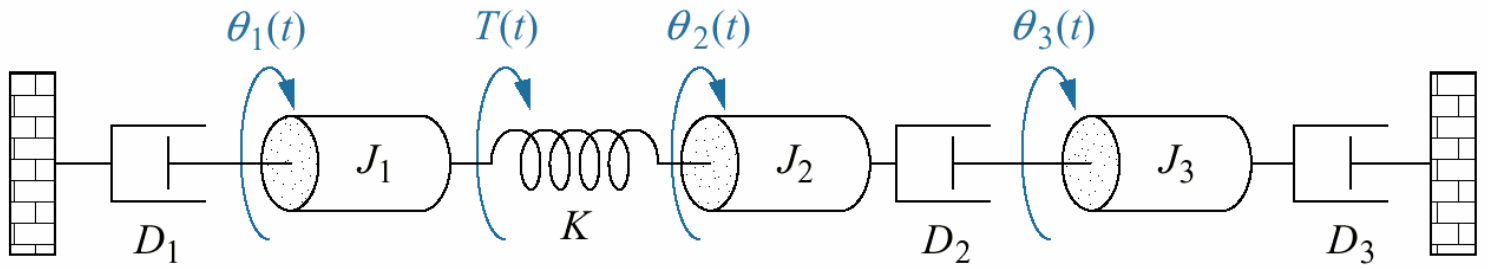


$$\Delta = \begin{bmatrix} \left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right) & -K \\ -K & \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right) \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ deki} \\ \text{harekete ba\u011fl\u0131} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplam\u0131} \end{array} \right) \theta_1 - \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplam\u0131} \end{array} \right) \theta_2 = \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplam\u0131} \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplam\u0131} \end{array} \right) \theta_1 + \left(\begin{array}{l} \theta_2 \text{ deki} \\ \text{harekete ba\u011fl\u0131} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplam\u0131} \end{array} \right) \theta_2 = \left(\begin{array}{l} \theta_2 \text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplam\u0131} \end{array} \right)$$

Örnek:



Hareket denklemlerini direk yazınız.

$$\left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ deki} \\ \text{harekete ba\u011fl\u0131} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_1 - \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_2 - \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_3 = \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_1 + \left(\begin{array}{l} \theta_2 \text{ deki} \\ \text{harekete ba\u011fl\u0131} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_2 - \left(\begin{array}{l} \theta_2 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_3 = \left(\begin{array}{l} \theta_2 \text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{l} \theta_1 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_1 - \left(\begin{array}{l} \theta_2 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_2 + \left(\begin{array}{l} \theta_3 \text{ deki} \\ \text{harekete ba\u011fl\u0131} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right) \theta_3 = \left(\begin{array}{l} \theta_3 \text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}(J_1 s^2 + D_1 s + K)\theta_1(s) - K\theta_2(s) - 0\theta_3(s) &= T(s) \\ -K\theta_1(s) + (J_2 s^2 + D_2 s + K)\theta_2(s) - D_2 s\theta_3(s) &= 0 \\ -0\theta_1(s) - D_2 s\theta_2(s) + (J_3 s^2 + D_3 s + D_2 s)\theta_3(s) &= 0\end{aligned}$$

oscillation in which the amplitude decreases with time, and it is called a *damped oscillation*.

The direct and clear relationship between the s -plane location of the poles and the form of the transient response is readily interpreted from the s -plane pole-zero plots. Furthermore, the magnitude of the response of each root, represented by the residue, is clearly visualized by examining the graphical residues on the s -plane. The Laplace transformation and the s -plane approach is a very useful technique for system analysis and design where emphasis is placed on the transient and steady-state performance. In fact, because the study of control systems is concerned primarily with the transient and steady-state performance of dynamic systems, we have real cause to appreciate the value of the Laplace transform techniques.

2.5 The Transfer Function of Linear Systems

The *transfer function* of a linear system is defined as the ratio of the Laplace transform of the output variable to the Laplace transform of the input variable, with all initial conditions assumed to be zero. The transfer function of a system (or element) represents the relationship describing the dynamics of the system under consideration.

