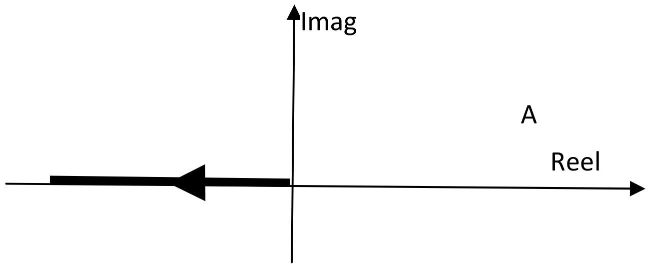
problem 111)
s+1=0 koku nedir → s=-1

s+5=0 koku nedir → s=-5

s-15=0 koku nedir → s=+15
------------------------- --------------------------
problem 121) s+K=0, K sifirdan sonsuza kadar degisirse kok nasil degisir.

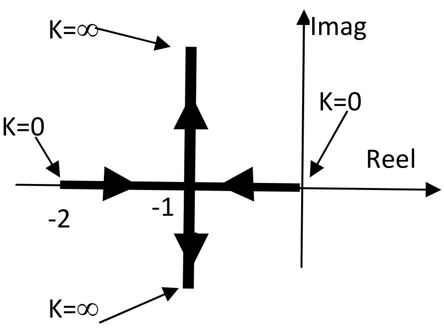
K	s+K=0 kokleri
0	0
1	-1
2	-2
10	-10
∞	-∞

Cevap: K sifirdan sonsuza degisirse kok sifirdan eksi sonsuza kadar degisir.



s+K=0 denkleminin koklerinin geometrik yeri
-------------------- --
problem 131) $s^2+2s+K=0$, K sifirdan sonsuza kadar degisirse kokler nasil degisir.
K=0, $s^2+2s=0$ koku nedir → $s_1=-2$, $s_2=0$
K=0.1 $s^2+2s+0.1=0$ koku nedir → $s_1=-1.94$, $s_2=-0.05$

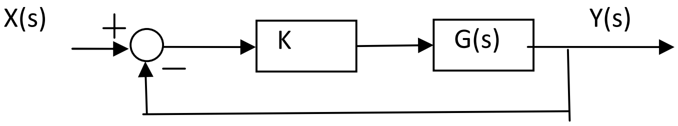
K	$s^2+2s+K=0$ rin kokleri
0	$s_1=-2$, $s_2=0$
0.1	$s_1=-1.94$, $s_2=-0.05$
0.5	$s_1=-1.70$, $s_2=-0.29$
0.9	$s_1=-1.31$, $s_2=-0.68$
1	$s_1=-1$, $s_2=-1$
1.1	$s_1=-1-0.31j$, $s_2=-1+0.31j$
1.5	$s_1=-1-0.707j$, $s_2=-1+0.707j$
2	$s_1=-1-1j$, $s_2=-1+1j$
5	$s_1=-1-2j$, $s_2=-1+2j$
10	$s_1=-1-3j$, $s_2=-1+3j$
100	$s_1=-1-9.95j$, $s_2=-1+9.95j$
10000	$s_1=-1-99.9j$, $s_2=-1+99.9j$
∞	$s_1=-1-\infty j$, $s_2=-1+\infty j$



$s^2+2s+K=0$ denkleminin koklerinin geometrik yer

------------------------- --------------------------- -

141) G(s)= $\frac{1}{s+1}$

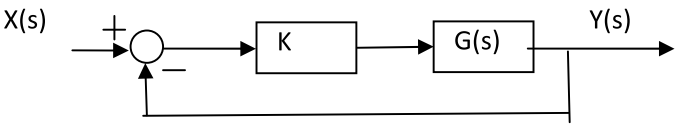


Y=KG(X-Y)
Y+KGY=KGx
Y/X=KG/(1+KG)

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{K\frac{1}{s+1}}{1+K\frac{1}{s+1}}=\frac{K}{s+1+K}$$

---------------------------- ---------------- ---------------------

151) G(s)= $\frac{1}{s^2+2s}$



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{K\frac{1}{s^2+2s}}{1+K\frac{1}{s^2+2s}}=\frac{K}{s^2+2s+K}$$

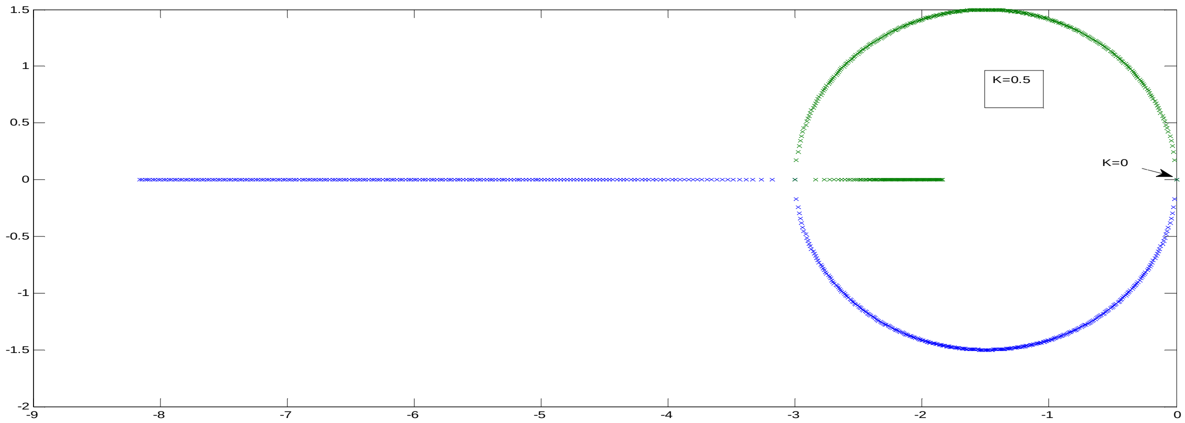
-- ---------- -

241)

X(s) K G(s) Y(s)

G(s)= $\frac{2s+3}{s^2}$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{K\frac{2s+3}{s^2}}{1+K\frac{2s+3}{s^2}}=\frac{K(2s+3)}{s^2+K(2s+3)}$$



$s^2+K(2s+3)=0$ denkleminin koklerinin geometrik yeri

242)

X(s) K G(s) Y(s)

H(s)

G(s)= $\frac{2s+3}{s^2}$, H(s)= $\frac{s}{s+1}$,

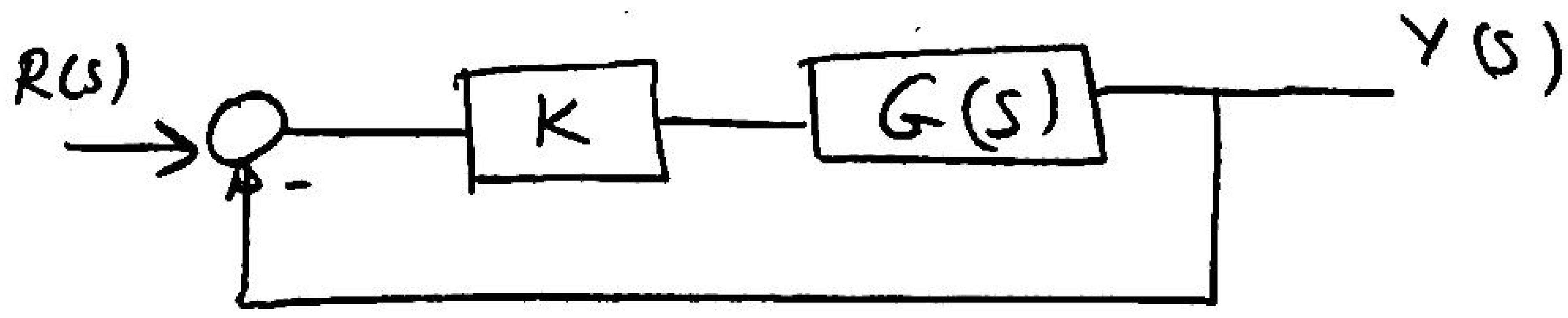
Y=KG(X-HY)

Y+KGHY=KGx

Y/X=KG/(1+KGH)

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{K\frac{2s+3}{s^2}}{1+K\frac{2s+3}{s^2}\frac{s}{s+1}}=\frac{K(2s+3)(s+1)}{s^2(s+1)+K(2s+3)s}$$

Root Locus Procedure



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)}$$

if K changes how the roots of characteristic equation changes.

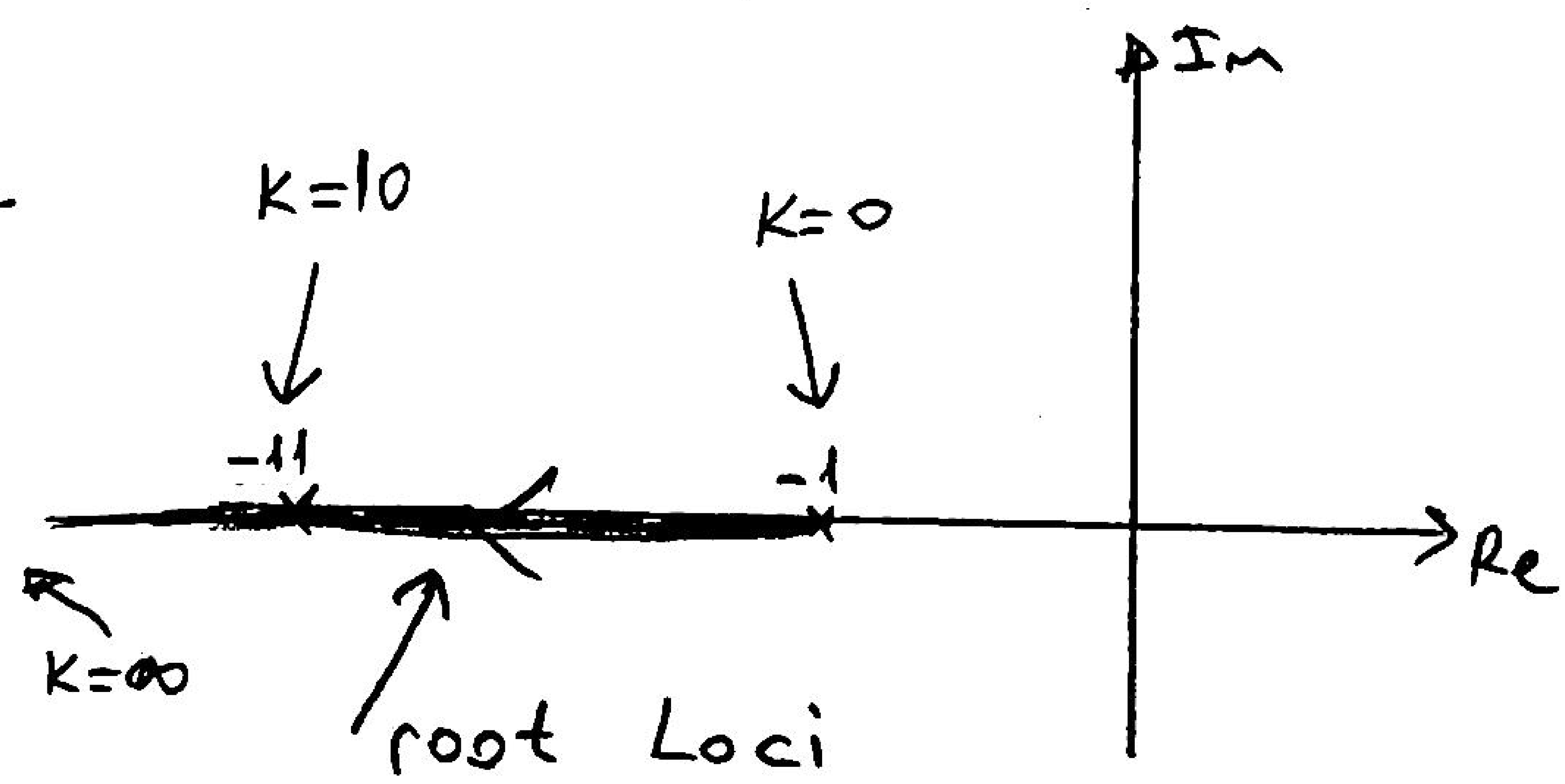
Example 91 $\quad G(s) = \frac{1}{s+1}$

$$T(s) = \frac{K\frac{1}{s+1}}{1+K\frac{1}{s+1}} = \frac{K}{s+1+K}$$

characteristic equation $\quad s+1+K=0$

root $\quad s_1 = -1-K$

K	$s_1 = -1-K$
0	-1
0,1	$-1-0,1=-1,1$
0,2	$-1,2$
10	-11
1000	-1001
∞	$-\infty$

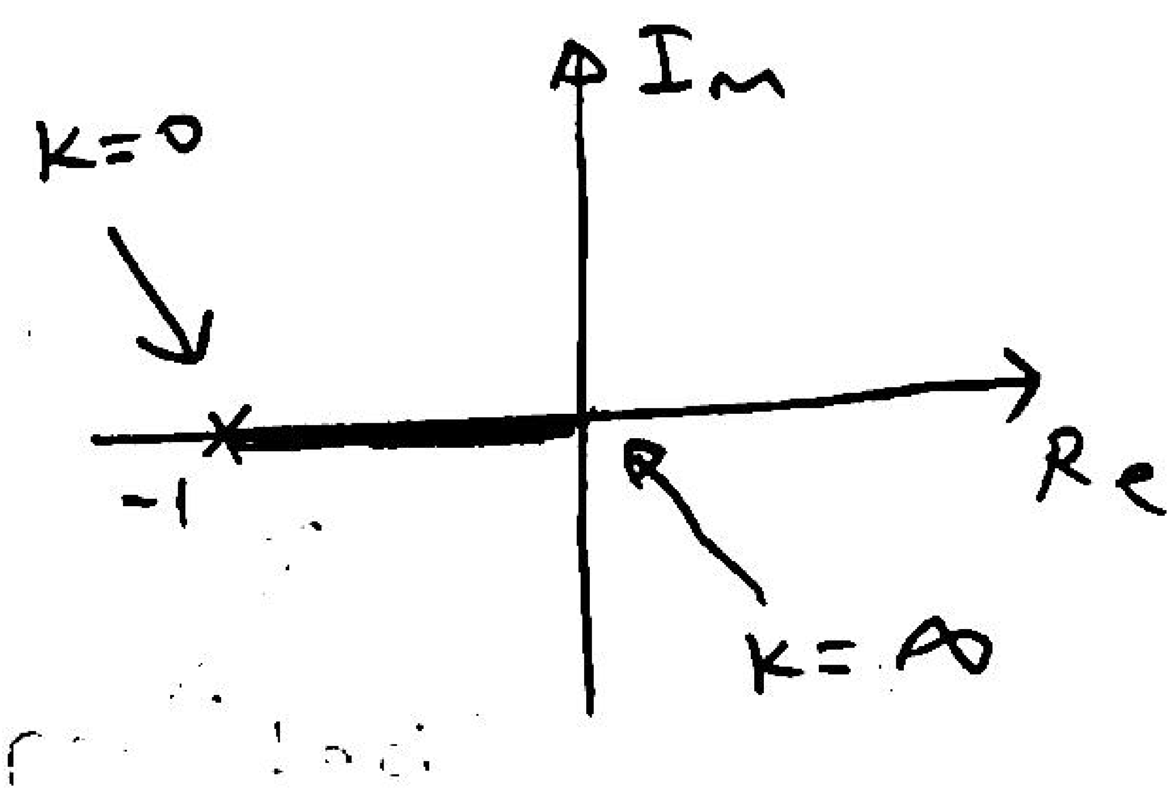


Example 92 $\quad G(s) = \frac{s}{s+1}$

$$T(s) = \frac{K\frac{s}{s+1}}{1+K\frac{s}{s+1}} = \frac{Ks}{s+1+Ks} = \frac{Ks}{s(1+K)+1}$$

$s(1+K)+1=0 \qquad s_1 = -\frac{1}{1+K}$

K	$s_1 = -\frac{1}{1+K}$
0	-1
1	$-0,5$
10	$-0,09$
10000	$-0,00009$
∞	0

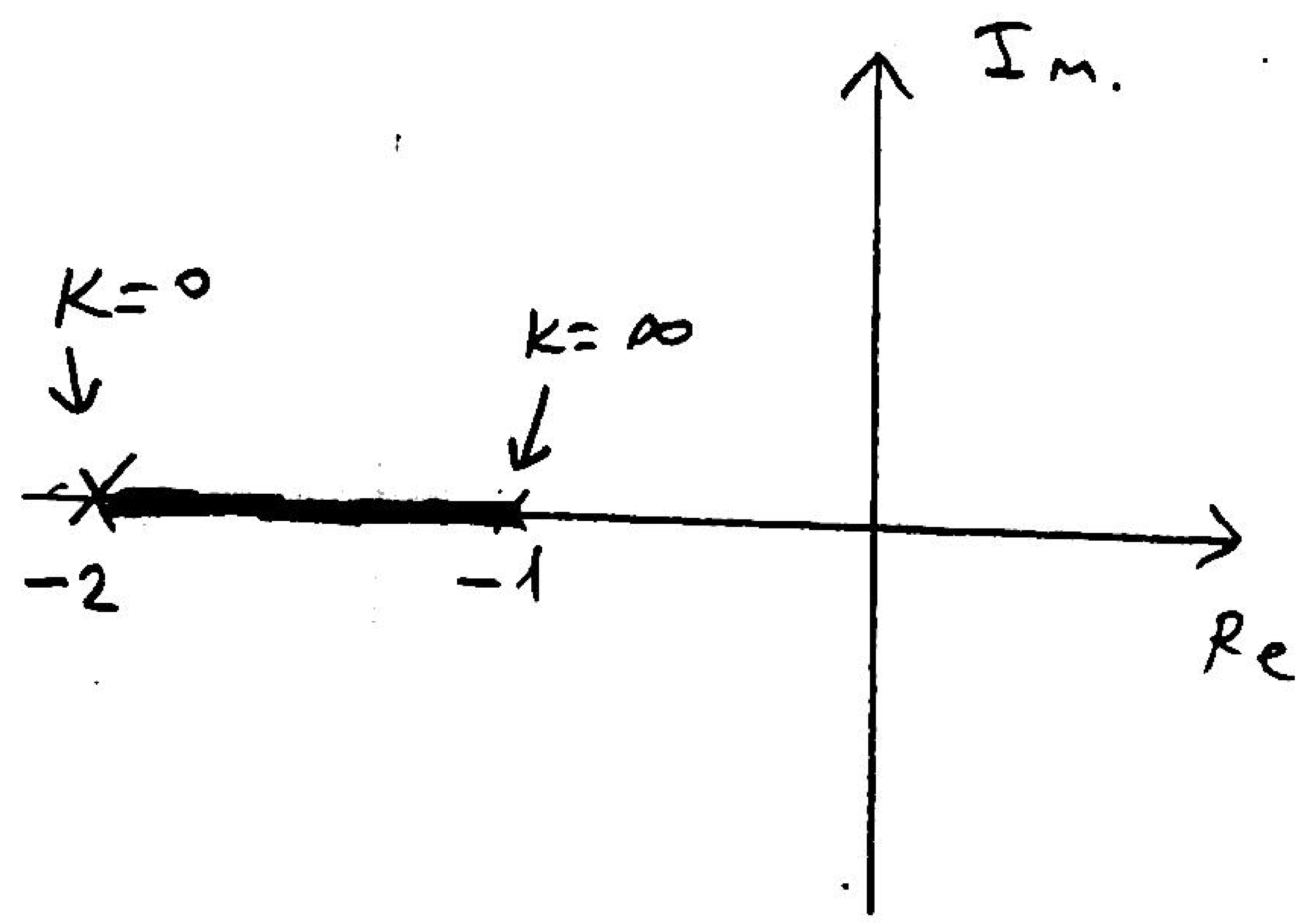


Example 93 $\quad G(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$

$$T(s) = \frac{K\frac{s+1}{s+2}}{1+K\frac{s+1}{s+2}} = \frac{K(s+1)}{s+2+K(s+1)} = \frac{Ks+1}{s(1+K)+2+K}$$

