Onerme: (yagmur yagiyorsa bahce islaniyordur)

p: yagmur yagiyor, q: bahce islaniyor.
p': yagmur yagmiyor. q':bahce islanmiyor .

p→q. (yagmur yagiyorsa bahce islaniyordur)
Kesin olan sey yagmur yaginca bahcenin islanacagidir.

p→q dogru olmasi q→p olmasini **gerektirmez.**
p→q dogru olmasi p'→q' olmasini **gerektirmez.**

p→q dogru olmasi q'→p' olmasini **gerektirir.**

Yanlis kıyas: q→p
bahce islaniyor → o halde kesin olarak yagmur yagiyor. Bahce baska sebeblerde dolayi islaniyor olabilir. Bahcivan bahceyi suluyor olabilir. su borusu patlamis olabilir. vs

Dogru kıyas. q'→p'
Bahce islanmiyorsa kesin olarak yagmur yagmiyordur.

Yanlis kıyas: p'→q'
yagmur yagmiyor → bahce islanmiyor
Bahcivan bahceyi suluyor olabilir. Yagmur yagmadigi halde bahce islaniyor olabuilir.

---------------------------- -----------------------

Onerme: A yakinsak ise B yakinsakdir. (p→q)
(p:A yakinsak, q:B yakinsak)

Yanlis kıyas: (q→p) B yakinsak ise A yakinsakdir. B nin yakinsak olmasi A nin yakinsak olmasini garantilemez, olabilir de olmayabilirde.

Dogru kıyas: (q'→p') B iraksak ise A kesin olarak iraksakdir.

Yanlis kıyas: (p'→q') A iraksak ise B kesin olarak iraksakdir. A nin iraksak olmasi B nin iraksak olmasini garantilemez. olabilir de olmayabilirde.

Onerme: Bir sonsuz seride dizinin genel terimi a_n
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ sartini saglarsa seri iraksakdir.
(p: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ q: seri iraksak p→q)

Dogru kıyas: (q'→p')seri yakinsak ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ dir.
Yanlis kıyas: (p'→q') $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ise seri yakinsakdir.
(yakinsak da olabilir, iraksak da olabilir. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olmasi yakinsakligi garantilemez)

Yanlis kıyas: (q→p)seri iraksak ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ dir.
serinin iraksak olmasi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ olmasini garantilemez. seri iraksak oldugu halde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oldugu durumlar vardir.

Diziler

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$

1,3,5,7,9,.....99,101,103,....
genel terimi $a_n=2n-1$

n	1	2	3	4	...	..	50	51	...	...
2n-1	1	3	5	7	..	..	99	101		

$$\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{40},\ldots\ldots\frac{1}{1990},\frac{1}{2000},\ldots\ldots\frac{1}{9990},\frac{1}{10000},\ldots\ldots$$

Genel terimi $a_n = \frac{1}{10n}$

1, 3, 9, 27, 81, ... 14348907, 43046721,.......

Genel terimi $a_n=3^n$

Sonsuz Seriler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_n+\ldots.+\ldots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ =1+3+5+7+9+.....99+101+103,...

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}=\frac{1}{10},+\frac{1}{20},+\frac{1}{30}+.....+\frac{1}{1990}+\frac{1}{2000}+.....\frac{1}{9990}+\frac{1}{10000},....$

$\sum_{n=1}^{\infty}3^n$ = 3+ 9+ 27+ 81, ... +14348907+43046721+......

Dizinin yakinsak olmasi sarti: Hic bir terimi sonsuz olmamasi. Dizi monoton artiyorsa

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise dizi yakinsakdir.

Serinin yakinsakligi

Serinin yakinsak olmasi sarti.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = sayi(sonsuz\ degil)$$

DIZILERIN LIMITLERI

n→∞ icin dizinin aldigi degere dizinin limiti denir.

1,3,5,7,9,.....99,101,103,.... dizisinin limiti ∞

$\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{40},....$ dizisinin limiti sifirdir.

