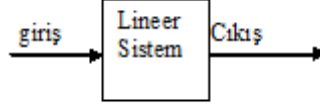


LINEER SİSTEMLER

Muhendislikte herhangi bir sistem şekil(ref: xqs402) deki gibi dikdörtgen blok içinde gösterilir. Sisteme dışarıdan etki eden faktörler **giris**, sistemin bu girişlere karşı gösterdiği tepki **cikis** olarak adlandırılır. Sisteme birden fazla giriş olursa **cokgirisli**, sistemin bu girişlere gösterdiği tepki birden fazla değişken üzerinden dışarıdan gözleniyorsa **cokcikisli** sistem olarak adlandırılır.



xqs402 Fiziksel Sistem seması

lineerlik ve nonlinearlik

Lineerlik (doğrusallık) prensip olarak giriş ile çıkışın orantılı olmasıdır. Sistem girişi x ve çıkışı y olsun. Matematiksel olarak lineerlik aşağıdaki gibi tarif edilir.

girişte x_1 uygulandığında çıkış y_1

girişte x_2 uygulandığında çıkış y_2

olsun. Sisteme

$$x_3 = ax_1 + bx_2$$

girişi uygulandığında a, b herhangi sabitler olmak üzere, sistem çıkışı

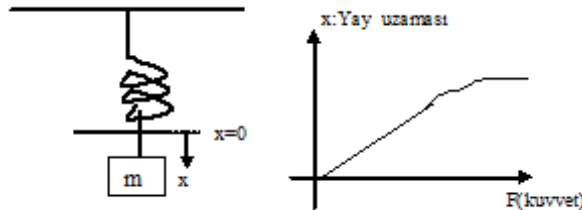
$$y_3 = ay_1 + by_2$$

oluyorsa sistem lineerdir denir.

şekil(ref: xqs401) de görülen yay sisteminde k yayın uzama katsayısı, F uygulanan kuvvet, x uygulanan kuvvet sonucu yayın uzamasıdır. Sistemin giriş çıkış bağıntısı

a) $x = \frac{F}{k}$ b) $x = \frac{F^2}{k}$

olarak veriliyor. Her iki durum için sistemin lineer olup olmadığını araştırın.



xqs401 a)Yay ve kuvvet sistemi b)Kuvvet-yerdegistirme grafiği

cozum:a) Sisteme giriş F , çıkış ise x 'dur. Sistem modeli yukarıdaki notasyonla $y = \frac{x}{k}$

olur.

$$\begin{aligned}x_1 = F_1 &\Rightarrow y_1 = \frac{F_1}{k} \\x_2 = F_2 &\Rightarrow y_2 = \frac{F_2}{k} \\x_3 = aF_1 + bF_2 &\Rightarrow y_3 = \frac{aF_1 + bF_2}{k} = a\frac{F_1}{k} + b\frac{F_2}{k}\end{aligned}$$

$y_3 = ay_1 + by_2$ olduğundan sistem lineerdir.

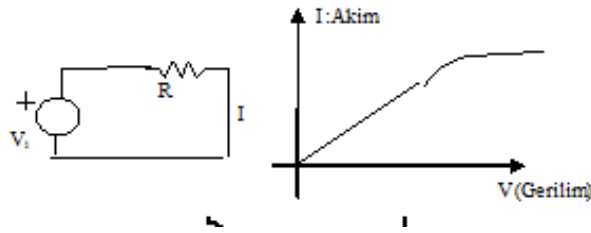
b)Yukarıdaki işlemler aynen burada da yapılır.

$$\begin{aligned}x_1 = F_1 &\Rightarrow y_1 = \frac{F_1^2}{k} \\x_2 = F_2 &\Rightarrow y_2 = \frac{F_2^2}{k} \\x_3 = aF_1 + bF_2 &\Rightarrow y_3 = \frac{(aF_1 + bF_2)^2}{k} = a^2\frac{F_1^2}{k} + b^2\frac{F_2^2}{k} + \frac{+2abF_1F_2}{k}\end{aligned}$$

$y_3 \neq ay_1 + by_2$ olduğundan sistem lineer değildir.