$$s(1+K)+2+K=0 \qquad s_1 = -\frac{2+K}{1+K}$$

K	$s_1 = -\frac{2+K}{1+K}$
0	-2
1	-1.5
2	-1.33
10	-1.09
10000	-1.000099
∞	-1

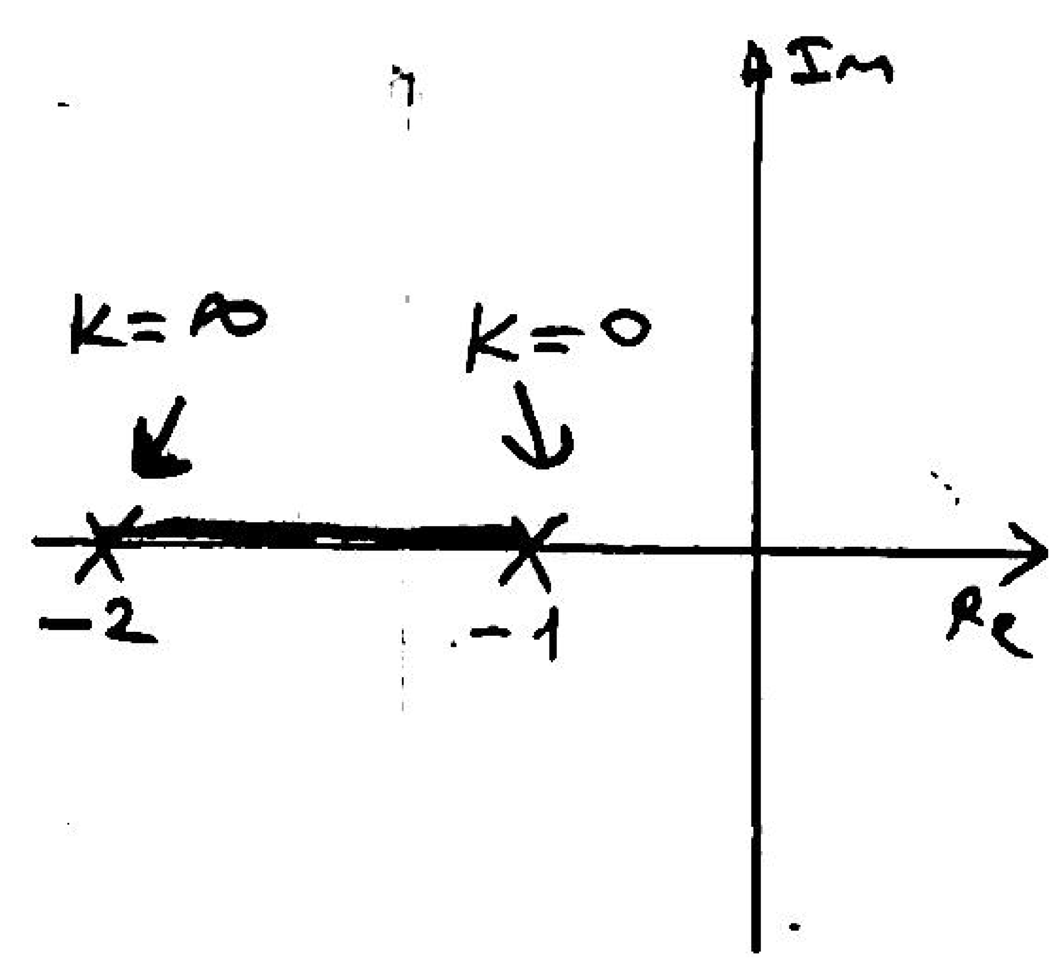


Example 94 $\quad G(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$

$$T(s) = \frac{K\frac{s+2}{s+1}}{1+K\frac{s+2}{s+1}} = \frac{K(s+2)}{s+1+K(s+2)}$$

$$s(1+K)+1+2K=0 \qquad s_1 = -\frac{1+2K}{1+K}$$

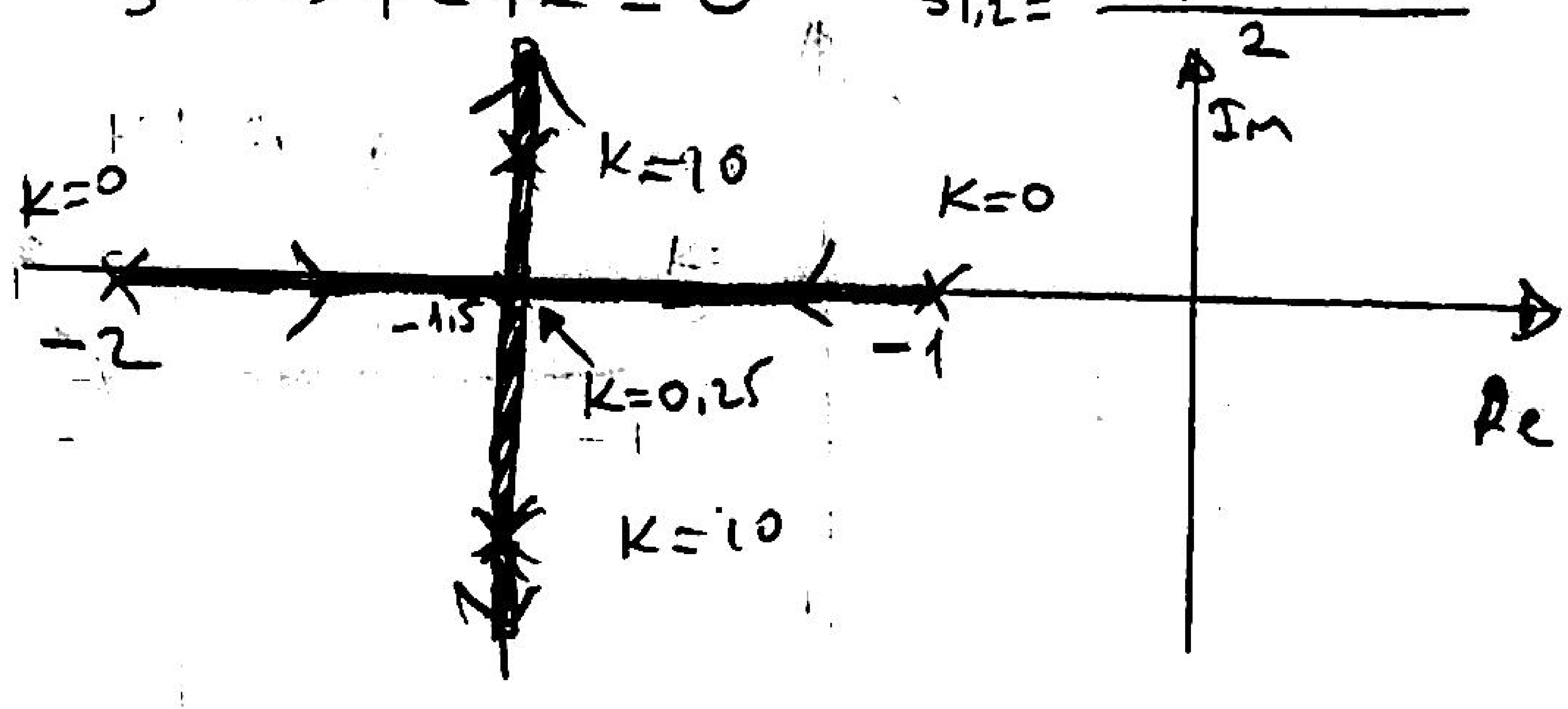
K	s_1
0	-1
1	-1.5
2	-1.6
10	-1.9
1000	-1.999
∞	-2



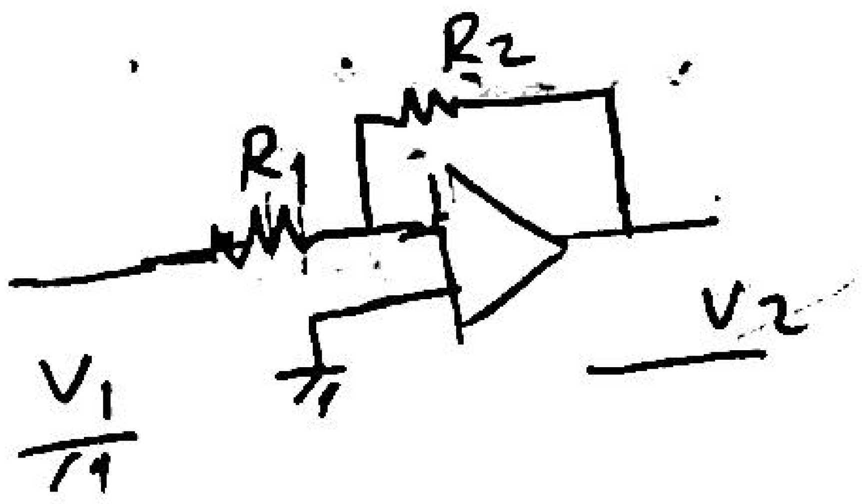
Example 95 $\quad G(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\cdot\frac{1}{(\,)}}{1+K\frac{1}{(\,)}} = \frac{K}{s^2+3s+2+K}$$

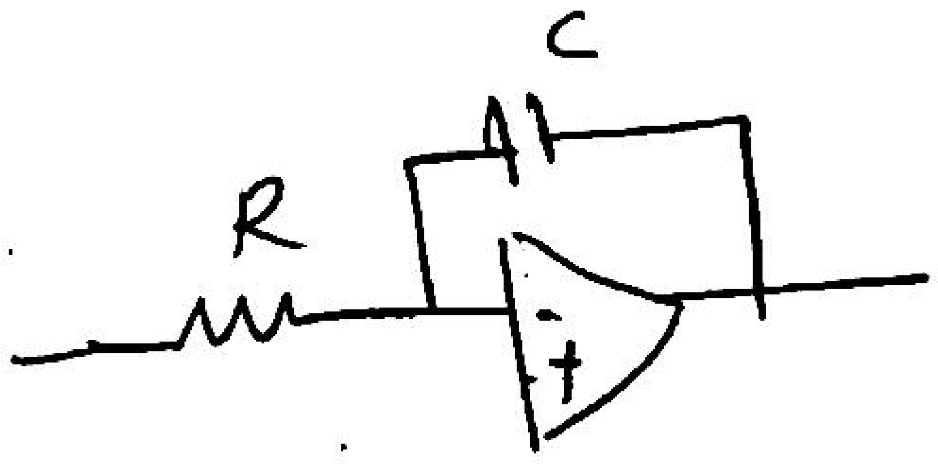
$$s^2+3s+2+K=0 \qquad s_{1,2} = \frac{-3\mp\sqrt{9-(2+K)^2}}{2}$$



K	s_1	s_2
0	-2	-1
0.1	-1.88	-1.11
0.2	-1.72	-1.27
0.25	-1.5	-1.5
0.5	$-1.5+0.5j$	$-1.5-0.5j$
1	$-1.5+0.86j$	$-1.5-0.86j$
10	$-1.5+3.1j$	$-1.5-3.1j$
100	$-1.5+9.9j$	$-1.5-9.9j$
10000	$-1.5+99j$	$-1.5-99j$
∞	$-1.5+\infty i$	$-1.5-\infty i$



$$G_1(s) = -\frac{R_2}{R_1} = K \quad \text{Constant gain}$$



$$G(s) = \frac{-\frac{1}{sC}}{R} = -\frac{1/RC}{s} = \frac{K_I}{s} \quad \text{(integrator)}$$

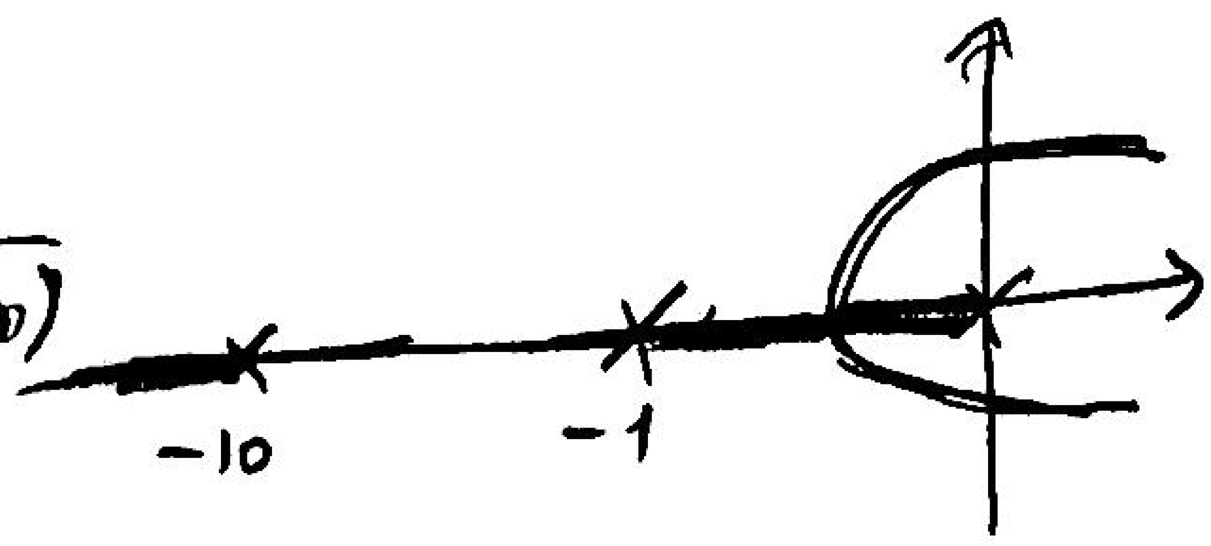
$$G(s) = -\frac{R}{1/sC} = -RCs = K_D s \quad \text{(Derivative)}$$

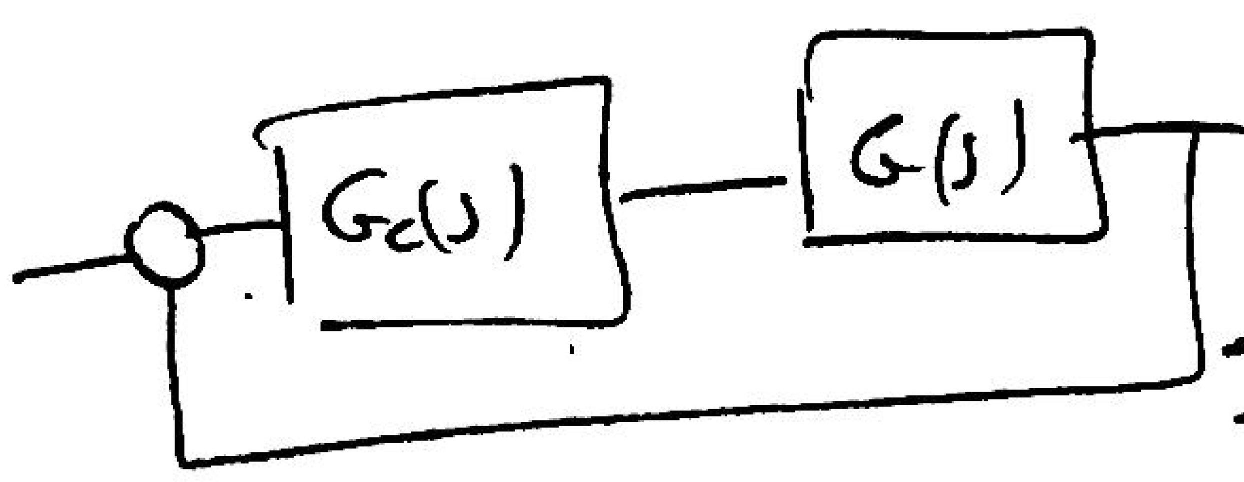
PID control $\quad G_c(s) = K + \frac{K_I}{s} + K_D s$

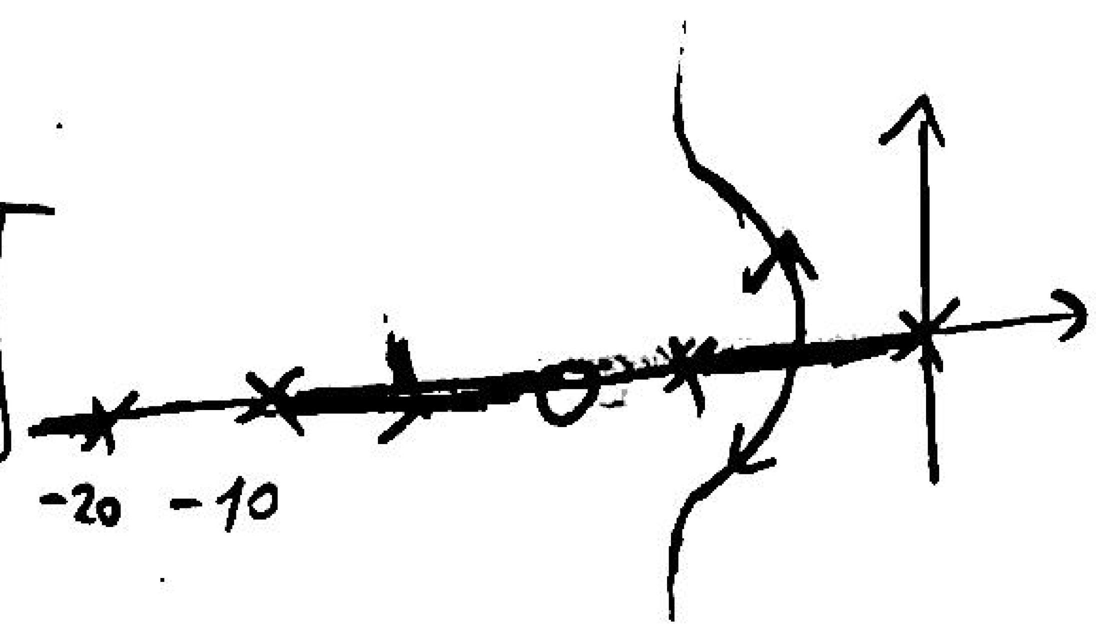
Proportional, Integration, Derivative
P I D.

