Diziler

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$

1,2,3,4,5,6,7,.........10

1,2,3,4,5,6,7,8,9,....... ..∞

1,3,5,7,9,11,........11

1,3,5,7,9,11,........ ..∞

41) $a_n=2n$

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	2	4	6	8	10	....	∞

42) $a_n=2n-1$

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	1	3	5	7	9	....	∞

43) $a_n=2n+3$

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	5	7	9	11	13	....	∞

44) $a_n = \frac{1}{10n}$

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$				0

45) $a_n = \frac{10n+1}{2n}$

n	1	2	3	4	5	....	100	500	1000	10000		∞
a_n	$\frac{11}{2}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{31}{6}$	..	...		$\frac{1001}{200}=5.005$	$\frac{5001}{1000}=5.001$	5.0005	5.000001		5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+1}{2x}=\frac{10}{2}=5 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{2n}=\frac{10}{2}=5$$

47) $a_n = \frac{10n+1}{2n^2+2}$

n	1	2	3	4	5	....	100	500	1000	10000		∞
a_n	$\frac{11}{4}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{31}{20}$	..	...		0.05	0.01	0.005	0.0005		0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+1}{2x^2+2}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{2n^2+2}=0$$

49) $a_n = \dfrac{10n^2+1}{2n+2}$

n	1	2	3	4	5	....	100	500	1000	10000		∞
a_n	$\frac{11}{4}$	$\frac{41}{6}$	$\frac{91}{8}$	..	...		495	2495	4995	49995		∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+1}{2x+2}=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+1}{2n+2}=\infty$$

51) $a_n = 3^n$

n	1	2	3	4	5	....	100	500	1000	10000		∞
a_n	3	9	27	81	...							∞

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$$

53) $a_n = 3^{-n}$

n	1	2	3	4	5	....	100	500	1000	10000		∞
a_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$		...		0.000000003	0.00000				0

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-n} = 0$$

53) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

n	1	2	3	4	5	10	20	100	1000	10000	100000	∞
a_n	2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$	2.37	2.44	2.48	2.59	2.65	2.704	2.7169	2.7181	2.7183	2.7183

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7183 = e$$

Tanım

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ olmak üzere, tanım kümesi A_p olan her fonksiyona bir p terimli **sonlu dizi** denir.

Tanım

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$a_{n+1} - a_n = d$

olacak biçimde bir d reel sayısı varsa, (a_n) dizisine bir **aritmetik dizi**, d sayısına da bu dizinin **ortak farkı** adı verilir.

Not

$(cn + d)$ biçimindeki diziler ortak farkı c olan birer aritmetik dizidir.

81)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	10	20	30	40	50	....	∞

a_n=c n+d, d=0, c=10, a_1=10x1+0=10,
a_2=10x2+0=20,

82)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	50	60	70	80	90	....	∞

$a_n=10n+40$, $d=40$, $c=10$, $a_1=10\times1+40=50$,
$a_2=10\times2+40=60$,

Tanım

Her n pozitif tamsayısı için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$$

olacak şekilde bir r reel sayısı varsa (a_n) dizisine bir **geometrik dizi**, r sayısına da bu dizinin **ortak çarpanı** veya **ortak oranı** denir.

$$a_n=a_1r^{n-1}$$

85)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	15	45	135	405	1215	....	∞

$a_n=5\times 3^n$, $a_1=5\times 3^1=15$, $a_2=5\times 3^2=45$,

86)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	15	7.5	3.75	1.875	0.9375	....	0

$$a_n=30\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ a_1=30\left(\frac{1}{2}\right)^1=15,\ a_2=30\left(\frac{1}{2}\right)^2=7.5,$$

87)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	10	3.33	1.11	0.37	0.12	....	0

$$a_n=30\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ a_1=30\left(\frac{1}{3}\right)^1=10,\ a_2=30\left(\frac{1}{3}\right)^2=3.33,$$

88)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	20	13.33	8.8	5.9	3.9	....	0

$$a_n=30\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ a_1=30\left(\frac{2}{3}\right)^1=20,\ a_2=30\left(\frac{2}{3}\right)^2=13.33,$$

89)

n	1	2	3	4	5	....	∞
a_n	45	67.5	101	151	227	....	∞

$$a_n=30\left(\frac{3}{2}\right)^n,\ a_1=30\left(\frac{3}{2}\right)^1=45,\ a_2=30\left(\frac{3}{2}\right)^2=67.5,$$

$T=1+r+r^2+r^3+.....r^n$,

toplamını hesaplayalım.

$$T_n=1+r+r^2+\dots+r_n$$

$$rT_n=r+r^2+r^3+\dots+r^n+r^{n+1}$$

ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$T_n-r\,T_n=1-r^{n+1}$$

bulunur. Burada T_n çekilirse

$$T_n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Şu halde ilk terimi a_1, ortak çarpanı r olan bir geometrik dizinin toplamı

$$G_n=a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$G=a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+.....+a_1r^n$,

