## İntegral Hesabın Temel Teoremi

$f$, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a, b] \to R$ fonksiyonu varsa,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dır. Bu eşitliğe **Newton – Leibniz Formülü** adı verilir.

İntegrallenebilen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

**1.** $\int_a^a f(x)dx = 0$

**2.** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

olur.

integrallerin turevleri

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad F'(x)=f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$$

**Bu bağıntıya Leibniz Formülü adı verilir.**

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)?$$

$$\int_{x^2+1}^{x^5}(x^3+2x)dx = ?$$ , f(x)=$x^3$+2x, v(x)=$x^2$+1, u(x)=$x^5$,

f(u(x))= $(x^5)^3 + 2x^5$, f(v(x))= $(x^2+1)^3 + 2(x^2+1)$', u'(x)=$5x^4$, v'(x)=2x,

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2+1}^{x^5}(x^3+2x)dx = [(x^5)^3+2x^5]5x^4 - [(x^2+1)^3+2(x^2+1)]\,2x,$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)?$$

**11** $F(x)=\int_x^{x^2}\sin(t^2)\,dt$ için $F'(x)$ nedir?

**Çözüm** Leibniz formülünden

$$F'(x) = \sin(x^4)\,.\,2x - \sin(x^2)\,.\,1$$
$$= 2x\sin(x^4) - \sin(x^2)$$

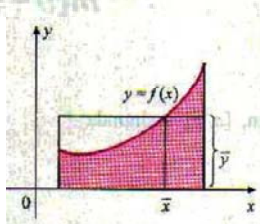
bulunur.

**Ortalama deger Teoremi**

$f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. $y=f(x)$ in $[a, b]$ aralığındaki ortalaması

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

sayısıdır.



$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

eşitliği

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{y}\cdot(b-a)$$

yazıldığında şu geometrik anlam çıkar : Pozitif bir fonksiyonun altında kalan alan, eni $b-a$, boyu $\overline{y}$ olan bir dikdörtgenin alanına eşittir.

**13** $f(x)=x^2$ fonksiyonunun [0, 3] aralığındaki ortalama değerini hesap

**özüm** $\overline{y} = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \dfrac{27}{9} = 3$

**eorem 8**

$f$, $[a, b]$ üzerinde sürekli ise $[a, b]$ aralığında

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dt$$

olacak şekilde en az bir $x_0$ sayısı vardır.

**EK 14** $f(x)=mx+n$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz. bu ortalama değeri $[a, b]$ aralığının hangi noktasında alır?

**Çözüm**

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+n)\,dx = \frac{1}{b-a}\left(m\frac{x^2}{2}+nx\right)\Bigg|_a^b$$

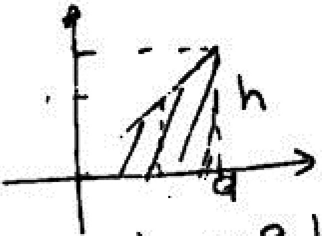
$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{m}{2}b^2 + nb - \frac{m}{2}a^2 - na\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{m}{2}(b-a)(b+a) + n(b-a)\right] = \frac{m}{2}(b+a)+n$$

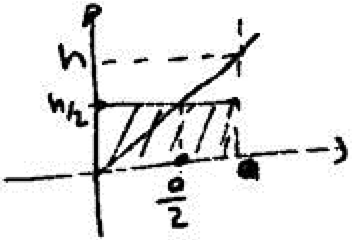
olur.

$$f(x_0) = mx_0 + n = \frac{m}{2}(b+a) + n \Rightarrow x_0 = \frac{a+b}{2}$$

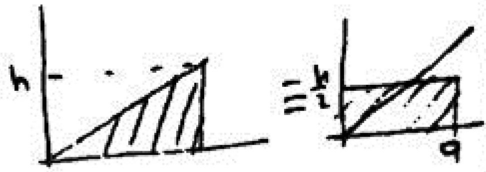
bulunur. Şu halde $f(x)=mx+n$ fonksiyonları ortalama değerini, $[a, b]$ aralığının orta noktası olan $\dfrac{a+b}{2}$ noktasında almaktadır.

