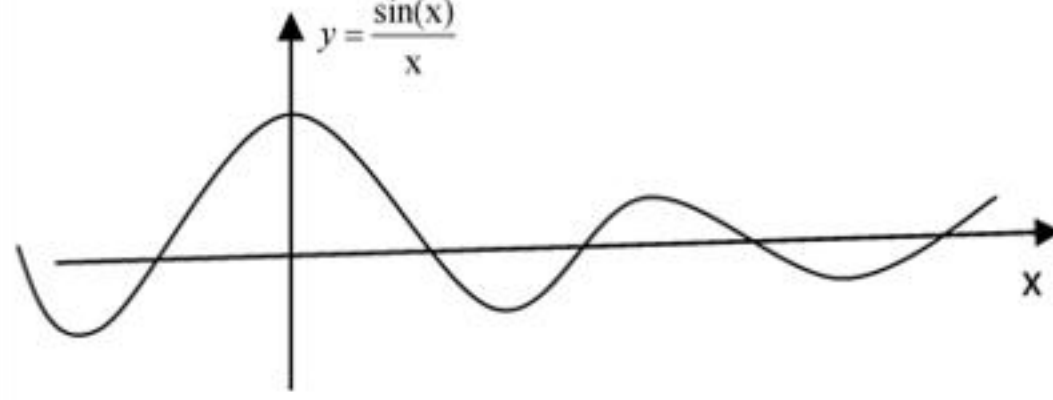


Limit

Ornek 1

$\sin(x)/x$ fonksiyonunu ele alalım. $x=0$ için $0/0$ belirsizliğini alır. Ancak x sıfırdan ξ kadar uzaklaşsa $\sin(x)/x$ değeri bire yakın bir değer alır. Burada ξ çok küçük bir sayı anlamında kullanılır.

X (radyan)	Sin(x) (x:radyan)	Sin(x)/x
-1.50	-0.997494986604054	0.6649966577
-1.00	-0.841470984807897	0.8414709848
-0.50	-0.479425538604203	0.9588510772
0.10	0.099833416646828	0.9983341664
-0.05	-0.049979169270678	0.9995833854
-0.00100	-0.000999999833333	0.9999998333
-0.00010	-0.00009999999833	0.999999983
0	0	0/0 belirsiz
0.00010	0.000099999999833	0.999999983
-0.00100	-0.000999999833333	0.9999998333
0.05	0.049979169270678	0.9995833854
0.10	0.099833416646828	0.9983341664
0.50	0.479425538604203	0.9588510772
1.00	0.841470984807897	0.8414709848
1.50	0.997494986604054	0.6649966577



Burada en muhim nokta x negatif değerlerden sıfıra yaklaştığında $\sin(x)/x$ bir olduğu gibi, x pozitif değerlerden sıfıra yaklaştığında da $\sin(x)/x$ 1 olmaktadır. Dolayısıyla $\sin(x)/x$ fonksiyonunun $x=0$ için limiti vardır ve bu değer 1'e eşittir.

Ornek 2

Benzer şekilde $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x+1)}$ fonksiyonunu inceleyelim. Burada görüldüğü gibi $x=1$ için $f(x)$ $0/0$ olmakta fakat x 1'den çok uzaklaşsa $f(x)$ in değeri -2 olmaktadır.

x	$x^3 - 2x^2 - x + 2$	x-1	$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x+1)}$
0.8	0.432	-0.2	-2.16
0.9	0.209	-0.1	-2.09
0.95	0.102375	-0.05	-2.0475
0.99	0.020099	-0.01	-2.0099
0.99	0.020099	-0.01	-2.0099
0.999	0.002001	-0.001	-2.001
0.9999	0.0002	-0.0001	-2.0001
0.99999	0.000002	0.00001	-2.00000
1	0	0	0/0 belirsiz
1.00001	-0.00002	0.00001	-2.0000
1.0001	-0.0002	0.0001	-1.9999
1.001	-0.002	0.001	-1.999
1.01	-0.0199	0.01	-1.9899
1.1	-0.189	0.1	-1.89

1.2	-0.352	0.2	-1.76
-----	--------	-----	-------

Burada da $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x+1)}$ fonksiyonunun $x=1$ için limiti vardır ve bu değer -2'ye eşittir.