$G=a_1(1+r+r^2+r^3+.....r^n)$

$$G=a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=?\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1-r^x}{1-r}$$

eger $|r|>1$ ise $r^\infty=\infty$, $2^\infty=\infty$, $5^\infty=\infty$,

eger $|r|<1$ ise $r^\infty=0$, $0.5^\infty=0$, $0.1^\infty=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=?$$

Eger |r|<1 ise $\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{1}{1-r}$

Eger |r|<1 ise

$$1+r+r^2+r^3+.....r^\infty=\frac{1}{1-r}$$

Eger |r|>1 ise $\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=\infty$

Eger |r|>1 ise $1+r+r^2+r^3+.....r^n=\infty$

Her n pozitif tamsayısı için

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n) \text{ artandır}$$

$$a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n) \text{ azalandır}$$

Artan veya azalan dizilere **monoton diziler** denir.

Tanım

Her n doğal sayısı için $s_n \le M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (s_n) dizisine **üstten sınırlıdır** denir, M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir.

Her n doğal sayısı için $s_n \ge m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir.

Hem alttan hem de üstten sınırlı olan dizilere kısaca, **sınırlı diziler** denir.

Tanım

(a_n) bir reel terimli dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

a sayısının herbir **komşuluğu**, (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimlerini içeriyorsa, (a_n) dizisi a sayısına **yakınsıyor** veya (a_n) dizisinin **limiti** a dır denir,

$\lim a_n = a$ veya $(a_n) \to a$

Yakınsak olmayan dizilere **ıraksak diziler** denir.

Dizinin yakinsak olmasi sarti: Hic bir terimi sonsuz olmamasi. Dizi monoton artiyorsa

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise dizi yakinsakdir.

DIZILERIN LIMITLERI

n→∞ icin dizinin aldigi degere dizinin limiti denir.

1,3,5,7,9,.....99,101,103,.... dizisinin limiti ∞

$\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{40},....$ dizisinin limiti sifirdir.

$\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $\lim (a_n + b_n) = a + b$,
2. $\lim (a_n b_n) = a \cdot b$,
3. $b_n \ne 0$ ve $b \ne 0$ için $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,
4. $\lim (\lambda a_n) = \lambda a$

1) $\lim a_n = a$ ise $\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ dır.

2) $a_n \ge 0$ ve $\lim a_n = a$ ise $\lim \sqrt[n]{a_1.a_2.\cdots.a_n} = a$ dır.

3) $a_n > 0$ ve $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise $\lim \sqrt[n]{a_n} = r$ dir.

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = r$$

Sonlu sayıdaki terimler hariç diğer tüm terimler için

$$a_n \le b_n \le c_n$$

ve $\lim a_n = \lim c_n = \ell$ ise $\lim b_n = \ell$ dir.

Bu özelliğe **sandviç özelliği** adı verilir.

Seriler: dizilerin toplami

$\sum_{n=1}^{k} a_n$ =$a_1+a_2+a_3+....+a_n+....+...$

41) $\sum_{n=1}^{4}(2n+1)$ =(2x1+1) +(2x2+1) +(2x3+1) +(2x4+1)

=3+5+7+9=24

42) $\sum_{n=1}^{3}(2n+1)^2$ =$(2x1+1)^2+(2x2+1)^2+(2x3+1)^2$

=$3^2+5^2+7^2$=83

43) $\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}=0.5+0.2+0.1=0.8$

$$44)\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n!}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1_x2}+\frac{1}{1_x2_x3}+\frac{1}{1_x2_x3_x4}$$

$$=1+0.5+0.1667+0.0417=1.7083$$

45) $\sum_{n=1}^{4}3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$

$$46)\sum_{n=1}^{4}\frac{3^n}{n!}=\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1_x2}+\frac{3^3}{1_x2_x3}+\frac{3^4}{1_x2_x3_x4}$$

$$= 3 + 4.5 + 4.5 + 3.37 = 15.37$$

Sonsuz Seriler:

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+a_2+a_3+....+a_n+....+...$

61) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1) = 1+3+5+7+9+.....99+101+103,...$

62) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}=\frac{1}{10},+\frac{1}{20},+\frac{1}{30}+.....+\frac{1}{1990}+\frac{1}{2000}+.....\frac{1}{9990}+\frac{1}{10000},....$

63) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n = 3+\ 9+\ 27+81,\ .....+14348907+43046721+......$

SERILERIN YAKINSAKLIGI

Serinin yakinsak olmasi sarti.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = sayi(sonsuz\ degil)$$

Seri monoton artan ise, n arttikca serinin elemanlari artiyorsa, seri kesin iraksakdir.

$\sum_{n=1}^{\infty}2n = 2+4+6+8+..... = \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}n^2 = 1^2+2^2+3^2+... = \infty$

Serinin genel terimi $\lim_{x\to\infty}a_n \neq 0$ sartini sagliyorsa seri kesin olarak iraksakdir. Yukaridaki orneklerde

$\lim_{x\to\infty}2n = 2\infty = \infty$

$\lim_{x\to\infty}n^2 = \infty^2 = \infty$

Serinin gidisine kabaca bakarak serinin yakinsak olup olmadigina her zaman karar veremeyiz. Ornek olarak $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ve $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serilerini inceleyelim.