A transfer function may only be defined for a linear, stationary (constant parameter) system. A nonstationary system, often called a time-varying system, has one or more time-varying parameters, and the Laplace transformation may not be utilized. Furthermore, a transfer function is an input-output description of the behavior of a system. Thus the transfer function description does not include any information concerning the internal structure of the system and its behavior.

The transfer function of the spring-mass-damper system is obtained from the original describing equation, Eq. (2.19), rewritten with zero initial conditions as follows:

$$Ms^2Y(s) + fsY(s) + KY(s) = R(s). \quad (2.38)$$

Then the transfer function is

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}} = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + K}. \quad (2.39)$$

The transfer function of the RC network shown in Fig. 2.12 is obtained by writing the Kirchhoff voltage equation, which yields

$$V_1(s) = \left(R + \frac{1}{Cs} \right) I(s). \quad (2.40)$$

The output voltage is

$$V_2(s) = I(s) \left(\frac{1}{Cs} \right). \quad (2.41)$$

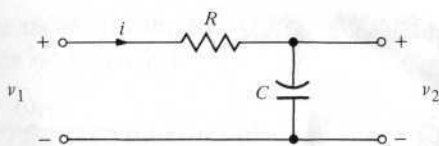


Figure 2.12. An RC network.

Therefore, solving Eq. (2.40) for $I(s)$ and substituting in Eq. (2.41), we have

$$V_2(s) = \frac{(1/Cs)V_1(s)}{R + 1/Cs}. \quad (2.42)$$

Then the transfer function is obtained as the ratio $V_2(s)/V_1(s)$, which is

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \\ &= \frac{1}{\tau s + 1} \\ &= \frac{(1/\tau)}{s + 1/\tau}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

where $\tau = RC$, the *time constant* of the network. Equation (2.43) could be immediately obtained if one observes that the circuit is a voltage divider, where

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (2.44)$$

and $Z_1(s) = R$, $Z_2 = 1/Cs$.

A multiloop electrical circuit or an analogous multiple mass mechanical system results in a set of simultaneous equations in the Laplace variable. It is usually more convenient to solve the simultaneous equations by using matrices and determinants [1, 3, 16]. An introduction to matrices and determinants is provided in Appendix C [45].

■ Example 2.2 Transfer function of system

Consider the mechanical system shown in Fig. 2.13(a) and its electrical circuit analog shown in Fig. 2.13(b). The electrical circuit analog is a force-current analog as outlined in Table 2.1. The velocities, $v_1(t)$ and $v_2(t)$, of the mechanical system are directly analogous to the node voltage $v_1(t)$ and $v_2(t)$ of the electrical circuit. The simultaneous equations, assuming the initial conditions are zero, are