Fiziksel sistemlerin hiçbirisi ideal anlamda lineer değildir. Örnek olarak O.P(ref: xqp401) deki yay kutle mekanizmasını ele alalım. Küçük yer değiştirmeler için yayın kuvvet-yer değiştirme bağıntısı $x = \frac{F}{k}$ şeklindedir. Fakat yay belli bir miktar uzadıktan sonra giriş çıkış bağıntısı $x = \frac{F^2}{k}$, yay asırı uzatılıp sınıra dayanırsa $x = l$ olur. Yani giriş F ne olursa olsun çıkış x sabit kalır. Bu durum şekil(ref: xqs401.b) de gösterilmiştir.

Baska bir örnek olarak şekil(ref: xqs405) deki direnç ve gerilim kaynağından devreyi ele alalım. Devreden geçen akım $I = \frac{V}{R}$ dir. Fakat dirençten geçen akım direnci bir miktar ısıtır. Isınan direncin R direnç değeri değişir. Dolayısıyla geçen akım değişir. Bu ise uygulanan V gerilimi ile geçen I akımı arasındaki ilişkinin lineer olmaması(nonlineer olması) anlamına gelir.



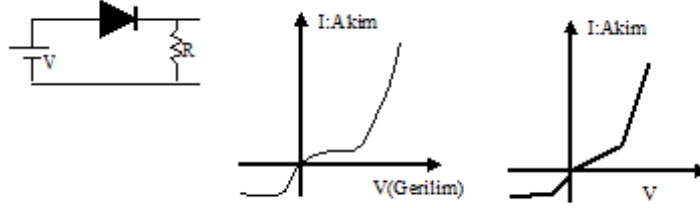
Şekil(xqs405 a)Dirençli devre b)gerçek ve pratikteki akım-gerilim grafiği

Lineerliği kısaca giriş çıkış bağıntısı orijinden geçen bir doğru ise o sistem lineerdir diye tanımlayabiliriz. Şekil(ref: xqt401)de pratikte raslanan bazı nonlineerlikler gösterilmiştir.

xqt401 Pratikte raslanan nonlineerlikler ??athertondan aktar.

Fiziksel dünyada hiçbir sistem ideal anlamda lineer olmamasına karşılık kullanım

sinirlari icinde lineer kabul etmekte buyuk bir hata yoktur. Nonlineerligin ihmal edilemeyecek boyutlarda oldugu cogu durumlardada sistem belli lineer bolgelere ayrilir. Ornek olarak Sekil(ref: xqs407.a) deki diyodun karakteristigini ele alalim. Diyodun akim-gerilim karakteristigi analiz edilirken diyot Sekil(ref: xqs407.b) deki gibi varsayilir. Boylece lineer bolgeler elde edilerek analiz yapilir.

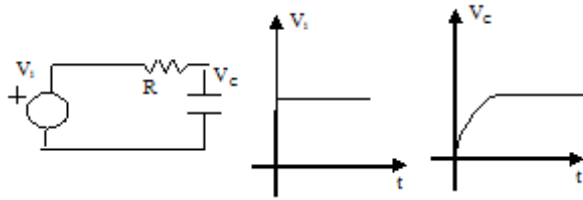


Sekil(xqs407) a)Diyodun akim-gerilim karakteristigi b)lineer bolgelere ayrilmis (lineerlestirilmis karakteristik

Sistem Dinamigi

Fiziksel sistemlerin az veya cok ataletleri(tembellikleri) vardir. Yani sisteme etkiyen etken ile sistemin verdigi tepki arasinda belli bir sure gecer.

Mesela sekil(ref: xqs411.a) de elektrik devresinde de kondansator elemaninin ataletinden dolayi uygulanan gerilim etkisini zamana yayilarak gosterir. sekil(ref: xqs411.b) de uygulanan gerilim ve sekil(ref: xqs411.c) de uygulanan gerilimin etkisi ile kondansator geriliminin degisimi gosterilmistir.



sekil(xqs411) a)Kondansatorlu devre b) $u(t)$ uygulanan gerilim c)Gerilimin etkisi ile gecen akim.

Benzer sekilde sekil(ref: xqs401.a) daki yay sisteminde yaya etkiyen kuvvet etkisini hemen gosteremez. Kuvvetin etkisi yayin kutlesi ve hava surtunmesinden dolayi zamana yayilarak etkisini gosterir.

