İKİ KATLI İNTEGRAL

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} (xy + \sin x)\, dy\, dx$$

integrasyon sırasını $\underline{dy\,dx}$ belirler.

$\underline{dy\,dx} \rightarrow$ önce y ye göre integral al

$\underline{dx\,dy} \rightarrow$ önce x'e göre integral al

$$\int_{x=2}^{x=3}\int_{y=5}^{10} (xy + x^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left(\int_{y=5}^{10} (xy + x^2)\, dy\right) dx$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left(\left(x\frac{y^2}{2} + x^2 y\right)\Bigg|_{y=5}^{10}\right) dx =$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left(\left(\frac{xy^2}{2} + x^2 y\right)\Bigg|_{y=5}^{10}\right) dx =$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left[\left(\frac{x.10^2}{2} + x^2.10\right) - \left(\frac{x.5^2}{2} + x^2.5\right)\right] dx$$

$$= \int_{x=2}^{3} (50x + 10x^2 - 12.5x - 5x^2)\, dx$$

$$= \int_{x=2}^{3} (5x^2 + 37.5x)\, dx = \left(5\frac{x^3}{3} + 37.5\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=2}^{3}$$

$$= \left(\frac{5.3^3}{3} + 37.5\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{5.2^3}{3} + 37.5\frac{2^2}{2}\right)$$

$$= 125.4$$

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

1) Önce y'ye göre integral alınır.

2) y yerine önce g(x) sonra h(x) konulur

$$\int_{y=a}^{b}\int_{x=h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

önce x'e göre integral alınır.

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,d$$ şeklinde

Sınırlar sabit ise integrasyon sırasının önemi

Yoktur.

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=h(x)}^{y=g(x)} f(x,y)\,d$$ şeklinde

ise integrasyon sırası önemlidir. Mutlaka önce y ye göre integral alınmalı daha sonra x'e göre alınmalıdır.

$$\int_{x=2}^{x=4}\int_{y=2x}^{x^2} xy\,dy\,dx = ?$$

$$\int_{x=2}^{x=4}\left(\int_{y=2x}^{x^2} xy\,dy\right)dx = \int_{x=2}^{4} x\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=2x}^{x^2} dx$$

$$= \int_{x=2}^{4}\left(x\,\frac{(x^2)^2}{2} - x\,\frac{(2x)^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=2}^{4} \left(x^5 - 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} - 2\,\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=2}^{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^6}{6} - 2\,\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{2^6}{6} - 2\cdot\frac{2^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[103.5 - 5.33\right] = 49.08$$

$$\int_{y=4}^{5}\int_{x=3y}^{y^3} \left(x^2 y + x\right) dx\, dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left(\int_{x=3y}^{y^3} \left(x^2 y + x\right) dx\right) dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left(\left(\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=3y}^{y^3}\right) dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left[\left(\frac{(y^3)^3}{3}\cdot y + \frac{(y^3)^2}{2}\right) - \left(\frac{(3y)^3}{3}\cdot y + \frac{(3y)^2}{2}\right)\right] dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left[\left(\frac{y^{10}}{3} + \frac{y^6}{2}\right) - \left(9y^4 + \frac{9}{2}y^2\right)\right] dy =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\,\frac{y^{11}}{11} + \frac{1}{2}\,\frac{y^7}{7} - 9\,\frac{y^5}{5} - \frac{9}{2}\,\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=4}^{5}$$

$$= 1473408 - 126331 = 1353077$$

TANIM

B kapalı ve sınırlı bir bölge ve f bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. B bölgesinin bir $P = \{ B_1, B_2, \ldots, B_n \}$ parçalanması verildiğinde, ΔA_k, B_k bölgesinin alanını, (x_k^*, y_k^*) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** veya **integral toplamı** adı verilir.

TANIM

Eğer

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali** denir,

$$\iint_B f(x, y)\, dA \qquad (14.1)$$

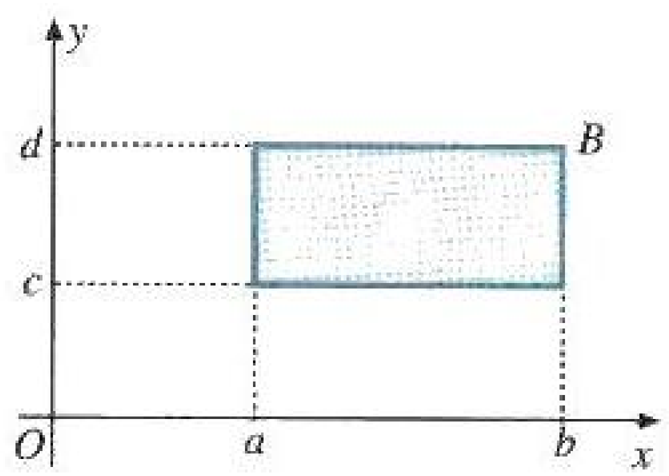
ile gösterilir. $f(x, y)$ ifadesine **integrant**, B bölgesine de **integrasyon bölgesi** denir.

TEOREM 14.1 **(Birinci Fubini Teoremi)**

$B = \{ (x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d \}$ ve $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

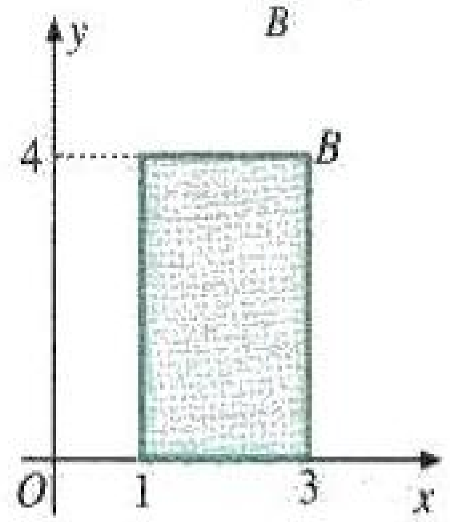
Bu teoreme göre, integrasyon bölgesi bir dikdörtgensel bölge olduğunda integralin sırası değiştirilebilir.



ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4 \}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4 \}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

Çözüm : $$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_1^3 2xy^3\, dx dy = \int_0^4 \left(\int_1^3 2xy^3\, dx \right) dy$$



$$= \int_0^4 (x^2 y^3) \Big|_1^3 dy = \int_0^4 (9y^3 - y^3)\, dy$$

$$= \int_0^4 8y^3\, dy = 2y^4 \Big|_0^4 = 2.4^4 = 512 .$$

olur. Integrasyon sırasını değiştirerek; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\iint_B f(x,y) dA = \int_1^3 \int_0^4 2xy^3\, dy dx = \int_1^3 \left(\int_0^4 2xy^3\, dy \right) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2} xy^4 \Big|_0^4 dx = \int_1^3 128x dx = 64x^2 \Big|_1^3 = 512$$

ÖRNEK 1 İki Katlı Bir İntegral Hesaplamak

$f(x, y) = 1 - 6x^2y$ ve $R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$ için $\iint_R f(x, y)\, dA$'yı hesaplayın.

Çözüm Fubini teoremiyle,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} (1 - 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 - 16y)\, dy = \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 4$$

bulunur. İntegrasyon sırasını değiştirmek de aynı sonucu verir:

$$\int_0^2 \int_{-1}^{1} (1 - 6x^2y)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1} dx$$

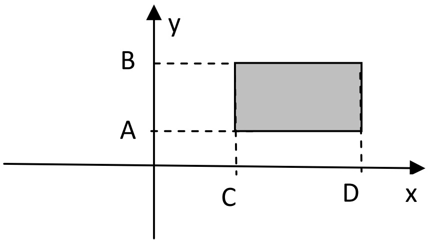
$$= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)]\, dx$$

$$= \int_0^2 2\, dx = 4.$$

BOLGEDE INTEGRASYON

A) $\int\limits_{y=A}^{y=B} \int\limits_{x=C}^{x=D} f(x,y)dxdy$,

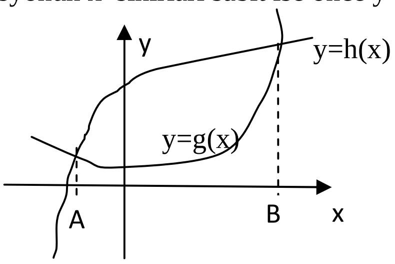
Seklindeki integrallerde integral bolgesi bir dikdortgendir.



Bu durumda integrasyon sirasinin bir onemi yoktur. Once x'e gore yada once y'ye gore integral alinsa sonuc ayni olur.

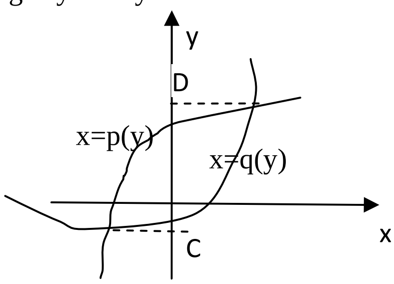
$$\int\limits_{y=A}^{y=B} \int\limits_{x=C}^{x=D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=C}^{x=D} \int\limits_{y=A}^{y=B} f(x,y)dydx$$

B) Integrasyonun x sinirlari sabit ise once y'ye gore integral alinir.



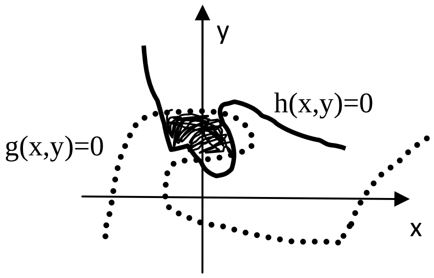
$$\int\limits_{x=A}^{x=B} \int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)} f(x,y)dydx$$

C) Integrasyonun y sinirlari sabit ise once x'ye gore integral alinir.



$$\int\limits_{y=C}^{y=D} \int\limits_{x=p(y)}^{x=q(y)} f(x,y)dxdy$$

D) Integrasyonun x ve y sinirlari sabit olnuyor ise bolge parcalara ayrilir her parcanin ayri integrali alinir ve toplanir.



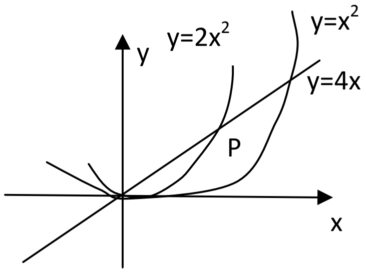
HATALI YAZIMLAR $\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)} \int\limits_{x=A}^{x=B} f(x,y)dxdy$, $\int\limits_{x=p(y)}^{x=q(y)} \int\limits_{y=C}^{y=D} f(x,y)dydx$

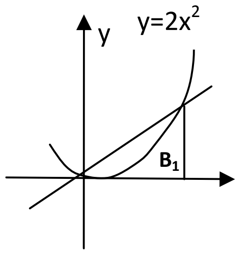
$\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)} \int\limits_{x=p(y)}^{x=q(y)} f(x,y)dxdy$ seklindeki integraller **anlamsizdir, hatalidir**.

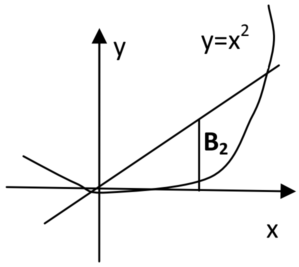
--- ------------------------------------

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Problemin degisik cozumleri mevcuttur.
Cozum 1)





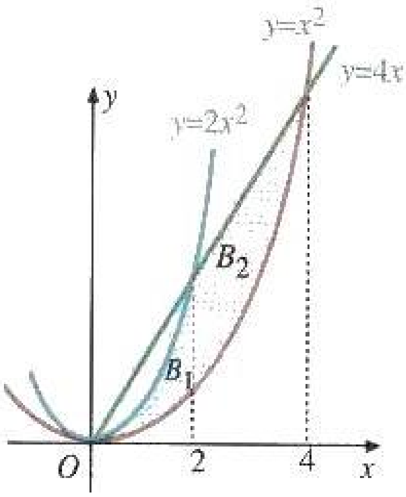


Sorulan integral P alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=B_1+B_2 oldugu aciktir. Dolayisiyla B_1 ve B_2 yi hesaplar sonra P= B_1+B_2 hesaplariz.

$$I = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

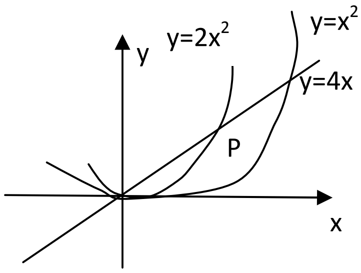
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x+y+1)\,dydx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x+y+1)\,dydx$$

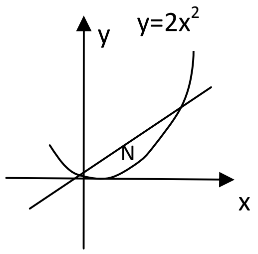
$$= \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2} + y \,\Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + y\right)\Big|_{x^2}^{4x} dx$$

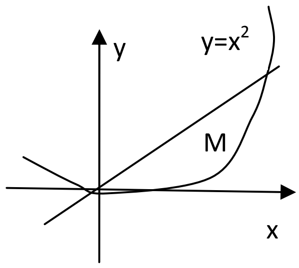


$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5} = \mathbf{86.4}$$

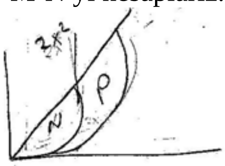
Cozum 2)

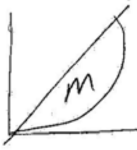






Sorulan integral P alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=M-N oldugu aciktir. Dolayisiyla once N ve M yi hesaplariz sonra P=M-N yi hesaplariz.