$$M_1 s V_1(s) + (f_1 + f_2) V_1(s) - f_1 V_2(s) = R(s), \quad (2.45)$$

$$M_2 s V_2(s) + f_1 (V_2(s) - V_1(s)) + K \frac{V_2(s)}{s} = 0. \quad (2.46)$$

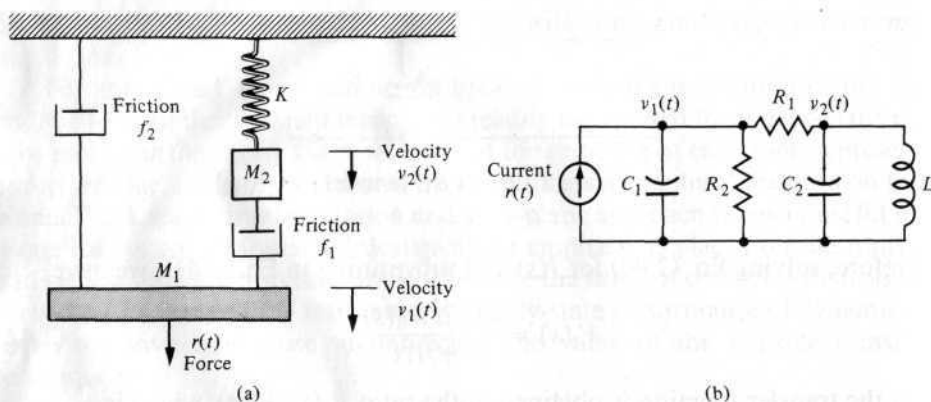


Figure 2.13. (a) Two-mass mechanical system. (b) Two-node electric circuit analog $C_1 = M_1$, $C_2 = M_2$, $L = 1/K$, $R_1 = 1/f_1$, $R_2 = 1/f_2$.

Rearranging Eqs. (2.45) and (2.46) we obtain

$$(M_1 s + (f_1 + f_2))V_1(s) + (-f_1)V_2(s) = R(s), \quad (2.47)$$

$$(-f_1)V_1(s) + \left(M_2 s + f_1 + \frac{K}{s}\right)V_2(s) = 0, \quad (2.48)$$

or, in matrix form, we have

$$\begin{bmatrix} (M_1 s + f_1 + f_2) & (-f_1) \\ (-f_1) & \left(M_2 s + f_1 + \frac{K}{s}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Assuming the velocity of M_1 is the output variable, we solve for $V_1(s)$ by matrix inversion or Cramer's rule to obtain [1, 3]

$$V_1(s) = \frac{(M_2 s + f_1 + (K/s))R(s)}{(M_1 s + f_1 + f_2)(M_2 s + f_1 + (K/s)) - f_1^2}. \quad (2.50)$$

Then the transfer function of the mechanical (or electrical) system is

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{(M_2 s + f_1 + (K/s))}{(M_1 s + f_1 + f_2)(M_2 s + f_1 + (K/s)) - f_1^2} \\ &= \frac{(M_2 s^2 + f_1 s + K)}{(M_1 s + f_1 + f_2)(M_2 s^2 + f_1 s + K) - f_1^2 s}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

If the transfer function in terms of the position $x_1(t)$ is desired, then we have

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{V_1(s)}{sR(s)} = \frac{G(s)}{s}. \quad (2.52)$$

As an example, let us obtain the transfer function of an important electrical control component, the *dc motor* [7].

■ Example 2.3 Transfer function of dc motor

The *dc motor* is a power actuator device that delivers energy to a load as shown in Fig. 2.14(a) and a sketch of a dc motor is shown in Fig. 2.14(b). A cutaway view of a pancake dc motor is given in Fig. 2.15. The dc motor converts direct current (dc) electrical energy into rotational mechanical energy. A major fraction of the torque generated in the rotor (armature) of the motor is available to drive an external load. Because of features such as high torque, speed controllability over a wide range, portability, well-behaved speed-torque characteristics, and adaptability to various types of control methods, dc motors are still widely used in numerous control applications including robotic manipulators, tape transport mechanisms, disk drives, machine tools, and servovalve actuators.

The transfer function of the dc motor will be developed for a linear approximation to an actual motor, and second-order effects, such as hysteresis and the voltage drop across the brushes, will be neglected. The input voltage may be applied to the field or armature terminals. The air-gap flux of the motor is proportional to the field current, provided the field is unsaturated, so that

$$\phi = K_f i_f \quad (2.53)$$

The torque developed by the motor is assumed to be related linearly to ϕ and the armature current as follows:

$$T_m = K_1 \phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t). \quad (2.54)$$