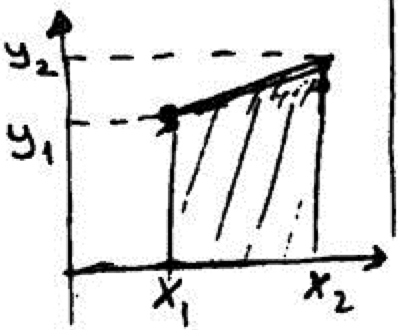



$$\text{alan} = \frac{a.h}{2}$$

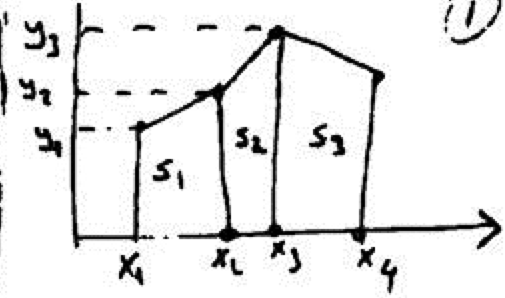



$$\text{alan} = a.\frac{h}{2} =$$



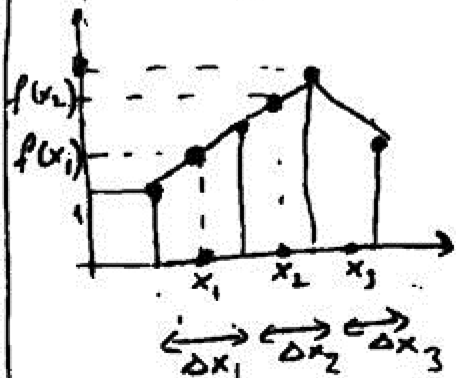




$$\text{alan} = \frac{y_2+y_1}{2}\cdot(x_2-x_1)$$

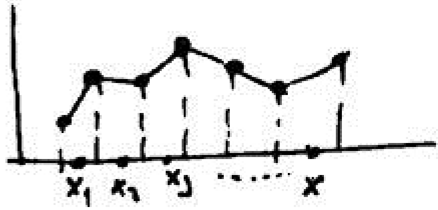



$$s_1 = \left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)(x_2-x_1)$$

$$s_2 = \frac{y_3+y_2}{2}\;(x_3-x_2)$$




$$\text{alan} = \Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2) + \cdots$$

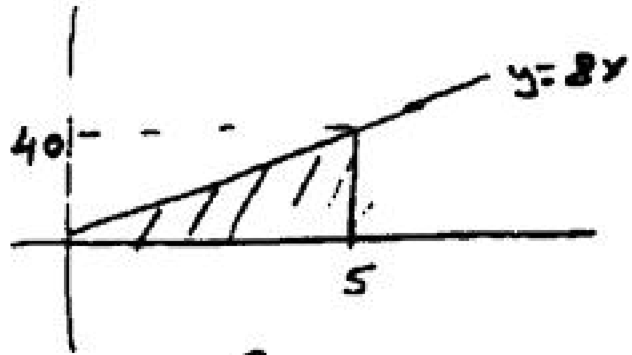



$$\text{alan} = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\Delta x_n$$

$$= \int f(x)\,dx$$

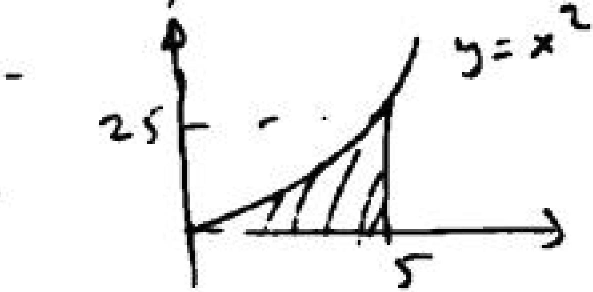
211) $S = ?$




$$\int_0^5 8x\,dx = 0$$

$$8\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 4x^2\Big|_0^5 = 100$$

212)




$$S = \int_0^5 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = 41.6$$

213)


$$\int_0^\pi \sin x\,dx =$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= -(-1-1) = 2$$