Bu sekildeki sistem ataleti matematik modellemede diferansiyel denklemler olarak karsimiza cikar. Lineer sistemlerin modelleri

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_n \frac{d^n r}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r$$

xqe401

şeklinde lineer diferansiyel denklemlerle ifade edilir.

Zamanla Degismeme

Dinamik sistemin modeli zamandan bağımsız ise, zamanla değişmiyorsa sistem zamanla değişmeyen sistemdir. Matematiksel olarak zamanla değişmeme şu şekilde tanımlanır.

$x(t)$ girişine karşı $y(t)$ çıkışını veren bir sistem

eğer $x(t - p)$ girişine karşı $y(t - p)$ çıkışını veriyorsa

sistem zamanla değişmeyen sistem olarak adlandırılır.

Butun sistemlerin modelleri sıcaklık basıncı gibi etkenler altında değişmekle beraber pratik anlamda çoğu sistemler zamanla değişmez kabul edilir. Zamanla değişmesi dikkate alınması gereken sistemlere örnek olarak bir savaş uçağının veya roketin yakıtı azaldıkça kutlesinin azalması ve sistemin matematik modelinin değişmesini örnek olarak gösterebiliriz. Sistem lineerse ve zamanla değişiyorsa (ref: xqe401) deki $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ katsayıları $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ şeklinde zamana bağlı olarak değişir.

Lineer Sistemlerin Analizi

Yukarıda bahsedildiği gibi mekanik hidrolik, elektrik sistemler çoğu kere lineer kabul edilerek lineer zamanla değişmeyen diferansiyel denklemlerle modellenenir. Bu yüzden Lineer zamanla değişmeyen diferansiyel denklemlerin çözümlerini kısaca incelemek gerekir.

(ref: xqe401) ile verilen diferansiyel denklemin homojen ve özel çözüm olarak adlandırılan iki çözümü vardır. Toplam çözüm iki çözümün toplamıdır.

Homojen (Oz) Çözüm

Diferansiyel denklemin homojen(öz) çözümünün α sabit bir sayı olmak üzere

$$x(t) = ce^{\alpha t} \quad \text{xqe461}$$

formunda olduğu gösterilebilir. (ref: xqe461)'deki $x(t)$ değeri

$$\frac{dx(t)}{dt} = c\alpha e^{\alpha t}, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = c\alpha^2 e^{\alpha t} \quad \dots \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} = c\alpha^n e^{\alpha t}$$

şeklinde türetilerek (ref: xqe401)'de yerine konulursa

$$c\alpha^n e^{\alpha t} + a_{n-1}c\alpha^{n-1} e^{\alpha t} + a_{n-2}c\alpha^{n-2} e^{\alpha t} + a_1c\alpha e^{\alpha t} + a_0ce^{\alpha t} \quad \text{xq4e472}$$

elde edilir. (ref: xq4e472)'in her iki yanı $(\frac{1}{c}e^{-\alpha t})$ ile çarpılırsa. ($c \neq 0$)

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \dots + a_1\alpha + a_0 \quad \text{xqe403}$$

elde edilir. (ref: xqe403) polinomunun kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ olsun. Eğer bütün kökler birbirinden farklı ise (ref: xqe401) dif denkleminin çözümü de

$$x(t) = c_1e^{\alpha_1 t} + c_2e^{\alpha_2 t} + c_3e^{\alpha_3 t} + \dots + c_ne^{\alpha_n t}$$

şeklinde dir. Burada $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ tamamen keyfi sabitlerdir. Yani $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ katsayılar $-\infty, +\infty$ arasında herhangi bir değeri alabilirler. Bütün aldıkları değerler için dif

Lineerleştirme

$$L(x) = f(x_0) + f'_x(x_0)(x-x_0) = f(x_0) + f'_x(x_0) \Delta x \\ = f(x_0) + \Delta f$$

$f(x_0)$: fonksiyonun x_0 daki değeri

$f'_x(x_0)$: fonksiyonun türevinin x_0 daki değeri

$\Delta f = f'_x(x_0)(x-x_0)$ fonksiyonun diferansiyeli

$\Delta x = (x - x_0)$ x_0 civarında x in değişme miktarı

x değeri x_0 civarında Δx kadar değişirse, fonksiyonun değeri Δf kadar değişir.