Example

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

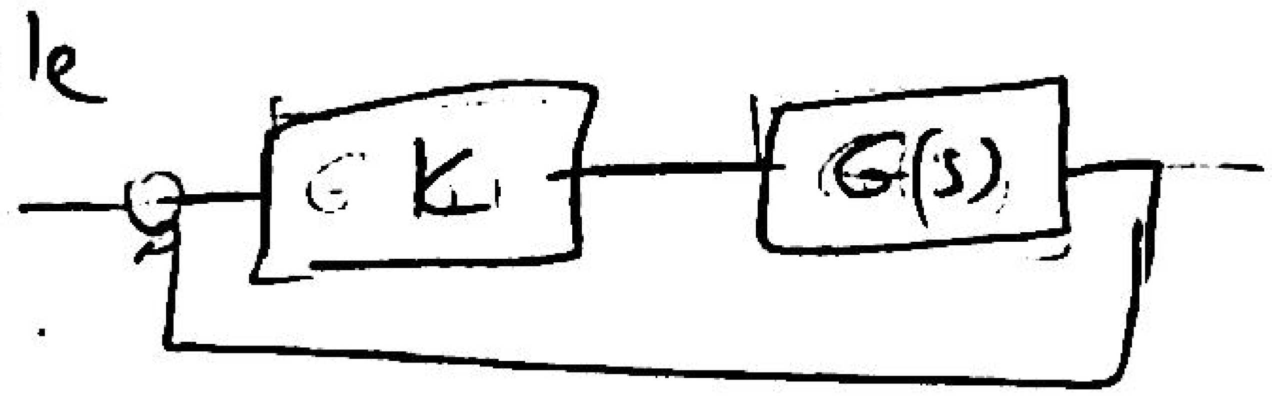




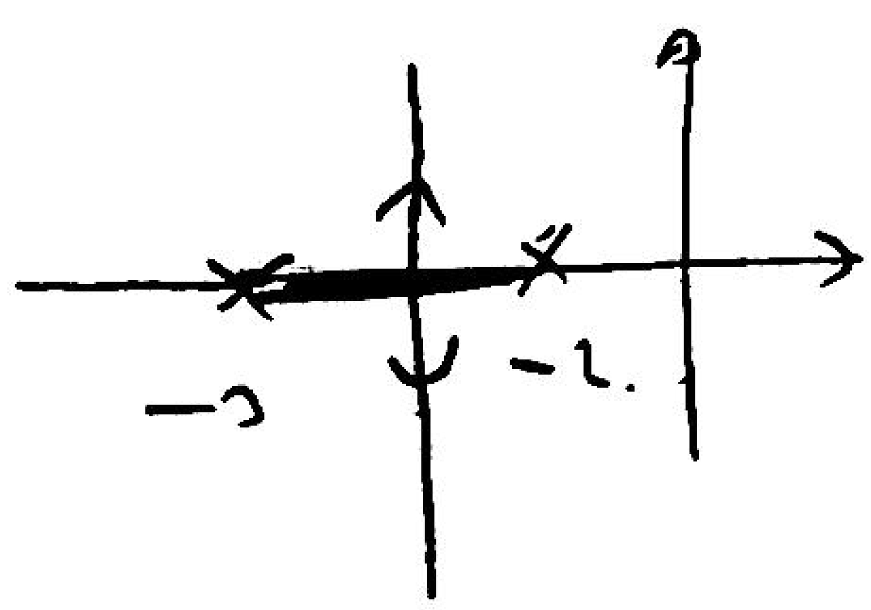


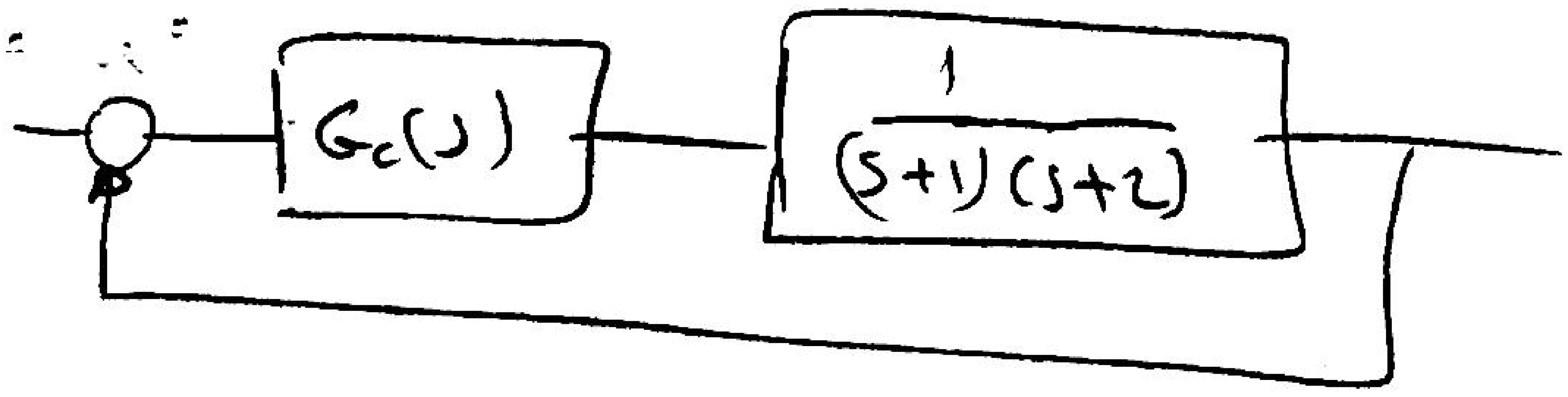
$$G_c(s) = K\frac{s+2}{s+20}$$

Example



$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$



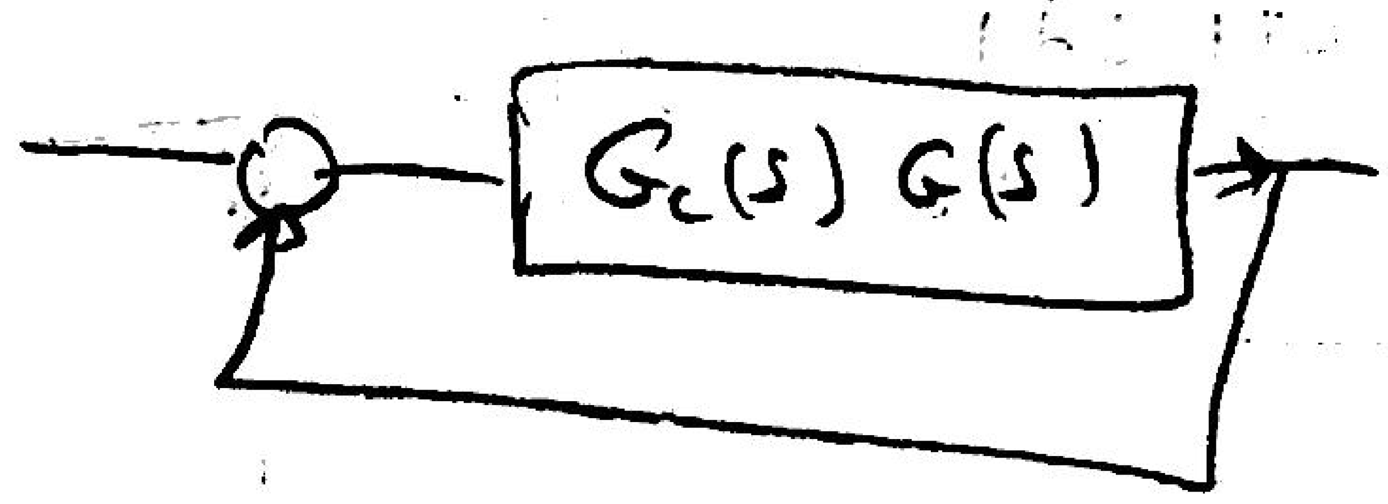


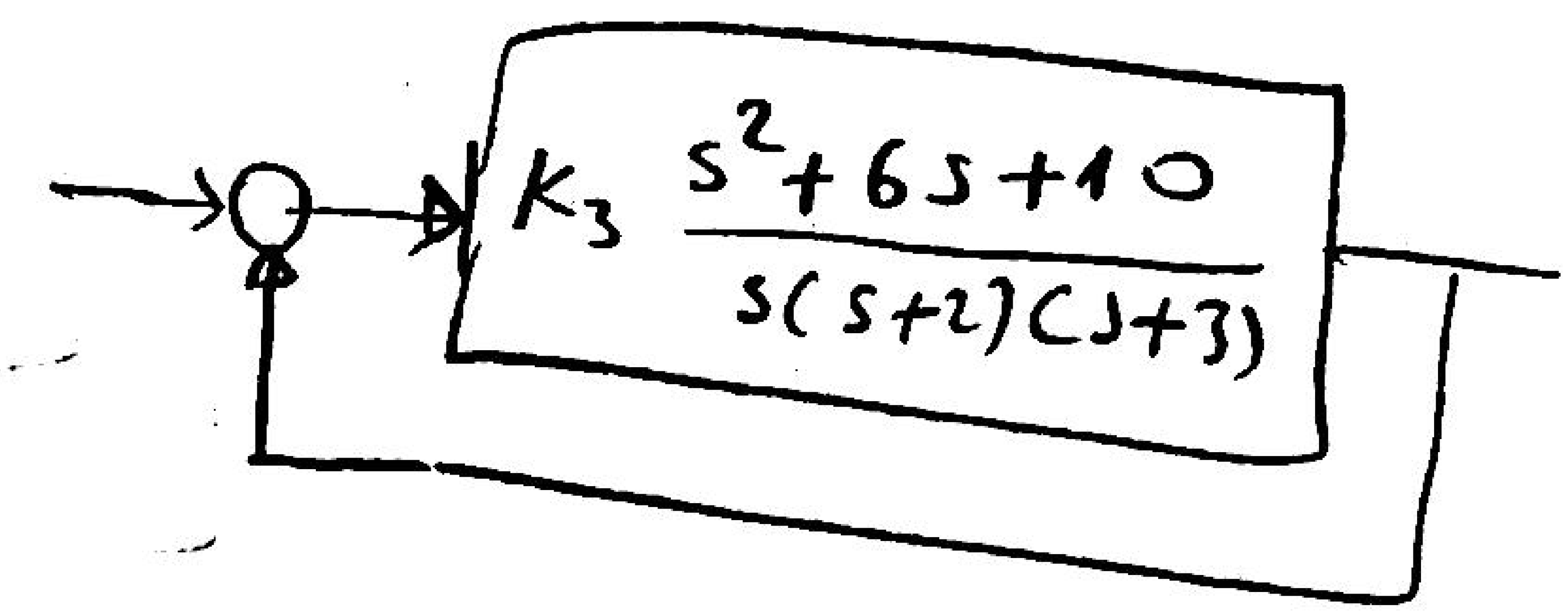
$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s}$$

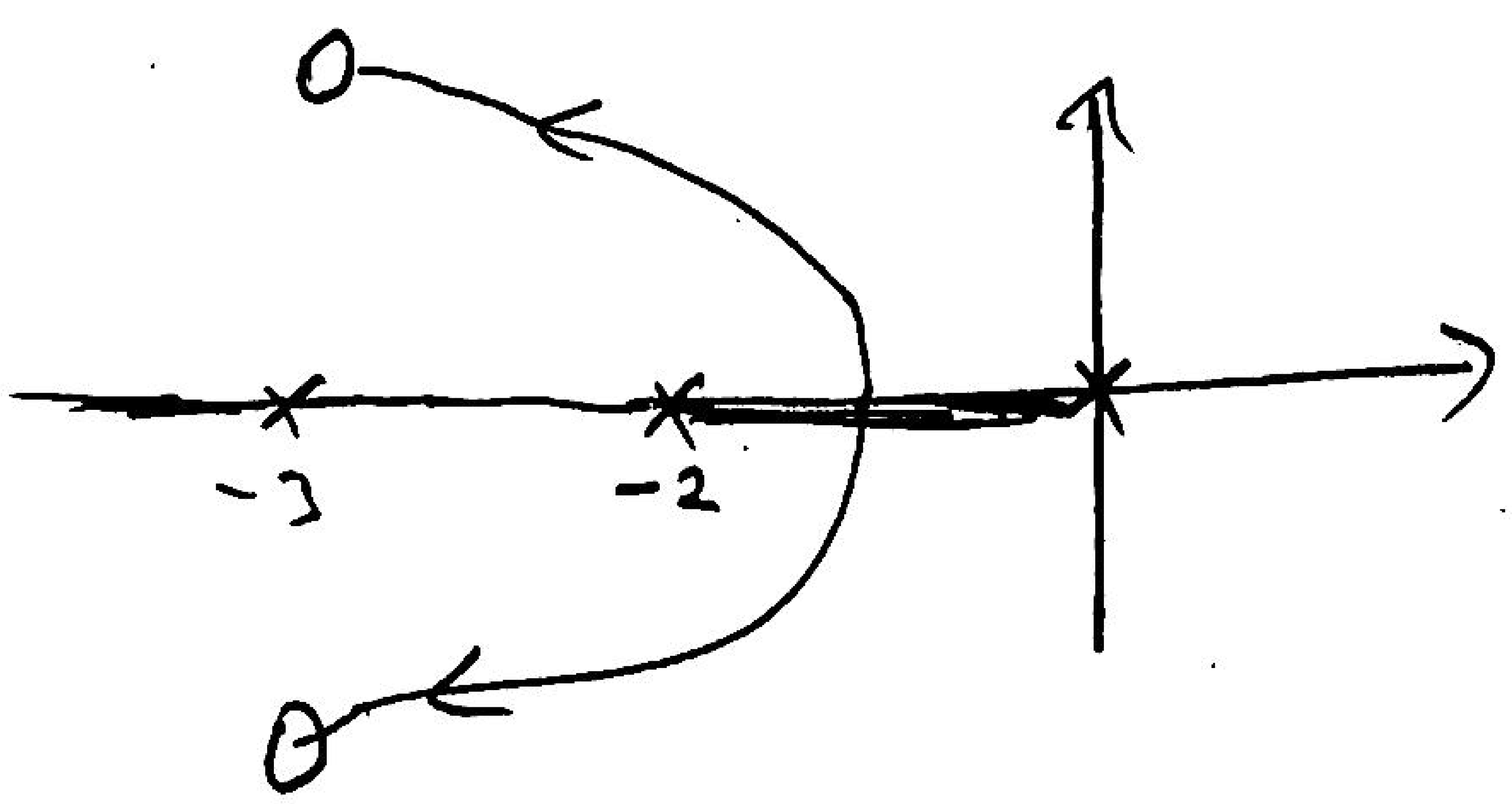
$$= \frac{K_3\left(s^2 + \frac{K_1}{K_3} s + \frac{K_2}{K_3}\right)}{s}$$

Select $\frac{K_1}{K_3} = 6$ $\quad \frac{K_2}{K_3} = 10$

$$G_c(s) = \frac{K_3\,(s^2 + 6s + 10)}{s}$$







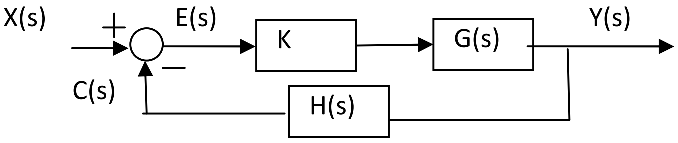
$s^2 + 6s + 10 = 0$

$s_1 = -3 + j$

$s_2 = -3 - j$

We changed the shape of root locus

17)



Y=KGE,   E=X-C,   C=HY
Y=KG(X-HY)=KGX-KGHY
Y+KGHY=KGX
Y(1+KGH)=KGX
Y/X=KG/(1+KGH)

$$G(s) = \frac{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + ... + a_1 s + a_0}{s^N + b_{M-1} s^{M-1} + ... + b_1 s + b_0} = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$H(s) = \frac{c_N s^M + c_{N-1} s^{M-1} + ... + c_1 s + c_0}{s^K + d_{M-1} s^{K-1} + ... + d_1 s + d_0} = \frac{C(s)}{D(s)}$$

seklinde polinomlar oldugundan.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} = \frac{K\frac{A(s)}{B(s)}}{1+K\frac{A(s)}{B(s)}\frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{KA(s)D(s)}{B(s)D(s)+KA(s)C(s)}$$

seklinde yazilabilir. Burada

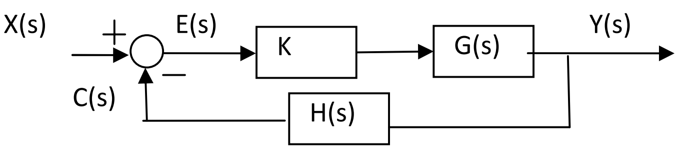
$$G(s)H(s) = \frac{A(s)C(s)}{C(s)D(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

seklinde gosterilirse. Y(s)/X(s)   ifadesinin paydasi

$1+K\frac{P(s)}{Q(s)}$ veya Q(s)+KP(s) seklinde gosterilir.

Paydayi sifir yapandegerler.

$1+K\frac{P(s)}{Q(s)} = 0$ veya Q(s)+KP(s) =0 denklemini saglayan degerlerdir.



tekrar inceleyecek olursak. $G(s)H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ ifadesinin sifirlari ve kutuplarina sistemin acik cevrim transfer fonksiyonunun sifirlari ve kutuplari denir.

$1+K\frac{P(s)}{Q(s)} = 0$ veya Q(s)+KP(s) =0   sartini saglayan s degerlerine de sistemin kapali cevrim kutuplari denir.

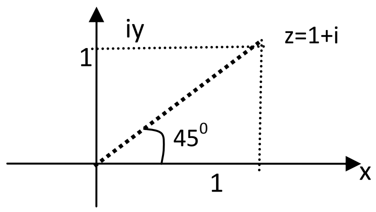
s komplex oldugundan yukaridaki denklemler de koplex olarak dusunulmelidir.

Kompleks sayilar:
1)   a+bi= c+di ise   a=c ve b=d olmalidir.
2)   a+bi= c+di   ise
   | a+bi |=| c+di |, $< (a+bi) = < (c+di)+2k\pi$ sartlari saglanmalidir.
 ($370^0=10^0$), ($400^0=40^0$),
Burada |..|,   genlik anlamidadir.   < aci anlaminda kullanilmistir.

Ornek 61: z=1+i sayisini complex duzlemde gosterin ve kutupsal formda ifade edin.