$f(x)$, x_0 civarında açık bir aralıkta tanımlı olsun (x_0 'da tanımlı olmayabilir). x_0 'a yeterince yakın bütün x için $f(x)$ L değerine keyfi derecede (istediğimiz ölçüde L 'ye yakın) yaklaşıyorsa, x x_0 'a yaklaşırken, f L limitine yaklaşıyor deriz ve " x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ 'in limiti L dir" diye okunur

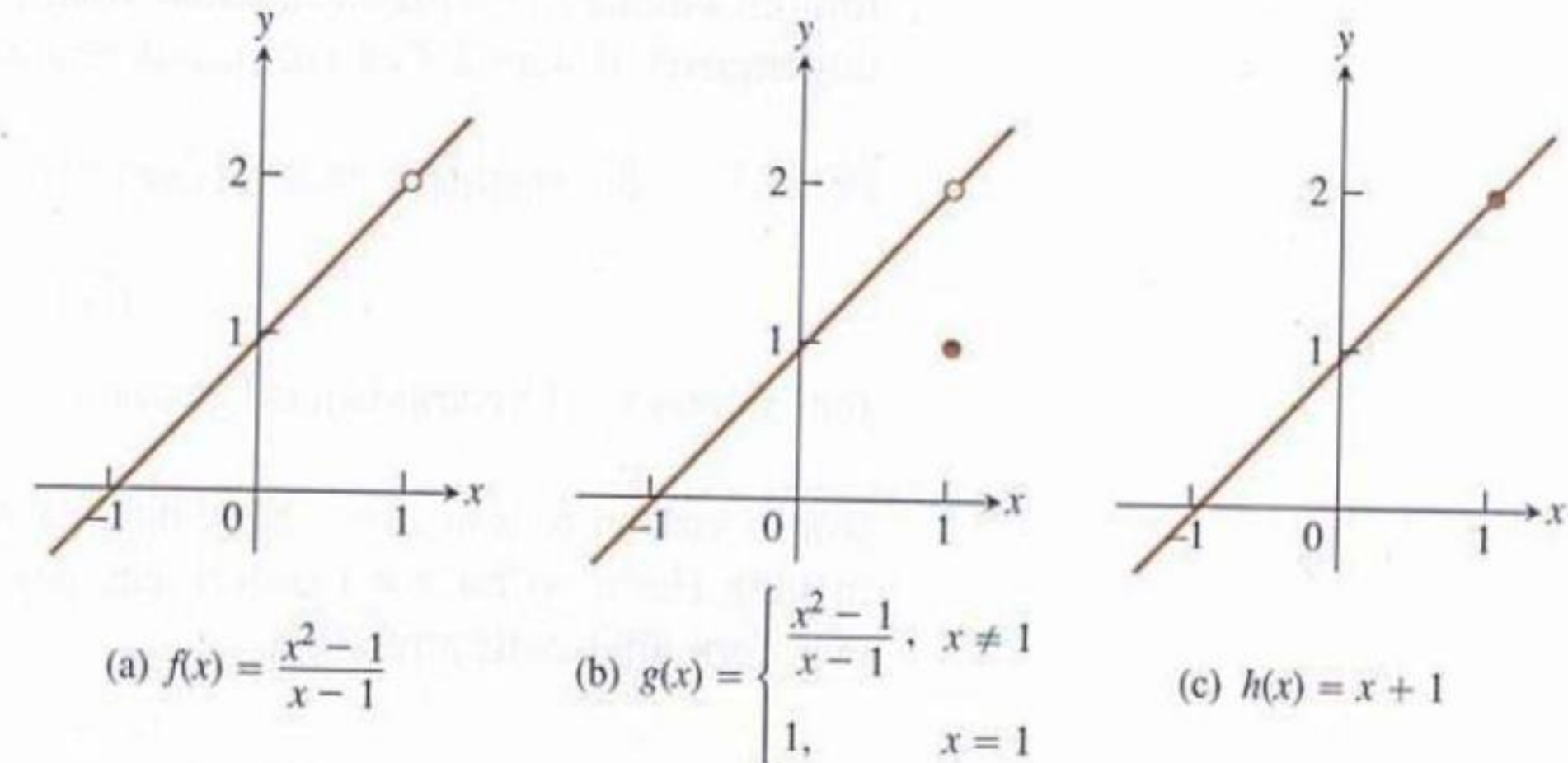
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ÖRNEK 7 $f(x_0)$ 'i Hesaplayarak Limit Bulmak

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -13} (4) = 4$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 4}{x + 5} = \frac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\frac{2}{3}$

ÖRNEK 6 Limit Değeri Fonksiyonun x_0 'da Nasıl Tanımlandığına Bağlı Değildir.