P212) $f(x)=x^2$, $x=3$ civarında lineerleştirin.

Cevap: $f(3)=3^2=9$, $f'_x(3)=2 \cdot 3=6$

$$L(x)=f(3) + f'_x(3)(x-x_0) \\ =3^2 + 2 \cdot 3(x-3) = 9 + 6(x-x_0)$$

$x=3$ için fonksiyonun değeri $f(3)=9$ dur.

$x=3.1$ için:

$$\Delta x = (3.1-3)=0.1$$

$$\Delta f = f'_x(3)(x-x_0) = 6 \cdot 0.1=0.6$$

Fonksiyonun Yaklaşık değeri

$$9+0.6=9.6$$

Fonksiyonun Gerçek değer: $f(3.1)=3.1^2=9.61$

$$\text{Hata}=9.61-9.6=0.01$$

P221)a) $f(x)=e^{0.5x}$ fonksiyonunu $x=3$ civarında lineerleştiriniz.

c) elde ettiğiniz linner denklemlerden faydalanarak fonksiyonun $x=3.1$ deki değerini hesaplayınız.

d) bulduğunuz değerleri fonksiyonun gerçek değeri ile karşılaştırın.

Cozum:

$$f(x) = e^{0.5x} \text{ ----> } f'_x = 0.5 e^{0.5x}$$

$$L(x)=f(x_0) + f'_x(x_0)(x-x_0) \\ =e^{0.5 \cdot 3} + 0.5 e^{0.5 \cdot 3}(x-3) \\ =4.48+2.24(x-3) = 2.24x-2.24$$

$$b) L(3.1) = 2.24x-2.24=2.24 \cdot 3.1 -2.24=4.7058$$

$$c) f(3.1) = e^{0.5x} = e^{0.5 \cdot 3.1} = e^{1.55} = 4.7115$$

$$d) f(x)-L(x)=4.7115-4.7058=0.0057$$

P221)a) $f(x)=e^{0.5x}$ fonksiyonunu $x=5$ civarında lineerleştiriniz.

c) elde ettiğiniz linner denklemlerden faydalanarak fonksiyonun $x=4.9$ daki değerini hesaplayınız.

d) bulduğunuz değerleri fonksiyonun gerçek değeri ile karşılaştırın.

Cozum:

$$f(x) = e^{0.5x} \text{ ----> } f'_x = 0.5 e^{0.5x}$$

$$L(x)=f(x_0) + f'_x(x_0)(x-x_0) \\ =e^{0.5 \cdot 5} + 0.5 e^{0.5 \cdot 5}(x-5) \\ =12.18+6.09(x-5) = 6.09x-18.27$$

$$b) L(4.9) = 6.09x-18.27=6.09 \cdot 4.9 -18.27=11.5734$$

$$c) f(4.9) = e^{0.5x} = e^{0.5 \cdot 4.9} = e^{2.45} = 11.5883$$

$$d) f(x)-L(x) = 11.5883-11.5734=0.015$$

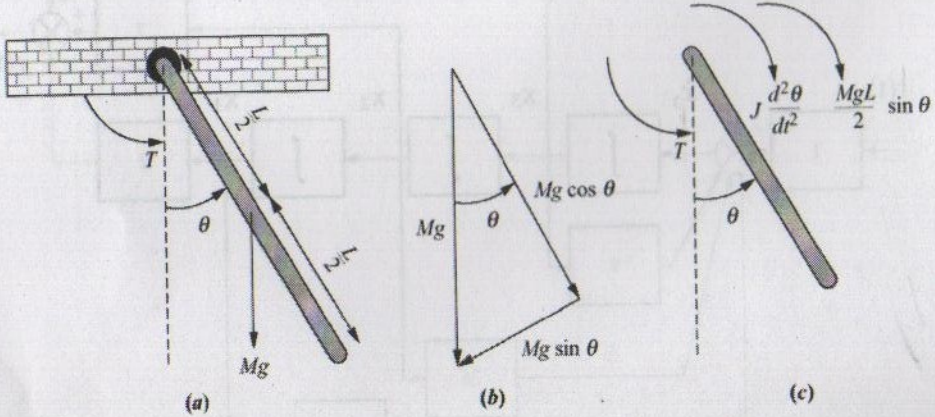
Ozet:

$$e^{0.5x} \approx 2.24x-2.24 \quad (x=3 \text{ civarında})$$

$$e^{0.5x} \approx 6.09x-18.27 \quad (x=5 \text{ civarında})$$

Lineerleştirme: Bir robot bacağı modellenmesi:

Lineer olmayan sistemler denge noktası etrafındaki küçük pertürbasyonlar için Taylor serisiyle lineerleştirilebilirler. Örnek olarak bir robot bacağının lineerleştirilmesi problemi ele alınacaktır.