$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi}$$

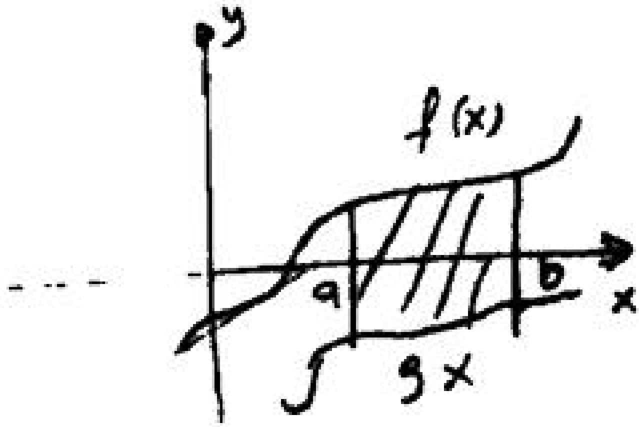
$$= -(\cos 2\pi - \cos 0)$$

$$= 0$$

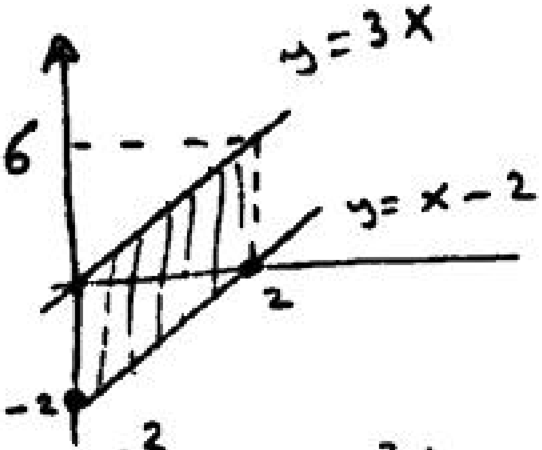
Alanı hesaplamak istersek

$$\left|\int_0^\pi\right| + \left|\int_\pi^{2\pi}\right|$$

olmalıdır.




$$\text{alan} = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$




$$S=\int_0^2 [3x-(x-2)]\,dx$$

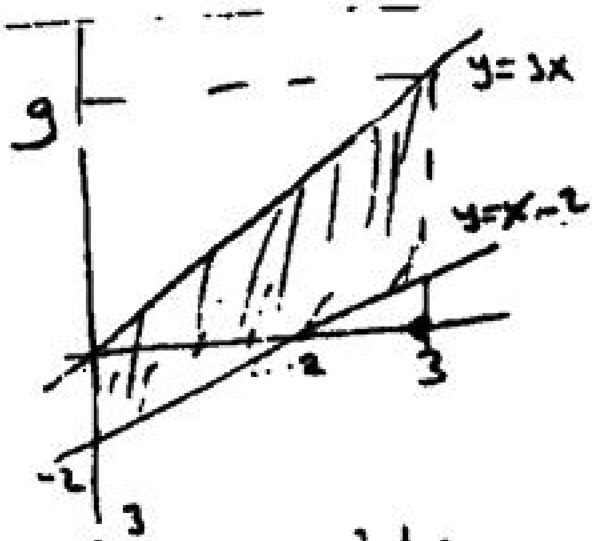
$$=\int_0^2 (2x+2)\,dx = x^2+2x\Big|_0^2$$

$$=(4+4)-(0+0)=8$$

Birinci bölgedeki kısmın alanı $\frac{2\times 6}{2}=6$

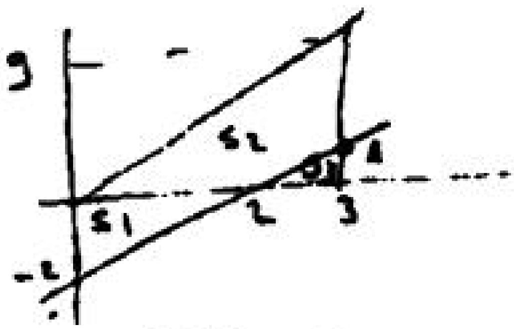
2. bölgedeki kısmın alanı $\frac{2\times 2}{2}=2$

Toplam alan $6+2=\overset{3}{8}$




$$S=\int_0^3 [3x-(x-2)]\,dx$$

$$=x^2+2x\Big|_0^3 = 9+6=15$$



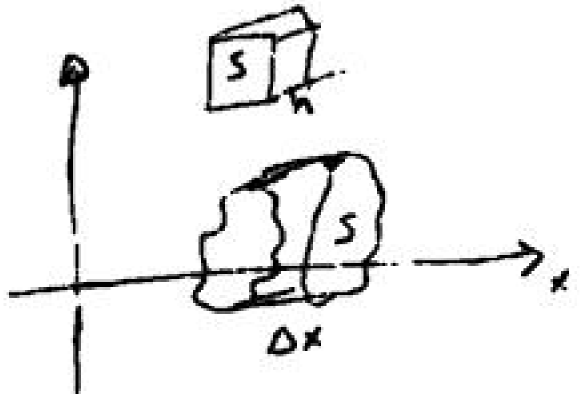

$s_1=\frac{2\times 2}{2}=2$

$(s_2+s_3)=\frac{3\times 9}{2}=$

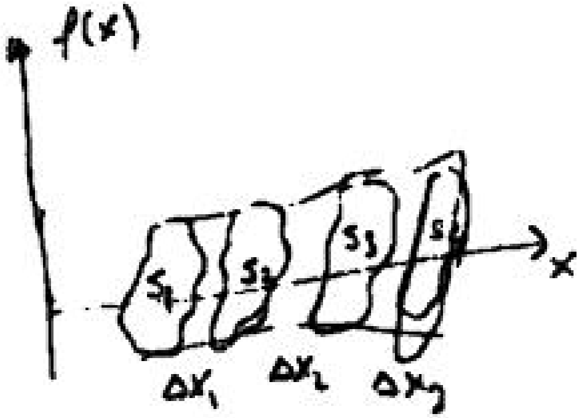
$s_3=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$