$\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $\lim (a_n + b_n) = a + b$,
2. $\lim (a_n b_n) = a \cdot b$,
3. $b_n \neq 0$ ve $b \neq 0$ için $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,
4. $\lim (\lambda a_n) = \lambda a$

1) $\lim a_n = a$ ise $\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ dır.

2) $a_n \geq 0$ ve $\lim a_n = a$ ise $\lim \sqrt[n]{a_1 . a_2 \cdots . a_n} = a$ dır.

3) $a_n > 0$ ve $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise $\lim \sqrt[n]{a_n} = r$ dir.

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = r$$

----------------4---------------------------

Sonlu sayıdaki terimler hariç diğer tüm terimler için

$a_n \leq b_n \leq c_n$

ve $\lim a_n = \lim c_n = \ell$ ise $\lim b_n = \ell$ dir.

Bu özelliğe **sandviç özelliği** adı verilir.

SERILERIN YAKINSAKLIGI

Serinin yakinsak olmasi sarti.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = sayi(sonsuz\ degil)$$

Yakinsaklik test kriterleri:

--- --

Karşılaştırma Testi

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ ve $a_k \leq C \cdot b_k$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun.

1. $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ yakınsaktır.
2. $\sum a_k$ ıraksak ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

--------- ---------------------- ---------------------- ---------------

A=$a_1+a_2+a_3+....a_n+...$

B=$b_1+b_2+b_3+....b_n+...$

$a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$, ... $a_n<b_n$, ...oluyorsa

B yakinsak ise A yakinsakdir. (p→q)

A iraksak ise B iraksakdir. (q'→p')

B iraksak ise, A yakinsak veya iraksak olabilir.
(p'→q' yanlis kıyas olur.)

A yakinsak ise, B yakinsak veya iraksak olabilir.
(q→p yanlis kıyas olur.)

------------------------ ------------------------- -

Limit Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = \gamma$$

p>1 oldugu halde Υ sonsuz degilse $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakinsakdir.
n^2, n^3, vs ile carpildigi halde dizi hala yakinsak ise demekki carpilmadan once de yakinsakdir.
---------------- ------------------------- -

Oran Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli, $\displaystyle Lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$,

r<1 ise seri yakinsak
r>1 ise seri iraksak
r=1 ise bu test calismaz.
--------------------------- -------------

Kök Testi

$Lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$,

r<1 ise seri yakinsak
r>1 ise seri iraksak
r=1 ise bu test calismaz.

Integral Testi

a_n=f(n) olsun.

$\int_{x=1}^{\infty} f(x)dx$ sonsuz degilse $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ yakinsakdir
integral sonsuz ise iraksakdir.

Limit a_n Testi

$Lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise seri iraksakdir.

seri yakinsak ise $Lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dir.

. $Lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olmasi gereklidir fakat **yeter degildir**.

yani $Lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oldugu halde seri iraksak olabilir.

----------------- ------------------------ ----------------

Ornek P341:

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisini yakinsakligini bulun.

a) Limit a_n testi.

seride dizinin genel terim $a_n = \frac{1}{n}$ dir.

$Lim_{n\to\infty} a_n = Lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$ sifirdan farkli ciksa idi kesin iraksak derdik. sifir cikmasi yakinsakligi garantilemez.

b) Oran testi

$$Lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = Lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Bu test bir sonuc vermedi.

c)kok testi

$$Lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = Lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = Lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 0^0$$

Bu testi sonuclandirmak icin belirsizligi cozmemiz lazim. Diger metodlarideneyelim, sonuc vermez ise bu metodu tekrar deneyebiliriz.

d)Integral testi:

$a_n = \mathrm{f}(n) = \frac{1}{n}$ $\quad$ $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{x}$

$$\int_{x=1}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx = \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = Ln(x)\Big|_{x=1}^{x=\infty}$$

$$= Ln(\infty) - Ln(1) = \infty - 0 = \infty$$

Sonuc $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... \frac{1}{99} + ... + \frac{1}{999} + ... = \infty$

Ornek P342:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ serisini yakinsakligini bulun.