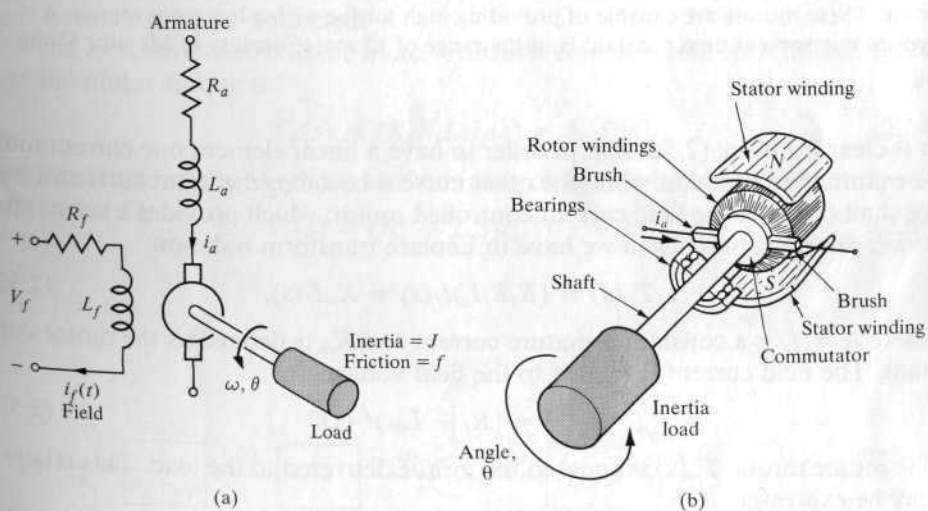


Figure 2.14. A dc motor. (a) Wiring diagram. (b) Sketch.

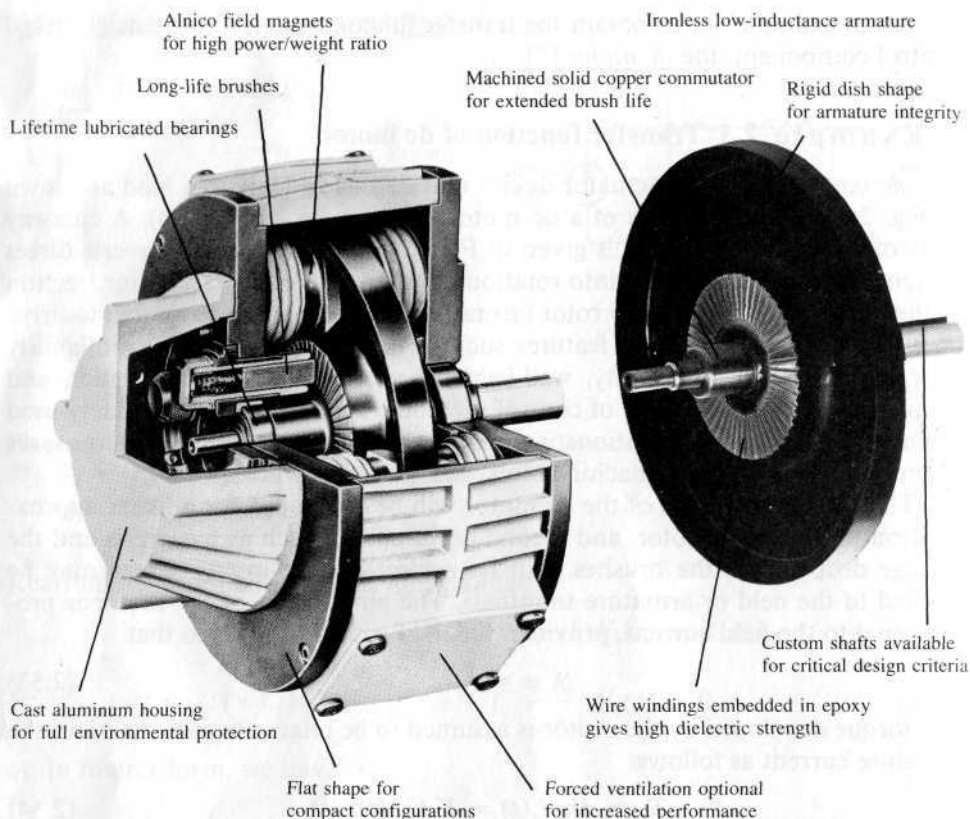


Figure 2.15. A pancake dc motor with a flat wound armature and a permanent magnet rotor. These motors are capable of providing high torque with a low rotor inertia. A typical mechanical time constant is in the range of 15 ms. (Courtesy of Mavilor Motors.)

