

Trigonometrik Integraller

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\begin{aligned} \int \sin ax \cos bx dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(a+b)x dx + \frac{1}{2} \int \sin(a-b)x dx \\ &= \frac{-1}{2(a+b)} \cos(a+b)x + \frac{-1}{2(a-b)} \cos(a-b)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(5+3)x + \sin(5-3)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 8x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{-1}{16} \cos 8x + \frac{-1}{4} \cos 2x \end{aligned}$$

 **$\int \cos^m x \sin^n x dx$ şeklindeki integralleri
cozerken**

$\cos x = t, -\sin x dx = dt$ veya
 $\sin x = t, \cos x dx = dt$
degisken donusumu yapilir.

Pr433) $\int \cos^{27} x \sin^{13} x dx$ integralini cozun

$$\begin{aligned} \cos x = t, \sin x dx = dt \text{ diyelim} \\ \int \cos^{27} x \sin^{13} x dx &= \int \cos^{27} x \sin^{12} x \sin x dx \\ &= \int \cos^{27} x (\sin^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= \int \cos^{27} x (\sin^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= \int \cos^{27} x (1 - \cos^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= -\int t^{27} (1 - t^2)^6 dt \end{aligned}$$

Bu integral cozulebilecek bir haldedir.

Pr435) $\int \cos^{27} x \sin^{14} x dx$ integralini cozun

$$\cos x = t, -\sin x dx = dt, \sin x = \sqrt{1-t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^{27} x \sin^{14} x dx &= \int \cos^{27} x \sin^{12} x \sin x dx \\ &= \int \cos^{27} x (\sin^2 x)^6 x \sin x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \cos^{27} x (\sin^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= \int \cos^{27} x (1 - \cos^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= -\int t^{27} (1 - t^2)^6 \sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

Pr436) $\int \cos^{27} x \sin^{14} x dx$ integralini

$\sin x = t, \cos x dx = dt$ diyerek cozelim

$$\begin{aligned} \int \cos^{27} x \sin^{14} x dx &= \int \cos^{26} x \sin^{14} x \cos x dx \\ &= \int (\cos^2 x)^{13} \sin^{14} x \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^{13} \sin^{14} x \cos x dx \\ &= \int (1 - t^2)^{13} t^{14} dt \end{aligned}$$

goruldugu gibi ayni integrali kolay cozulebilir hale getirdik. Burada temel konu $\cos x$ ve $\sin x$ den kimin kuvveti tek ise onu atama yapmaktir.

A) $\cos^7 x, \cos^{23} x$ seklinde $\cos x$ in tek kuvveti varsa $\cos x = t$ deriz

B) $\sin^9 x, \cos^{13} x$ seklinde $\sin x$ in tek kuvveti varsa $\sin x = t$ deriz

C) Hem $\cos x$ in hem $\sin x$ in tek kuvveti varsa herhangi birine t desek olur.

D) Hem $\cos x$ in, hem $\sin x$ in kuvveti cift ise.

$\int \cos^{24} x \sin^{14} x dx$ bu durumda ister $t = \cos x$, diyelim
ister $t = \sin x$ diyelim. Karekoklu ifade gelir.

Pr441) $\int \cos^{24} x \sin^{14} x dx$ integralini cozun

$$\cos x = t, -\sin x dx = dt, \sin x = \sqrt{1-t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^{24} x \sin^{14} x dx &= \int \cos^{24} x \sin^{12} x \sin x dx \\ &= \int \cos^{24} x (\sin^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= \int \cos^{24} x (\sin^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= \int \cos^{24} x (1 - \cos^2 x)^6 x \sin x dx \\ &= -\int t^{24} (1 - t^2)^6 \sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

Bu da kolay cozulebilen bir integral degildir.
 $\sin x$ ve $\cos x$ in kuvvetleri kucukse

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

yazarak cozm eye calisiriz.

 $\int \tan^m x \sec^n x dx$ Seklindeki integraller.