Cozum: r= $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=1.41$

θ= $\tan^{-1}\frac{1}{1}$ = $\tan^{-1}$ 1 =45^0

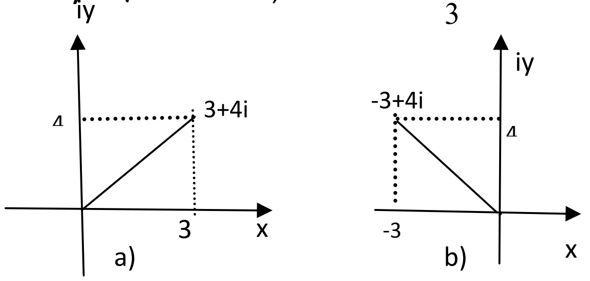


kutupsal form: z=1.41 $\angle$ 45^0

Ornek 51: Asagidaki sayilari complex duzlemde gosterin genlik ve acilarini bulun

a) z_1=3+4i b) z_2=-3+4i c)1 d)-1 e)i f)-i

Cozum: a) r= $\sqrt{3^2+4^2}=5$, θ= $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ = $\tan^{-1}$ 1.3 =53.1^0



c)|1|=1, <1=0^0, d)|-1|=1, <-1=180^0

e)|0+i|=$\sqrt{0^2+1^2}=1$, <i=90^0 f)|-i|=1, <-i=-90^0

-- ------

Kapali cevrim esitliklerine donersek.

$$1+K\frac{P(s)}{Q(s)}=0 \quad ==> \quad \frac{P(s)}{Q(s)}=-\frac{1}{K}$$

Buradan

$$\left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right|=\left|-\frac{1}{K}\right| \quad \text{ve} \quad <\frac{P(s)}{Q(s)}=<-\frac{1}{K}\pm 2m\pi$$

bagintilari elde edilir. Burada $\left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right|=\left|-\frac{1}{K}\right|$ ifadesine genlik kosulu,

$<\frac{P(s)}{Q(s)}=<-\frac{1}{K}\pm 2m\pi$ ifadesine aci kosulu denir. – ifadenin mutlak degeri pozitif tir. negatif reel sayinin acisi 180^0 dir. $<-\frac{1}{K}=180^0$

Koklerin yer egrisi bu iki sarta dayali olarak cizilir.

$$\left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right|=\frac{1}{K}, \qquad <\frac{P(s)}{Q(s)}=180^0\pm 360m=180(2k+1)$$ burada k=0,1,2,3,4,.. tamsayidir.

Ornek problem

$G(s)H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$ olduguna gore. Bu sistem icin genlik ve aci kosulunu uygulayin.

$$\left|\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right| = \frac{1}{K},\quad ==> \ (s+1)(s+2)=K,\quad ==> \quad \sqrt{(s^2+1)}\ \sqrt{(s^2+4)} = K$$

$$< \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 180^0 + 360m \quad ==> \ - <(s+1)\ \ - <(s+2) = 180\ (540,\ 900, 1260, ...),$$

s nin komplex oldugunu varsayalim.

- <(a+bi+1) - <(a+bi+2) =180 (540, 900,1260,...),

$$-\arg\tan\frac{b}{a+1} - \arg\tan\frac{b}{a+2} = 180^0 + 360m$$

Esitligin her iki tarafinin tanjanti alinirsa ve tan(180)=0, oldugu dusunulurse.

$$\tan\left(\arg\tan\frac{b}{a+1} + \arg\tan\frac{b}{a+2}\right) = 0$$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x + \tan y}$ oldugu dikkate alinirsa

$$\tan\left(\arg\tan\frac{b}{a+1} + \arg\tan\frac{b}{a+2}\right) = 0$$

tan x +tan y=0 ve buradan   tan x = -tan y

$$\frac{b}{a+1} = -\frac{b}{a+2}$$

a=-1.5 bulunur. Yani eger s komplex ise (oyle varsaydik) K degistikce s nin reel kismi devamli olarak -1.5 olacaktir. s komplex olmadigi durumda (b=0) a'nin degeri icin bu sart bize bir sey soylemez.

$$G(s)H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

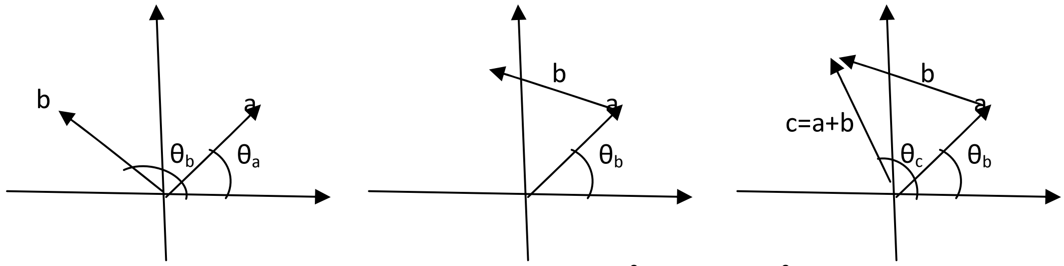
Q(s)+KP(s) = s^2+3s+1+K

K	s^2+3s+1+K=0 kokleri
0	-1 -2
1	-1.5+0.86i, -1.5-0.86i,
2	-1.5+1.32i, -1.5-1.32i,
10	-1.5+3.12i, -1.5-3.12i,
100	-1.5+9.98i, -1.5-9.98i,
0.1	-1,11, -1.88
0.2	-1.27, -1.72
0.25	-1.5, -1.5

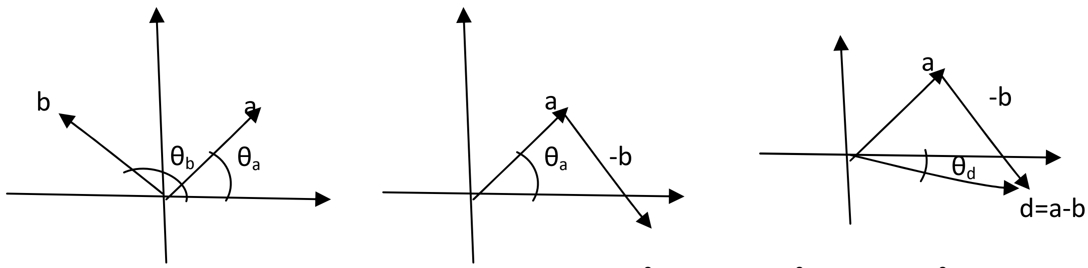
Aci kosulu grafik olarak da incelenebilir

$G(s)H(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}=-\dfrac{1}{\mathrm{K}}$ ifadesinde aci ko sulu, $<\dfrac{\mathrm{P(s)}}{\mathrm{Q(s)}}=180(2k+1)$ seklindedir. Bunu inceleyelim

$$<\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{(s+z_1)(s+z_2)........(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)........(s+z_m)}=180(2k+1)\ ,$$

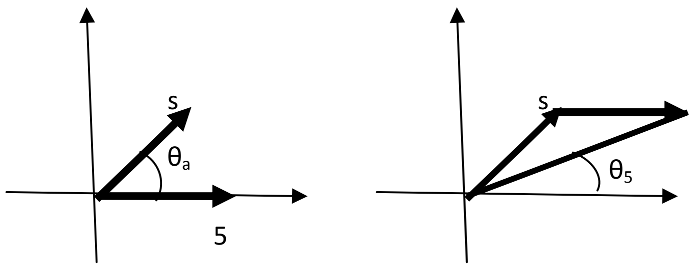


a=3+4i, b=-2+5i, c=a+b = 3+4i -2+5i =-1+9i, <a=53.1^0, <b=111.8^0, <c=96



a=3+4i, b=-2+5i, d=a-b = 3+4i – (–2+5i) =5-i, <a=53.1^0, <b=111.8^0, <d=-11^0,

ACI KOSULUNUN UYGULAMASI (Reel eksendeki bir yer geometrik yere ait mi)
(s+5) in acisi nedir. s genelde bir komplex sayi

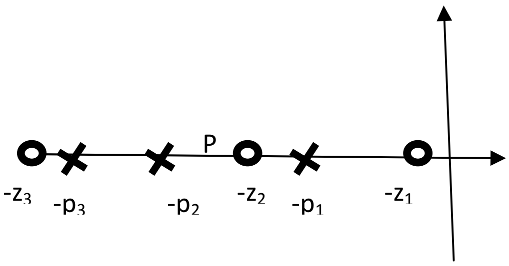


(s+5) in acisi θ_5 olacaktir

s reel bir sayi olsa (s+5)in acisi nedir. Cevap basittir. Eger s>-5 ise (s+5) devamli artidir. Aci sifirdir. (+0.001 rin acisi sifirdir, +10000 nin acisi sifirdir)
Eger s<-5 ise (s+5) devamli eksidir. Aci 180^0 dir.

$<\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{(s+z_1)(s+z_2)........(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)........(s+z_m)}=180(2k+1)$ **kosuluna bakalim. s reel eksende bir nokta olsun.**

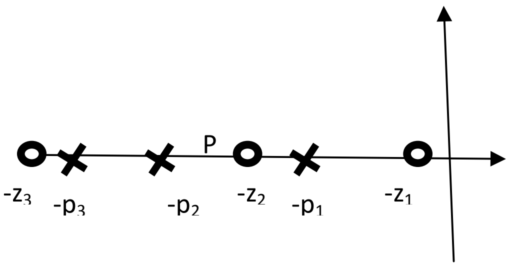
($s+z_1$) eger $s>-z_1$ ise aci sifir, eger $s<-z_1$ ise aci 180^0,
($s+z_2$) eger $s>-z_2$ ise aci sifir, eger $s<-z_2$ ise aci 180^0,
....
($s+p_1$) eger $s>-p_1$ ise aci sifir, eger $s<-p_1$ ise aci 180^0,
($s+p_2$) eger $s>-p_2$ ise aci sifir, eger $s<-p_2$ ise aci 180^0,
....



s P noktasinda olsun.
$<s+z_2=180$. $<s+p_1=180$, $<s+z_1=180$,
$<s+p_2=0$, $<s+p_3=0$, $<s+z_3=0$
Sonuc

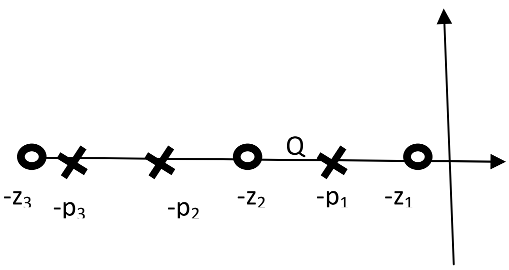
$$< \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)........(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)........(s+z_m)} = 180(2k+1)$$

sartini saglayan bir noktanin saginda kalan (kutup sayisi ve sifir sayisi toplami) tek sayi olmalidir. Solunda kalan kutup ve sifirlarin acisi sifirdir.



s P noktasinda olsun.
$<s+z_2=180$. $<s+p_1=180$, $<s+z_1=180$,
$<s+p_2=0$, $<s+p_3=0$, $<s+z_3=0$

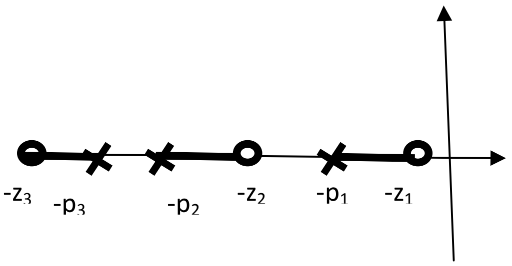
$$\frac{(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = \frac{(180^0)(180^0)(0^0)}{(180^0)(0^0)(0^0)} = 180^0 + 180^0 - 180^0 = 180^0$$



s Q noktasinda olsun.
$<s+z_1=180$,
$<s+z_2=0$. $<s+p_1=0$, $<s+p_2=0$, $<s+p_3=0$, $<s+z_3=0$

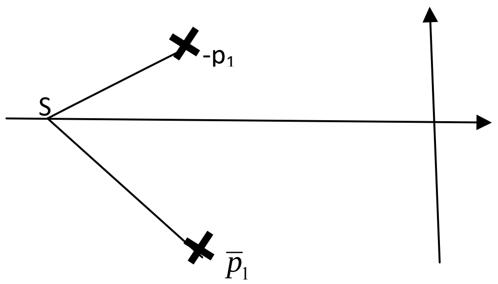
$$\frac{(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = \frac{(180^0)(0^0)(0^0)}{(180^0)(0^0)(0^0)} = 180^0 + 0^0 + 0^0 - 180^0 - 0^0 - 0^0 = 0^0$$

SONUC: Bir noktanin sagindaki kutupsayisi+sifirsayisi tek sayi ise o nokta geometrik yere aittir.



Komplex kok varsa eslenik olmak zorundair.

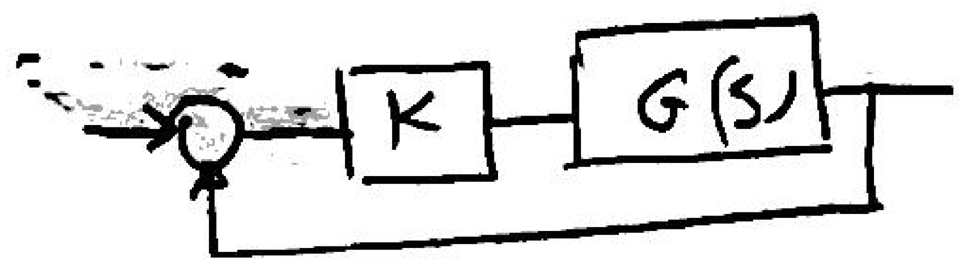
$$\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+\overline{p}_1)(s+p_3)} =$$



Bu durumda $<(s+p_1)+<(s+\overline{p}_1)=0$ **olacaktir. komplex koklerin reel eksendeki geometrik yere etkisi yoktur.**

TABLE 7.2 The Twelve Steps of the Root Locus Procedure

Step	Related Equation or Rule
1. Write the characteristic equation so that the parameter of interest K appears as a multiplier.	$1 + KP(s) = 0.$
2. Factor $P(s)$ in terms of n_p poles and n_z zeros.	$1 + K\dfrac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s+p_j)} = 0.$
3. Locate the open-loop poles and zeros of $F(s)$ in the s-plane with selected symbols.	$\times$ = poles, $\bigcirc$ = zeros, $\square$ or Δ = roots of characteristic equation. Locus begins at a pole and ends at a zero.
4. Locate the segments of the real axis that are root loci.	Locus lies to the left of an odd number of poles and zeros.
5. Determine the number of separate loci, SL.	$SL = n_p$ when $n_p \geq n_z$; n_p = number of finite poles, n_z = number of finite zeros.
6. The root loci are symmetrical with respect to the horizontal real axis.	
7. The loci proceed to the zeros at infinity along asymptotes centered at σ_A and with angles ϕ_A.	$\sigma_A = \dfrac{\sum(-p_j) - \sum(-z_i)}{n_p - n_z}.$ $\phi_A = \dfrac{(2q+1)}{n_p - n_z}180°, q = 0, 1, 2, \ldots (n_p - n_z - 1).$
8. By utilizing the Routh–Hurwitz criterion, determine the point at which the locus crosses the imaginary axis (if it does so).	See Section 6.2.
9. Determine the breakaway point on the real axis (if any).	a) Set $K = p(s)$. b) Obtain $\dfrac{dp(s)}{ds} = 0.$ c) Determine roots of (b) or use graphical method to find maximum of $p(s)$.
10. Determine the angle of locus departure from complex poles and the angle of locus arrival at complex zeros, using the phase criterion.	$\underline{/P(s)} = 180° \pm q360°$ at $s = p_j$ or z_i.
11. Determine the root locations that satisfy the phase criterion.	$\underline{/P(s)} = 180° \pm q360°$ at a root location s_x.
12. Determine the parameter value K_x at a specific root s_x.	$K_x = \left.\dfrac{\prod_{j=1}^{n_p}\lvert(s+p_j)\rvert}{\prod_{i=1}^{n_z}\lvert(s+z_i)\rvert}\right\rvert_{s=s_x}.$

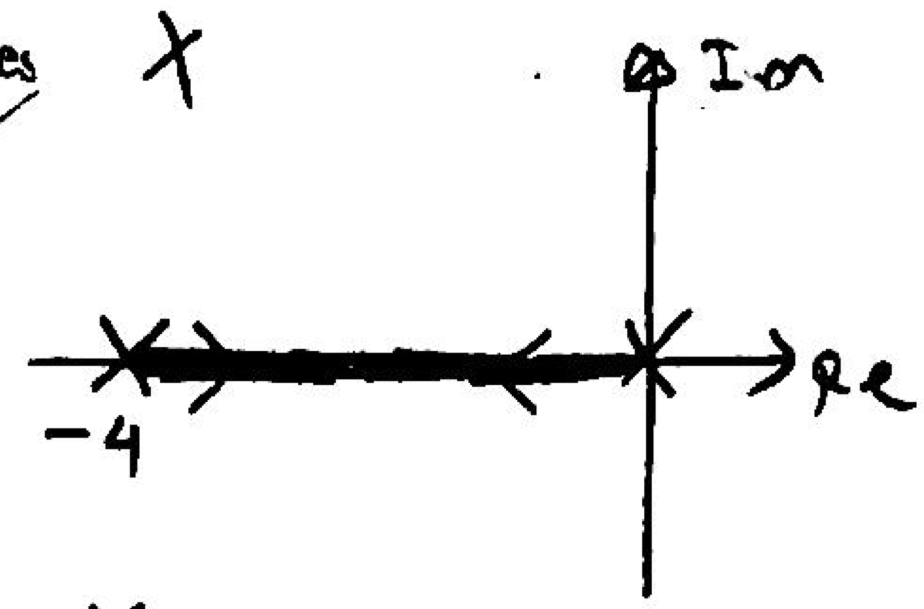


$\frac{Y}{R} = \frac{K\,G(s)}{1+KG(s)}$ $\quad 1+K\,G(s)=0 \quad$ $G(s) = \frac{K}{s^4+12s^3+64s^2+128s}$

Fourth-order system

1. We desire to plot the root locus for the characteristic equation of a system as K varies for $K > 0$, when

$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0.$$



2. Determining the poles, we have

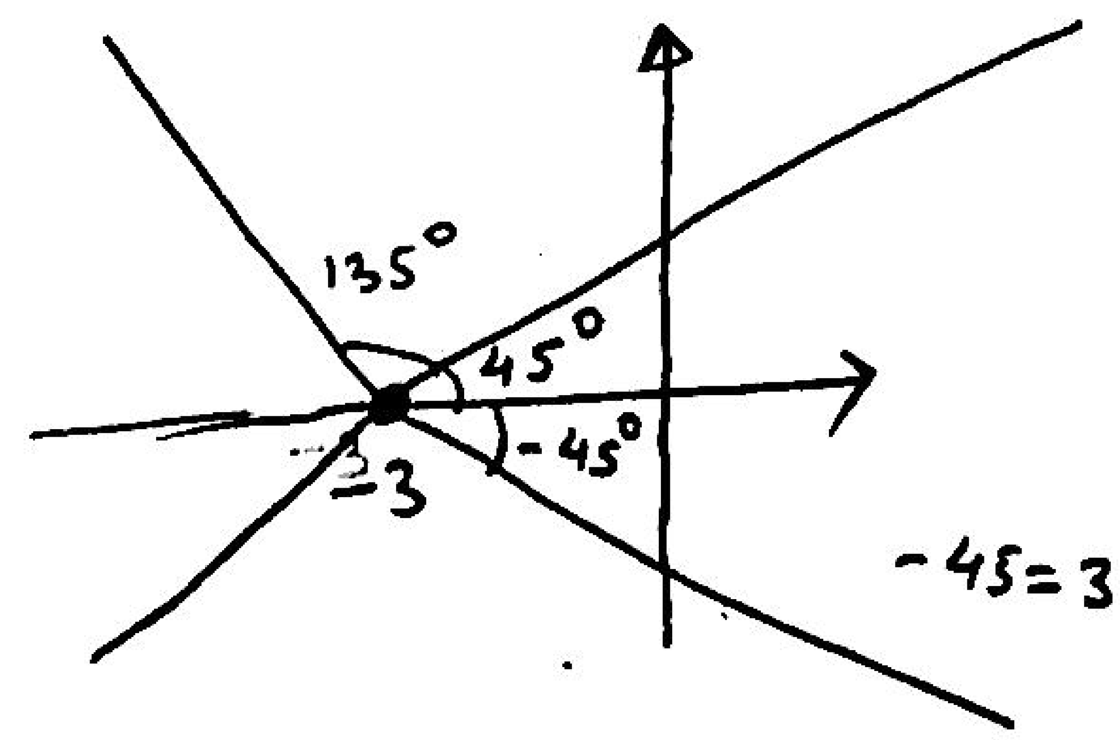
$$1 + \frac{K}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)} = 0$$

as K varies from zero to infinity. This system has no finite zeros.