It is clear from Eq. (2.54) that in order to have a linear element one current must be maintained constant while the other current becomes the input current. First, we shall consider the field current controlled motor, which provides a substantial power amplification. Then we have in Laplace transform notation

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_a) I_f(s) = K_m I_f(s), \quad (2.55)$$

where $i_a = I_a$ is a constant armature current and K_m is defined as the motor constant. The field current is related to the field voltage as

$$V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s). \quad (2.56)$$

The motor torque $T_m(s)$ is equal to the torque delivered to the load. This relation may be expressed as

$$T_m(s) = T_L(s) + T_d(s), \quad (2.57)$$

where $T_L(s)$ is the load torque and $T_d(s)$ is the disturbance torque, which is often negligible. However, the disturbance torque often must be considered in systems subjected to external forces such as antenna wind-gust forces. The load torque for rotating inertia as shown in Fig. 2.14 is written as

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + fs\theta(s). \quad (2.58)$$

Rearranging Eqs. (2.55), (2.56), and (2.57), we have

$$T_L(s) = T_m(s) - T_d(s), \quad (2.59)$$

$$T_m(s) = K_m I_f(s), \quad (2.60)$$

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + L_f s}. \quad (2.61)$$

Therefore the transfer function of the motor-load combination is

$$\begin{aligned} \frac{\theta(s)}{V_f(s)} &= \frac{K_m}{s(Js + f)(L_f s + R_f)} \\ &= \frac{K_m/JL_f}{s(s + f/J)(s + R_f/L_f)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

The block diagram model of the field controlled dc motor is shown in Fig. 2.16. Alternatively, the transfer function may be written in terms of the time constants of the motor as

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = G(s) = \frac{K_m/fR_f}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)}, \quad (2.63)$$

where $\tau_f = L_f/R_f$ and $\tau_L = J/f$. Typically, one finds that $\tau_L > \tau_f$ and often the field time constant may be neglected.

The *armature controlled dc motor* utilizes a constant field current, and therefore the motor torque is

$$T_m(s) = (K_t K_f I_f) I_a(s) = K_m I_a(s). \quad (2.64)$$

The armature current is related to the input voltage applied to the armature as

$$V_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + V_b(s), \quad (2.65)$$

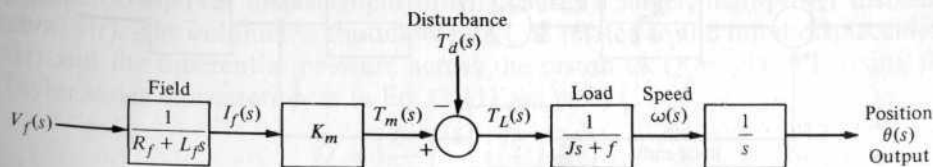


Figure 2.16. Block diagram model of field controlled dc motor.

where $V_b(s)$ is the back electromotive-force voltage proportional to the motor speed. Therefore we have

$$V_b(s) = K_b \omega(s), \quad (2.66)$$

and the armature current is

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b \omega(s)}{(R_a + L_a s)}. \quad (2.67)$$

Equations (2.58) and (2.59) represent the load torque so that

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + fs\theta(s) = T_m(s) - T_d(s). \quad (2.68)$$

The relations for the armature controlled dc motor are shown schematically in Fig. 2.17. Using Eqs. (2.64), (2.67), and (2.68), or, alternatively, the block diagram, we obtain the transfer function

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + f) + K_b K_m]} \\ &= \frac{K_m}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

However, for many dc motors, the time constant of the armature, $\tau_a = L_a/R_a$, is negligible, and therefore

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[R_a(Js + f) + K_b K_m]} = \frac{[K_m/(R_a f + K_b K_m)]}{s(\tau_1 s + 1)}, \quad (2.70)$$

where the equivalent time constant $\tau_1 = R_a J / (R_a f + K_b K_m)$.