$P = M - N$

$$N = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=2x^2}^{y=4x} (x+y+1)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_{2x^2}^{4x}$$

$$N = \int_0^2 \left(x(4x) + \frac{(4x)^2}{2} + 4x\right) - \left(x(2x^2) + \frac{(2x^2)^2}{2} + 2x^2\right) dx$$

$$= \int_0^2 4x^2 + 8x^2 + 4x - \{2x^3 + 2x^4 + 2x^2\}\, dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 4x)\, dx$$

$$= -2\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + 10\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2$$

$$= -\frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 2x^2\Bigg|_0^2$$

$N = 13.8667 - 0 = 13.8667$ 51)

$$M = \int_{x=0}^{x=4} \int_{y=x^2}^{y=4x} (x+y+1)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_{2x^2}^{4x} dx$$

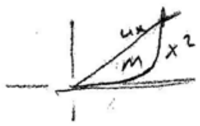
$$= \int_0^4 \left(x(4x) + \frac{(4x)^2}{2} + 4x\right) - \left(x(x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + x^2\right) dx$$

$$= \int 4x^2 + 8x^2 + 4x - \left(x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2\right) dx$$

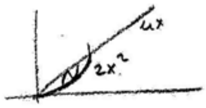
$$= \int \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 11x^2 + 4x\right) dx$$

$$= -\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{11}{3}x^3 + 2x^2\Bigg|_0^4$$

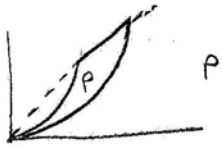
$= 100.2667 - 0 = 100.2667 =$



$M = 100.2667$



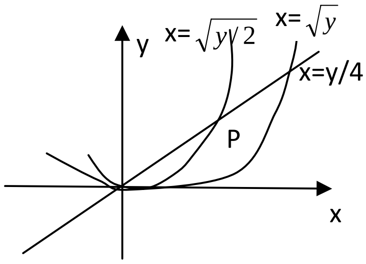
$N = 13.8667$

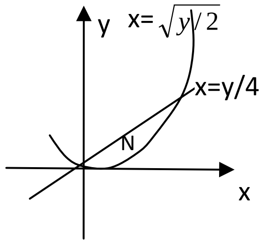


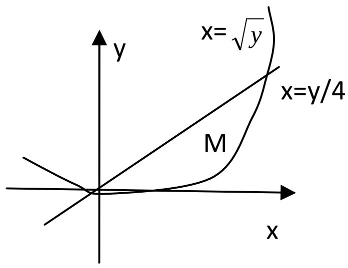
$P = M - N = 100.26 - 13.86$

$= 86.4.$ 52

Cozum 2.b)Yukaridaki integralde integral sinirlarini degistirerek once x e sonra y ye gore integral alarak da hesaplayabiliriz.

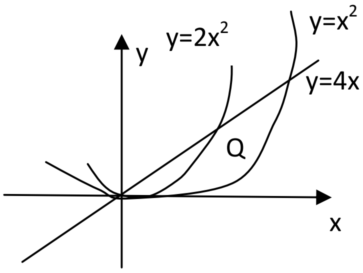


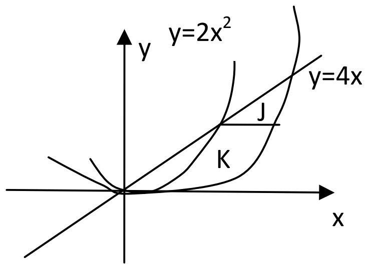




$$N=\int_{y=0}^{y=8}\int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=y/4}(x+y+1)\,dx\,dy, \qquad M=\int_{y=0}^{y=16}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=y/4}(x+y+1)\,dx\,dy, \qquad N=13.8667,\ M=100.2667,\ P=M-N=86.4$$

Cozum 3)

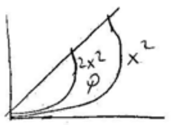


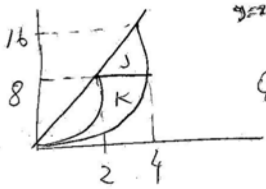


Sorulan integral Q alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=K+J oldugu aciktir. Dolayisiyla K ve J yi hesaplar sonra P= K+J yi hesaplariz.

Problemi X eksenine paralel bolerek de gözebiliriz

$y=2x^2 \quad x^2=\frac{y}{2} \quad x=\sqrt{\frac{y}{2}}$





$Q = K + J$

$$K=\int_{y=0}^{y=8}\int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}}(x+y+1)\,dx\,dy=\int\left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Big|_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^8\left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2}+\sqrt{y}\cdot y+\sqrt{y}\right)-\left(\frac{(\sqrt{\frac{y}{2}})^2}{2}+\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot y+\sqrt{\frac{y}{2}}\right)$$

$$=\int_0^8 \frac{y}{2}+y^{3/2}+y^{\frac12}-\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{\sqrt2}y^{3/2}+\frac{1}{\sqrt2}y^{1/2}\right)$$

$$=\int_0^8\left(\underbrace{\left(\frac12-\frac14\right)}_{A}y+\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{B}y^{3/2}+\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{C}y^{1/2}\right)dy$$

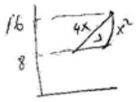
$$=\int_0^8\left(Ay+By^{3/2}+Cy^{1/2}\right)dy$$

$$=A\frac{y^2}{2}+B\frac{1}{\frac52}y^{5/2}+C\frac{1}{3/2}y^{3/2}\Big|_0^8=\frac{A}{2}y^2+\frac{2B}{5}y^{5/2}+\frac{2C}{3}y^{3/2}\Big|_0^8$$

53

$K = 33.62 - 0 = 33.62$

54



$$J=\int_{J=8}^{J=16}\int_{x=\frac{y}{4}}^{x=\sqrt{y}}(x+y+1)\,dx\,dy=\int_8^{16}\left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Big|_{y/4}^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int\left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2}+\sqrt{y}\cdot y+\sqrt{y}\right)-\left(\frac{(\frac{y}{4})^2}{2}+\frac{y}{4}\cdot y+\frac{y}{4}\right)$$

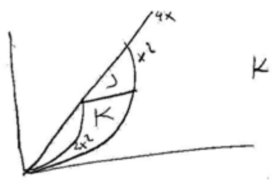
$$=\int\frac{y}{2}+y^{3/2}+y^{1/2}-\left(\frac{1}{32}y^2+\frac{y^2}{4}+\frac{y}{4}\right)$$

$$=\int\underbrace{\left(-\frac{1}{32}-\frac14\right)}_{A}y^2+\underbrace{\left(\frac12-\frac14\right)}_{B}y+y^{3/2}+y^{1/2}$$

$$=\int Ay^2+By+y^{3/2}+y^{1/2}$$

$$=\frac{A}{3}y^3+\frac{B}{2}y^2+\frac{1}{\frac52}y^{5/2}+\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_8^{16}$$

$J = 100.2667 - 47.4927 = 52.77$



$K+J = 33.62 + 52.77 = 86.4$

UYARI

Bir integralde önce hangi değişkenin diferensiyeli yazılmışsa önce o değişkene göre integral alınır. $f(x, y)$ ifadesine en yakın sınırlar önce diferensiyeli yazılan değişkenin sınırlarıdır.

TEOREM 14.2 (İkinci Fubini Teoremi)

$u, v : [a, b] \to R$ fonksiyonları sürekli, $\forall x \in [a, b]$ için $u(x) \le v(x)$ ve

$B = \{ (x, y) : a \le x \le b\ ,\ u(x) \le v(x) \}$ olsun. $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

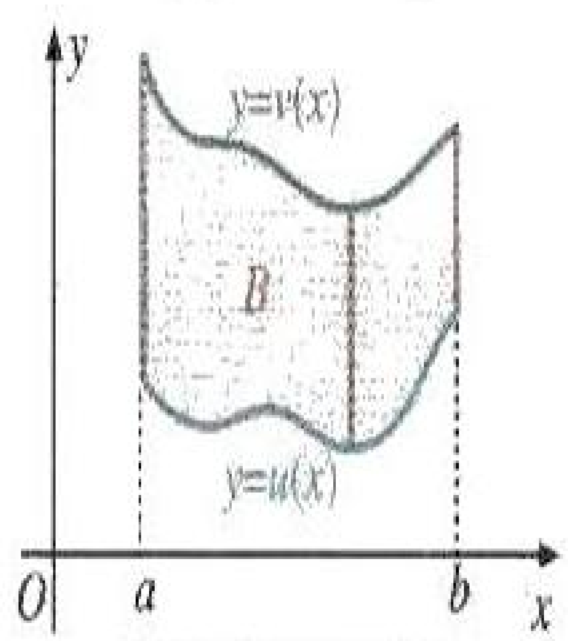
dır.

Teoremde sözü edilen B bölgesi yandaki şekilde gösterilmiştir. Böyle bölgelere **düşey basit bölge** adı verilir. Böyle bir bölgede düşey olarak çizilen her doğru parçasının üst ucu $y = v(x)$, alt ucu $y = u(x)$ eğrisi üzerinde bulunur. Bu doğrunun bütün bölgeyi taraması için $x = a$ doğrusundan başlayıp $x = b$ doğrusuna kadar hareket etmesi gerekir.

Benzer olarak, $D = \{ (x, y) : c \le y \le d\ ,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y) \}$ bölgesi üzerindeki integral

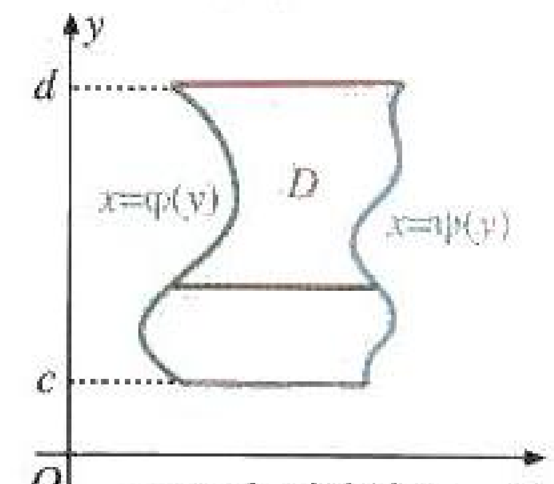
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

biçiminde hesaplanabilir.



düşey basit bölge

D bölgesi tipindeki bölgelere **yatay basit bölge** adı verilir. Böyle bölgelerde yatay olarak çizilen doğrular $x = \varphi(y)$ ve $x = \psi(y)$ eğrilerini birer noktada keser.