$s_1+s_2 = 2+\left(\frac{3\times 9}{2}\right)-\frac{1}{2}$

$=15$




hacim = alan x Δx

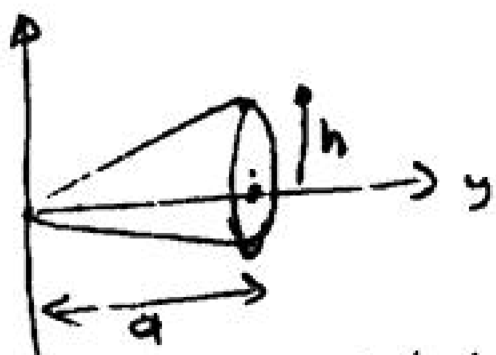



hacim $= S_1 \Delta x_1 + S_2 \Delta x_2 + \ldots$

$$V = \sum_{n=1}^{N} S_n \Delta x_n$$

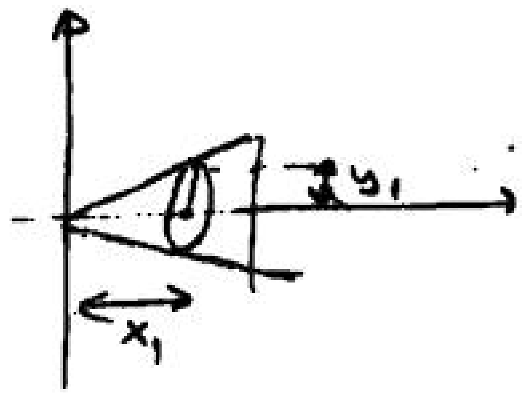
$$= \int A(x)\, dx$$

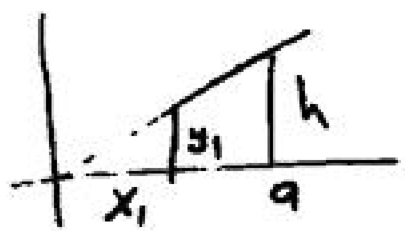
$A(x)$ = alan fonksiyonu




Koninin hacmini bulun

Bir kesit alalım




$x = a$ için $y = h$

$x = x_1$ için $y_1 = \frac{h x_1}{a}$

daire alanı $\pi r^2 = \pi y_1^2$

herhangi bir $x$ noktası için

$y = \frac{hx}{a}$

alan $= \pi y^2 = \pi \frac{h^2}{a^2} x^2$

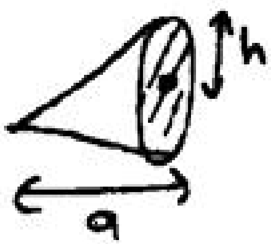
$$A(x) = \pi \frac{h^2}{a^2} x^2$$

$$\text{hacim} = \int_0^a A(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \pi \frac{h^2}{a^2} x^2\,dx$$

$$= \pi \frac{h^2}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a$$

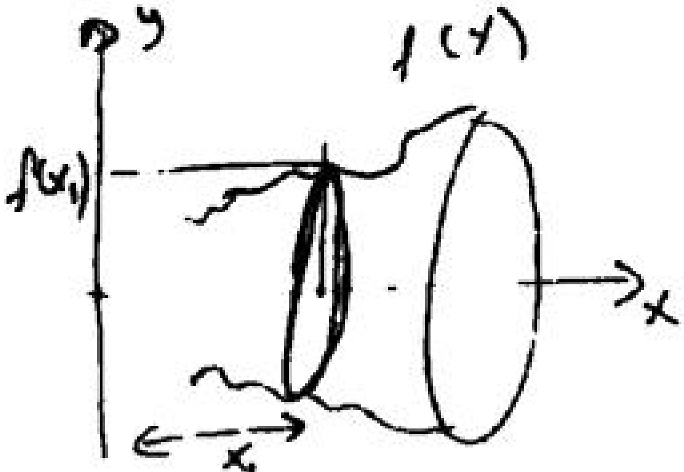
$$= \pi \frac{h^2}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{\pi h^2 \cdot a}{3}$$