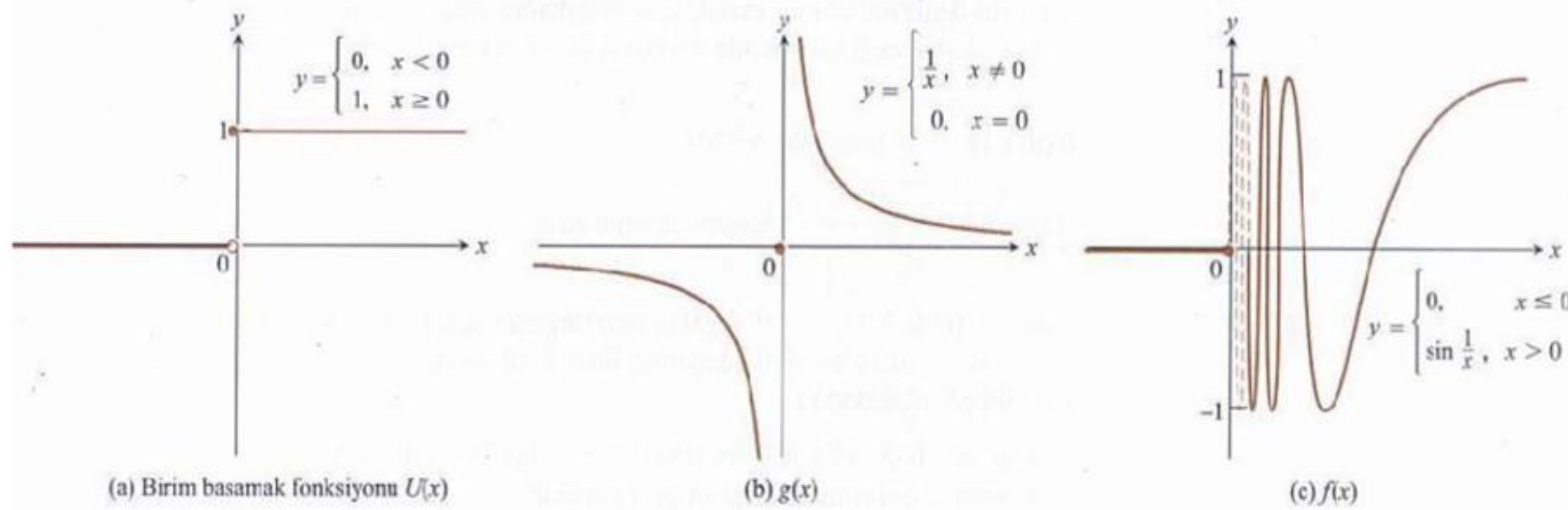
Şekil 2.5'teki f fonksiyonu $x = 1$ 'de f tanımsız olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken limiti 2'dir. $2 \neq g(1)$ olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken, g fonksiyonunun limiti 2'dir. h fonksiyonu, $x \rightarrow 1$ iken



a=b olarak veriliyor, ve sonucta 2=1 bulunuyor. Asagidaki islemdede hata nerededir.

Step	Reason
1. $a = b$	Given
2. $a^2 = ab$	Multiply both sides of (1) by a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtract b^2 from both sides of (2)
4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Factor both sides of (3)
5. $a + b = b$	Divide both sides of (4) by $a - b$
6. $2b = b$	Replace a by b in (5) because $a = b$ and simplify
7. $2 = 1$	Divide both sides of (6) by b

Limitin var olmadigi birkaç durum Şekil 2.7'de gösterilmekte ve bir sonraki örnekte incelenmektedir.