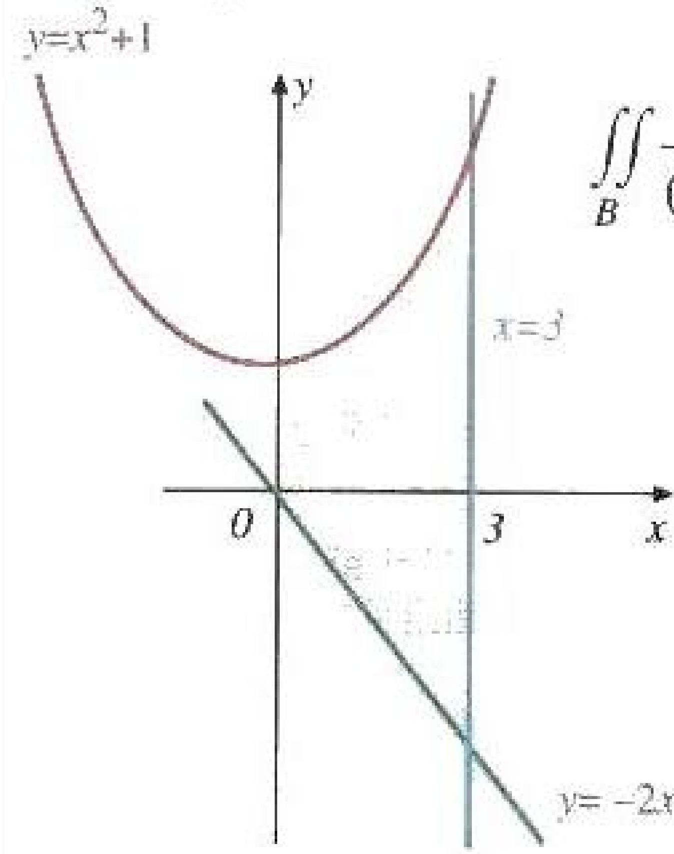


yatay basit bölge

ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 0 \le x \le 3\ ,\ -2x \le y \le x^2 + 1 \}$ bölgesi üzerinde

$$\iint_B \frac{2y}{(x+1)^2}\,dA$$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen bölgenin grafiği yanda verilmiştir. Buna göre



$$\iint_B \frac{2y}{(x+1)^2}\,dA = \int_0^3 \int_{-2x}^{x^2+1} \frac{2y}{(x+1)^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{y^2}{(x+1)^2}\Big|_{-2x}^{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{(x^2+1-2x)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx$$

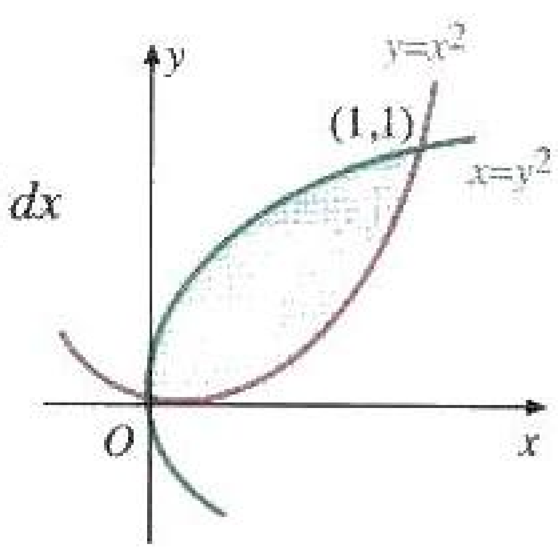
$$= \int_0^3 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(8+1) = 3 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\iint_B dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen bölge yanda gösterilmiştir.



$$\iint_B dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\ \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

olur.

ÖRNEK : B bölgesi, birinci bölgede $y = 4x^2$, $y = x^2$ parabolleri ile $y = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B (x + y)\,dA$$

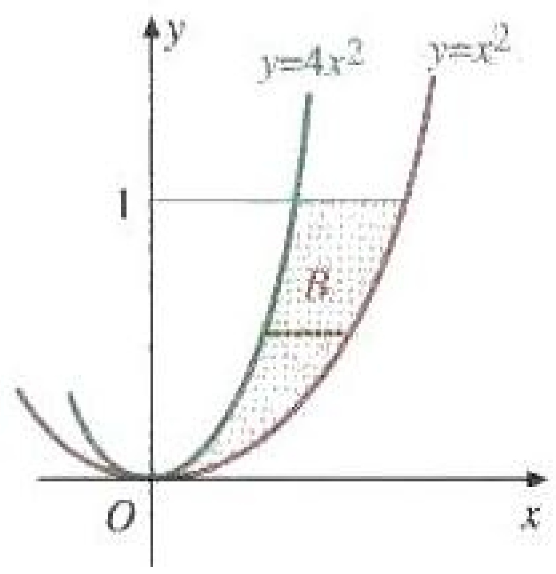
integralini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Bölge yatay basit bölge olduğundan, önce x değişkenine göre integral almak gerekir.

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + xy \Big|_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{8} y + \frac{1}{2} y^{3/2}\right) dy = \frac{3}{16} y^2 + \frac{1}{5} y^{5/2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{5} = \frac{31}{80}$$



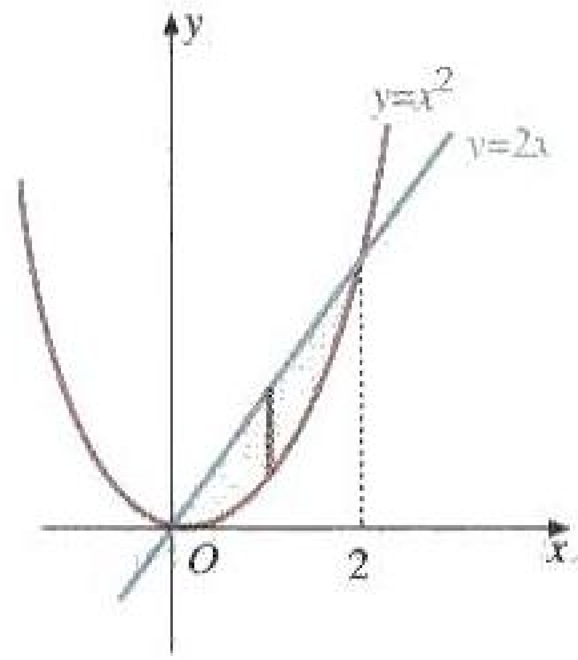
bulunur.

ÖRNEK : $I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy\; dx\; dy$ integrali veriliyor.

(a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

(b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

(c) İntegrali hesaplayınız.



Çözüm : (a) $x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$, $x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x$, $y = 0$ ve $y = 4$ tür.

Bu eğriler ve doğrular çizilirse yandaki şekil elde edilir. İntegrasyon sınırlarına dikkat edildiğinde, integrasyon bölgesinin taralı bölge olduğu görülür.

(b) Önce y değişkenine göre integral alalım. Bölge içinde y eksenine paralel bir doğru çizildiğinde, bu doğru parçasının alt ucu $y = x^2$ eğrisi, üst ucu $y = 2x$ doğrusu üzerindedir. Bu nedenle y nin sınırları x^2 ve $2x$ dir. Bölgenin en solunda bulunan noktanın apsisi $x = 0$, en sağında bulunan noktanın apsisi $x = 2$ olduğundan, verilen integral

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\; dy\; dx$$ biçiminde de yazılabilir.

(c) İntegrasyon sırasının değişmesi integralin değerini değiştirmediğinden, integrallerden herhangi biri hesaplanabilir. Son integrali hesaplayalım.

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\; dy\; dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2} \Big|_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - \frac{x^5}{2}\right) dx = \frac{2}{4} x^4 - \frac{x^6}{12} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

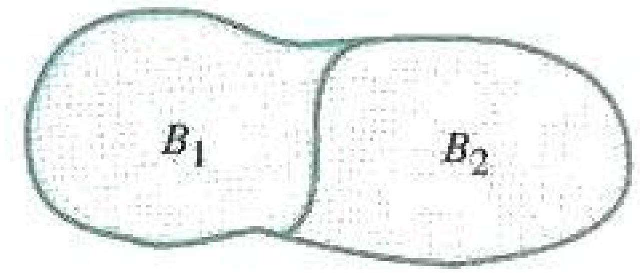
olur.

Limit ve toplam sembolünün özelikleri gözönüne alındığında aşağıdaki özeliklerin varlığı kolayca gösterilebilir. Buradaki f ve g fonksiyonları B üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

(1) Her c sabiti için

$$\iint_B cf(x,y)\,dA = c \iint_B f(x,y)\,dA$$

dır.



(2) $$\iint_B \left[f(x,y) + g(x,y)\right] dA = \iint_B f(x,y)\,dA + \iint_B g(x,y)\,dA .$$

(3) B_1 ve B_2 , arakesitleri, en fazla bir eğri parçası olan iki bölge ise

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x,y)\,dA = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

dır.

(4) Her $(x, y) \in B$ için $f(x, y) \le g(x, y)$

$$\iint_B f(x,y)\,dA \le \iint_B g(x,y)\,dA$$

dır.

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu bölge yanda gösterilmiştir. Bu bölge iki düşey basit bölgenin birleşimi olduğundan, istenen integral iki integralin toplamı olacaktır.

$$I = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

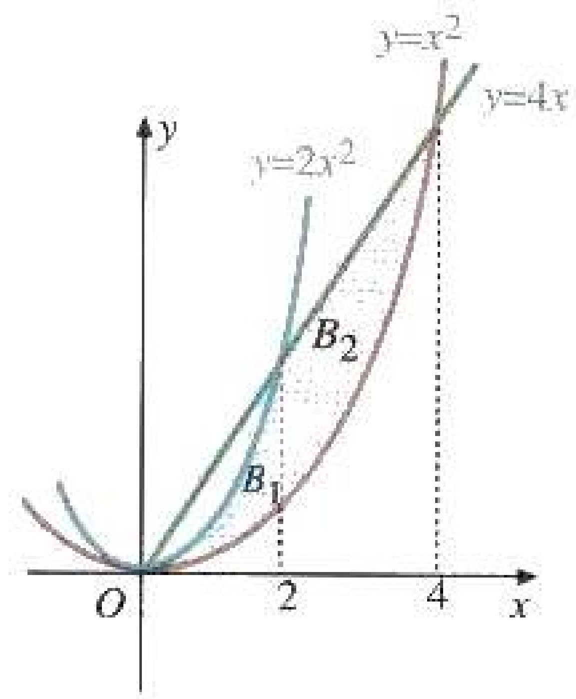
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x+y+1)\,dy\,dx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x+y+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 + y\right) \Big|_{x^2}^{4x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{2} x^4 + x^3 + x^2\right) dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{2} x^4 - x^3 + 11x^2 + 4x\right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{10} x^5 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3\right) \Big|_0^2 + \left(-\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{11}{3} x^3 + 2x^2\right) \Big|_2^4$$

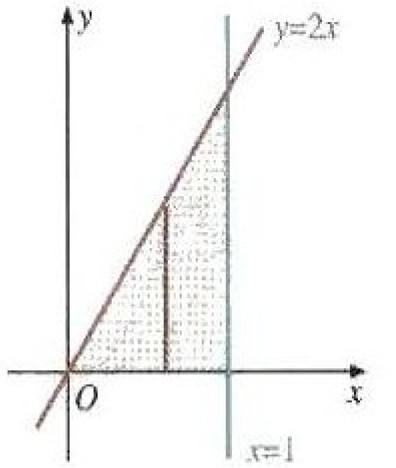
$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5}$$ olur.



ÖRNEK : $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{1} \cos(x^2)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\cos(x^2)$ fonksiyonunun x değişkenine göre integrali hesaplanamaz. Şimdi integralin sırasını değiştirelim. Bunun için önce integrasyon bölgesini çizelim

$x = \frac{y}{2}$ ise $y = 2x$ ve $x = 1$ doğruları çizilirse integrasyon bölgesinin, yandaki şekilde taralı olan bölge olduğu görülür.



Önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa

$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \cos(x^2)\,y\Big|_0^{2x} dx$$

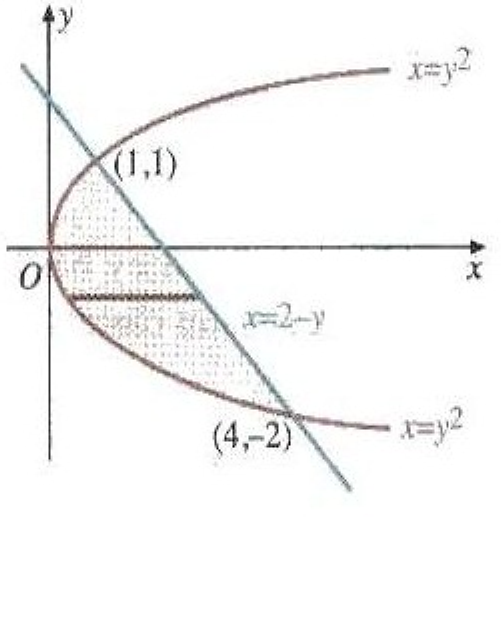
$$= \int_0^1 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2)\Big|_0^1 = \sin 1$$

bulunur.

ÖRNEK : B bölgesi $x = y^2$ parabolü ile $x + y = 2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B dA$$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda çizilmiştir.