$$\frac{\pi h^2 \cdot a}{3}$$

$$\frac{\text{Taban alanı} \times \text{yüksekliği}}{3}$$

# Dönel cisimlerin hacim hesabı




$f(x)$ eğrisi x ekseni etrafında döndürülürse

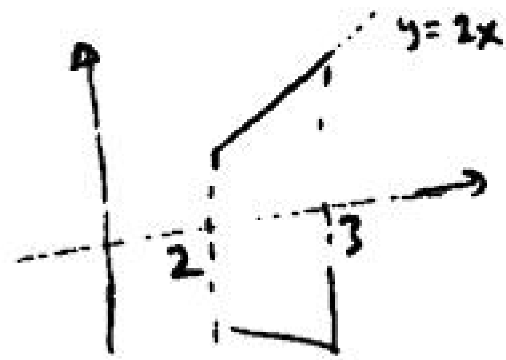
$V = ?$

Eksen etrafında döndürüldüğü için herhangi bir $x_1$ noktasındaki alan dairedir ve bu dairenin yarıçapı $f(x_1)$ dir

alan $= \pi r^2 = \pi (f(x_1))^2 = A(x)$

hacim $= \int A(x)\, dx$

$= \int \pi \cdot [f(x)]^2 dx$




y=2x doğrusunun x ekseni etrafında döndürülmesinden oluşan kesik koninin hacmini bulun.

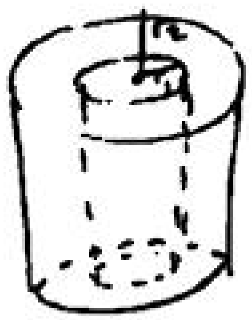
$$\int_2^3 \pi \cdot (2x)^2 dx = \pi \cdot 2 \frac{x^3}{3} \Big|_2^3$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(3^3 - 2^3\right) =$$


$$(\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 - \pi r_2^2 h_2)/3$$

$$= \pi \frac{6^2 \cdot 3}{3} - \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 2}{3}$$

3) Kabuk yöntemi



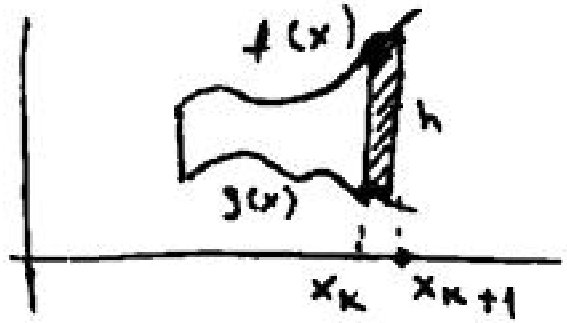
silindir halkanın hacmi

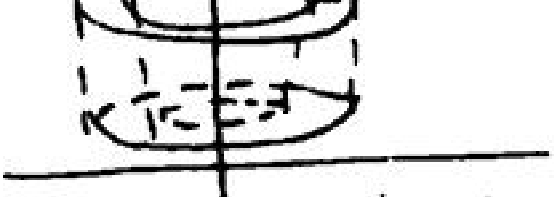
$\pi r_2^2 \cdot h - \pi r_1^2 \cdot h$

$= \pi h (r_2^2 - r_1^2)$

$= \pi h (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$

$= 2\pi h \frac{(r_2 + r_1)}{2} (r_2 - r_1)$



Taralı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim

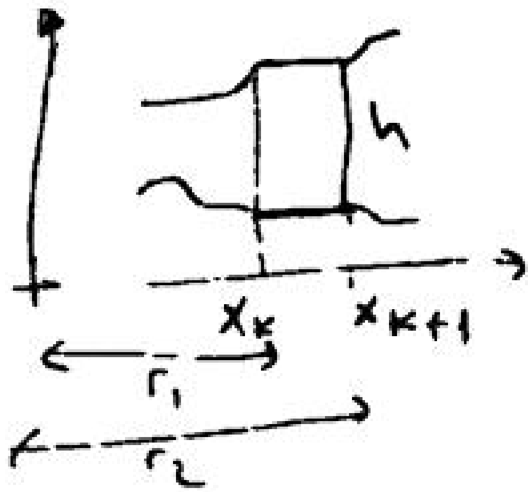
$$V = 2\pi h \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)(r_2 - r_1)$$

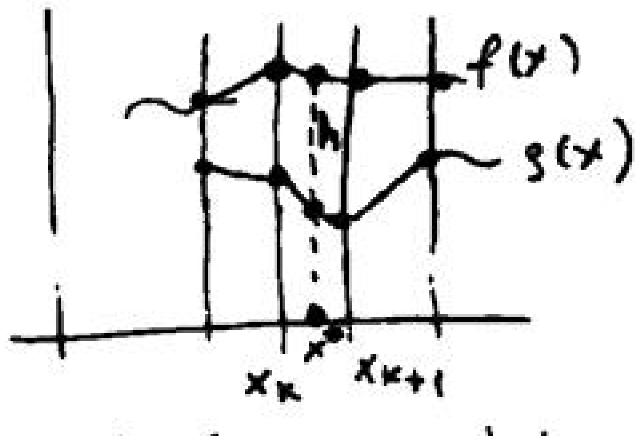
$$h = f(x) - g(x)$$

$$= f(x_K) - g(x_K)$$

h: ortalama yükseklik

Başlangıçta h her tarafta aynı olsun.