3. The poles are located on the s-plane as shown in Fig. 7.14(a).
4. A segment of the root locus exists on the real axis between $s = 0$ and $s = -4$.
5. Because the number of poles n_p is equal to 4, we have four separate loci.
6. The root loci are symmetrical with respect to the real axis.
7. The angles of the asymptotes are

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{4}180°, \qquad q = 0, 1, 2, 3;$$

$$\phi_A = +45°, 135°, 225°, 315°.$$



$-45 = 315$

The center of the asymptotes is

$$\sigma_A = \frac{-4-4-4}{4} = -3.$$

Then the asymptotes are drawn as shown in Fig. 7.14(a).

8. The characteristic equation is rewritten as

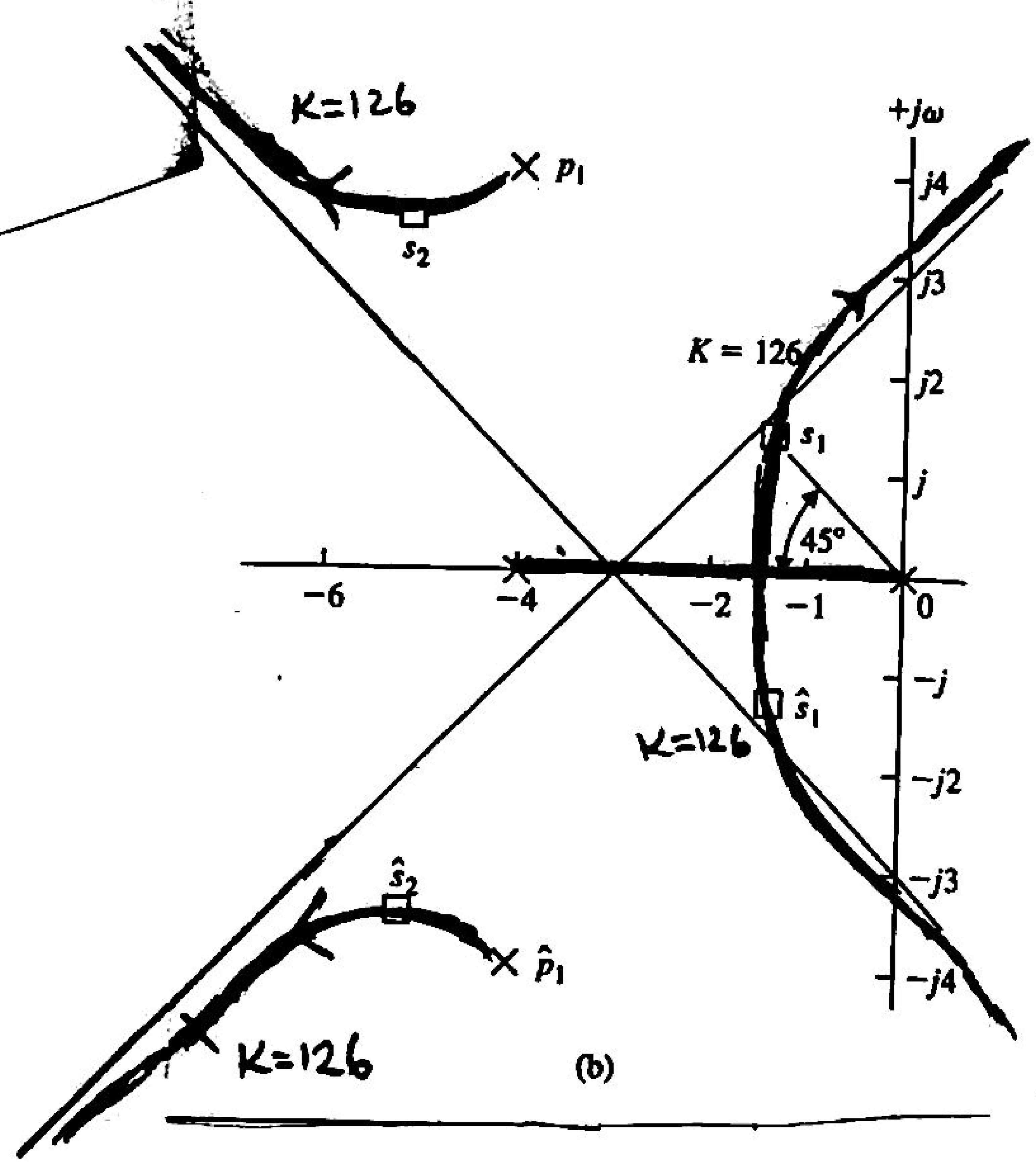
$$s(s+4)(s^2+8s+32) + K = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K = 0. \quad (7.50)$$

Therefore the Routh array is

s^4	1	64 K
s^3	12	128
	b_1	K
	c_1	0
	K	0

$$b_1 = \frac{12 \times 64 - 128}{12} = 53.3 \qquad c_1 = \frac{53.3 \times 128 - 12K}{53.3}$$

$$c_1 > 0 \Rightarrow 53.3 \times 128 - 12K > 0 \qquad K < 568$$



(b)

Tablo 8-2 $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$'a İlişkin Kök Yer Eğrisi Özellikleri

1. $K = 0$ noktaları:	$K = 0$ noktaları $G(s)H(s)$'in kutuplarına karşı düşer, bunlara $s = \infty$'da bulunanlar dahildir.
2. $K = \pm\infty$ noktalar:	$K = \pm\infty$ noktaları $G(s)H(s)$'in sıfırlarına karşı düşer, bunlara $s = \infty$'da bulunanlar dahildir.
3. Bağımsız kol sayısı:	Kök yer eğrisinin bağımsız kol sayısı $F(s) = 0$ denkleminin mertebesine eşittir.
4. Kök yer eğrisi simetrisi:	Kök yer eğrisi $G(s)H(s)$'nin kutup sıfır yerleşimindeki simetri eksenlerine göre simetriktir.

Tablo 8-2 Devamı

5. $s \to \infty$ için asimptotlar: s'in büyük değerleri için, $i = 0, 1, 2, \cdots, |n-m|-1$, ve
$n = G(s)H(s)$'in sonlu kutup sayısı,
$m = G(s)H(s)$'in sonlu sıfır sayısı olmak üzere,
PKE (K > 0) eğrileri açıları

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|} \times 180^\circ$$

NKE (K < 0) eğrileri ise, açıları

$$\theta_i = \frac{2i}{|n-m|} \times 180^\circ$$

olan asimptotlara asimptotik olarak yaklaşır.

6. Asimptotların kesişmesi: (a) asimptotlar s- düzleminde gerçek eksen üzerinde kesişir.
(b) asimptotların keşisme noktası aşağıdaki ilişkiyle belirlenir:

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma G(s)H(s) \text{ kutupları gerçek kısımları} - \Sigma G(s)H(s) \text{ sıfırları gerçek kısımları}}{n-m}$$

7. Gerçek eksendeki kök eğrileri: Gerçek eksen üzerinde bir kısmın PKE (K > 0) olması için kısmın **sağında** bulunan tüm $G(s)H(s)$ gerçek kutup ve sıfırların toplamı **tek** olmalıdır. Eğer kısmın sağında bulunan tüm $G(s)H(s)$ gerçek kutup ve sıfırların toplamı **çift** ise kısım NKE'ye (K < 0) ilişkindir.

8. Çıkış ve giriş açıları: $G(s)H(s)$'in kutup ve sıfırlarında giriş ya da çıkış açıları, s_1 kutup ya da sıfıra çok yakın bir nokta olmak üzere, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ için,

$$\begin{aligned}\angle G(s_1)H(s_1) &= \sum_{k=1}^{m} \angle(s_1 + z_k) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s_1 + p_j) \\ &= 2(i+1) \times 180^\circ \quad \text{PKE} \\ &= 2i \times 180^\circ \quad \text{NKE}\end{aligned}$$

ilişkilerinden türetilebilir.

9. Kök eğrisinin sanal ekseni kesme noktaları: Kök eğrisinin sanal ekseni kesme noktaları ve bu kesme noktalarına ilişkin K değerleri Routh-Hurwitz kriteri uygulanarak bulunur.

10. Kopma noktaları: Kök eğrisinin kopma noktaları $dK/ds = 0$ ya da $G(s)H(s)/ds = 0$ denklem köklerinden belirlenir. Bunlar sadece gerek koşullardır.

11. Kök eğrisi üzerindeki bir noktaya ilişkin K değeri: Kök eğrisi üzerindeki herhangi bir s_1 noktasına ilişkin mutlak K değeri

$$|K| = \frac{1}{|G_1(s_1)H_1(s_1)|}$$

ilişkisinden türetilebilir.

Aşağıdaki örnek Tablo 8-2'de verilen tüm kök eğri özelliklerinin adım adım uygulanışını ve kök eğrisinin elle nasıl çizilebileceğini sergilemektedir.

Örnek 8-17

$$s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+K(s+3)=0 \tag{8-73}$$

denklemini göz önünde bulunduralım. Bu denklem K'sız terimlere bölünürse

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} \tag{8-74}$$

elde edilir. Kök eğrisi aşağıdaki özelliklerden yararlanılarak belirlenebilir:

1. $K=0$ noktaları $G(s)H(s)$'in kutuplarına karşı düşer: $s=0, -5, -6, -1+j$ ve $-1-j$.
2. $K=\pm\infty$ noktaları G(s)H(s)'in sıfırlarına karşı düşer: $s=-3, \infty, \infty, \infty, \infty$.
3. Kök eğrisinin beş bağımsız kolu vardır.
4. Kök eğrisi s-düzleminde gerçek eksene göre simetriktir.
5. $G(s)$'in sonlu beş kutbu ve bir sıfırı bulunduğuna göre PKE ve NKE sonsuza asimplotlar boyunca yaklaşır. PKE'ye ilişkin asimptot açıları (8-33) ilişkisi gereği, $i=0, 1, 2, 3$ için,

$$\theta_i=\frac{2i+1}{|n-m|}180^\circ=\frac{2i+1}{|5-1|}180^\circ \quad , \quad 0\le K<\infty \tag{8-75}$$

ifadesinden hesaplanır. Buna göre K sonsuza yaklaşırken kök eğrileri 45°, −45°, 135° ve −135° asimplot açılarıyla sonsuza yaklaşır. NKE'ye ilişkin asimptot açıları ise (8-34) ilişkisi gereği, $i=0, 1, 2, 3$ için,

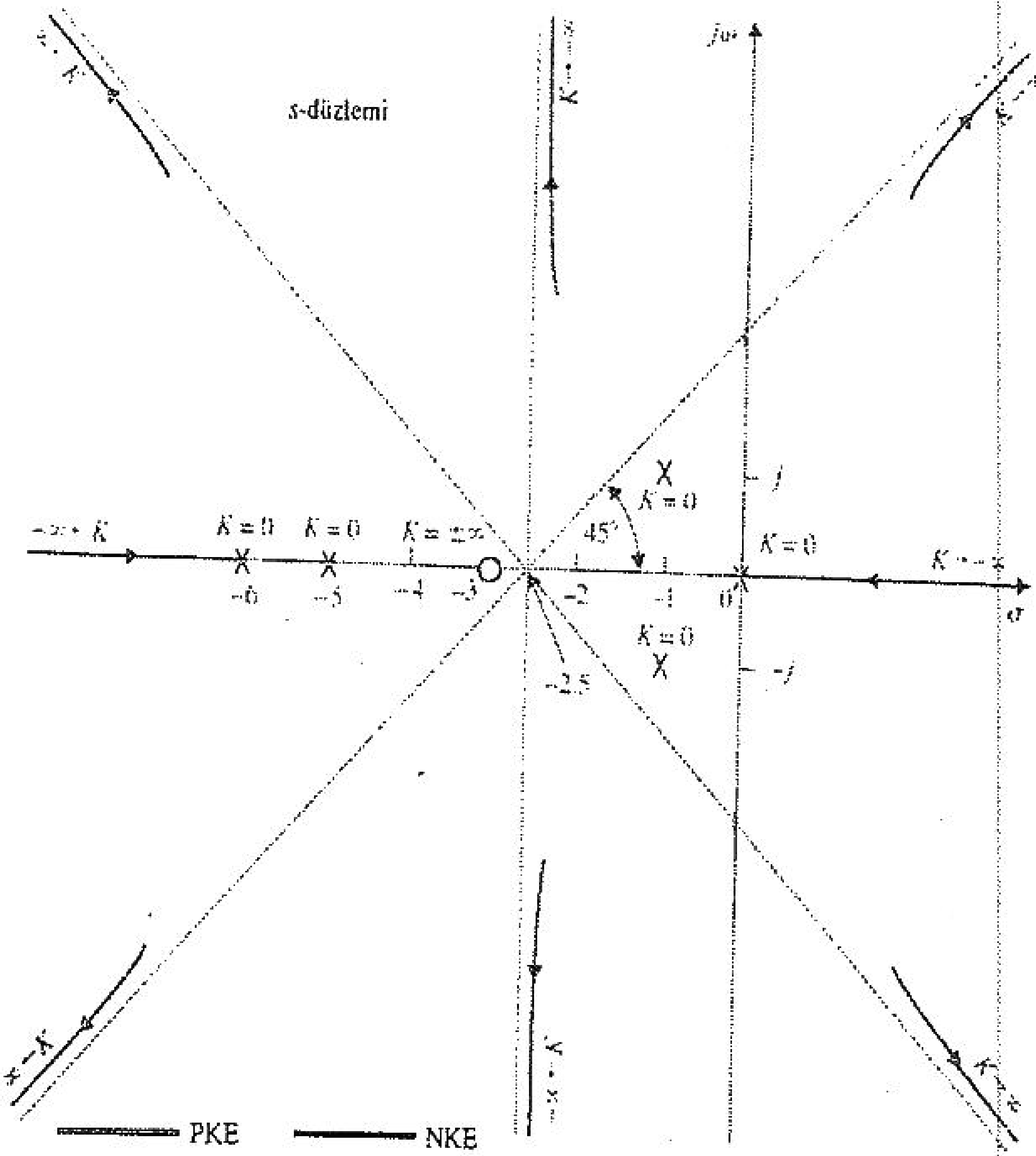
$$\theta_i=\frac{2i}{|n-m|}180^\circ=\frac{2i}{|5-1|}180^\circ \qquad -\infty<K\le 0 \tag{8-76}$$

ifadesinden elde edilir. Buna göre K değeri $-\infty$'a yaklaşırken NKE eğrisi sonsuza 0°, 90°, 180° ve 270°'lik asimptot açılarıyla yaklaşır.

6. Asimptotların kesişme noktası (8-36) ilişkisinden şu şekilde hesaplanır:

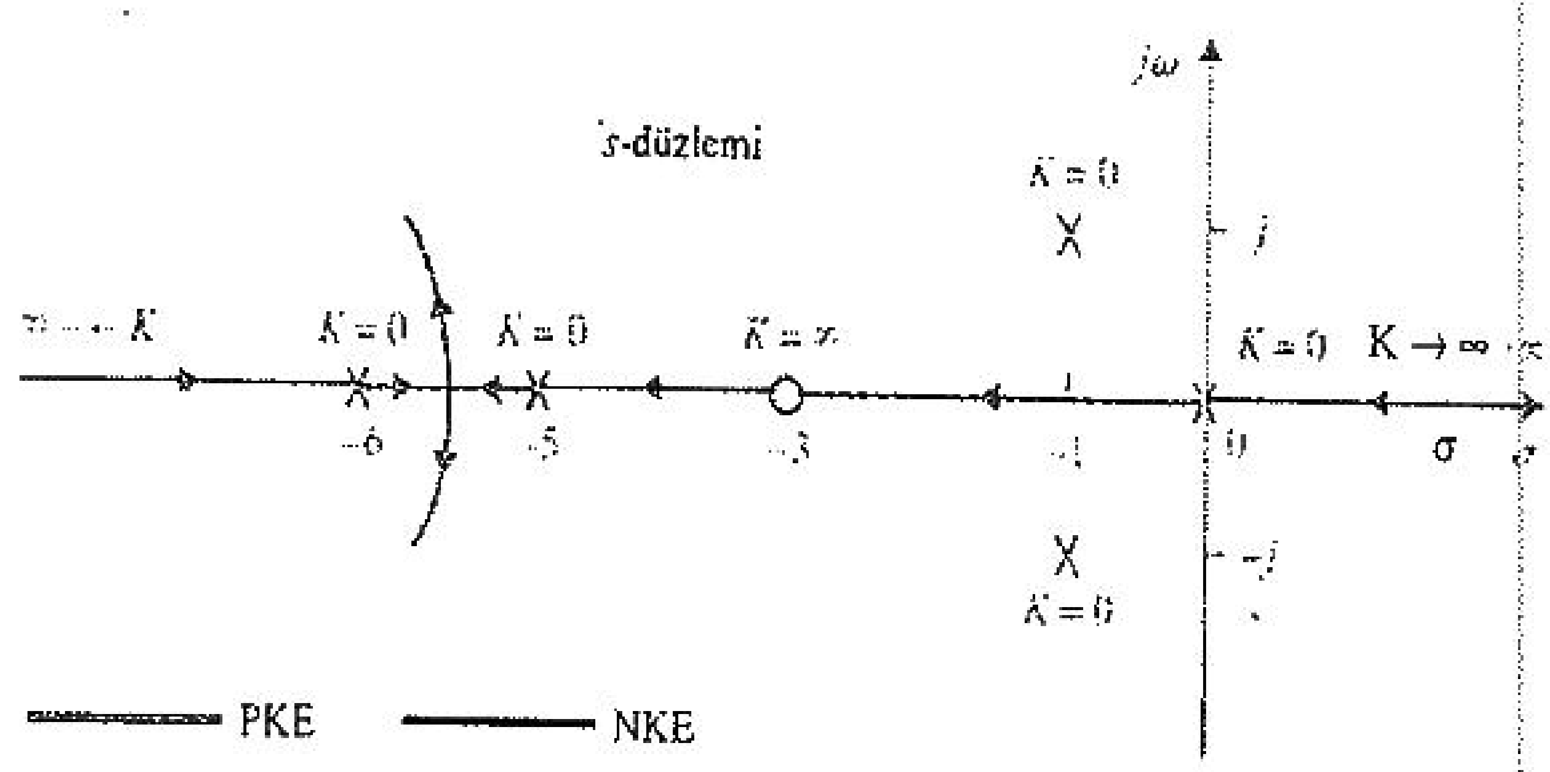
$$\sigma_1=\frac{\Sigma(-5-6-1-1)-(-3)}{4}=-2.5 \tag{8-77}$$

Yukarıdaki altı adımda ulaşılan sonuçlar Şekil 8-18'da verilmiştir. Genelde asimptot özelliği kök eğrisinin asimptotun hangi tarafında bulunduğunu belirtmez. Asimptot kök eğrisinin sadece $s\to\infty$ için davranışını verir. Kök eğrisi asimptotu sonlu s- değerlerinde kesebilir. Şekil 8-18'de görülen PKE ve NKE kök eğrileri ancak ilave bilgiler elde edildikten sonra doğru çizilebilir.