Buna göre

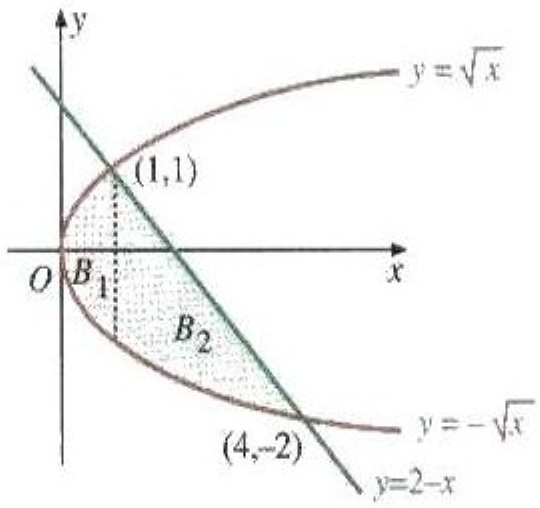
$$I = \int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} dx\,dy = \int_{-2}^{1} x\Big|_{y^2}^{2-y} dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(2 - y - y^2)\,dy = 2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$$

olur.

Yukarıdaki integral, integrasyon sırasını değiştirerek



$$I = \iint_{B_1} dy\,dx + \iint_{B_2} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dy\,dx$$

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_0^4 \left(2 - x + \sqrt{x}\right)dx$$

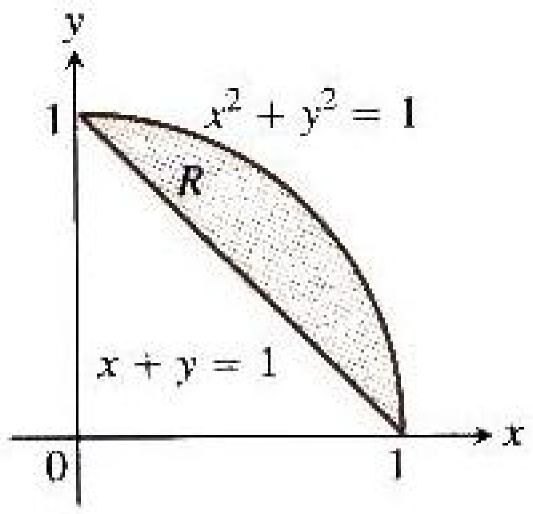
$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$$

biçiminde de hesaplanabilir.

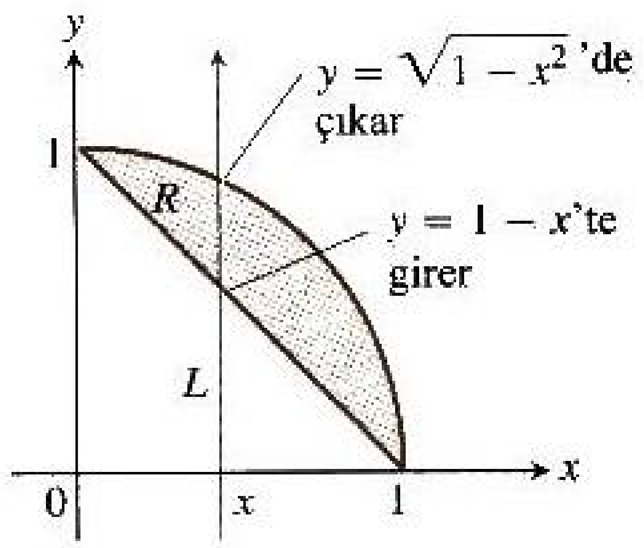
Şimdi, integrasyon sınırlarını bulmak için, düzlemde bir çok bölgeye uygulanabilen bir prosedür veriyoruz. Bu prosedürün işe yaramadığı daha karmaşık bölgeler, çoğunlukla bu prosedür uygulanabilecek şekilde parçalara ayrılır.

$\iint_R f(x, y)\,dA$ integralini, önce y'ye sonra da x'e göre integre ederek hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. *Çizim*. İntegrasyon bölgesini çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun y sınırlarını bulun* Artan y yönünde R'den geçen dikey bir L doğrusu hayal edin. L'nin girdiği ve çıktığı y değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun y sınırlarıdır ve genellikle x'in fonksiyonlarıdırlar (sabit yerine).

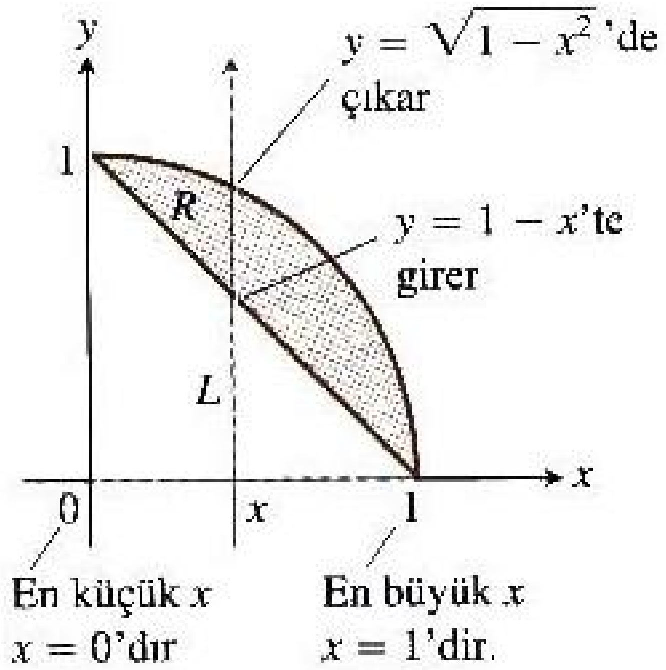


3. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun* R'den geçen bütün dikey doğruları kapsayan x-sınırlarını seçin. İntegral

$$\iint_R f(x, y)\,dA =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

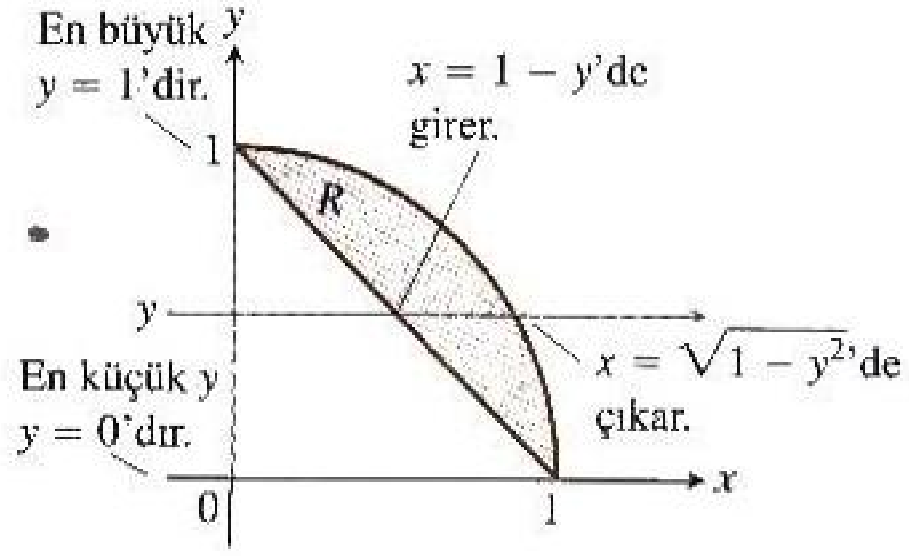
olur.



Aynı iki katlı integrali, integrasyon sırası değişmiş tekrarlı integral olarak hesaplamak için, 2. ve 3. adımlarda dikey doğrular yerine yatay doğrular kullanın. İntegral

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

olur.

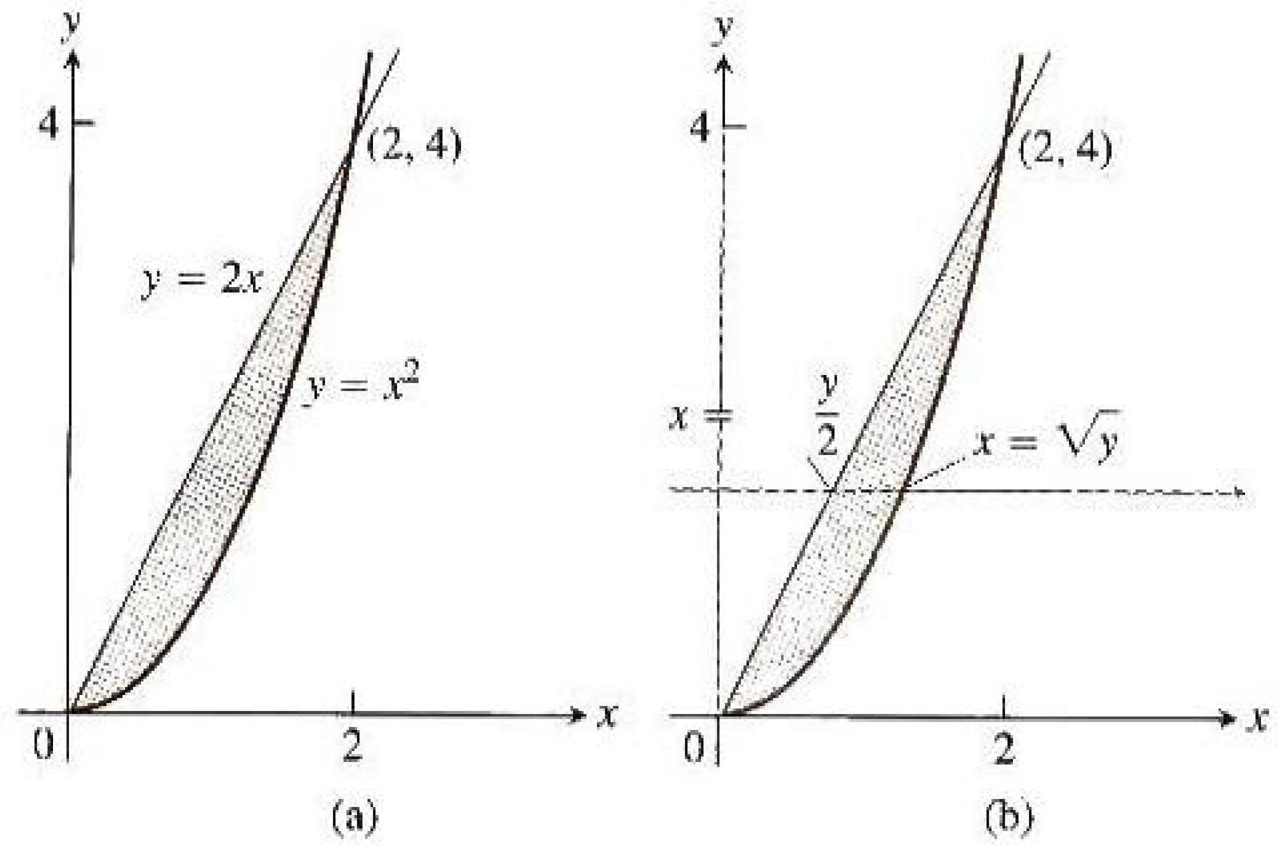


ÖRNEK 4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\,dy\,dx$$

integralinin integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş eşdeğer bir integral yazın.

Çözüm İntegrasyon bölgesi, $x^2 \le y \le 2x$ ve $0 \le x \le 2$ eşitsizlikleriyle verilmektedir. Dolayısıyla, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında $y = x^2$ ile $y = 2x$ eğrilerinin sınırladığı bölgedir (Şekil 15.13a).



ŞEKİL 15.13 Örnek 4'ün integrasyon bölgesi

Değiştirilmiş sırada integrasyonun sınırlarını bulmak için, bölge boyunca soldan giden bir yatay doğru hayal ederiz. $x = y/2$'de girer ve $x = \sqrt{y}$'de çıkar. Böyle bütün doğruları kapsamak üzere, y'yi $y = 0$'dan $y = 4$'e götürürüz (Şekil 15.13b). İntegral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\,dx\,dy$$

olur. Bu integrallerin ortak değeri 8'dir.