$(\tan x)' = 1/\cos^2 x = \sec^2 x = (1 + \tan^2 x)$ bagintisindan faydalanarak problemi cozmeye calisiriz.

$t = \tan x$, dersek $dt = \sec^2 x dx$ olur.

$$446) \int \tan^4 x \sec^6 x dx$$

$$t = \tan x, \rightarrow dt = \sec^2 x dx, \sec^2 x = (1 + \tan^2 x)$$

$$\int \tan^4 x (\sec^4 x) (\sec^2 x) dx$$

$$= \int \tan^4 x (\sec^2 x)^2 (\sec^2 x) dx$$

$$= \int \tan^4 x (1 + \tan^2 x)^2 (\sec^2 x) dx$$

$$= \int t^4 (1 + t^2)^2 dt$$

Cozulebilecek bir polinom haline geldi.

$$447) \int \tan^4 x \sec^5 x dx$$

$$t = \tan x, \rightarrow dt = \sec^2 x dx, \sec^2 x = (1 + \tan^2 x)$$

$$\int \tan^4 x \sec^5 x$$

$$= \int \tan^4 x (\sec^2 x)(\sec x)(\sec^2 x) dx$$

$$= \int \tan^4 x (1 + \tan^2 x) \sqrt{1 + \tan^2 x} (\sec^2 x) dx$$

$$= \int t^4 (1 + t^2) \sqrt{1 + t^2} dt$$

kolay cozulebilecek bir polinom degil.

(tan x) in kuvveti cift (sec x) in tek kuvveti gelirse genel bir yontem yoktur.

Ancak $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ koyarak integral sec x in tekkuvvetleri haline indirgenir.

Indirgeme bagintisi ile

$$(\sec^7 x) \rightarrow (\sec^5 x)$$

$$(\sec^5 x) \rightarrow (\sec^3 x)$$

$$(\sec^3 x) \rightarrow (\sec x)$$

sekli nde indirgeyerek cozebiliriz.

$$449) \int \tan^4 x \sec^5 x dx$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

integralde yerine koyayim.

$$\int \tan^4 x \sec^5 x dx = \int (\tan^2 x)^2 \sec^5 x dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^5 x dx$$

$$= \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) \sec^5 x dx$$

$$= \int (\sec^9 x - 2\sec^7 x + \sec^5 x) dx$$

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx, \quad \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx, \quad \text{sekindeki integraller}$$

paydaki terimin kuvveti tek ise paydadaki terime t denir ve problem cozulur. Paydaki terimin kuvveticift ise karekoklu ifade gelir.

$$461) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} dx,$$

$$t = \cos x, dt = -\sin x dx, \sin x = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} \sin x dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^8 x} \sin x dx$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^8} dt$$

$$462) \int \frac{\cos^7 x}{\sin^6 x} dx,$$

$$t = \sin x, dt = \cos x dx, \cos x = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} \cos x dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^3}{\sin^6 x} \cos x dx$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)^3}{t^6} dt$$

$$463) \int \frac{\cos^8 x}{\sin^6 x} dx,$$

$$t = \sin x, dt = \cos x dx, \cos x = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\int \frac{\cos^6 x \cos x}{\sin^6 x} \cos x dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^3 \sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin^6 x} \cos x dx$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)^3 \sqrt{1 - t^2}}{t^6} dt$$

payin kuvveti cift ise koklu ifade gelir ve bu yontem calismaz. Baska yontemler bulmamiz gerekir.

sin x cos x in rasyonel fonksiyonu kesirler icin genel

yontem $t = \tan x$ veya $t = \tan \frac{x}{2}$ donusumu

yapmaktir.

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\tan(x) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$465) \int \frac{\cos^8 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\tan^6 x} dx$$

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^6} \frac{2}{1+t^2} dt$$

İşlemler yapılırsa t nin rasyonel kesirli bir fonksiyonu elde edilir.

$$\cos^{24} x = (\cos^2 x)^{12} = \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right)^{12}$$

$$\cos^{24} x = (\cos^2 x)^{12} = \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right)^{12}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$