ŞEKİL 2.7 $x \rightarrow 0$ 'a yaklaşıırken bu fonksiyonlardan hiç birinin limiti yoktur (Örnek 9).

$x \rightarrow 0$ iken aşağıdaki fonksiyonların davranışlarını inceleyin.

$$(a) U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- (a) Sıçrar: Birim basamak fonksiyonu $U(x)$ 'in $x \rightarrow 0$ iken limiti yoktur, çünkü değerleri $x = 0$ 'da sıçrama yapar. x 'in sıfıra yakın negatif değerleri için $U(x) = 0$ 'dır. x 'in sıfıra yakın pozitif değerleri içinse $U(x) = 1$ 'dir. $x \rightarrow 0$ iken, $U(x)$ 'in yaklaştığı tek bir L değeri yoktur (Şekil 2.7a).
- (b) Çok büyür: $x \rightarrow 0$ iken $g(x)$ 'in limiti yoktur, çünkü $x \rightarrow 0$ iken g 'nin değerleri mutlak değer olarak çok büyür ve herhangi bir reel sayıya yaklaştırmaz (Şekil 2.7b).
- (c) Çok fazla salınır: $x \rightarrow 0$ iken $f(x)$ 'in limiti yoktur, çünkü fonksiyonun değerleri 0 'ı içeren bütün açık aralıklarda -1 ile $+1$ arasında salınır. $x \rightarrow 0$ iken, değerleri herhangi bir sayının yakınında kalmaz (Şekil 2.7c).

TANIM 1 Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{ise}$$

$$1. \text{ Toplama Kuralı: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

İki fonksiyonun toplamının limiti limitlerinin toplamıdır.

$$2. \text{ Fark Kuralı: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

İki fonksiyonun farklarının limiti limitlerinin farkıdır.

$$3. \text{ Çarpım Kuralı: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

İki fonksiyonun çarpımının limiti limitlerinin çarpımıdır.

$$4. \text{ Sabitle Çarpım Kuralı: } \lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

Bir fonksiyonun bir sabit katının limiti fonksiyonun limitinin sabit katıdır.

$$5. \text{ Bölüm Kuralı: } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölünen limitinin sıfır olmaması koşuluyla, limitlerinin bölümüdür.

6. Kuvvet Kuralı: r ve s ortak çarpanı bulunmayan iki tamsayı ve $s \neq 0$ ise $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla,

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz)

Bir fonksiyonun herhangi bir rasyonel kuvvetinin limiti, bir reel sayı olması koşuluyla, limitin o kuvvetidir.

ÖRNEK 1 Limit Kurallarını Kullanmak

Aşağıdaki limitleri bulmak için $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ ve $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ gözlemlerini (Bölüm 2.1, Örnek 8) ve limit özelliklerini kullanın.

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)$ (b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Çözüm

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3$ Toplam ve Fark Kuralları
 $= c^3 + 4c^2 - 3$ Çarpım ve Sabit Kat Kuralları

(b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)}$ Bölüm Kuralı
 $= \frac{\lim_{x \rightarrow c} x^4 + \lim_{x \rightarrow c} x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 1}{\lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5}$ Toplam ve Fark Kuralları
 $= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ Kuvvet veya Çarpım

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 3)}$ $r/s = 1/2$ ile Kuvvet
 $= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 3}$ Fark Kuralı
 $= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ Çarpım ve Sabit Kat
 $= \sqrt{16 - 3}$
 $= \sqrt{13}$

ÖRNEK 2 Bir Rasyonel Fonksiyonun Limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

TANIM Bir Fonksiyonun Limiti

$f(x)$, x_0 civarında (x_0 'da tanımlı olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