Şekil 3.14 (a) Basit sarkaç; (b) Mg kuvvet bileşenleri; (c) serbest cisim diyagramı

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{L}{2} Mg \sin \theta = T$$

$$x_1 = \theta; \quad x_2 = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{2J} \sin x_1 + \frac{T}{J}$$

(3.18)

Denge noktaları $x_1 = \theta = 0$ ve $x_2 = d\theta/dt = 0$ civarındaki küçük değişimler:

$$x_1 = 0 + \delta x_1 \quad x_2 = 0 + \delta x_2 \quad (3.19)$$

$f(x)$ 'in denge noktası civarındaki Taylor açılımında yüksek dereceli terimler ihmal edilirse:

$$f(x) = f(x_0) + df(x)/dx \big|_{x=x_0} (x - x_0)$$

$$\sin x_1 = \sin 0 + d \sin x_1 / dx_1 \big|_{x_1=0} \delta x_1 = \delta x_1$$

$$\sin x_1 = \delta x_1$$

$$\delta \dot{x}_1 = \delta x_2;$$

$$\delta \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{2J} \delta x_1 + \frac{T}{J}$$

(3.20)

Yukarıdaki denklem lineerdir ve denge noktasından küçük sapmalar için lineer olmayan denkleme oldukça yakındır.

Table 2.6. Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

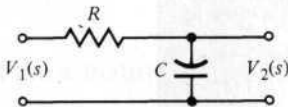
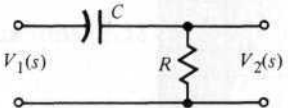
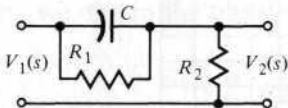
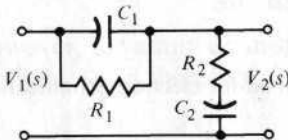
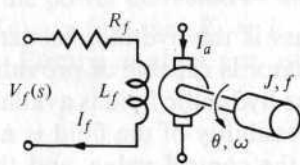
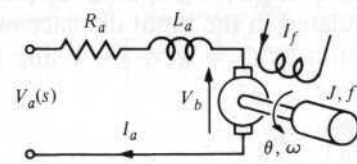
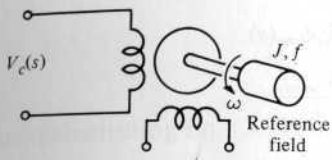
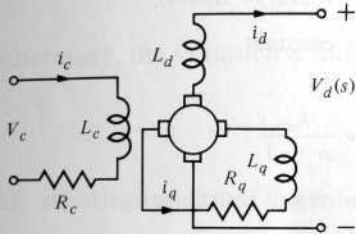
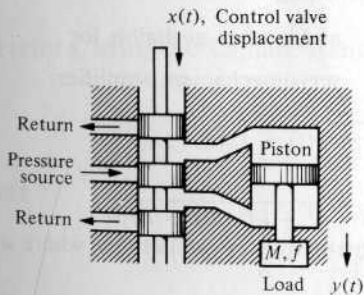
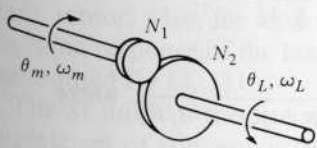
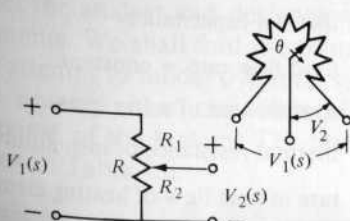
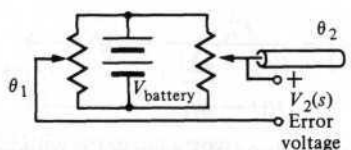
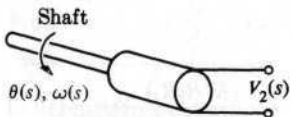
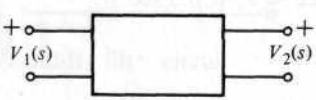
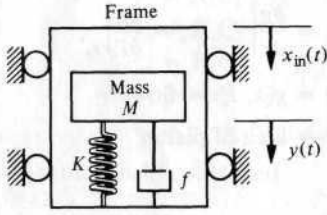
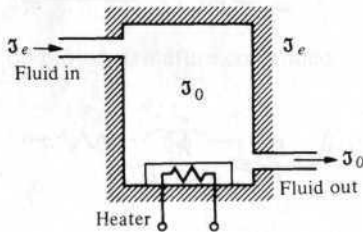
Element or System	G(s)
1. Integrating circuit	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$
2. Differentiating circuit	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}$
3. Differentiating circuit	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s + 1/R_1C}{s + (R_1 + R_2)/R_1R_2C}$
4. Lead-lag filter circuit	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{\tau_a\tau_b s^2 + (\tau_a + \tau_b + \tau_{ab})s + 1}$ $= \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$
	$\tau_a = R_1C_1$ $\tau_b = R_2C_2$ $\tau_{ab} = R_1C_2$ $\tau_1\tau_2 = \tau_a\tau_b$ $\tau_1 + \tau_2 = \tau_a + \tau_b + \tau_{ab}$
5. dc-motor, field controlled	
	$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(JS + f)(L_f s + R_f)}$
6. dc-motor, armature controlled	
	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + f) + K_b K_m]}$