It is of interest to note that K_m is equal to K_b . This equality may be shown by considering the steady-state motor operation and the power balance when the rotor resistance is neglected. The power input to the rotor is $(K_b \omega) i_a$ and the power delivered to the shaft is $T\omega$. In the steady-state condition, the power input is equal to the power delivered to the shaft so that $(K_b \omega) i_a = T\omega$; and since $T = K_m i_a$ (Eq. 2.64), we find that $K_b = K_m$.

Electric motors are used for moving loads when a rapid response is not

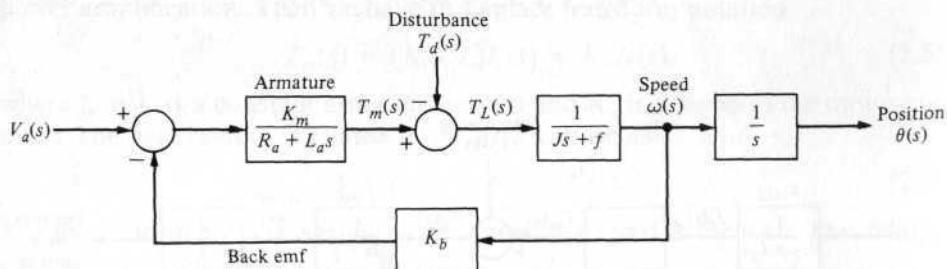


Figure 2.17. Armature controlled dc motor.

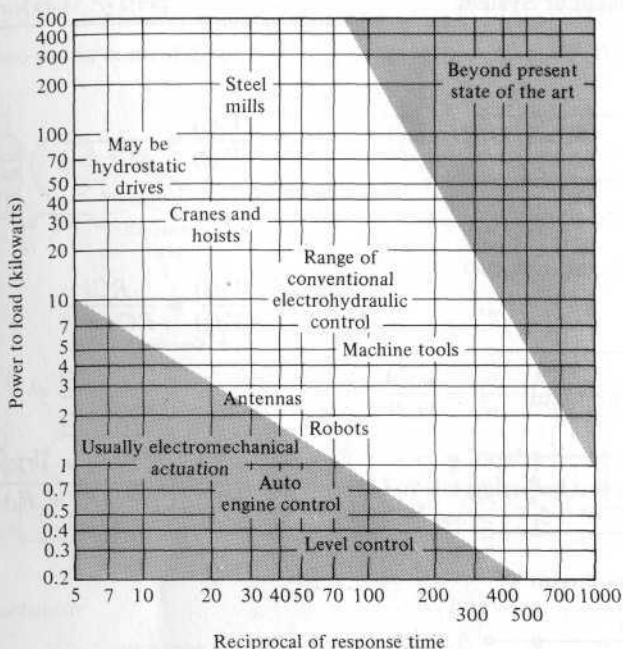


Figure 2.18. Range of control response time and power to load for electromechanical and electrohydraulic devices.

required and for relatively low power requirements. Actuators that operate as a result of hydraulic pressure are used for large loads. Figure 2.18 shows the usual ranges of use for electromechanical drives as contrasted to electrohydraulic drives. Typical applications are also shown on the figure.

■ Example 2.4 Transfer function of hydraulic actuator

A useful actuator for the linear positioning of a mass is the hydraulic actuator shown in Table 2.6, entry 9 [10]. The hydraulic actuator is capable of providing a large power amplification. It will be assumed that the hydraulic fluid is available from a constant pressure source and that the compressibility of the fluid is negligible. A downward input displacement, x , moves the control valve, and thus fluid passes into the upper part of the cylinder and the piston is forced downward. A small, low-power displacement of $x(t)$ causes a larger, high-power displacement, $y(t)$. The volumetric fluid flow rate Q is related to the input displacement $x(t)$ and the differential pressure across the piston as $Q = g(x, P)$. Using the Taylor series linearization as in Eq. (2.11), we have