ALAN HESABI

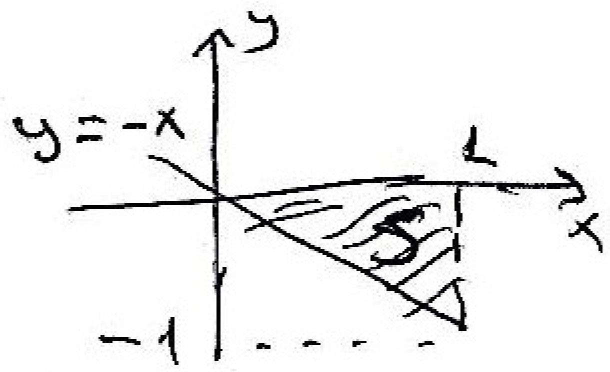
R bölgesinin alanı

$$A = \iint_R dA$$

Alan= $\displaystyle\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=g(x)}^{y=h(x)} dydx$

Alan= $\displaystyle\int_{y=C}^{y=D}\int_{x=p(y)}^{x=q(y)} dxdy$

1)



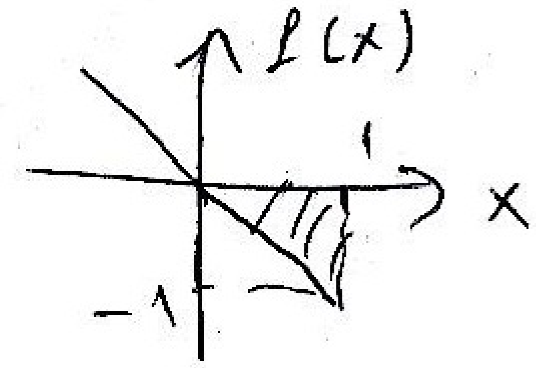
$S=?$

$$S=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-x}^{y=0} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_{-x}^{0} dx$$

$$= \int_0^1 (0-(-x))\,dx = \int_0^1 x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Tek degiskenli fonksiyonlarda alan negatif olabilir.

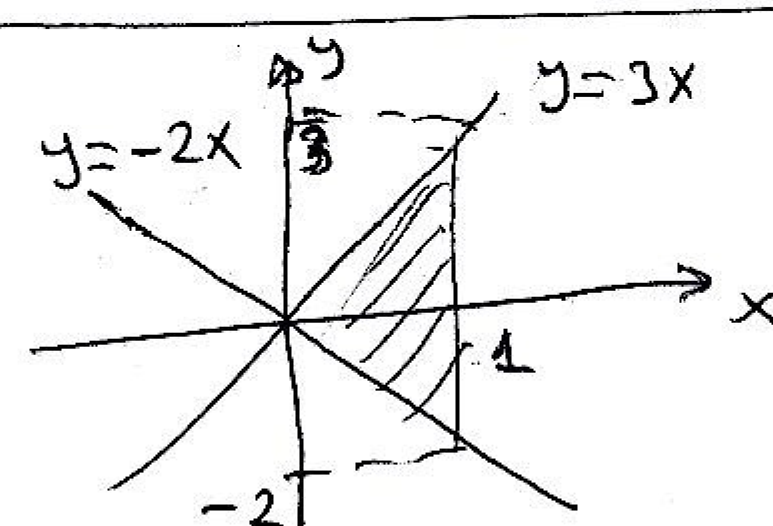


$$\int_{x=0}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 (-x)\,dx = -\int_0^1 x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Çift katlı integral ile alan hesabında alan devamlı (+) çıkar. (

3)

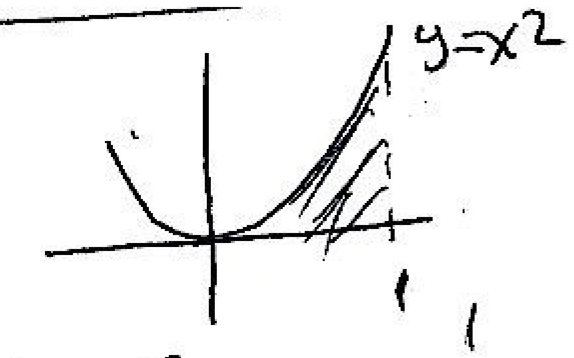


$$S=\int_{x=0}^{1}\int_{y=-2x}^{y=3x} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} y\Big|_{-2x}^{3x} dx$$

$$= \int_0^1 [3x-(-2x)]\,dx = \int_0^1 5x\,dx$$

$$= 5\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 5\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{5}{2}$$

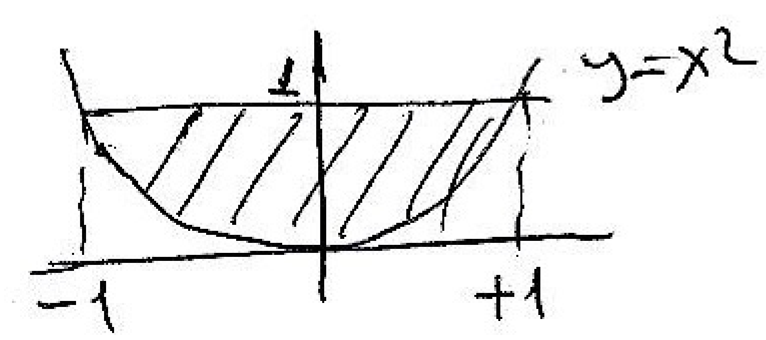
4)



$$S=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

5)

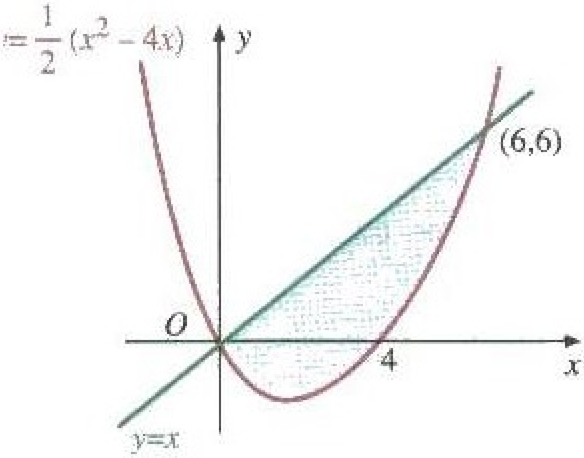


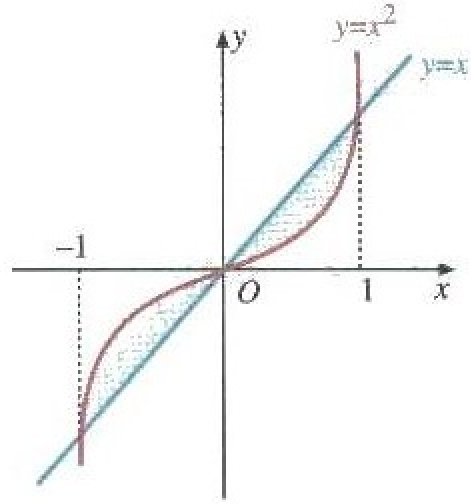
$$\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=1} dy\,dx = \int_{-1}^{1} y\Big|_{x^2}^{1} dx$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1-\frac{-1}{3}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3} = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$





ÖRNEK : $2y = x^2 - 4x$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm : Söz konusu bölge yandaki şekilde taralı olarak gösterilmiştir. Bu bölge bir düşey basit bölge olduğundan, integrali önce y, sonra x değişkenine göre almakta yarar vardır. Buna göre A alanı

$$A=\int_0^6 \int_{\frac{1}{2}(x^2-4x)}^{x} dydx = \int_0^6 y \Big|_{\frac{1}{2}(x^2-4x)}^{x} dx = \int_0^6 \left(x-\frac{1}{2}x^2+2x\right)dx$$

$$=\int_0^6 \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3 \Big|_0^6 = 54 - 36 = 18 \qquad \text{birimkare olur.}$$

ÖRNEK : $y = x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm : Alanı istenen bölge yanda gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, söz konusu bölge iki basit bölgeden meydana gelmiştir.

Dolayısıyla

$$A=\int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dydx + \int_0^1 \int_{x^3}^{x} dydx = \int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx + \int_0^1 (x-x^3)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

232)Bir cismin agirligi $\sigma(x,y)=x^2y$ olarak degisiyor. Asagidaki noktalardaki agirliklari bulun. A(2,3), B(5,6), C(0,0)
Cevap: A(2,3), x=2, y=3, $\sigma(x,y)= x^2y = 2^2 3 =12$
: B(5,6), x=5, y=6, $\sigma(x,y)= 5^2\, 6=150$

-------------------- -- -----------------------------

Alan= $\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} dydx$, $\longrightarrow$ Kutle M= $\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} \sigma(x,y)\, dydx$

Agirlik Merkezi
$$x_M = \frac{\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} x\sigma(x,y)\, dydx}{\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} \sigma(x,y)\, dydx} = \frac{\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} x\sigma(x,y)\, dydx}{M}$$

$$y_M = \frac{\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} y\sigma(x,y)\, dydx}{\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} \sigma(x,y)\, dydx} = \frac{\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=g(x)}^{y=h(x)} y\sigma(x,y)\, dydx}{M}$$

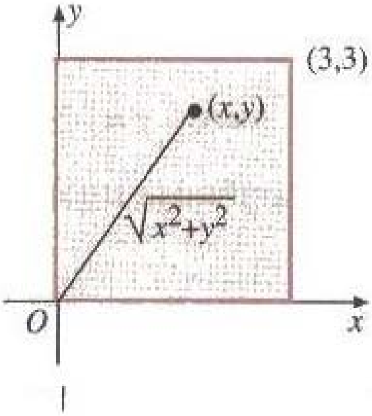
ÖRNEK : Bir kenarının uzunluğu 3 birim olan kare şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın karenin bir köşesine olan uzaklığının karesi ile orantılı olarak değişmektedir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm : Karenin sözkonusu köşesini orijin, bu köşeden çıkan iki kenarı da koordinat eksenleri olarak alalım. k orantı katsayısı olmak üzere
$\sigma(x, y) = k(x^2 + y^2)$ olacağından

$$M = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{3} k\left(x^2+y^2\right) dydx = k \int_0^3 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 dx$$

$$= k \int_0^3 \left(3x^2+9\right) dx = k\left(x^3+9x\right) \Big|_0^3 = 54\,k$$

bulunur.



olur. Burada A, levhanın alanını göstermektedir.

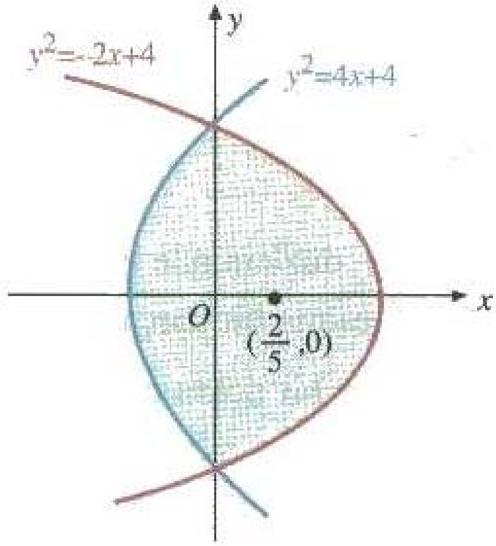
ÖRNEK : $y^2 = 4x + 4$ ve $y^2 = -2x + 4$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Cözüm : Önce levhanın alanını bulalım.

$$A = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dxdy = 2\int_{0}^{2} \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dxdy = 2\int_{0}^{2} x \Bigg|_{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dy$$

$$= \int_{0}^{2}\left(6-\frac{3}{2}y^2\right)dy = 6y-\frac{1}{2}y^3 \Bigg|_{0}^{2} = 8 \text{ br}^2$$

bulunur.



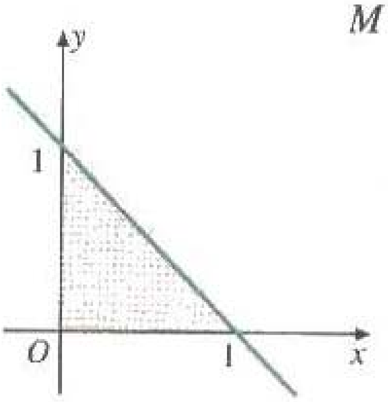
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_B x dxdy = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \int_{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} x \; dxdy = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2} \Bigg|_{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{16}y^4-\frac{3}{2}y^2+3\right)dy = \frac{2}{5}$$

olur. Bölge Ox– eksenine göre simetrik ve levha homogen olduğundan $\bar{y} = 0$ olacaktır. O halde ağırlık merkezi $M\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ noktasıdır.

ÖRNEK : $x = 0$, $y = 0$ ve $x + y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan üçgensel bölge içine yerleştirilen bir levhanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu o noktanın koordinatları çarpımına eşittir. Bu levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :



$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dxdy = \iint_B xydxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xydydx$$

$$= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

olur. Buna göre

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dxdy = 24\int_0^1 \int_0^{1-x} x.xydydx$$

$$= 24\int_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_0^{1-x} dx = 12\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx$$

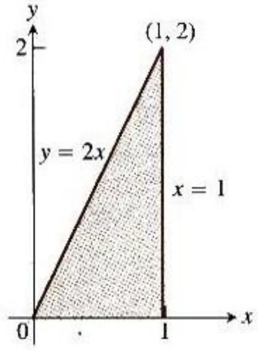
$$= 12\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)dx = 12\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

bulunur. Benzer şekilde $\overline{y} = \dfrac{2}{5}$ olduğu gösterilebilir. Buna göre verilen levhann ağırlık merkezi $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ noktasıdır.