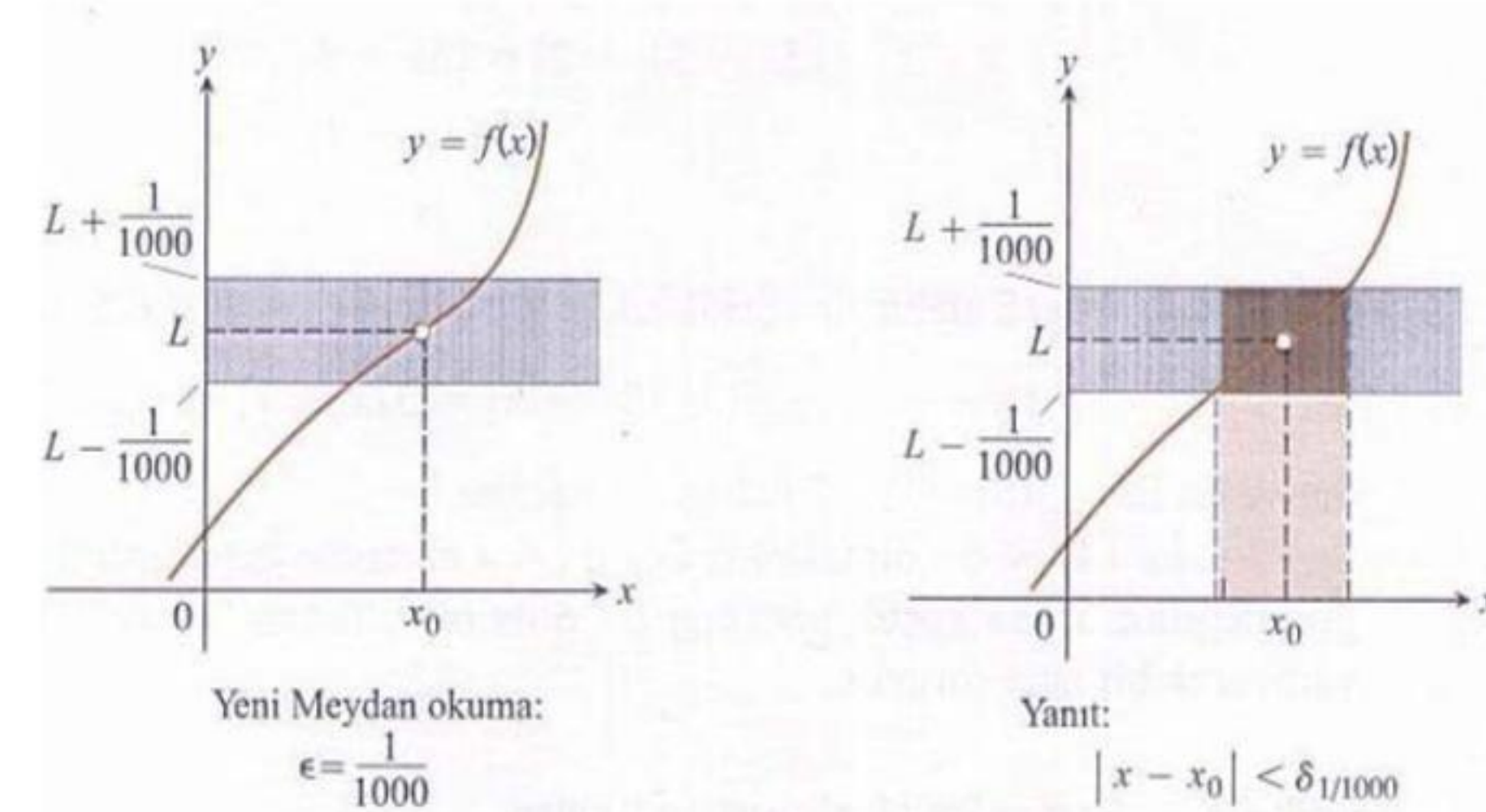
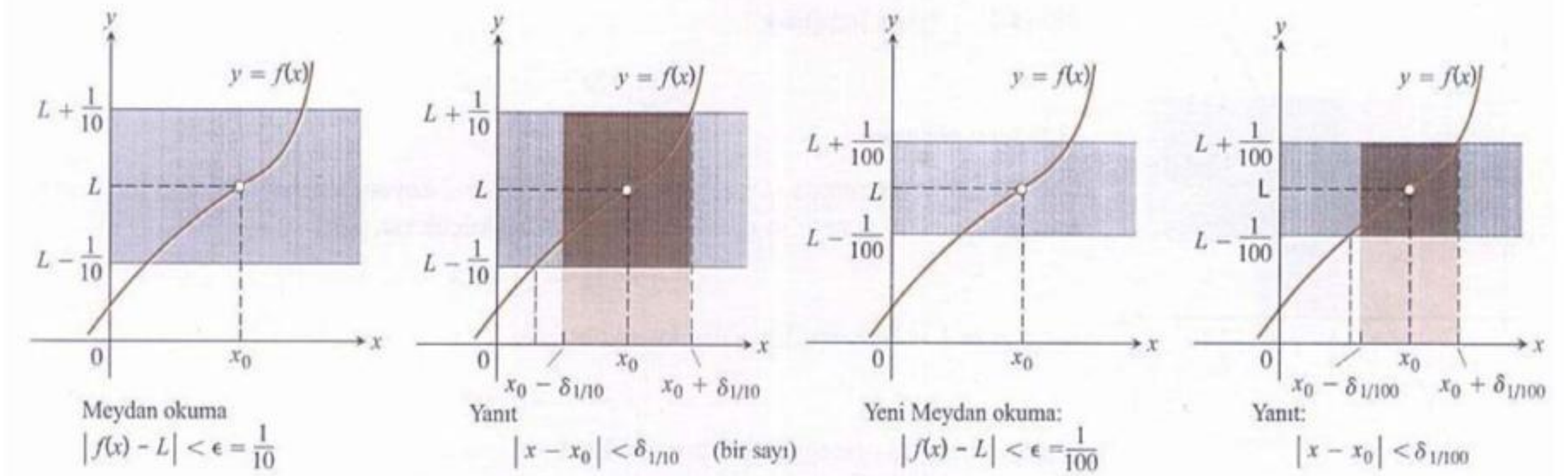
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor der ve

