Taylor Serisi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + ...$$

eger ilk iki terim alinirsa **dogrusal yaklasim**

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eger ilk uc terim alinirsa **parabolik yaklasim**

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

yapilmis olur. ilk iki terimin alindigi duruma fonksiyonun $x=x_0$ civarinda **lineerlestirilmesi** (dogrusallastirilmasi) denir.

P221) f(x)= $e^{0.5X}$ fonksiyonunu x=3 civarinda Taylor serisine aciniz.

Cozum:

$f'(x)= 0.5\ e^{0.5X}$
$f''(x)= 0.5_x 0.5\ e^{0.5X} = 0.25\ e^{0.5X}$
$f'''(x)= 0.5_x 0.5_x 0.5\ e^{0.5X} = 0.125\ e^{0.5X}$
$f^{(4)}(x)= 0.5_x 0.5_x 0.5_x 0.5\ e^{0.5X} = 0625\ e^{0.5X}$

$f(3)= e^{0.5\ 3} = e^{1.5} = 4.4817$
$f'(3)= 0.5\ e^{0.5\ 3} = 0.5\ e^{1.5} = 2.24$
$f''(3)= 0.25\ e^{0.5\ 3} = 1.12$
$f'''(3)= 0.125\ e^{0.5\ 3} = 0.56$
$f^{(4)}(3)= 0.28$

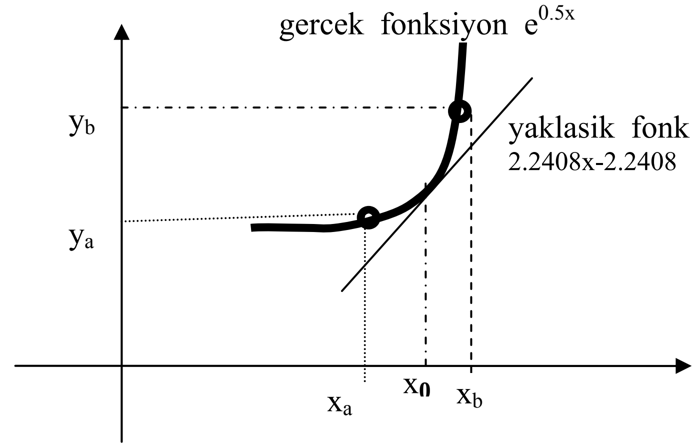
Dogrusal yaklasim

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$=4.4817+2.2408\ (x-3)= 2.2408x-2.2408$$

Ilk iki terimi alara yaklasim yaparsak. x=3 civarinda **$e^{0.5X}$** fonksiyonu 2.2408x-2.2408 fonksiyonuna yaklasik olarak esittir demis oluruz.

x	**$e^{0.5X}$**	2.2408x-2.2408
2	2.7183	2.2408
2.5	3.4903	3.3613
2.9	4.2631	4.2576
2.99	4.45933	4.45936
3	**4.4817**	**4.4817**
3.01	4.5042	4.5041
3.1	4.7115	4.7058
3.5	5.7546	5.6021
4	7.3891	6.7225

x=3 noktasinda elde ettigimiz yaklasik deger fonksiyonun gercek degerine tam olarak esittir. Bu noktadan uzaklasildikca yaklasik fonksiyonun degeri fonksiyonun gercek degerinden uzalasir.
Yaptigimiz islem $x=x_0$ noktasinda fonksiyona bir teget cizmektir. Yani egimi fonksiyonun x_0 noktasindaki turevine esit olan ve x_0 noktasindan gecen dogru denklemini elde ettik. Elde ettigimiz bu dogru denklemi fonksiyona esittir dedik. Tabi ki bu esitligin gecerli olacagi yerler $x=x_0$ noktasi civarindaki yerlerdir. $x=x_0$ noktasindan uzaklasildikca bu esitlik bozulacaktir.



$e^{0.5X}$ $\approx$ 4.48+2.24(x-3) (for x=3 civarinda)

--------------------------------- -----------------------

Parabolik yaklasim

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$= 4.4817 + 2.2408\ (x-3) + \frac{1.12}{2!}(x-3)^2$$
$$=4.4817+2.2408\ (x-3)+0.56\ (x-3)^2$$
$$= 0.56x^2 - 1.12x + 2.8$$

x	**$e^{0.5X}$**	$0.56x^2$-1.12x+2.8
2	2.7183	2.8011
2.5	3.4903	3.5013
2.9	4.2631	4.2632
2.99	4.45933	4.4593
3	**4.4817**	**4.4817**
3.01	4.5042	4.5042
3.1	4.7115	4.7114
3.5	5.7546	5.7422
4	7.3891	7.2827

Kubik Yaklasim

$$f(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3$$

$$f(x)=4.48+2.24(x-3)+ \frac{1.12}{2}(x-3)^2+\frac{0.56}{6}(x-3)^3+..$$

Example CT13- Obtain a linear approximation for the function f(x)=sin(x) around x_0=0.8.

Solution

$f(x)= \sin(x) \quad f(x_0)= \sin(0.8) =0.71735$

$f'(x)=\cos(x) \quad f'(x_0)= \cos(0.8)=0.69670$

$f''(x)=-\sin(x) \quad f''(x_0)=-\sin(0.8)=-0.7173$

$f'''(x)=\cos(x) \quad f'''(x_0)=-\cos(0.8)=-0.69670$

$f^{(4)}(x)=\sin(x) \quad f^{(4)}(x_0)=\sin(0.8)=0.7173$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$f(x)=0.717+0.696(x-0.8)+(-0.717/2)(x-0.8)^2$
$+ (0.696/6)(x-0.8)^3+(0.717/24)(x-0.8)^4$

Maclauren Serisi

x0=0 alinirsa Taylor serisi Maclauren serisi olarak adlandirilir ve fonksiyonlarin hesabinda kullanilir.

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

P321) $f(x)= e^x$ fonksiyonunu Maclauren serisine acin.

Cozum

$f(x)= e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)= e^x$, $f'''(x)= e^x$ **..............**

$f(0) = e^0=1$
$f'(0)= e^0=1$
$f''(0)= e^0 =1$
$f'''(0)= 1$
$f^{(n)}(x)= 1$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

P321) f(x)=sin(x) fonksiyonunu Maclauren serisine acin.

Cozum

$f(x)=\sin(x)$, $f'(x)=\cos(x)$, $f''(x)=-\sin(x)$,
$f'''(x)=$**$-\cos(x)$ ....**
$f(0) = \sin(0)=0$
$f'(0)= \cos(0)=1$
$f''(0)= -\sin(0)=0$
$f'''(0)= -\cos(0)=-1$
....

$$f(x) = \sin(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\ldots$$