ÖRNEK 4 Değişken Yoğunluklu İnce Bir Plakanın Kütle Merkezini Bulmak

İnce bir plaka, birinci dörtte bir bölgede x-ekseni ile $x = 1$ ve $y = 2x$ doğrularının sınırladığı üçgensel bölgeyi kaplamaktadır. (x, y) noktasında plakanın yoğunluğu $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$'dır. Plakanın kütlesini ve koordinat eksenleri etrafındaki birinci momentleri ile kütle merkezini bulun.



ŞEKİL 15.17

Çözüm Plakayı çizer ve hesaplamamız gereken integrallerin integrasyon sınırlarını belirleyecek kadar detay ekleriz (Şekil 15.17).

Plakanın kütlesi

$$M = \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y \right]_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\, dx = \left[8x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = 14$$

olarak bulunur.

x-ekseni etrafındaki birinci moment

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)\, dx$$

$$= \left[7x^4 + 4x^3 \right]_0^1 = 11 \qquad \text{olur.}$$

Benzer bir hesaplama, y-ekseni etrafındaki momenti verir:

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x, y)\, dy\, dx = 10.$$

Dolayısıyla kütle merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14} \qquad \text{olur.}$$

UC KATLI INTEGRALLER

$$\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} f(x,y,z)dzdydx,\qquad \int_{y=C}^{y=D}\int_{x=p(y)}^{x=q(y)}\int_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy,\qquad \int_{z=E}^{z=F}\int_{y=m(z)}^{y=n(z)}\int_{x=r(y,z)}^{x=t(y,z)} f(x,y,z)dxdydz$$

$$\int_{z=5}^{z=8}\int_{y=\sin(z)}^{y=4z}\int_{x=y^2+z^3}^{x=yz}\left(xe^{yz}+\cos(xyz)\right)dxdydz$$

Ornek

$J=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=4x}^{y=5x^2}\int_{z=1}^{z=x^2+y}(4x^2z+y)dzdydx$ integralini hesaplayin.

Cozum

$$J=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=4x}^{y=5x^2}\int_{z=1}^{z=x^2+y}(4x^2z+y)dzdydx=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=4x}^{y=5x^2}\left(\int_{z=1}^{z=x^2+y}(4x^2z+y)dz\right)dydx$$

Ic integrali hesaplayalim.

$$\int_{z=1}^{z=x^2+y}(4x^2z+y)dz=\left(4x^2\frac{z^2}{2}+yz\right)\Bigg|_{z=1}^{z=x^2+y}=\left(2x^2z^2+yz\right)\Big|_{z=1}^{z=x^2+y}=2x^2(x^2+y)^2+y(x^2+y)-\left[2x^21^2+y1\right]$$

$$=2x^2(x^4+2x^2y+y^2)+(yx^2+y^2)-(2x^2+y)\quad=2x^6+4x^4y+2x^2y^2+yx^2+y^2-2x^2-y$$

Ustte yerine yerlestirelim.

$$J=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=4x}^{y=5x^2}(2x^6+4x^4y+2x^2y^2+yx^2+y^2-2x^2-y)dydx$$

$$J=\int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=4x}^{y=5x^2}(2x^6+4x^4y+2x^2y^2+yx^2+y^2-2x^2-y)dy\right)dx$$

y ye bagli ic integrali hesaplayalim

$$\int_{y=4x}^{y=5x^2}(2x^6+4x^4y+2x^2y^2+yx^2+y^2-2x^2-y)dy$$

$$=\left(2x^6y+4x^4\frac{y^2}{2}+2x^2\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}x^2+\frac{y^3}{3}-2x^2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=4x}^{y=5x^2}$$

$$=\left(2x^6(5x^2)+4x^4\frac{(5x^2)^2}{2}+2x^2\frac{(5x^2)^3}{3}+\frac{(5x^2)^2}{2}x^2+\frac{(5x^2)^3}{3}-2x^2(5x^2)-\frac{(5x^2)^2}{2}\right)$$

$$-\left(2x^6(4x)+4x^4\frac{(4x)^2}{2}+2x^2\frac{(4x)^3}{3}+\frac{(4x)^2}{2}x^2+\frac{(4x)^3}{3}-2x^2(4x)-\frac{(4x)^2}{2}\right)=\mathrm{K(x)}$$

K(x) ifadesi integralde yerine konularak

$$J=\int_{x=0}^{x=2}K(x)dx$$

Interali hesaplanirsa

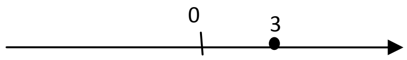
J=456.321 bulunur.

UC KATLI INTEGRALDE SINIRLAR

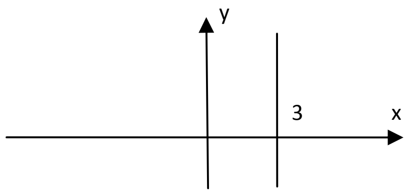
-------------------- --------------

Aciklamalar

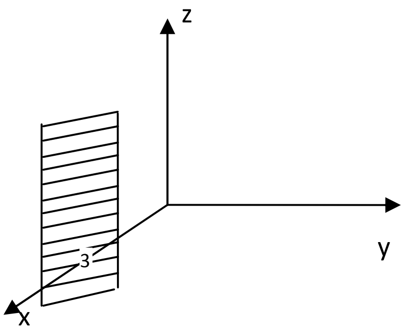
x=3: sayi dogrusu uzerinde bir noktadir

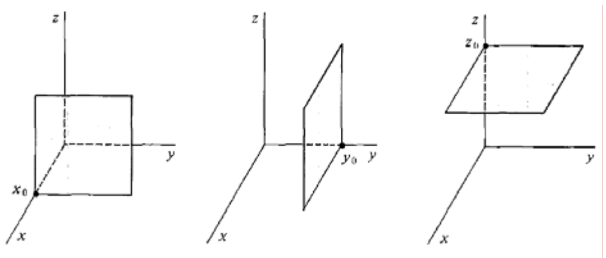


x=3: x,y ekseninde bir dogrudur



x=3: x,y,z ekseninde bir duzlemdir





$x = x_0$ $y = y_0$ $z = z_0$

Hacim formulu $\int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} \int\limits_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \int\limits_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} dz\,dy\,dx$

Tek degiskenli integraller

$$\int_a^b dx = x\,\Big|_a^b = b - a$$

$$\int_a^b x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b \qquad \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (ax+b)^n\,dx = \left.\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\right|_a^b$$

$$\int_a^b e^{px}\,dx = \left.\frac{e^{px}}{p}\right|_a^b \qquad \int_a^b e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}\Big|_a^b$$

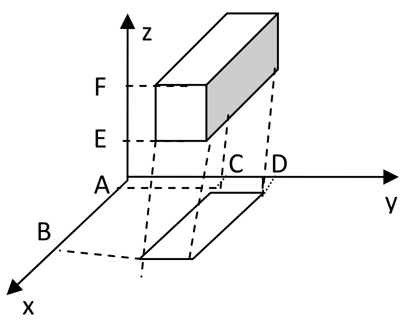
$$\int_a^b \cos(ax)dx = \left.\frac{1}{a}\sin(ax)\right|_a^b$$

$$\int_a^b \sin(ax)dx = -\left.\frac{1}{a}\cos(ax)\right|_a^b$$

-- -------------------------

A) $\int\limits_{x=A}^{x=B} \int\limits_{y=C}^{y=D} \int\limits_{z=E}^{z=F} f(x,y,z)dzdxdy$,

Seklindeki integrallerde integral bolgesi bir dikdortgen prizmasidir.



Bu durumda integrasyon sirasinin bir onemi yoktur. Once x’e gore, once y’ye gore, once z ye gore integral alinsa sonuc ayni olur.

$$\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=C}^{y=D}\int_{z=E}^{z=F} f(x,y,z)dzdxdy=\int_{y=C}^{y=D}\int_{z=E}^{z=F}\int_{x=A}^{x=B} f(x,y,z)dxdzdy=\int_{z=E}^{z=F}\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=C}^{y=D} f(x,y,z)dydxdz$$

------------------------------ ------------ ---------------------- -----------

UC KATLI INTEGRAL UYGULAMALARI

Hacim Hesabi

Hacim= $\displaystyle\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} dzdydx$,

z=u(x,y)   z = $-\infty$ dan gelirken hacmi hesaplanacak bolgeye ilk temas eden yuzey denklemi.

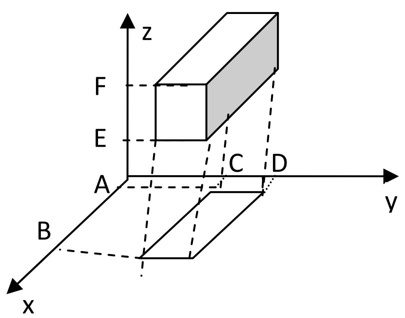
z=w(x,y)   hacmi hesaplanacak bolgeden cikip z=+∞ a giderken cikista temas eden yuzey denklemi .

y=g(x)   hacmi hesaplanacak bolgenin x-y duzlemindeki izdusumunu alalim. Izdusum bir yuzeydir.   y = $-\infty$ dan gelirken bu yuzeye ilk temas eden egri denklemi y=g(x)   dir.

y=h(x)   hacmi hesaplanacak bolgenin x-y duzlemindeki izdusumunu alalim. Izdusum bir yuzeydir. Bu yuzeyden cikip y = +∞ a giderken cikista temas edilen egri denklemi.

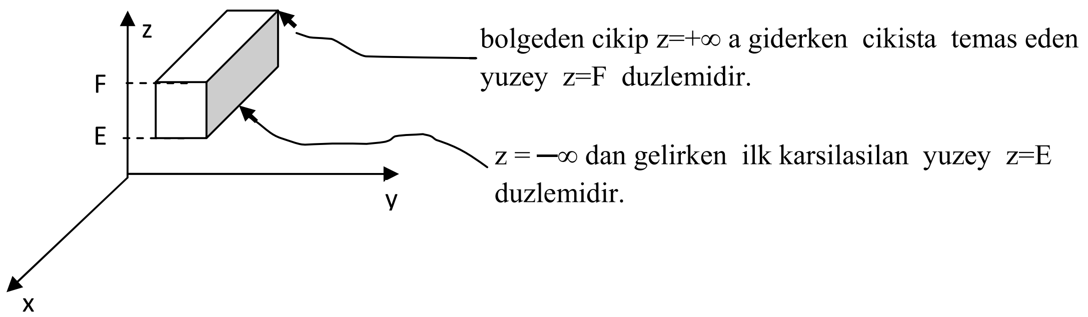
x=A, x=B izdusumun x eksenindeki sinirlari.

ORNEK   435)Sekildeki dikdortgenler prizmasinin hacmini hesaplayin.

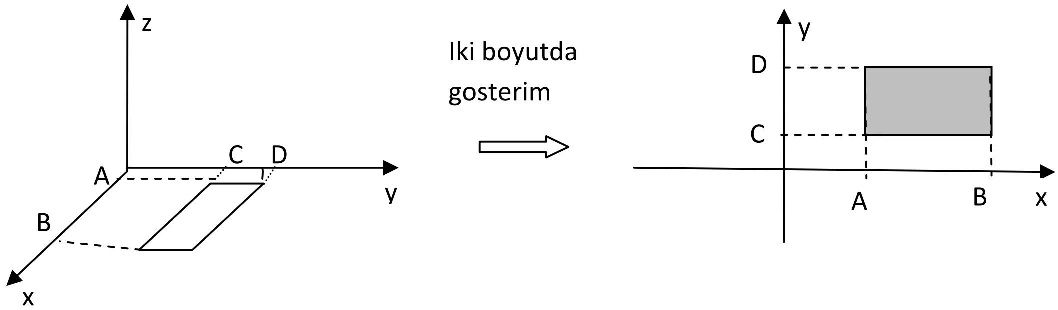


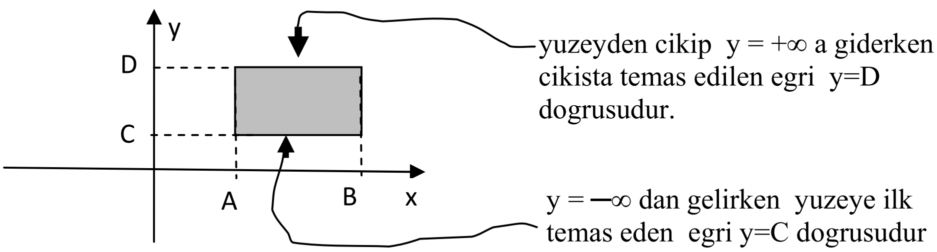
COZUM:

Hacim= $\displaystyle\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} dzdydx$,



x ve y sinirlarini bulmak icin hacmin x-y duzlemindeki izdusumunu aliriz.