Limit a_n testi. Oran testi, kok testi bu seri icinde sonuc vermez. Integral testini uygulayalim.

$$a_n = \mathrm{f}(n) = \frac{1}{n^2} \qquad \mathrm{f(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_{x=1}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx = \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_{x=1}^{\infty}$$

$$= \left.\frac{1}{-x}\right|_{x=1}^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = 1$$

integralin degeri ∞ olmadigi icin seri yakinsakdir.

Sonuc $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \frac{1}{99^2} + ... + \frac{1}{999^2} + ... < \infty$

seri yakinsakdir.

NOT: $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ iraksak $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakinsak

n	$\frac{1}{n}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$\frac{1}{n^2}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
1	1	1	1	1
2	0.5	1.5	0.25	1.25
3	0.33333	1.83333	0.11111	1.36111
4	0.25	2.08333	0.0625	1.42361
5	0.2	2.28333	0.04	1.46361
8	0.125	2.71786	0.01562	1.52742
9	0.11111	2.82897	0.01234	1.53977
10	0.1	2.92897	0.01	1.54977
50		4.499205		1.625133
100		5.187378		1.634984
1000		7.485471		1.643935
10000		9.787606		1.644834
100000		12.09015		1.644924
1000000		14.39273		1.644933

--------------------------------- -------------------------------
---

Ornek P345:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$ p>1 icin serisini yakinsak oldugunu gosterin.

Taylor Serisi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + ...$$

eger ilk iki terim alinirsa **dogrusal yaklasim**

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eger ilk uc terim alinirsa **parabolik yaklasim**

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

yapilmis olur. ilk iki terimin alindigi duruma fonksiyonun $x=x_0$ civarinda **lineerlestirilmesi** (dogrusallastirilmasi) denir.

P221) f(x)= $e^{0.5X}$ fonksiyonunu x=3 civarinda Taylor serisine aciniz.

Cozum:

$f'(x)= 0.5\ e^{0.5X}$

$f''(x)= 0.5_x 0.5\ e^{0.5X} =0.25\ e^{0.5X}$

$f'''(x)= 0.5_x 0.5_x 0.5\ e^{0.5X} =0.125\ e^{0.5X}$

$f^{(4)}(x)= 0.5_x 0.5_x 0.5_x 0.5\ e^{0.5X} =0625\ e^{0.5X}$

$f(3)= e^{0.5\ 3}=e^{1.5} =4.4817$

$f'(3)= 0.5\ e^{0.5\ 3}=0.5\ e^{1.5} =2.24$

$f''(3)= 0.25\ e^{0.5\ 3}=1.12$

$f'''(3)= 0.125\ e^{0.5\ 3}=0.56$

$f^{(4)}(3)= 0.28$

Dogrusal yaklasim

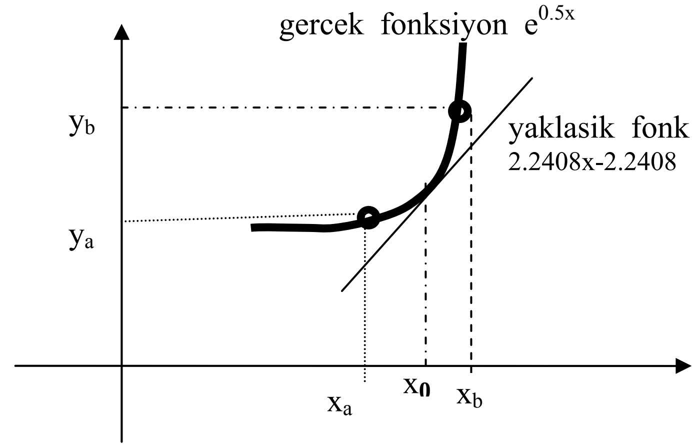
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$=4.4817+2.2408\ (x\text{-}3)= 2.2408x\text{-}2.2408$$

Ilk iki terimi alara yaklasim yaparsak. x=3 civarinda $\mathbf{e^{0.5X}}$ fonksiyonu 2.2408x-2.2408 fonksiyonuna yaklasik olarak esittir demis oluruz.

x	$\mathbf{e^{0.5X}}$	2.2408x-2.2408
2	2.7183	2.2408
2.5	3.4903	3.3613
2.9	4.2631	4.2576
2.99	4.45933	4.45936
3	**4.4817**	**4.4817**
3.01	4.5042	4.5041
3.1	4.7115	4.7058
3.5	5.7546	5.6021
4	7.3891	6.7225

x=3 noktasinda elde ettigimiz yaklasik deger fonksiyonun gercek degerine tam olarak esittir. Bu noktadan uzaklasildikca yaklasik fonksiyonun degeri fonksiyonun gercek degerinden uzalasir.