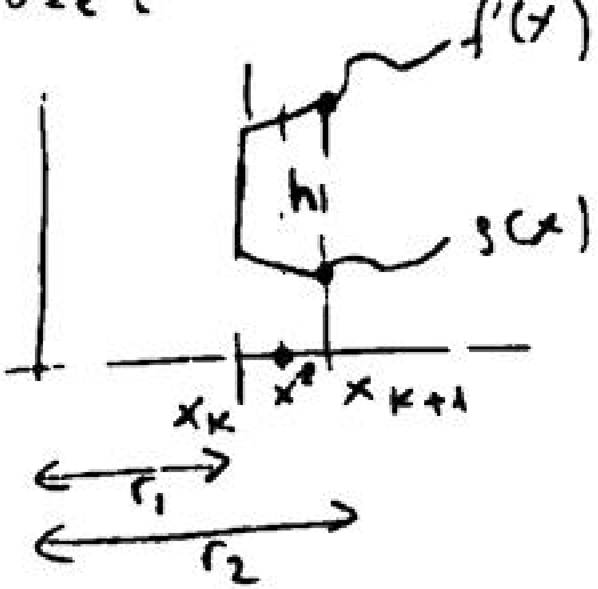




$$x^* = (x_{K+1} + x_K)/2$$

$$h = f(x^*) - g(x^*)$$

$$\Delta x = x_{K+1} - x_K$$

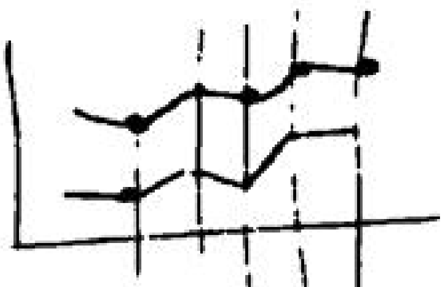
Özet

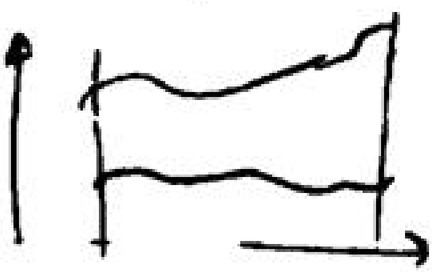



$$V = 2\pi \frac{r_2+r_1}{2}(r_2-r_1)\, h$$

$$= 2\pi \underbrace{\frac{x_{k+1}+x_k}{2}}_{x^*} \underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{\Delta x} \underbrace{h}_{f(x^*)-g(x^*)}$$

$$= 2\pi\, x^* \,\Delta x \left(f(x^*)-g(x^*)\right)$$



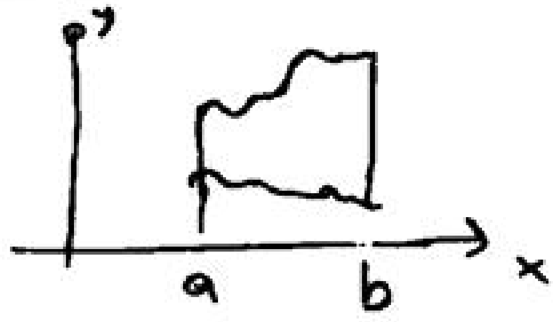


$$V_{top} = 2\pi\, x_1^* \,\Delta x_1 \left(f(x_1^*)-g(x_1^*)\right)$$
$$+\, 2\pi\, x_2^* \,\Delta x_2 \left(f(x_2^*)-g(x_2^*)\right)$$
$$+\, 2\pi\, x_3^* \,\Delta x_3 \left(f(x_3^*)-g(x_3^*)\right)$$
$$\vdots$$
$$+\, 2\pi\, x_n^* \,\Delta x_n \left(f(x_n^*)-g(x_n^*)\right)$$