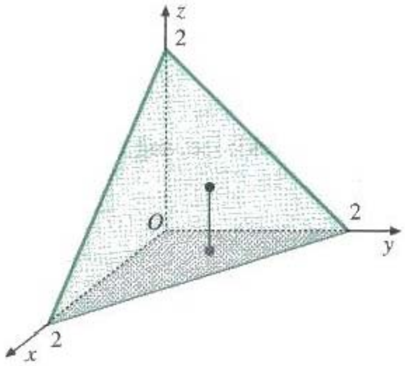
Benzer sekilde x = −∞ dan gelirken yuzeye ilk temas eden nokta x=A, yuzeyden cikip x=+ ∞ za giderken son temas noktasi x=B dir.

$$H=\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=C}^{y=D}\int_{z=E}^{z=F}dzdydx=\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=C}^{y=D}\left(\int_{z=E}^{z=F}dz\right)dydx=\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=C}^{y=D}\left(z\Big|_{z=E}^{z=F}\right)dydx$$

$$H=\int_{x=A}^{x=B}\int_{y=C}^{y=D}(F-E)dydx=\int_{x=A}^{x=B}(F-E)\left(\int_{y=C}^{y=D}dy\right)dx=\int_{x=A}^{x=B}(F-E)(D-C)dx$$

$$H=(F-E)(D-C)(B-A)$$

Ornek: x+y+z=2 , x=0, y=0, z=0 duzlemleri tarafindan sinirlanan dortyuzlu icine yerlestirilen cismin hacim integralini yazin.



x degiskeni $0<x<2$ arasinda degismektedir.

$x_1=0$, $x_2=2$

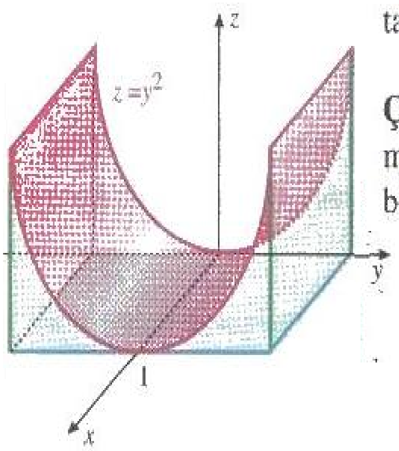
y degiskeni x ekseni (y=0) ile x+y=2 dogrusu arasinda degismektedir. $f_1(x)=0$. $f_2(x)=2-x$

z degiskeni x-y duzlemi (z=0) ile x+y+z=2 duzlemi arasinda degismektedir. $g_1(x,y)=0$. $g_2(x,y)=2-x-y$

hacim formulu.

$$H=\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dzdydx$$

bulunur.



ÖRNEK : $z=y^2$ silindiri, $z=0$, $x=0$, $x=1$, $y=-1$ ve $y=1$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : Hacmi istenen bölge yanda gösterilmiştir. Bu bölgenin $xOy-$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümü $B=\{(x,y): 0\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$ dikdörtgensel bölgesidir. Buna göre

$$V=\int_0^1\int_{-1}^1\int_0^{y^2} dzdydx=\int_0^1\int_{-1}^1 y^2\,dydx=\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^1 dx=\frac{2}{3}\int_0^1 dx=\frac{2}{3}$$

birimküp olur.

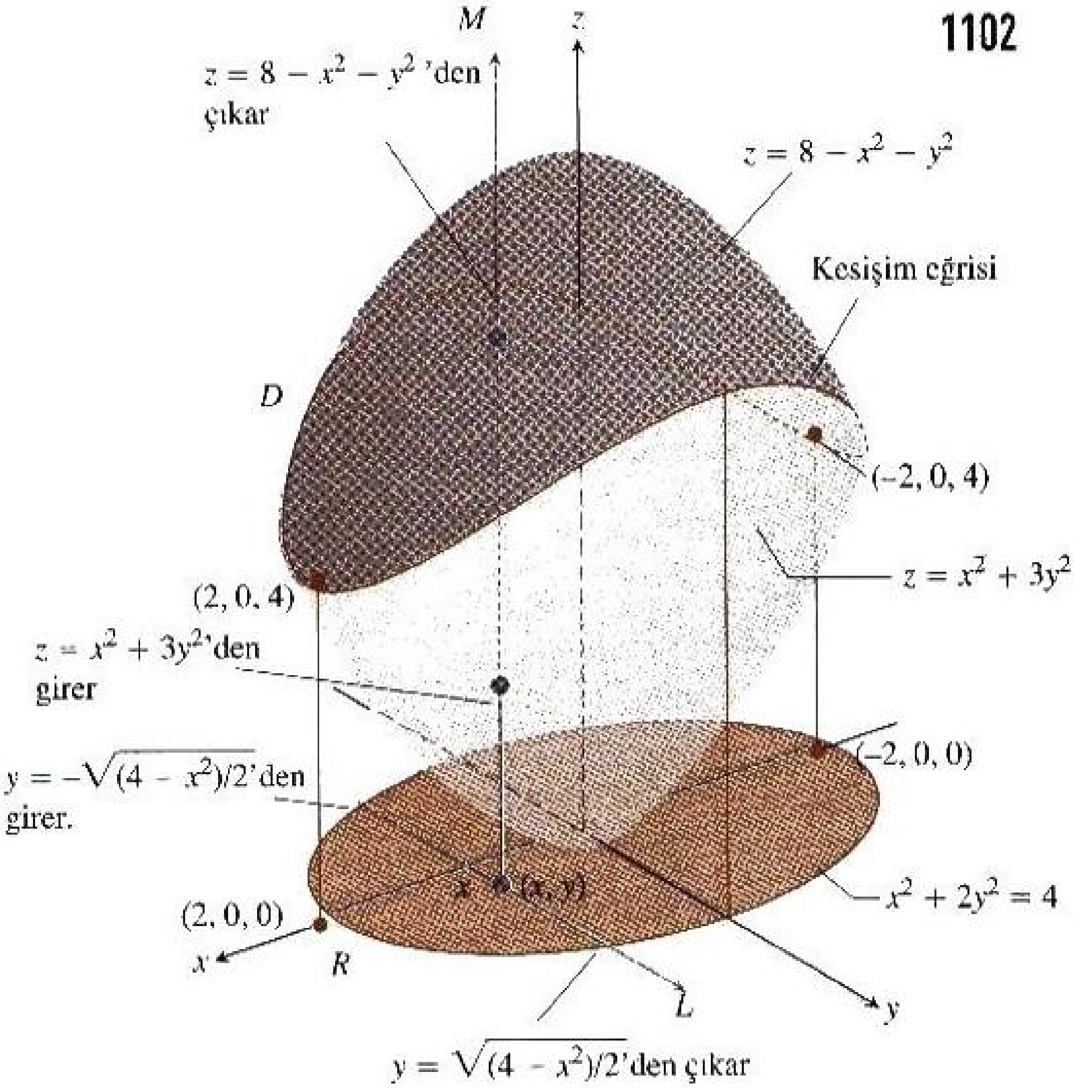
ÖRNEK 1 Bir Hacim Bulmak

$z = x^2 + 3y^2$ ve $z = 8 - x^2 - y^2$ yüzeyleriyle çevrelenen D bölgesinin hacmini bulun.

Çözüm Hacim, $F(x, y, z) = 1$'in D üzerindeki

$$V = \iiint_D dz\, dy\, dx$$

integralidir. İntegrali hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak üzere önce bölgeyi çizeriz. Yüzeyler (Şekil 15.28) $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ veya $x^2 + 2y^2 = 4$, $z > 0$ eliptik silindiri üzerinde kesişirler. D'nin xy-düzlemine izdüşümü olan R bölgesinin sınırı, denklemi aynı olan bir elipstir: $x^2 + 2y^2 = 4$. R'nin "üst" sınırı $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir. Alt sınır ise $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir.



ŞEKİL 15.28 İki paraboloid tarafından çevrelenen bu bölgenin hacmi Örnek 1' de hesaplanmaktadır.

İntegrasyonun z-sınırlarını bulalım. R'nin tipik bir (x, y) noktasından, z-eksenine paralel olarak geçen M doğrusu D'ye $z = x^2 + 3y^2$'den girer ve $z = 8 - x^2 - y^2$'den çıkar.

Şimdi de integrasyonun y-sınırlarını bulalım. (x, y)'den, y-eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R'ye $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$'den girer ve $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$.'den çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. L, R'yi tararken, x'in değeri $(-2, 0, 0)$'da $x = -2$'den $(2, 0, 0)$'da $x = 2$'ye kadar değişir. D'nin hacmi

$$V = \iiint_D dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2}\right) dx$$

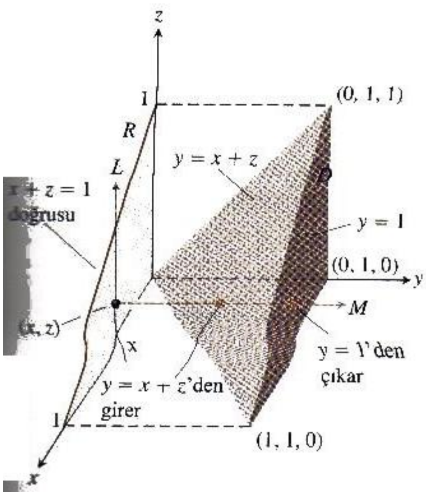
$$= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2}\right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^{3/2}\, dx$$

$$= 8\pi\sqrt{2}.$$ $x = 2\sin u$ dönüşümü ile integrasyondan sonra

Sıradaki örnekte, farklı bir integrasyon sırasının nasıl kullanıldığını göstermek için D'yi xy-düzlemi yerine xz-düzlemine iz düşürüyoruz.

ÖRNEK 2 İntegrasyon Sınırlarını $dy\,dz\,dx$ Sırasında Bulmak

Köşeleri (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0) ve (0, 1, 1)'de olan dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde bir $F(x, y, z)$ fonksiyonunun üç katlı integrali için integrasyon sınırlarını belirleyin.



ŞEKİL 15.29 Dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde tanımlı bir fonksiyonun üç katlı integralini hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak (Örnek 2).

Çözüm D'yi xz-düzlemindeki "gölgesi" R ile birlikte çizeriz (Şekil 15.29). D'nin üst (sağ taraftaki) sınır yüzeyi $y = 1$ düzlemindedir. Alt (sol taraftaki) sınır yüzey, $y = x + z$ düzlemindedir. R'nin üst sınırı $z = 1 - x$ doğrusudur. Alt sınır $z = 0$ doğrusudur.

Önce integrasyonun y-sınırlarını buluruz. R'nin tipik bir (x, z) noktasından y-eksenine paralel olarak geçen doğru D'ye $y = x + z$'den girer ve $y = 1$'den çıkar.

Sonra integrasyonun z-sınırlarını buluruz. (x, z)'den z-eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R'ye $z = 0$'dan girer ve $z = 1 - x$'ten çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. L, R'yi tararken, x'in değerleri $x = 0$'dan $x = 1$'e değişir. İntegral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx \qquad \blacksquare$$

olur.

ÖRNEK 3 Örnek 2'yi $dz\,dy\,dx$ Sırası İle Tekrarlamak

$F(x, y, z)$'yi dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde $dz\,dy\,dx$ sırası ile integre etmek için adımları aşağıdaki gibi düzenleriz.

Önce integrasyonun z-sınırlarını buluruz. xy-düzlemindeki "gölge" nin tipik bir (x, y) noktasından z-eksenine paralel olarak geçen bir doğru D'ye $z = 0$'dan girer ve denklemi $z = y - x$ olan üst yüzeyinden çıkar (Şekil 15.29).

Sonra integrasyonun y-sınırlarını buluruz. xy-düzleminde, $z = 0$, dörtyüzlünün eğik yüzeyi düzlemi $y = x$ doğrusu boyunca keser. (x, y)'den y-eksenine paralel olarak geçen bir doğru xy-düzlemindeki gölge'ye $y = x$'ten girer ve $y = 1$'den çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. Önceki adımdaki y-eksenine paralel doğru gölgeyi tararken, x'in değerleri $x = 0$'dan (1, 1, 0)'da $x = 1$'e değişir. İntegral

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

olur. Örneğin, $F(x, y, z) = 1$ ise

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 (y - x)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

bulunur.