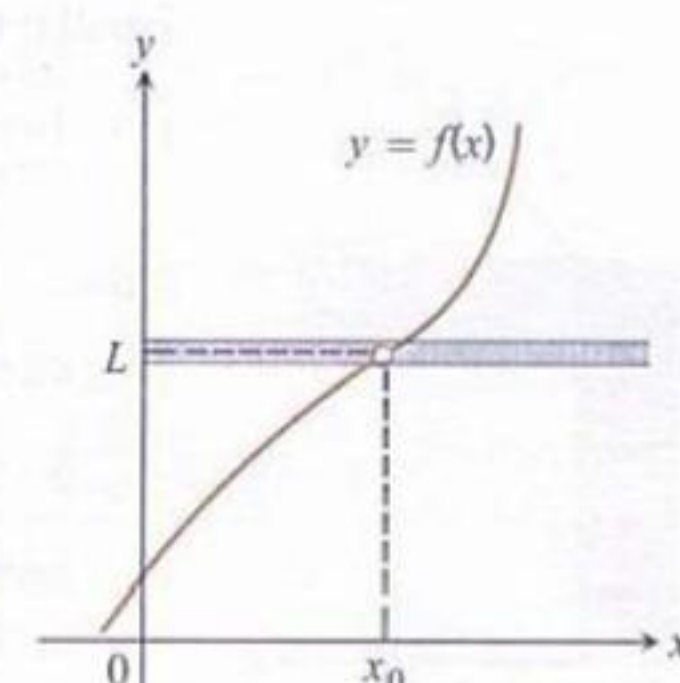
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

Bana bir ϵ verdiğinde ben sana bir δ vermeyi taahhüd ediyorum.

Vereceğim δ siniri içinde kalırsan, yani fonksiyonda x yerine $(x_0 - \delta)$, $(x_0 + \delta)$ arasında bir değer verirken, fonksiyonun değeri kesinlikle $L - \epsilon$ ile $L + \epsilon$ arasında kalır.

Sen istediğin kadar küçük ϵ ver, ben sana δ vereceğim. ϵ u dilediğin kadar (sonsuz küçük) yapabilirsin.





Yeni Meydan okuma:

$\epsilon = \dots$

$0 < |x - 1| < \delta$ olmasının $|5x - 5| < \epsilon$ olmasını gerektirdiği tek değer $\delta = \epsilon/5$ değeri değildir. Daha küçük herhangi bir δ da olur. Tanım “en iyi” pozitif δ sormuyor, işe yarayacak bir tane soruyor.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$