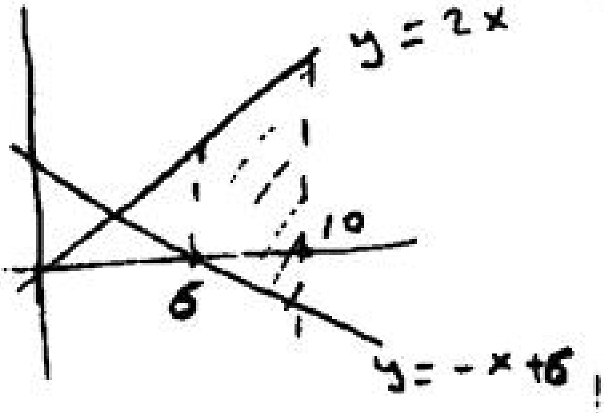
$$= 2\pi \sum_{k=1}^{N} x_k^* \,\Delta x_k \left(f(x_k^*)-g(x_k^*)\right)$$

$$= 2\pi \int x\, dx \left(f(x)-g(x)\right)$$

$$= 2\pi \int_a^b x \left\{f(x)-g(x)\right\} dx$$



311




Taralı alanın y ekseni etrafında döndürülmek oluşan hacmi hesaplayın.

$$V = 2\pi \int_{6}^{10} x\left(2x-(-x+6)\right) dx$$

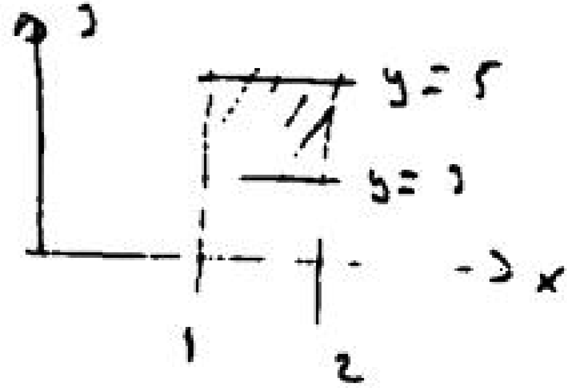
$$= 2\pi \int_{6}^{10} (3x^2-6x)\, dx$$

$$= 2\pi \left(x^3-3x^2\right)\Big|_{6}^{10}$$

$$= 2\pi\left[(1000-300)-(216-108)\right]$$

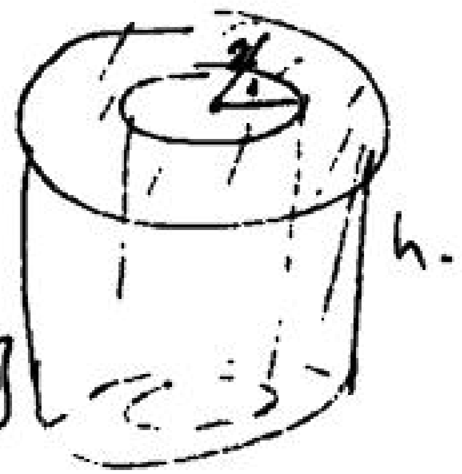
$$= 2\pi \cdot 592$$

312




$$V = 2\pi \int_{1}^{2} (5-3)x \, dx$$

$$= 2\pi x^2 \Big|_{1}^{2} = 2\pi(4-1) = 6\pi$$



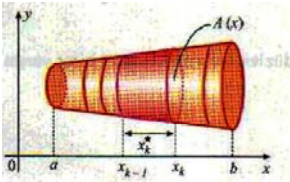

$h = 5-3 = 2$

$\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 \cdot h$

$\pi\, 2^2 \cdot 2 - \pi \cdot 1^2 \cdot 2$

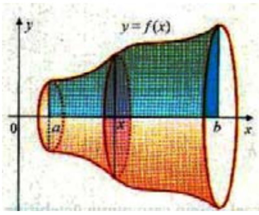
$= 6\pi$

------121 ----------



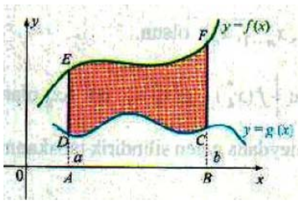

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

-----122-------------------- ------------------



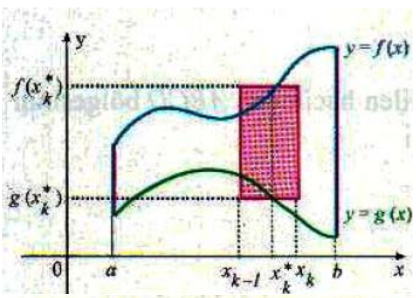

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

--------123----------------- ------------------




$$V=\pi\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\,dx$$

--------124----------------- ------------------

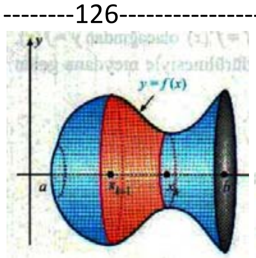



$$V=2\pi\int_a^b |x[f(x)-g(x)]|\,dx$$

--------125----------------- ------------------

$$\ell=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$ , $$\ell=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$$