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, P_0} x + \left(\frac{\partial g}{\partial P} \right)_{P_0, x_0} P \\
 &= k_x x - k_p P
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

Table 2.6. Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

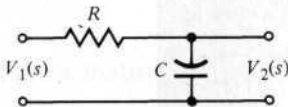
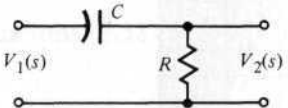
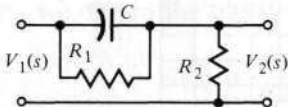
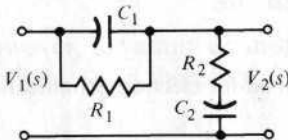
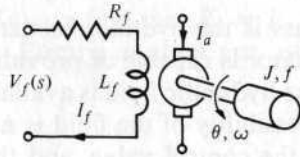
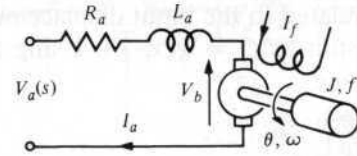
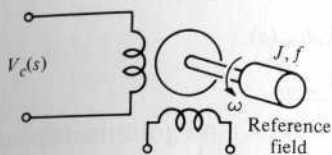
Element or System	G(s)
<p>1. Integrating circuit</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$
<p>2. Differentiating circuit</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}$
<p>3. Differentiating circuit</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s + 1/R_1C}{s + (R_1 + R_2)/R_1R_2C}$
<p>4. Lead-lag filter circuit</p>  <p style="margin-left: 40px;"> $\tau_a = R_1C_1$ $\tau_b = R_2C_2$ $\tau_{ab} = R_1C_2$ $\tau_1\tau_2 = \tau_a\tau_b$ $\tau_1 + \tau_2 = \tau_a + \tau_b + \tau_{ab}$ </p>	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{\tau_a\tau_b s^2 + (\tau_a + \tau_b + \tau_{ab})s + 1}$ $= \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$
<p>5. dc-motor, field controlled</p> 	$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(JS + f)(L_f s + R_f)}$
<p>6. dc-motor, armature controlled</p> 	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + f) + K_b K_m]}$

Table 2.6.—Continued

Element or System

G(s)

7. ac-motor, two-phase control field

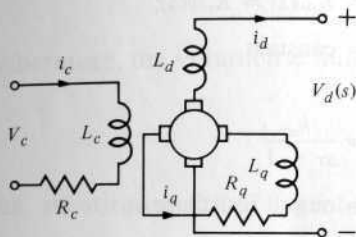


$$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}$$

$$\tau = J/(f - m)$$

m = slope of linearized torque-speed curve (normally negative)

8. Amplidyne

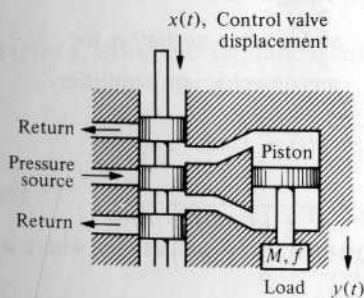


$$\frac{V_d(s)}{V_c(s)} = \frac{(K/R_c R_q)}{(s\tau_c + 1)(s\tau_q + 1)}$$

$$\tau_c = L_c/R_c, \quad \tau_q = L_q/R_q$$

For the unloaded case, $i_d \approx 0$, $\tau_c \approx \tau_q$, $0.05 \text{ sec} < \tau_c < 0.5 \text{ sec}$

9. Hydraulic actuator



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}$$

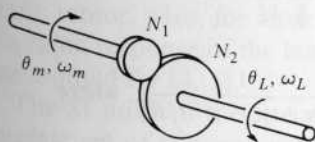
$$K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left(f + \frac{A^2}{k_p}\right)$$

$$k_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0}, \quad k_p = \left. \frac{\partial g}{\partial P} \right|_{P_0}$$