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....\frac{1}{99}+...+\frac{1}{999}+...$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....\frac{1}{99^2}+...+\frac{1}{999^2}+...$$

Terim Sayisi	$\frac{1}{n}$	$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$	$\frac{1}{n^2}$	$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$
1	1	1	1	1
2	0.5	1.5	0.25	1.25
3	0.33333	1.83333	0.11111	1.36111
4	0.25	2.08333	0.0625	1.42361
5	0.2	2.28333	0.04	1.46361
8	0.125	2.71786	0.01562	1.52742
9	0.11111	2.82897	0.01234	1.53977
10	0.1	2.92897	0.01	1.54977
50		4.499205		1.625133
100		5.187378		1.634984
1000		7.485471		1.643935
10000		9.787606		1.644834
100000		12.09015		1.644924
1000000		14.39273		1.644933

Goruldugu gibi ilk bir milyon terimin toplami $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisinde artisa devam ediyor(14.39273). $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisinde ise artis durmus gibi gozukmektedir(1.644933). Bu da bize serinin kaba inceleme ile yakinsakligina karar verilemeyecegini soyler. Serinin Dikkatlice incelenmesi gerektigini ihtar etmektedir.

Yakinsaklik test kriterleri:

--- --

Karşılaştırma Testi

Her $k\in\mathbb{N}$ için $a_k\geq 0,\ b_k\geq 0$ ve $a_k\leq C\cdot b_k$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun.

1. $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2. $\sum a_k$ ıraksak ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

--------- ---------------------- ---------------------- ---------------

$A=a_1+a_2+a_3+....a_n+...$
$B=b_1+b_2+b_3+....b_n+...$
$a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$, ... $a_n<b_n$, ...oluyorsa
B yakinsak ise A yakinsakdir. $(p\rightarrow q)$
A iraksak ise B iraksakdir. $(q'\rightarrow p')$

B iraksak ise, A yakinsak veya iraksak olabilir.
$(p'\rightarrow q'$ yanlis kıyas olur.)
A yakinsak ise, B yakinsak veya iraksak olabilir.
$(q\rightarrow p$ yanlis kıyas olur.)

------------------------ ------------------------- -

Limit Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = \gamma$$

p>1 oldugu halde ϒ sonsuz degilse $\sum_{n=1} a_n$ yakinsakdir.
n^2, n^3, vs ile carpildigi halde dizi hala yakinsak ise demekki carpilmadan once de yakinsakdir.

---------------- ------------------------- -

Oran Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$,

r<1 ise seri yakinsak
r>1 ise seri iraksak
r=1 ise bu test calismaz.

--------------------------- -------------

Kök Testi

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$,

r<1 ise seri yakinsak
r>1 ise seri iraksak
r=1 ise bu test calismaz.

Integral Testi

$a_n=f(n)$ olsun.

$\int_{x=1}^{\infty} f(x)dx$ sonsuz degilse $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ yakinsakdir
integral sonsuz ise iraksakdir.

Limit a_n Testi

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise seri iraksakdir**.**

seri yakinsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dir.

. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olmasi gereklidir fakat **yeter degildir**.

yani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oldugu halde seri iraksak olabilir.

----------------- ------------------------ -----------------

Ornek P341:

$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisini yakinsakligini bulun.

a) Limit a_n testi.

seride dizinin genel terim $a_n=\frac{1}{n}$ dir.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$ sifirdan farkli ciksa idi kesin iraksak derdik. sifir cikmasi yakinsakligi garantilemez.

b) Oran testi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Bu test bir sonuc vermedi.

c)kok testi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}=0^0$$

Bu testi sonuclandirmak icin belirsizligi cozmemiz lazim. Diger metodlarideneyelim, sonuc vermez ise bu metodu tekrar deneyebiliriz.

d)Integral testi:

$$a_n = \mathrm{f}(n) = \frac{1}{n} \qquad \mathrm{f(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\int_{x=1}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx = \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = Ln(x)\Big|_{x=1}^{x=\infty}$$

$$= Ln(\infty) - Ln(1) = \infty - 0 = \infty$$

Sonuc $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots \frac{1}{99} + \ldots + \frac{1}{999} + \ldots = \infty$

Ornek P342:

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisini yakinsakligini bulun.

Limit a_n testi. Oran testi, kok testi bu seri icinde sonuc vermez. Integral testini uygulayalim.

$$a_n = \mathrm{f}(n) = \frac{1}{n^2} \qquad \mathrm{f(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_{x=1}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx = \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{x=1}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{-x}\Bigg|_{x=1}^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = 1$$

integralin degeri ∞ olmadigi icin seri yakinsakdir.

Sonuc $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots \frac{1}{99^2} + \ldots + \frac{1}{999^2} + \ldots < \infty$

seri yakinsakdir.

NOT: $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ iraksak $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakinsak

----------------------------------- ----------------------------------
---

Ornek P345:

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ p>1 icin serisini yakinsak oldugunu gosterin.