Şekil 8-18 $s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+K(s+3)=0$ denklemine ilişkin öncül kök eğri hesapları.

7. Gerçek eksen üzerindeki kök eğrileri: PKE eğrileri $s = 0$ ile -3 arasında ve $s = -5$ ile -6 arasında bulunur. Gerçek eksenin geri kalan $-\infty$ ile 0, -3 ile -5 ve -6 ile $-\infty$ kısımları, Şekil 8-19'da görüldüğü gibi, NKE'ye ilişkindir.



Şekil 8-19 $s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+K(s+3)=0$ kök eğrisinin gerçek eksen üzerindeki yerleşimi.

8. Çıkış açıları: $-1 + j$ kutbundan PKE'ye ait θ çıkış açısı (8-18) ilişkisinden yararlanılarak bulunur. Şekil 8-20'de görüldüğü gibi s_1 eğer $-1 + j$ kutbuna çok yakın bir PKE noktası ise (8-18) ilişkisinden

$$\angle(s_1 + 3) - \angle s_1 - \angle(s_1 + 1 + j) - \angle(s_1 + 5) - \angle(s_1 + 1 - j) = (2i + 1)\,180^\circ \tag{8-78}$$

ya da, $1 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ için,

$$26.6^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 14^\circ - 11.4^\circ - \theta \cong (2i + 1)180^\circ \tag{8-79}$$

yazılabilir. Eğer $i = 2$ seçilirse

$$\theta \cong -43.8^\circ \tag{8-80}$$

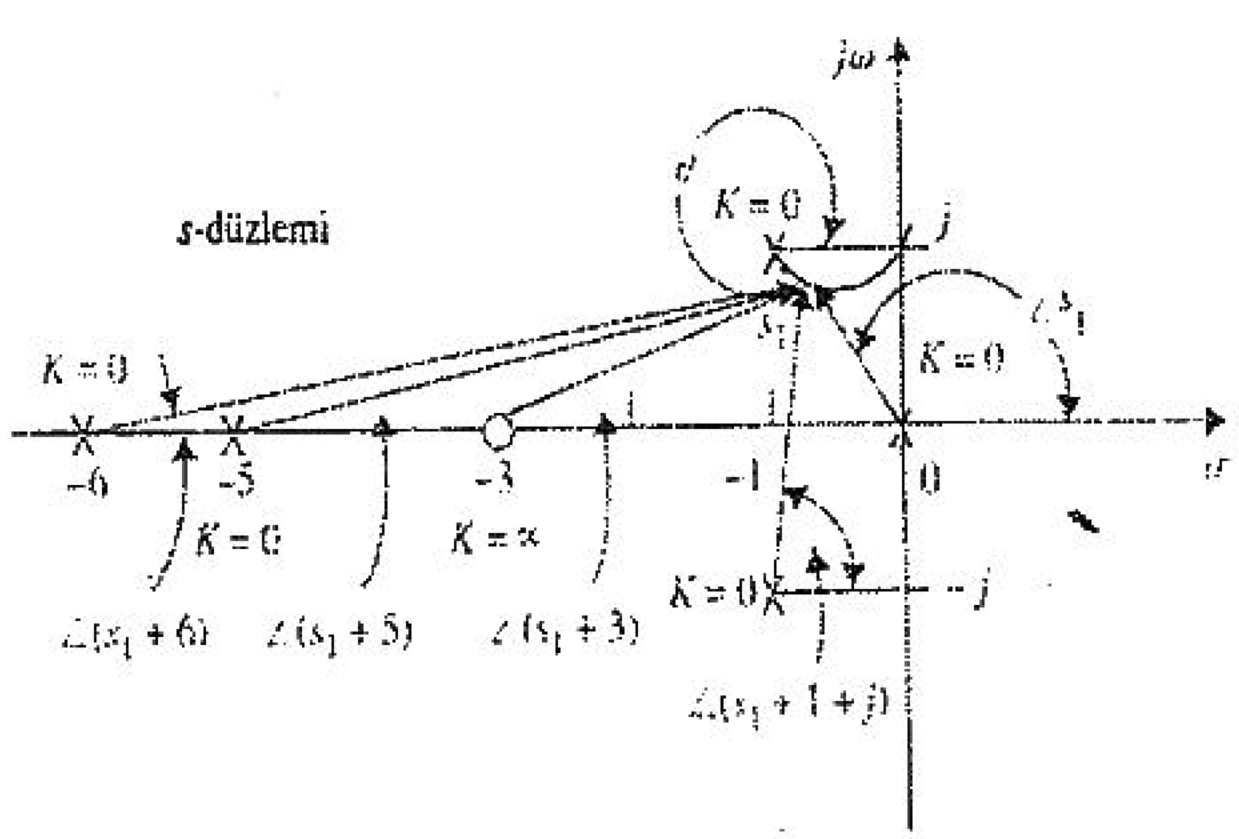
bulunur. Benzer şekilde NKE'ye ait $-1 + j$ kutbuna θ' giriş açısını bulmak için (8-19) ilişkisi kullanılırsa θ' açısının θ açısından 180° farklı olduğu görülür:

$$\theta' = 180^\circ - 43.8^\circ \cong 136.2^\circ \tag{8-81}$$

9. Kök eğrisinin sanal ekseni kesme noktası Routh tablosundan yararlanılarak bulunur. (8-73) denklemi

$$s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + K)s + 3K = 0 \tag{8-82}$$

şeklinde yazılırsa Routh tablosu



Şekil 8-20 $s(s + 5)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0$ denklemine ilişkin kök eğrisinde çıkış açısının belirlenmesi.

s^5	1	54	$60+K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	47.7	$0.769K$	0
s^2	$65.6-0.212K$	$3K$	0
s^1	$\dfrac{3940-105K-0.163K^2}{65.6-0.212K}$	0	0
s^0	$3K$	0	0

olarak elde edilir. (8-82) denkleminin sağ yarı s-düzleminde ya da sanal eksen üzerinde kökü bulunmaması için Routh tablosunun birinci sütunundaki elemanların işaretleri aynı olmalıdır. Buna göre aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerekir:

$$65.6-0.212K>0 \quad \text{yada} \quad K<309 \tag{8-83}$$

$$3940-105K-0.163K^2>0 \quad \text{yada} \quad K<35 \tag{8-84}$$

$$K>0 \tag{8-85}$$

Buna göre (8-82) denkleminin tüm kökleri sol yarı s-düzleminde bulunması için K değeri 0 ile 35 arasında olmalıdır, özellikle $K=35$ ve $K=0$ için kök eğrisi sanal ekseni keser. $K=35$ için eğrinin sanal ekseni kesme noktası

$$A(s)=(65.6-0.212K)s^2+3K=0 \tag{8-86}$$

yardımcı denkleminden belirlenebilir. s^2 satırı elemanlarında oluşan (8-86) denklemine s^1 satırını sıfırlayan $K=35$ değeri uygulanırsa

$$58.2s^2+105=0 \tag{8-87}$$

elde edilir. (8-87) denkleminin $s=j\,1.34$ ve $s=-j\,1.34$ kökleri kök eğrisinin $j\omega$ - eksenini kestiği noktaları verir.

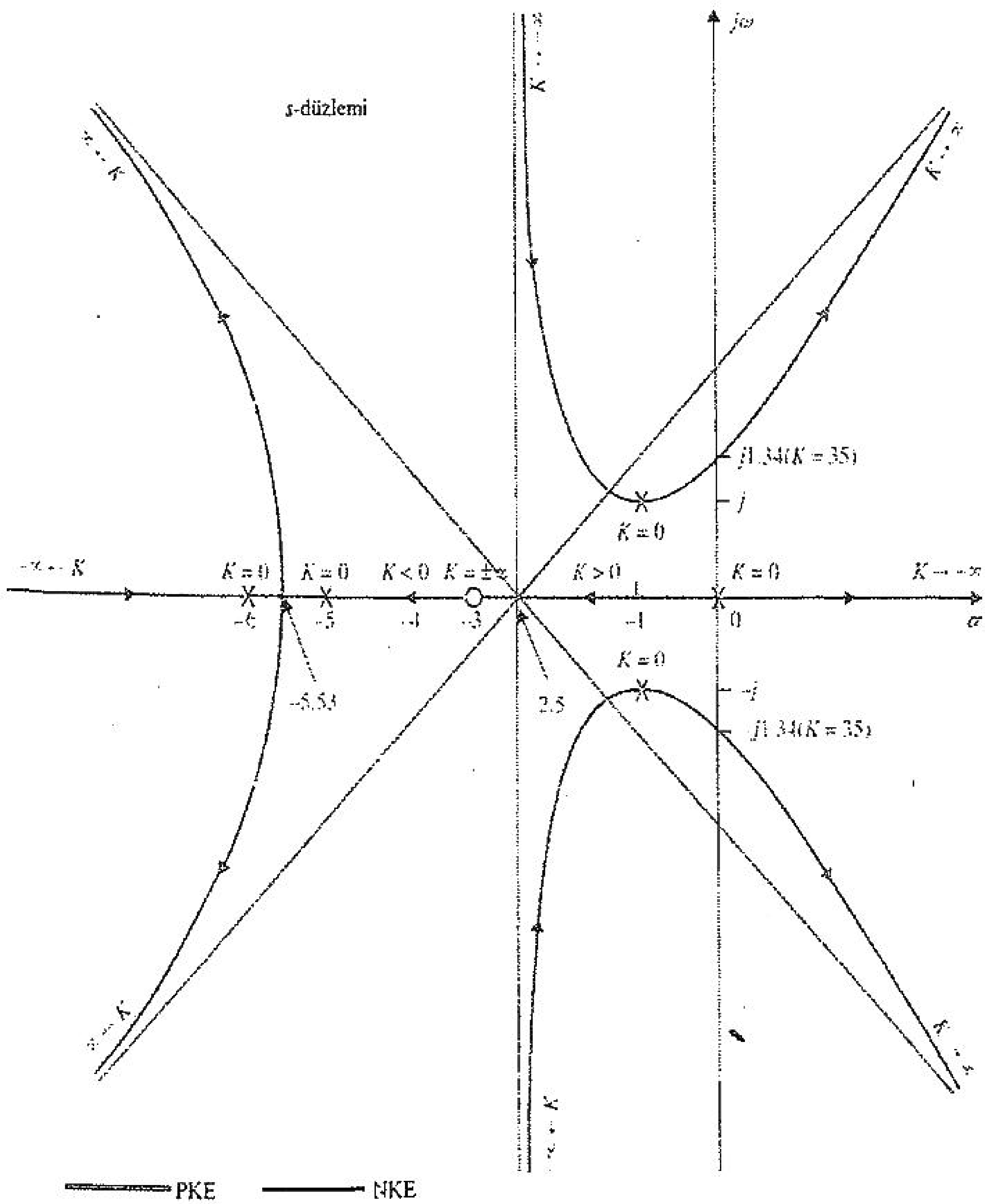
10. Kopma noktaları: Önceki dokuz adıma dayanılarak yapılan bir deneme çiziminden kök eğrisi üzerinde $G(s)H(s)$'in $s=-5$ ile -6 kutupları arasında sadece bir tek kopma noktası bulunabileceği görülür. Bu kopma noktasını bulabilmek için eğer (8-74) denkleminin s'ye göre türevi alınır ve sıfırlanırsa

$$s^5+13.5s^4+66s^3+142s^2+123s+45=0 \tag{8-88}$$

elde edilir. Sadece bir kopma noktası beklendiğinden (8-88) denkleminin sadece bir kökü kopma noktasını verir. (8-88)'in beş kökü

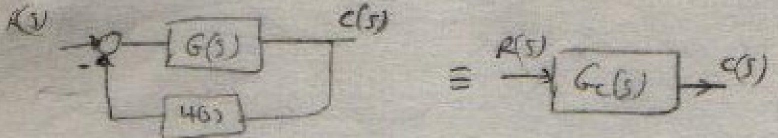
$$s = -3.33 + j1.204 \qquad s = -3.33 - j1.204$$
$$s = -0.656 + j0.468 \qquad s = -0.656 - j0.468$$
$$s = -5.53$$

olarak bulunur. Şüphesiz ki -5.53 aranan kopma noktasıdır. Diğer dört kök (8-82) denklemini sağlamadığından kopma noktası değildir. Son 10 adımda elde edilen bilgilerden yararlanılarak (8-82) denklemine ait kök eğrisi Şekil 8-21'de görüldüğü gibi elde edilir. ▲



Şekil 8-21 $s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) + K(s+3) = 0$ denklemine ilişkin kök eğrisi.

Köklerin Geometrik Yeri



$$G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}$$

Problem: G(s) ve H(s) nin kutuplarını (paydalarının köklerini) biliyoruz. $G_c(s)$ nin kutupları ne olur? Nasıl hesaplanır.

Örnek ① $G(s) = \frac{1}{s+10}$ $H(s) = 2$

$$G_c(s) = \frac{1/(s+10)}{1+2\cdot \frac{1}{(s+10)}} = \frac{1}{s+10+2} = \frac{1}{s+12}$$

G(s) in kutbu −10

$G_c(s)$ in kutbu −12

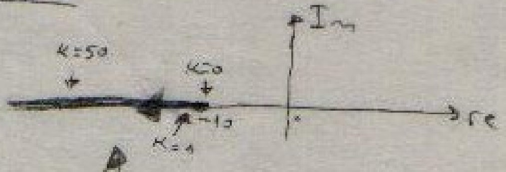
Örnek ②

$G(s) = \frac{1}{s+10}$ $H(s) = K$ K=0 dan K=∞ kadar değişirse

$G_c(s)$ in kutbu nasıl değişir.

$$G_c(s) = \frac{1/(s+10)}{1+K\cdot 1/s+10} = \frac{1}{s+10+K}$$

K	$G_c(s)$ in kutbu
0	−10
1	−11
2	−12
50	−62
100	−112
∞	−∞



$G_c(s)$ in kutbunun (payda polinomunun kökünün) geometrik yeri.

Örnek ③

$G(s) = \frac{s}{s+1}$ $H(s) = K$

$$G_c(s) = \frac{s/(s+1)}{1+K\cdot s/(s+1)} = \frac{s}{s+1+Ks} = \frac{s}{(K+1)s+1}$$

K	$G_c(s)$ in kutbu
0	-1
1	$-\frac{1}{2}$
10	$-\frac{1}{10}$
100	$-\frac{1}{100}$
∞	$-\frac{1}{\infty} = 0$

$G_c(s)$ in kutbunun geometrik yeri

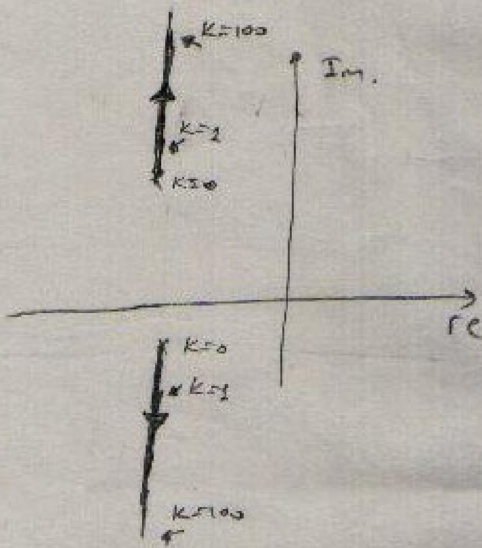
görüldüğü gibi $G_c(s)$ in paydasının kökleri demek $1+G(s)H(s)$ polinomunun payının kökleri demektir. Köklerin geometrik yerini incelemek için $1+G(s)H(s)$ yi incelemek yeterlidir.

Örnek (5)

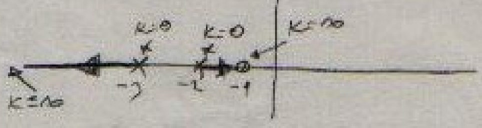
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^2+2s+5}$$

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K}{s^2+2s+5} \Rightarrow s^2+2s+5+K=0$$

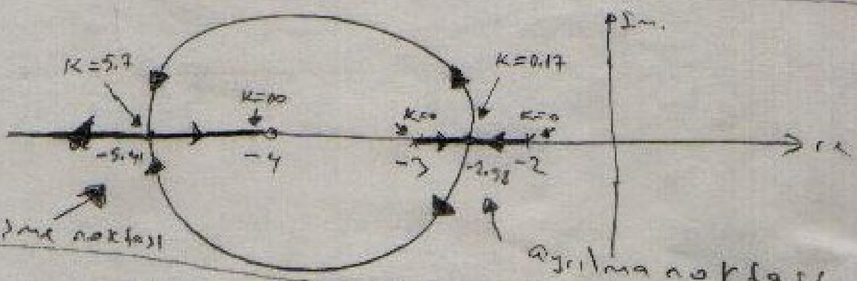
K	$G_c(s)$ in kutupları $G_c(s)$ in payda polinomunun kökleri $1+G(s)H(s)$ nin pay polinomunun kökleri	
0	$-1+2j$	$-1-2j$
1	$-1+\sqrt{5}j$	$-1-\sqrt{5}j$
⋮		
100	$-1+\sqrt{104}j$	$-1-\sqrt{104}j$
1000	$-1+\sqrt{1004}j$	$-1-\sqrt{1004}j$



$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$



$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{(s+2)(s+3)}$$



Köklerin geometrik yerini bu şekilde nümerik olarak hesaplamak kolay değildir. Geometrik yeri bulan metodlar geliştirilmiştir.

— o —

Bizden istenen

$1+G(s)H(s)=0$ denklemini sağlayan s değerleridir (Bu s değerleri $G_c(s)$ in paydasının kökleridir.)