Yaptigimiz islem $x=x_0$ noktasinda fonksiyona bir teget cizmektir. Yani egimi fonksiyonun x_0 noktasindaki turevine esit olan ve x_0 noktasindan gecen dogru denklemini elde ettik. Elde ettigimiz bu dogru denklemi fonksiyona esittir dedik. Tabi ki bu esitligin gecerli olacagi yerler $x=x_0$ noktasi civarindaki yerlerdir. $x=x_0$ noktasindan uzaklasildikca bu esitlik bozulacaktir.



$\mathbf{e^{0.5X}} \approx 4.48+2.24(x\text{-}3)$ (for x=3 civarinda)

--------------------------------- -----------------------

Parabolik yaklasim

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$= 4.4817 + 2.2408\,(x - 3) + \frac{1.12}{2!}(x - 3)^2$$
$$=4.4817+2.2408\ (x\text{-}3)+0.56\ (x\text{-}3)^2$$
$$= 0.56x^2 - 1.12x + 2.8$$

x	$\mathbf{e^{0.5X}}$	$0.56x^2$-1.12x+2.8
2	2.7183	2.8011
2.5	3.4903	3.5013
2.9	4.2631	4.2632
2.99	4.45933	4.4593
3	**4.4817**	**4.4817**
3.01	4.5042	4.5042
3.1	4.7115	4.7114
3.5	5.7546	5.7422
4	7.3891	7.2827

Kubik Yaklasim

$$f(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3$$

$$f(x)=4.48+2.24(x\text{-}3)+ \frac{1.12}{2}(x\text{-}3)^2+\frac{0.56}{6}(x\text{-}3)^3+..$$

Example CT13- Obtain a linear approximation for the function f(x)=sin(x) around x_0=0.8.

Solution

$f(x)= \sin(x) \quad f(x_0)= \sin(0.8) =0.71735$

$f'(x)=\cos(x) \quad f'(x_0)= \cos(0.8)=0.69670$

$f''(x)=-\sin(x) \quad f''(x_0)=-\sin(0.8)=-0.7173$

$f'''(x)=\cos(x) \quad f'''(x_0)=-\cos(0.8)=-0.69670$

$f^{(4)}(x)=\sin(x) \quad f^{(4)}(x_0)=\sin(0.8)=0.7173$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$f(x)=0.717+0.696(x-0.8)+(-0.717/2)\ (x-0.8)^2$
$+ (0.696/6)(x-0.8)^3+(0.717/24)(x-0.8)^4$

Maclauren Serisi

x0=0 alinirsa Taylor serisi Maclauren serisi olarak adlandirilir ve fonksiyonlarin hesabinda kullanilir.

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ...$$

P321) f(x)= e^x fonksiyonunu Maclauren serisine acin.

Cozum

f(x)= e^x, f '(x)=e^x, f ''(x)= e^x, f '''(x)= **e^x ....**

$f(0) = e^0=1$
$f'(0)= e^0=1$
$f''(0)= e^0 =1$
$f'''(0)= 1$
$f^{(n)}(x)= 1$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ...$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

P321) f(x)=sin(x) fonksiyonunu Maclauren serisine acin.

Cozum

f(x)=sin(x), f '(x)=cos(x), f ''(x)=-sin(x),
f '''(x)=**-cos(x) ....**
$f(0) = \sin(0)=0$
$f'(0)= \cos(0)=1$
$f''(0)= -\sin(0)=0$
$f'''(0)= -\cos(0)=-1$
....

$$f(x) = \sin(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + ...$$