$g = g(x, P) = \text{flow}$

$A = \text{area of piston}$

10. Gear train

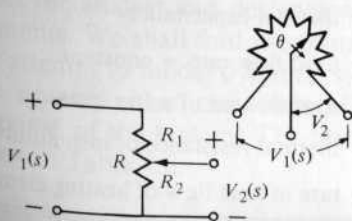


$$\text{Gear ratio} = n = \frac{N_1}{N_2}$$

$$N_2 \theta_L = N_1 \theta_m, \quad \theta_L = n \theta_m$$

$$\omega_L = n \omega_m$$

11. Potentiometer



$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$$

Continued

Table 2.6.—Continued

Element or System	$G(s)$
12. Potentiometer error detector bridge	$V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $V_2(s) = k_s \theta_{\text{error}}(s)$ $k_s = \frac{V_{\text{battery}}}{\theta_{\text{max}}}$
13. Tachometer	$V_2(s) = K_t \omega(s) = K_t s \theta(s);$ $K_t = \text{constant}$
14. dc-amplifier	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k_a}{s\tau + 1}$ $R_o = \text{output resistance}$ $C_o = \text{output capacitance}$ $\tau = R_o C_o, \tau \ll 1$ <p style="text-align: center;">and is often negligible for servomechanism amplifier</p>
15. Accelerometer	$x_o(t) = y(t) - x_{in}(t),$ $\frac{X_o(s)}{X_{in}(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + (f/M)s + K/M}$ <p>For low-frequency oscillations, where $\omega < \omega_n$,</p> $\frac{X_o(j\omega)}{X_{in}(j\omega)} \approx \frac{\omega^2}{K/M}$
16. Thermal heating system	$\frac{\tau(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_t s + (QS + 1/R)}, \text{ where}$ $\tau = \tau_o - \tau_e = \text{temperature difference}$ <p style="text-align: center;">due to thermal process</p> $C_t = \text{thermal capacitance}$ $Q = \text{fluid flow rate} = \text{constant}$ $S = \text{specific heat of water}$ $R_t = \text{thermal resistance of insulation}$ $q(s) = \text{rate of heat flow of heating element}$

where $g = g(x, P)$ and (x_0, P_0) is the operating point. The force developed by the actuator piston is equal to the area of the piston, A , multiplied by the pressure, P . This force is applied to the mass, and therefore we have

$$AP = M \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt}. \quad (2.72)$$

Thus, substituting Eq. (2.71) into Eq. (2.72), we obtain

$$\frac{A}{k_p} (k_x x - Q) = M \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt}. \quad (2.73)$$

Furthermore, the volumetric fluid flow is related to the piston movement as

$$Q = A \frac{dy}{dt}. \quad (2.74)$$

Then, substituting Eq. (2.74) into Eq. (2.73) and rearranging, we have

$$\frac{Ak_x}{k_p} x = M \frac{d^2y}{dt^2} + \left(f + \frac{A^2}{k_p} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (2.75)$$

Therefore, using the Laplace transformation, we have the transfer function

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \quad (2.76)$$

where

$$K = \frac{Ak_x}{k_p} \quad \text{and} \quad B = \left(f + \frac{A^2}{k_p} \right).$$

Note that the transfer function of the hydraulic actuator is similar to that of the electric motor. Also, for an actuator operating at high pressure levels and requiring a rapid response of the load, the effect of the compressibility of the fluid must be accounted for [4, 5].

The SI units of the variables are given in Table B.1 in Appendix B. Also a complete set of conversion factors for the British system of units are given in Table B.2.

The transfer function concept and approach is very important because it provides the analyst and designer with a useful mathematical model of the system elements. We shall find the transfer function to be a continually valuable aid in the attempt to model dynamic systems. The approach is particularly useful since the s -plane poles and zeros of the transfer function represent the transient response of the system. The transfer functions of several dynamic elements are given in Table 2.6.