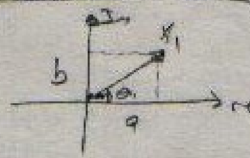
$$G(s)H(s)=-1 \Rightarrow \underset{(A1)}{|G(s)H(s)|=1} \qquad \underset{(A2)}{\angle G(s)H(s)=-\pi \mp 2k\pi} \quad (k=1,2,\ldots)$$

burada $|\ |$ genliği $\angle$ açıyı gösterir

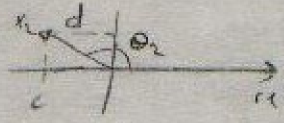
$G(s)H(s) = s+4$ $\quad s = 3+5j$ için $|G(s)H(s)| = |3+5j+4| = \sqrt{(3+4)^2+4^2} = \sqrt{65}$

$\angle G(s)H(s) = \angle(3+5j+4) = \arctan \frac{5}{(4+3)} = 35.5^\circ = 0.19\pi$

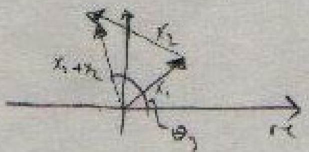
Açıların hesabı



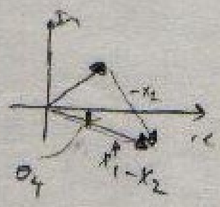
$x_1 = a+bj \quad |x_1| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \angle x_1 = \arctan \frac{b}{a} = \theta_1$



$x_2 = c+dj \quad |x_2| = \sqrt{c^2+d^2} \quad \angle x_2 = \arctan \frac{d}{c} = \theta_2$



$\theta_3 = \angle(x_1+x_2) = \angle(a+bj+c+dj) = \angle a+c+j(b+d) = \arctan \frac{b+d}{a+c} = \theta_3$



$\theta_4 = \angle(x_1-x_2) = \angle a+bj-(c+dj) = \angle(a-c)+j(b-d) = \arctan \frac{b-d}{a-c}$

A2 denklemini tekrar yazarsak

$\angle G(s)H(s) = -\pi \mp 2K\pi = -180 \mp 360$

$1+G(s)H(s)=0$ denklemini sağlayan bütün s ler bu denklemi de sağlayacaktır.

G(s) H(s) ifadesi $G(s)H(s) = K \cdot \frac{a(s)}{b(s)}$ biçiminde yazılabilir. G(s) ve H(s) kesirli polinomlar olduğundan G(s) H(s) de $K \frac{a(s)}{b(s)}$ biçimindedir.

Bizden istenen $K=0$ dan $K=\infty$ kadar değişirse G(s) in kutupları ($1+G(s)H(s)$ denklemin kökleri) nasıl değişir.

Köklerin geometrik yeri için temel kurallar

1) Karakteristik denklemi elde et. $1+G(s)H(s)=0$

$$1+K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = 0 \qquad (A\ 4)$$

2) Köklerin geometrik yeri $K=0$ için G(s) H(s) nin kutupları ($p_1\ p_2\ p_{..}\ p_n$) ve $K=\infty$ için G(s) H(s) nin sıfırları ($z_1\ z_2 \ldots z_m$) dir.

ispat (A4) denklemi

$$(s+p_1)(s+p_2)\cdot(s+p_n) + K\cdot(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m) = 0 \qquad \text{şeklinde yazılır}$$

(A5)

K=0 yazılırsa denklemin kökleri $p_1\ p_2 \ldots p_n$ olduğu görülür.

(A5) denkleminin her iki tarafı K ya bölünürse

$$\frac{1}{K}(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)+(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)=0 \qquad (A6)$$

$K=\infty$ verilirse köklerin $z_1\ z_2 \ldots z_m$ olduğu görülür.

Köklerin geometrik yeri G(s) H(s) nin kutuplarından başlar sıfırlarında biter.

$n_p \rightarrow$ G(s) H(s) nin kutup sayısı

$n_z \rightarrow$ G(s) H(s) nin sıfır sayısı olmak üzere

$n_p - n_z > 0$ ise $n_p - n_z$ adet kol sonsuza uzanır.

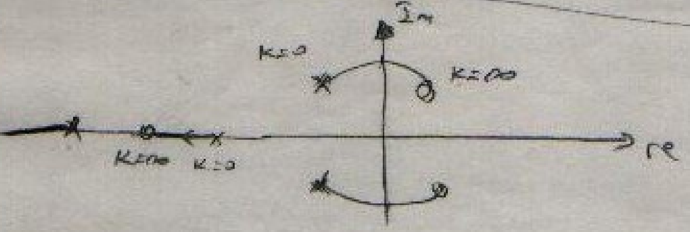
$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s+1}$  $n_p=1$

$n_z=0$ $\quad 1-0=1$ adet kol $K=\infty$ için sonsuza gider.

$G(s)H(s)=\dfrac{Ks}{s+1}$

$n_p=1$

$n_z=1$ $\quad 1-1=0$ sonsuza giden kol yok



x G(s) H(s) nin kutuplarını,

o G(s) H(s) nin sıfırlarını,

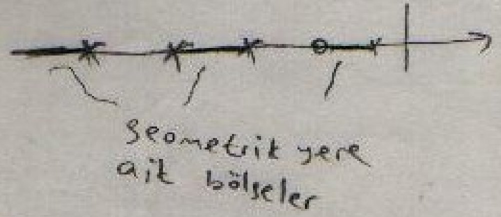
gösterir.

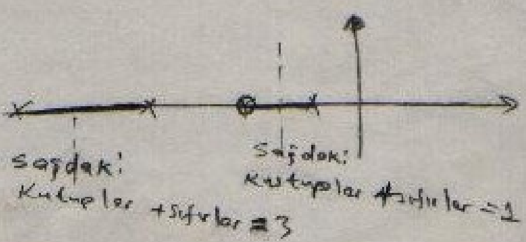
$n_p=4$

$n_z=3$

$n_p-n_z=4-3=1$ adet kol sonsuza gider.

3) Reel eksende köklerin geometrik yerine ait olan bölgeler. Reel eksendeki bir noktanın sağındaki sıfırların ve kutupların toplamı tek sayı ise o yer geometrik yere aittir.





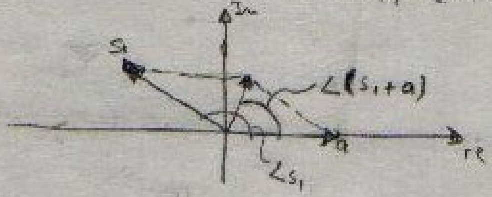
İspat $\angle G(s)H(s) = \angle\left(K\dfrac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}\right) = \angle K + \angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) + \cdots$

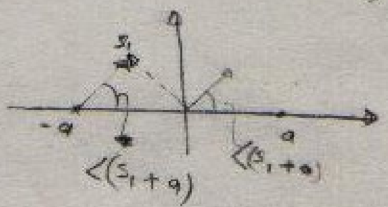
$\cdots + \angle(s+z_m) - \angle(s+p_1) - \angle(s+p_2) \cdots - \angle(s+p_n)$

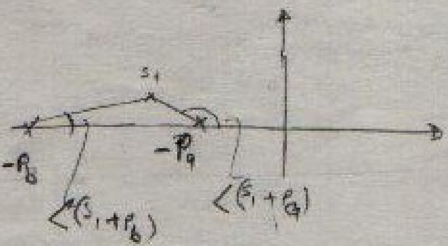
Eğer bir s_1 noktası geometrik yere aitse

$\angle(s_1+z_1) + (s_1+z_2) + \cdots + \angle(s_1+z_m) - \angle(s_1+p_1) - \angle(s_1+p_2) - \cdots - \angle(s_1+p_n) = 0$

şartı sağlanmalıdır. (x_1+x_2 nin açısı için 533 sayfaya bakınız)







$\angle(s_1+P_a) = 180$ s_1 noktası P_a noktasının solunda $\angle(s_1+P_a) = 180$

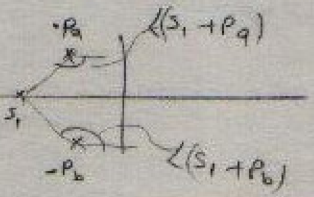
$\angle(s_1+P_b) = 0$ s_1 noktası $-P_b$ noktasının sağında

Bu durum bütün kutuplar ve sıfırlar için aynıdır.

$\angle(s_1+z_a) = 180$ s_1 $-z_a$ nın solunda ise

$\angle(s_1+z_b) = 0$ s_1 $-z_b$ nin sağında ise

Komplex kutuplar ve sıfırlar



$\angle(s_1+P_a) + \angle(s_1+P_b) = 0$ olur.

(B3)

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}\angle(s_1+z_i)}_{n_a} - \underbrace{\sum_{i=1}\angle(s_1+p_i)}_{n_b}}_{\text{s_1'in sağ tarafında reel eksende bulunan sıfırlar ve kutuplar}} + \underbrace{\sum_{j=1}\angle(s_1+z_j) - \sum_{j=1}\angle(s_1+p_j)}_{\text{s_1'in sol tarafında veya komplex olan sıfırlar ve kutuplar}}$$

dolayısıyla

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{i=1} \angle(s_1+z_i) - \sum_{i=1} \angle(s_1+p_i)$$

$$= n_a \cdot 180 - n_b \cdot 180 = (n_a - n_b)\,180$$

(A2) denklemi

$$\angle G(s_1)H(s_1) = -180 \mp 360$$

$$(n_a - n_b)\,180 = -180 \mp 360k \qquad (n_a - n_b) = -1 \mp 2k$$

$\underline{n_a - n_b}$ tek sayı olmalı n_a n_b tamsayı olduğundan $n_a - n_b$ tek sayı ise $n_a + n_b$ de tek sayıdır.

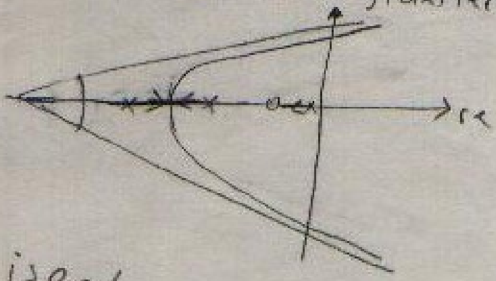
$n_a \rightarrow s_1$ 'in sağ tarafında kalan sıfır sayısı

$n_b \rightarrow$ " " sağ " " kutup "

4) Asimtotlar. $n_p \rightarrow G(s)H(s)$ 'in kutup sayısı

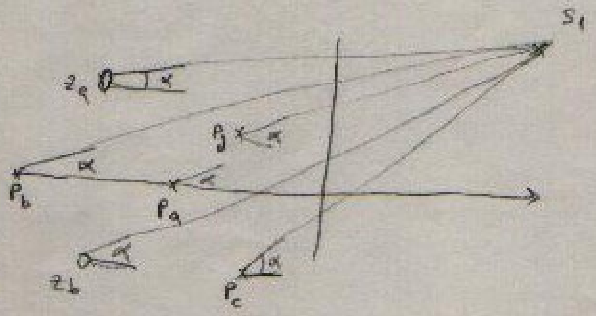
$n_z \rightarrow G(s)H(s)$ 'nin sıfır sayısı

$n_p - n_z > 0$ ise $n_p - n_z$ adet kol sonsuza gider. Sonsuza giderken belli açılarla giderler.



Bu açılar $\alpha = \dfrac{-180 \mp 360}{n_p - n_z}$ ile hesaplanır.

ispat



s_1 sonsuza giderken s_1 ile bütün kutupların ve sıfırların yaptığı açı eşit olur

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \underbrace{\sum_{i=1} \angle(s_1+z_i)}_{n_z} - \underbrace{\sum_{j=1} \angle(s_1+p_i)}_{n_p}$$

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \alpha \cdot n_z - \alpha \cdot n_p$$

$$-180 \mp k \cdot 360 = \alpha(n_z - n_p)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{180 \mp 360}{n_p - n_z}}$$

0K-537

5) Asimtotlar reel eksen üzerinde kesişir. Kesiştikleri nokta

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1} p_j - \sum_{i=1} z_i}{n_p - n_z}$$ ile verilir.

$p_j \rightarrow G(s)H(s)$'nin kutupları

$z_i \rightarrow G(s)H(s)$'nin sıfırları

İspat

$$1+G(s)H(s)=0 \qquad 1+K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=0$$

$$K=-\frac{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

$$\begin{array}{l|l} s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0 & s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0 \\ \mp s^n \mp b_{m-1}s^{n-1} \mp b_{m-2}s^{n-2}\cdots & \overline{s^{n-m}+(a_{n-1}-b_{m-1})s^{n-m-1}} \\ \hline (a_{n-1}-b_{m-1})s^{n-1}+(a_{n-2}-b_{m-2})s^{n-2} & \end{array}$$

dolayısıyla

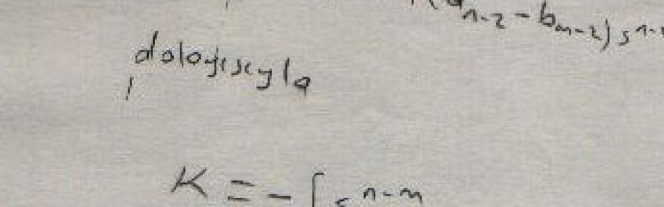
$$K=-\left[s^{n-m}+(a_{n-1}-b_{m-1})s^{n-m-1}+\cdots\right]$$ (2)

öte yandan

$$1+K\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}=0$$

s nin büyük değerleri için bu ifade $1+K\cdot\frac{s^m}{s^n}=0$ yaklaşımı ile hesaplanabilir.

Bu yaklaşımda $K=-s^{n-m}$ verir. Yaklaşımın daha doğru olması



için $K=-(s-\sigma_A)^{n-m}$ bağıntısı kullanılır.

$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots=a^n+n\,a^{n-1}b+\cdots\cdots$ bağıntısını

Kullanarak $(s-\sigma_A)^{n-m} = s^{n-m} + (n-m)s^{n-m-1} \cdot \sigma_A + \cdots$ yazılırsa

$$K = -(s-\sigma_A)^{n-m} = -\left\{ s^{n-m} + (n-m)s^{n-m-1}\sigma_A + \cdots \right] \quad (3)$$

(2) ile (3) karşılaştırılırsa

$$-1 = -1$$

$$a_{n-1} - b_{m-1} = (n-m)\sigma_A$$

buradanda

$$\sigma_A = \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} \text{ bulunur.} \quad (4)$$

Herhangibir polinomda

$$s^p + c_{p-1}s^{p-1} + c_{p-2}s^{p-2} \cdots + c_1 s + c_0 = 0$$

c_{p-1} = Köklerin cebrik toplamını verir

Dolayısıyla $G(s)H(s) = \dfrac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0}$

olduğundan $a_{n-1} \rightarrow$ kutupların cebrik toplamı

$b_{m-1} \rightarrow$ sıfırların cebrik toplamı

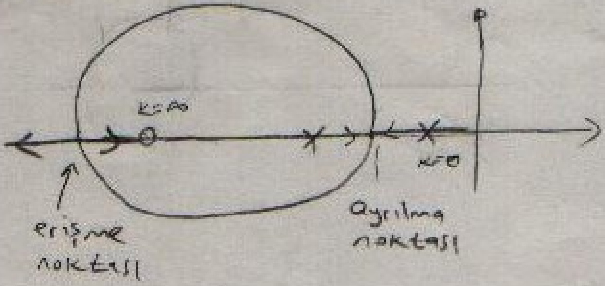
ve (4) ifadesi

$$\boxed{\sigma_A = \frac{\sum \text{kutuplar} - \sum \text{sıfırlar}}{n-m}}$$

$n \rightarrow$ kutup sayısı

$m \rightarrow$ sıfır sayısı

6) Reel eksenden ayrılma noktaları ve Reel eksene erişme noktaları $\frac{dK}{ds}=0$ dan hesaplanır.

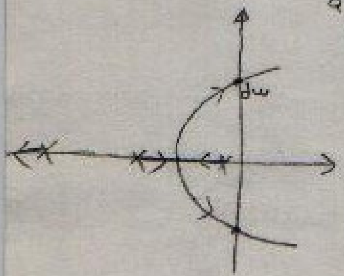


$K=P(s)$ polinomunda $\frac{dP(s)}{ds}=0$ ın kökleri ayrılma veya erişme noktalarını verir.

$1+G(s)H(s)=0 \quad 1+K\frac{a(s)}{b(s)}=0 \quad K=-\frac{b(s)}{a(s)}$

$$\frac{dK}{ds}=\frac{a'(s)\,b(s)-b'(s)\,a(s)}{a(s)^2}=0$$

7) Geometrik yerin jw eksenini kestiği noktayı bul.



a) $1+G(s)H(s)=0$ jw ekseninde $s=jw$ olur

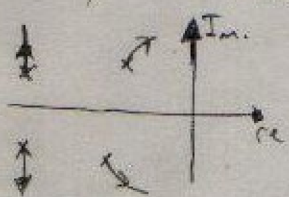
$1+G(jw)H(jw)=0 \quad 1+K.\frac{a(jw)}{b(jw)}=0$

Bu denklem çözülerek w ve K hesaplanır.

b) $1+G(s)H(s)=0 \quad 1+K\frac{a(s)}{b(s)}=0 \quad b(s)+K.a(s)=0$

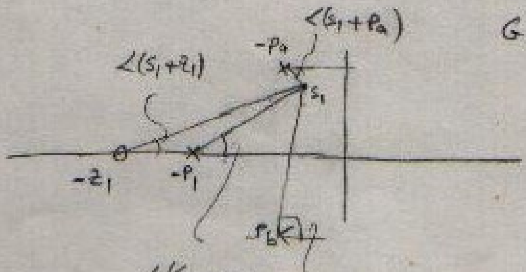
$b(s)+K.a(s)=0$ Polinomuna Routh Hurwitz kriteri uygulanır. İlk sütunun K bulunduran terimleri sıfıra eşitlenerek K hesaplanır. Bu K değerinde geometrik yer jw eksenini keser.

8) Kutuplardan ayrılma açısını ve sıfırlara varma açısını bul.



Bu da açı şartı kullanarak hesaplanır.

$G(s_1)H(s_1)=-180 \mp K.360$. Kutbun yakınında bir s_1 noktası al.



$$G(s_1)H(s_1)=\angle(s_1+z_1)-\angle(s_1+P_1)-\underbrace{\angle(s_1+P_a)}_{\alpha}-\angle(s_1+P_b)$$
$$=-180 \mp K.360$$

Buradan kutuptan ayrılma açısı α

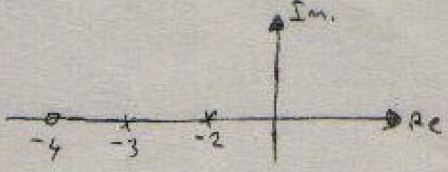
$$\alpha=-180-\angle(s_1+z_1)+\angle(s_1+P_1)+\angle(s_1+P_b)$$

Bulunur.