Table 2.6.—Continued

Element or System	$G(s)$
7. ac-motor, two-phase control field 	$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}$ $\tau = J/(f - m)$ m = slope of linearized torque-speed curve (normally negative)
8. Amplidyne 	$\frac{V_d(s)}{V_c(s)} = \frac{(K/R_c R_q)}{(s\tau_c + 1)(s\tau_q + 1)}$ $\tau_c = L_c/R_c, \quad \tau_q = L_q/R_q$ For the unloaded case, $i_d \approx 0$, $\tau_c \approx \tau_q$, $0.05 \text{ sec} < \tau_c < 0.5 \text{ sec}$
9. Hydraulic actuator 	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}$ $K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left(f + \frac{A^2}{k_p}\right)$ $k_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right _{x_0}, \quad k_p = \left. \frac{\partial g}{\partial P} \right _{P_0}$ $g = g(x, P)$ = flow A = area of piston
10. Gear train 	Gear ratio = $n = \frac{N_1}{N_2}$ $N_2 \theta_L = N_1 \theta_m, \quad \theta_L = n \theta_m$ $\omega_L = n \omega_m$
11. Potentiometer 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$

Continued

Table 2.6.—Continued

Element or System	$G(s)$
12. Potentiometer error detector bridge	 $V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $V_2(s) = k_s \theta_{\text{error}}(s)$ $k_s = \frac{V_{\text{battery}}}{\theta_{\text{max}}}$
13. Tachometer	 $V_2(s) = K_t \omega(s) = K_t s \theta(s);$ $K_t = \text{constant}$
14. dc-amplifier	 $\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k_a}{s\tau + 1}$ $R_o = \text{output resistance}$ $C_o = \text{output capacitance}$ $\tau = R_o C_o, \tau \ll 1$ and is often negligible for servomechanism amplifier
15. Accelerometer	 $x_o(t) = y(t) - x_{in}(t),$ $\frac{X_o(s)}{X_{in}(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + (f/M)s + K/M}$ For low-frequency oscillations, where $\omega < \omega_n$, $\frac{X_o(j\omega)}{X_{in}(j\omega)} \approx \frac{\omega^2}{K/M}$
16. Thermal heating system	 $\frac{\tau(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_t s + (QS + 1/R)}, \text{ where}$ $\tau = \tau_o - \tau_e = \text{temperature difference}$ due to thermal process $C_t = \text{thermal capacitance}$ $Q = \text{fluid flow rate} = \text{constant}$ $S = \text{specific heat of water}$ $R_t = \text{thermal resistance of insulation}$ $q(s) = \text{rate of heat flow of heating element}$