--------126----------------- ------------------




$$S=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

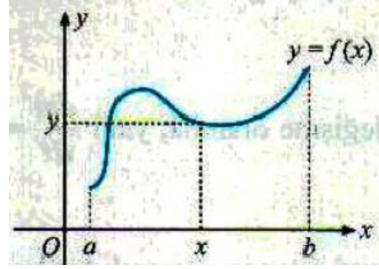
$$S=2\pi\int_a^b |y-k|\sqrt{1+[(y')^2}\,dx$$

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y|\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$$

--------127----------------- ------------------

$$m=\int\sigma\,dl,\quad m=\int\sigma\,dA,\quad m=\int\sigma\,dV$$

--------128----------------- ------------------




$$M_x=\int_a^b y\,dm=\int_a^b y\,\sigma(x)\,d\ell=\int_a^b y\,\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$M_y=\int_a^b x\,dm=\int_a^b x\,\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$M_o=\int_a^b \sqrt{x^2+y^2}\,\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\sigma(x)\,dx$$

$$M_y=\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,\sigma(x)\,dx$$

-----129----------------- ------------------

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{m}$$

--------130----------------- ------------------

**Birinci Pappus – Guldin Teoremi**

Bir düzlemsel bölgenin kendisiyle kesişmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, bu bölgenin alanı ile bölgenin ağırlık merkezinin söz geçen dönme sırasında aldığı yolun çarpımına eşittir.

Hacim= Alan * yol = kesit alani * (cemberin cevresi)

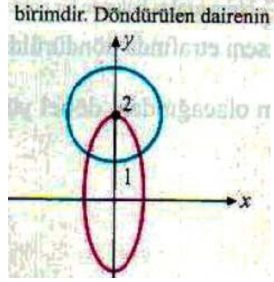
$x^2+(y-2)^2\le 1$ dairesinin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Alan= $\pi r^2=\pi\, 1^2=\pi$

yol=$2\pi r=2\pi 2=4\pi$

Hacim= Alan * yol =$4\pi\,\pi=4\pi^2$

Bölgenin ağırlık merkezi (0, 2) noktasıdır. Bu nokta $Ox$– ekseni etrafında 360° döndürüldüğünde 2 birim yarıçaplı bir çember oluşur. Bu çemberin çevresi $2\pi r=2\pi\cdot 2=4\pi$ birimdir. Döndürülen dairenin alanı $\pi r^2=\pi$ olacağından




$$V=4\pi\cdot\pi=4\pi^2$$

--------131----------------- ------------------

**İkinci Pappus – Guldin Teoremi**

Bir düzlemsel eğrinin kendisiyle kesişmeyen bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı, bu eğrinin uzunluğu ile eğrinin ağırlık merkezinin dönme sırasında aldığı yolun çarpımına eşittir.

Alan=uzunluk*yol=egrinin uzunlugu*cemberin cevresi

Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

x ekseni etrafinda dondurulmesi ile olusan alan.
Cozum.
1)Egri uzunlugunu bul.
2)Agirlik merkezini bul.
3)Cemberin cevresini bul.
Alan=egri uzunlugu*cemberin cevresi.
Egri uzunlugu (125) ile verilmis.

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt$$

Agirlik merkezi 129 ile verilmis.
cemberin cevresi=$2\pi r = 2\pi \bar{y}$

--------132----------------- ------------------

$$I_x = \int_a^b \sigma y^2 \sqrt{1+(y')^2}\; dx$$

$$x = u(t), \; y = v(t), \; \alpha \le t \le \beta$$

$$I_x = \int_\alpha^\beta \sigma v^2(t) \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\; dt$$

$$I_y = \int_\alpha^\beta \sigma u^2(t) \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\; dt$$

--------133----------------- ------------------

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx \qquad (8.1)$$

ifadesine $f$ nin $[a, +\infty)$ üzerindeki **birinci çeşit genelleştirilmiş integrali** denir,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad (8.2)$$

ile gösterilir. Eğer (8.1) deki limit varsa (8.2) integrali **yakınsak**, limit yoksa integral **ıraksaktır** denir.

------------------------------------------------------------ ------

ikinci cesit integralde f(b)=∞ olur.

$f$ fonksiyonu $[a, b)$ aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) olsun. Bu takdirde $\int_a^b f(x)\,dx$ integraline bir **ikinci çeşit genelleştirilmiş integral**, $b$ noktasına da bu integralin bir **singüler noktasıdır** denir. Bu integralin değeri

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$