Örnek

$$G(s)H(s) = \frac{K \cdot (s+4)}{(s+2)(s+3)}$$

1) $1 + G(s)H(s) = 1 + K \cdot \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$



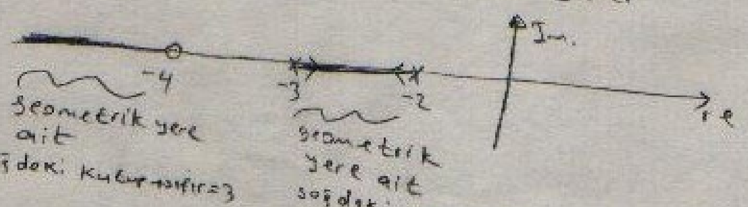
G(s) H(s) nin kutupları ve sıfırları

Kutuplar $P_1 = -2$, $P_2 = -3$ $n_p = 2$

Sıfırlar $z_1 = -4$ $n_z = 1$

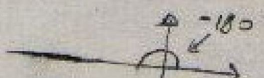
2) Geometrik yer -2 ve -4 den başlayacak. Geometrik yerin birisi -4 de bitecek. $n_p - n_z = 2 - 1 = 1$ adet kolda sonsuza gidecek.

3) Reel eksende geometrik yerler sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek rakam olan yerler



4) Asimtotların açıları

$$\alpha = \frac{-180 \mp 360 p}{n_p - n_z} = \frac{-180 \mp 360 p}{1} = \begin{cases} -180 & p=0 \\ 180 & p=1 \\ 540 & p=2 \\ \vdots & \end{cases}$$



$K = \infty$ için geometrik yerin birisinin gideceği yer

5) Asimtotların reel ekseni kestiği nokta

$$\sigma_A = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n_p - n_z} = \frac{(-2)+(-3) - (-4)}{2-1} = \frac{-5+4}{1} = -1$$

(zaten 1 asimtot olduğu için reel ekseni kestiği noktayı bulmaya lüzum yoktu)

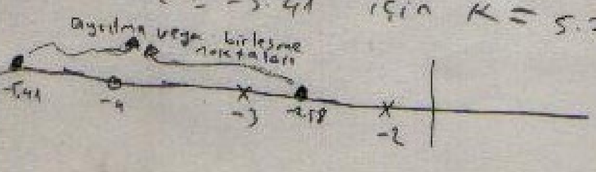
6) Reel eksenden ayrılma noktaları ve reel eksene erişme noktaları

$1 + K \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = 0$ $\quad K = -\frac{(s+2)(s+3)}{s+4}$ $\quad \frac{dK}{ds} = 0$ $\quad \frac{dK}{ds} = -\frac{(s+4)\left[(s+2)+(s+3)\right] - (s+2)(s+3)}{(s+4)^2}$

$\frac{dK}{ds} = 0$ $\quad s^2 + 8s + 14 = 0$ $\quad s_1 = -2.58$ $\quad s_2 = -5.41$

$s_1 = -2.58$ için $K = 0.17$

$s_2 = -5.41$ için $K = 5.7$



OK-541

7) Geometrik yerin $j\omega$ eksenini kestiği nokta

$$1+K\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=0 \Rightarrow \frac{(s+2)(s+3)+K(s+4)}{(s+2)(s+3)}=0$$

$(s+2)(s+3)+K(s+4)=0 \quad s^2+5s+6+Ks+4K=0 \quad s^2+(K+5)s+4K+6=0$

Routh Hurwitz kriterini uygularsak

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 4K+6 \\ s^1 & K+5 & 0 \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

$$b_1=\frac{-1}{K+5}\begin{vmatrix} 1 & 4K+6 \\ K+5 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{-(K+5)(4K+6)}{K+5}=4K+6$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 4K+6 \\ s^1 & K+5 & 0 \\ s^0 & 4K+6 & 0 \end{array}$$

Herhangibir kökün $j\omega$ eksenini kesip sağ tarafa gidebilmesi için ilk sütunda işaret değişikliği olmalıdır. Buda $K+5\leq 0$ veya $4K+6\leq 0$ olmasını gerektirir. Buda $K\leq -5$ veya $K\leq -\frac{6}{4}$ demektir. Biz K'yı 0 dan $+\infty$ a kadar değiştiriyoruz. O halde geometrik yer hiç bir zaman $j\omega$ eksenini kesmez.

Geometrik yerin $j\omega$ eksenini kestiği nokta

$1+G(j\omega)H(j\omega)=0$ dan da bulunabilir.

$$1+K\frac{(j\omega+4)}{(j\omega+2)(j\omega+3)}=0 \Rightarrow (j\omega+2)(j\omega+3)+K(j\omega+4)=0 \Rightarrow -\omega^2+6+j\omega.5+Kj\omega+4K=0$$

$$j\omega(5+K)+(-\omega^2+6+4K)=0$$

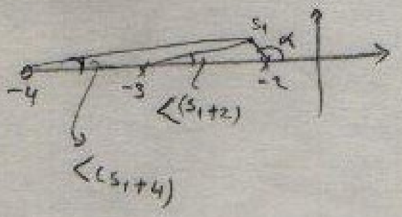
geometrik yerin $j\omega$ ekseninde olması için $s=j\omega$ koyarak elde ettiğimiz bu eşitlik sağlanmalı. Reel ve imajinery kısımlar ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$\omega(K+5)=0 \Rightarrow \omega=0 \quad K=-5$

$-\omega^2+6+4K=0 \Rightarrow K=-\frac{6}{4}+\frac{\omega^2}{4}=-\frac{6}{4}$

$j\omega$ eksenini kesmenin $K=-5$ ve $K=-\frac{6}{4}$ hallerinde mümkün olduğunu söyler. Bu da bir önceki bulduğumuz değerleri doğrular. $K>0$ için geometrik yer $j\omega$ eksenini kesmez.

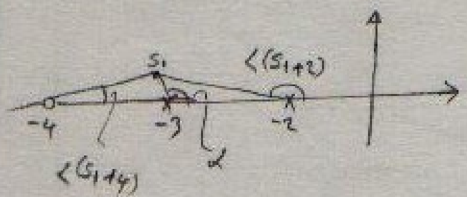
8) Kutuplardan ayrılma noktası



$$\underbrace{\angle(s_1+4)}_{0} + \underbrace{\angle(s_1+2)}_{0} + \alpha = -180$$

$$\boxed{\alpha = -180}$$

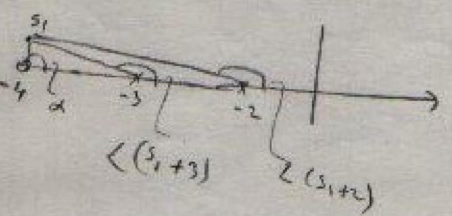
-2 kutbundan ayrılma açısı -180°



$$\underbrace{\angle(s_1+4)}_{0} + \alpha + \underbrace{\angle(s_1+2)}_{180^\circ} = -180^\circ$$

$\alpha = -360^\circ$ yani $\alpha = 0^\circ$

-4 sıfırına varma açısı



$$\underbrace{\angle(s_1+2)}_{180} + \underbrace{\angle(s_1+3)}_{180} + \alpha = -180^\circ$$

$\alpha = -180 - 180 - 180 = -540^\circ$

yani $\alpha = -180^\circ$

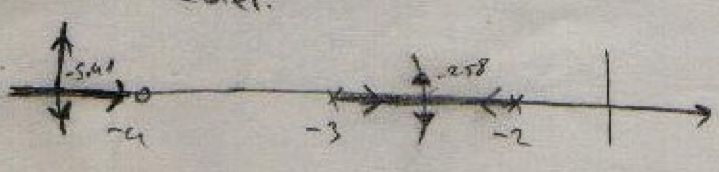
Not bu örnek için kutuplardan ayrılma açısını bulmamıza gerek yoktu. Reel eksendeki geometrik yerlerin durumundan bunu kolayca tahmin edebilirdik.

Bu bilgileri kullanarak köklerin geometrik yerini çizmeye çalışalım.

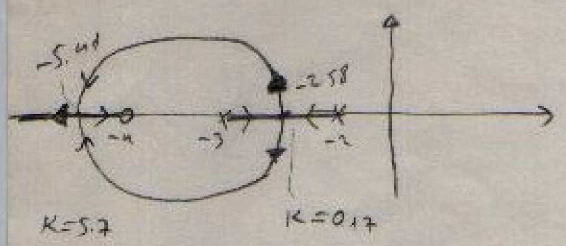
2 ve 3 den

elde ederiz

6) yı kullanırsak $s_1 = -2.58$ in bir ayrılma noktası $s_1 = -5.41$ noktasında bir erişme noktası olduğunu tahmin edebiliriz. Bu tahminin yapılamaması durumunda $\frac{d^2K}{ds^2} = 0$ ın köklerini bulmak icab eder.



Son olarak eğrilerin uçlarını birleştiririz.



$K=\infty$ için kolun birisi -4 deki sıfıra diğer kolda $-180°$ lik açı ile sonsuza gider. Bunu da şekilde görebiliriz.

Herhangibir noktadaki kazancı bulmak için

$$1+K\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=0$$ denkleminden K çözülür.

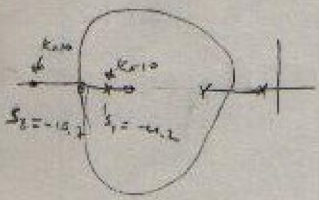
Örnek olarak $s_1=-5$ noktasında ($s_1=-5$ geometrik yere ait olmalı, yukarıdaki örnekle öyledir) kazanç nedir.

$$1+K\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=0 \qquad K=-\frac{(s+2)(s+3)}{(s+4)}=-\frac{(-5+2)(-5+3)}{(-5+4)}=-\frac{(-3)(-2)}{(-1)}=6$$

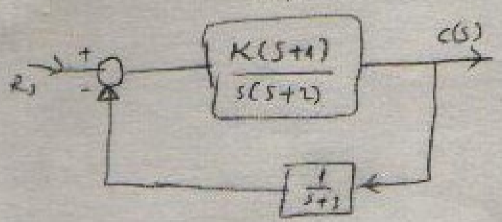
Tersine olarak $K=10$ da kökler nedir sorusuna da

$$1+K\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=0$$ da $K=10$ konularak

$$1+10\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=0 \qquad s^2+15s+46=0 \qquad s_{1,2}=\frac{-15\mp\sqrt{225-184}}{2} \qquad \begin{aligned}s_1&=-4.2\\ s_2&=-10.7\end{aligned}$$

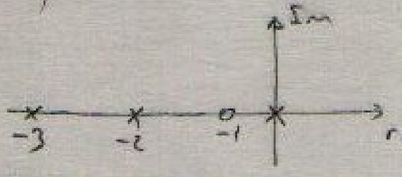


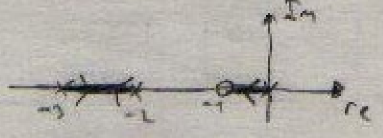
Örnek



$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1)





$n_p=3$ $n_z=1$

reel eksende geometrik yere ait olan yerler.

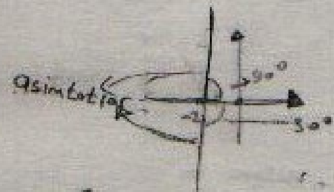
(-2 ile -3 arasında bir ayrılma noktası olacağını buradan hemen görebiliriz

2) asimtot açıları

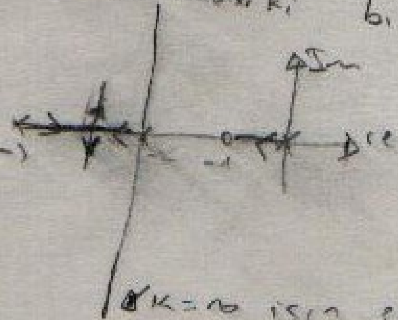
$$\theta=\frac{-180\mp 360.p}{n_p-n_z}=\frac{-180\mp 360.p}{2}=\begin{cases}-90 & p=0\\ +90 & p=1\end{cases}$$

3) asimtotların reel ekseni kestiği nokta

$$\sigma_A=\frac{\Sigma p_i-\Sigma z_i}{n_p-n_z}=\frac{(-3)+(-2)+(0)-[(-1)]}{3-1}=-2$$



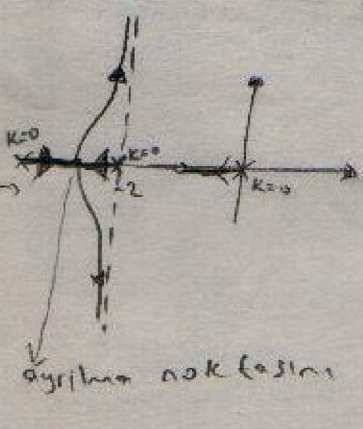
Şu ana kadarki bilgilerle



şeklinde çizebiliriz

K=∞ için geometrik yer

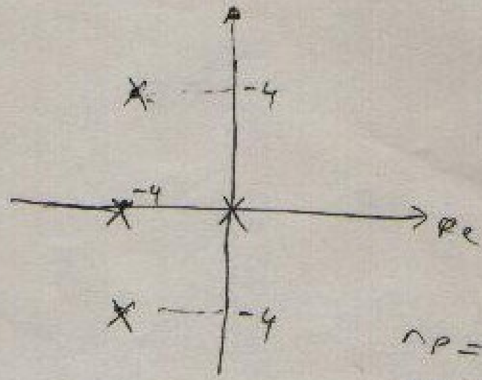
Burdan sonra eğrisi tamamlayabiliriz



ayrılma noktasını $\frac{dK}{ds}=0$ dan hesaplayabiliriz (Kaba çizim için buna gerek yok)

Örnek

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$$



$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$$

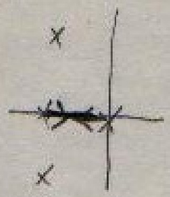
$s_1 = -4-4j$

$s_2 = -4+4j$

$n_p = 4$

$n_z = 0$

① reel eksendeki geometrik yerler

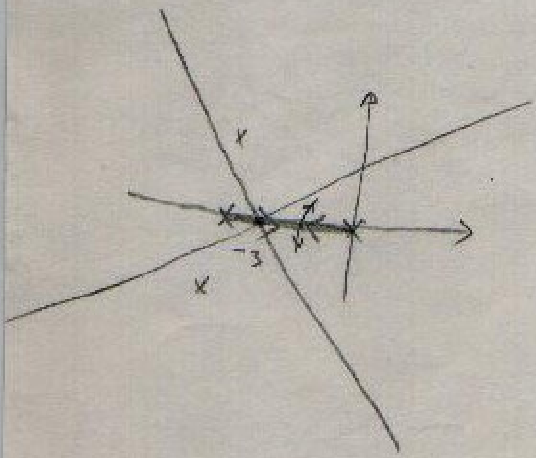


Asimtotların açıları $\alpha = \frac{-180 \mp 360p}{n_p - n_z} = \frac{-180 \mp p.360}{4} = \begin{cases} 45^\circ & p=0 \\ 135 & p=1 \\ 225 & p=2 \\ 315 & p=3 \\ 405^\circ & p=4 \end{cases}$ $405^\circ = 45^\circ$

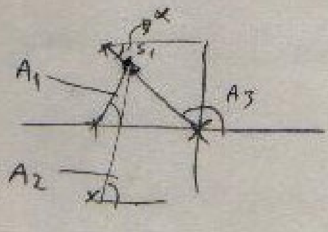
Asimtotların kesim noktası

$$\sigma_A = \frac{\sum kutuplar - \sum sıfırlar}{n_p - n_z} = \frac{0+(-4)+(-4+4j)+(-4-4j)-0}{4-0}$$

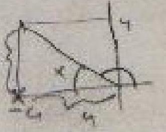
$\sigma_A = -3$



Kutuplardan ayrılma açısı: S_1 noktası $-4+4j$ kutbuna çok yakın bir nokta dolayısıyla



$A_1 = 90^\circ$ $A_2 = 90^\circ$



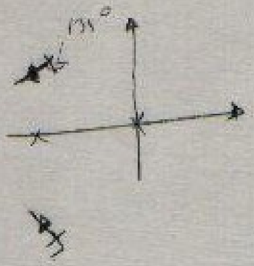
$\tan x = \frac{4}{4} = 1$ $x = 45^\circ$ $A_3 = 135^\circ$

Açı şartı $\angle G(s)H(s) = -180$

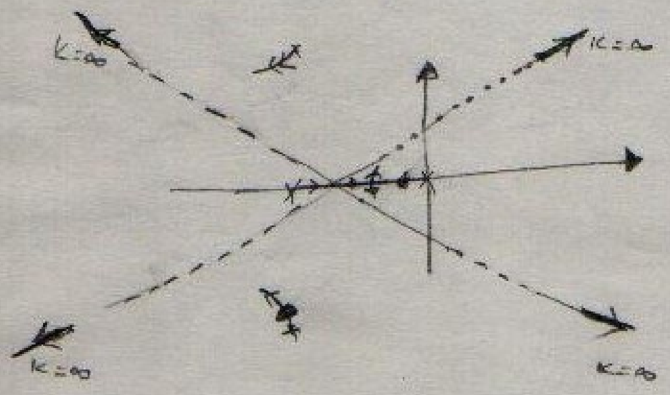
$\angle(kutuplar) - \angle(sıfırlar) = -180^\circ$

$\angle(\text{kutuplar}) - \angle(\text{sıfırlar}) = -180^\circ$

$\alpha + A_1 + A_2 + A_3 = -180^\circ \qquad \alpha + 180 + 135 = -180^\circ \qquad \alpha = -360 - 135^\circ$



Şu ana kadarki bilgileri kullanarak



çizebiliriz.

Eğrisi tahmini olarak tamamlarız.

Tereddüt edilen noktalarda K ya değerler verilerek s kökleri hesaplanır. M noktasını bulmak için $\frac{dK}{ds} = 0$ ın kökleri bulunur. Çıkan köklerden birisi N noktasını birisi M_1 ve birisi de M_2 noktasını verir.

Burada en önemli nokta $j\omega$ eksenini kestiği H_1, H_2 noktalarındaki K değeridir. Bu da $s = j\omega$ koyup $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ nın çözümüyle veya Routh Hurwitz kriteri ile bulunur.

OK-547

$$1+\frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}=0 \qquad s^4+12s^3+64s^2+128s+K=0$$

s^4	1	64	K
s^3	12	128	0
s^2	b_1	K	0
s^1	c_1	0	0
s^0	K	0	0

$$b_1=\frac{12.64-128}{12}=53.33$$

$$c_1=\frac{53.33.128-12.K}{53.33}$$

jw eksenini kestiği noktadaki K

(Köklerin soldan sağa geçtiği nokta sistemin kararsız olmaya başladığı yer

$C1 \leq 0$ olduğu yer.

buda $K=568.85$ verir

$K > 568.85$ olursa $C1<0$ olur.

jw eksenini kestiği w_1 noktasını bulmak için.

$$(jw)^4+12(jw)^3+64(jw)^2+128(jw)+568.85=0$$

denkleminden w'yı çözmek gerekir.