Aynı sonucu $dy\,dz\,dx$ sırasıyla integre ettiğimizde de buluruz,

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} dy\,dz\,dx = \frac{1}{6}. \qquad ■$$

Gördüğümüz gibi, bazen (ama her zaman değil) iki katlı integralleri hesaplamak için ardışık tek katlı integraller iki farklı sırada alınabilir. dx, dy ve dz altı farklı şekilde sıralanabildiğinden, üç katlı integraller için bu sayı altı olabilir. Her sıralama, uzaydaki integrasyon bölgesinin farklı bir tanımlamasını ve farklı integrasyon sınırları verir.

ÖRNEK 4 Farklı İntegrasyon Sıralarını Kullanmak

Aşağıdaki integrallerden her biri Şekil 15.30'da gösterilen katı cismin hacmini verir.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\,dy\,dz$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\,dz\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy\,dz\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$ **(f)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$

... aplıyoruz.

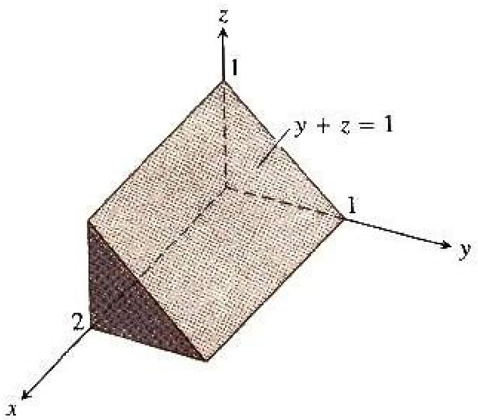
$$V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\,dz\,dy \qquad \text{(b)'deki integral}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2\,dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big[2z\Big]_{z=0}^{z=1-y} dy$$

$$= \int_0^1 2(1-y)\,dy$$

$$= 1.$$



ŞEKİL 15.30 Örnek 4, bu prizmanın için altı farklı ardışık üç katlı integr verir.

$$V = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz \qquad \text{(c)'deki integral}$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (1-z)\,dx\,dz$$

$$= \int_0^1 \Big[x - zx\Big]_{x=0}^{x=2} dz = \int_0^1 (2-2z)\,dz = 1$$

(a), (d), (e) ve (f)'deki integraller de $V = 1$'i verir.

-- ---

Hacim= $\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} dzdydx, \quad \rightarrow$ Kutle $\quad M=\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} \sigma(x,y,z)dzdydx$

Agirlik Merkezi $\quad x_M = \dfrac{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} x\sigma(x,y,z)dzdydx}{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} \sigma(x,y,z)dzdydx} = \dfrac{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} x\sigma(x,y,z)dzdydx}{M}$

$$y_M = \dfrac{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} y\sigma(x,y,z)dzdydx}{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} \sigma(x,y,z)dzdydx} = \dfrac{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} y\sigma(x,y,z)dzdydx}{M}$$

$$y_M = \dfrac{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} z\sigma(x,y,z)dzdydx}{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} \sigma(x,y,z)dzdydx} = \dfrac{\int\limits_{x=A}^{x=B}\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)}\int\limits_{z=u(x,y)}^{z=w(x,y)} z\sigma(x,y,z)dzdydx}{M}$$

--------------------------- -- -------------------------- ----

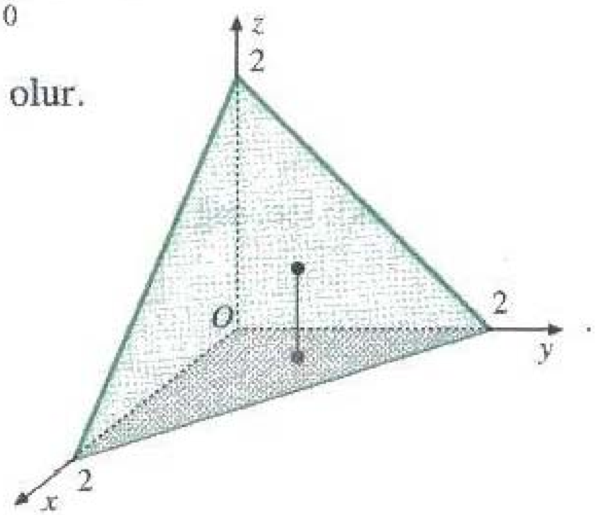
ÖRNEK : $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ düzlemleri tarafından sınırlanan dörtyüzlü içine yerleştirilen bir cismin her noktadaki yoğunluğu, o noktanın xOy düzlemine olan uzaklığına eşittir. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm : $\sigma(x,y,z)=z$ olacağından

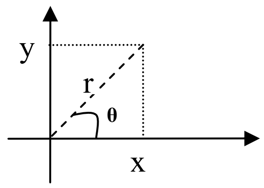
$$M=\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} z\,dzdydx=\frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{2-x}(2-x-y)^2\,dydx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^2(2-x-y)^3\Big|_0^{2-x}dx=\frac{1}{6}\int_0^2(2-x)^3\,dx$$

$$=-\frac{1}{24}(2-x)^4\Big|_0^2=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$ olur.



Duzlemde Kartezyen ve Kutupsal Koord. Sist.
Duzlemde bir noktanin x,y ile belirtilmesi kartezyen koordinat sistemi olur.
Bir noktanin r(genlik,uzunluk.mesafe) ve θ (aci) ile belirtilmesi kutupsal koordinat sistemi olur.



x=r cos θ
y=r sin θ

r=$\sqrt{x^2+y^2}$

θ=$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

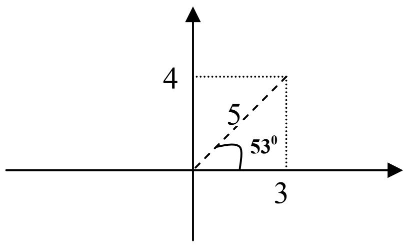
$\tan^{-1}$(z): arg tan(z) demektir.

P611) Asagidaki kartezyen koordinat sisteminde verilen noktalari kutupsal koordinat sisteminde belirtin. a)(3,4) b)(-3,4), c)(-3.-4), d)(3,-4)

Cozum:

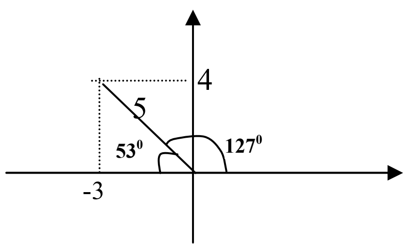
a)x=3, y=4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5,

θ=$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(4/3) = 53.1^0



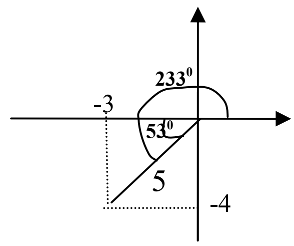
b)x=-3, y=4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{(-3)^2+4^2}$ =5,

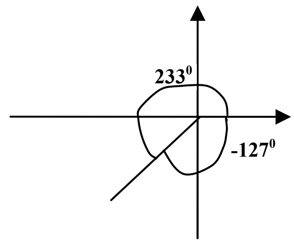
θ=$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(4/(-3)) =180-53.1^0=127^0



c)x=-3, y=-4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ = r=$\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$ =5,

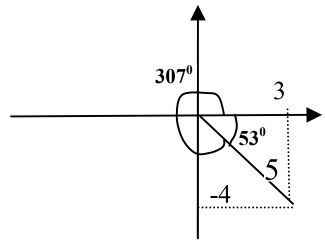
θ=$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(-4/(-3)) =180+53.1^0=233^0=360-233^0=-127^0





d)x=3, y=-4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{3^2+(-4)^2}$ =5,

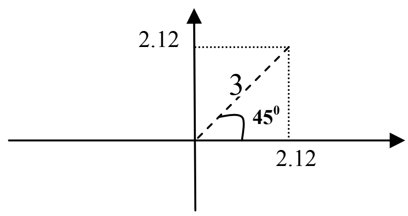
θ =$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(-4/3) =-53.1^0=360-53=307



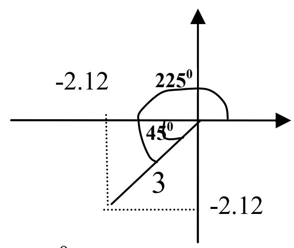
---------------- ---------------------- --------------------

P613) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari kartezyen koordinat sisteminde belirtin.
a)(r=3, θ=45^0) b)(r=3, θ=225^0)
c)(r=10, θ=225^0), d)(r=10, θ=-60^0),

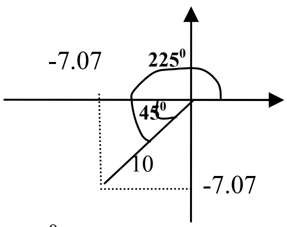
Cozum:
a)θ=45^0, r=3
x= r cos(45^0) = 3 0.707=2.12
y= r sin(45^0) = 3 0.707=2.12



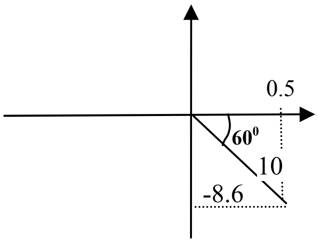
b)θ=225^0, r=3
x= r cos(225^0) = 3 (-0.707 = - 2.12
y= r sin(225^0) = 3 (-0.707) = - 2.12



c)θ=225^0, r=10
x= r cos(225^0) = 10 (-0.707 = - 7.07
y= r sin(225^0) = 10 (-0.707) = - 7.07



d)$\theta=-60^0$, r=10
x= r cos(-60^0) = 10   0.5 = 0.5
y= r sin(-60^0) = 10 (-0.86) = - 8.6



Kutupsal koordinatlarda gosterim:
Kutupsal koordinatlarda verilen bir noktayi koordinat sisteminde gostermek icin uc turlu yol ile cozebiliriz.

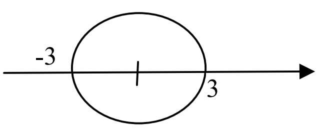
Birinci yol: onceki problemde oldugu gibi kartezyen koordinat sistemine cevir ve x,y noktalarini bul.

Ikinci yol: a) merkezi orijinde olan r yaricapli bir daire ciz. b) x ekseni ile θ^{0} lik aci yapan dogrunun daireyi kestigi noktayi bul.

Ucuncu yol: a) x eksenine θ^{0} lik aci yapan dogruyu ciz. b)Dogru uzerinde orijinden r kadar git ve noktayi bul.

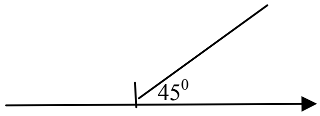
P617) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin. a) (r=3, $\theta=45^0$)

Ikinci yol: ile cozelim.
r=3 yaricapli daire ciz.

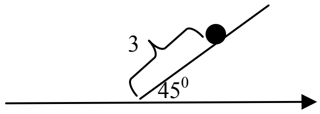


x ekseni ile $\theta=45^0$ lik aci yapan dogru ciz.

Ucuncu Yol a) x eksenine 45^{0} lik aci yapan dogruyu ciz.

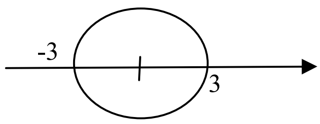


b)Dogru uzerinde orijinden r kadar git ve noktayi bul.

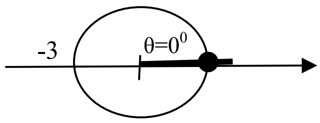


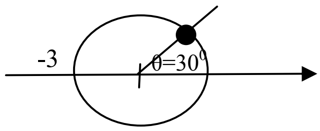
P618) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin.
a)A (r=3, $\theta=0^0$)   b) B(r=3, $\theta=30^0$)   c) C(r=3, $\theta=45^0$),
d)D (r=3, $\theta=60^0$)   e)E (r=3, $\theta=90^0$)

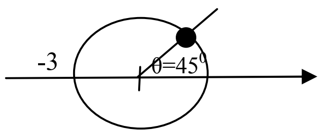
Cozum: noktalarin hepsinde r=3 dur o halde noktalar r=3 yaricapli cember uzerinde bulunacaktir.

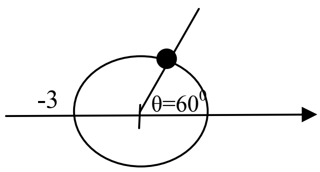


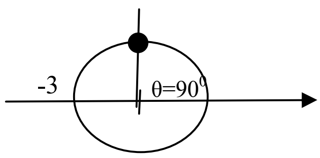
$\theta=0^0$, $\theta=30^0$, $\theta=45^0$, $\theta=60^0$ $\theta=90^0$
acilarin cemberi kestigi noktalar aranan noktalardir.







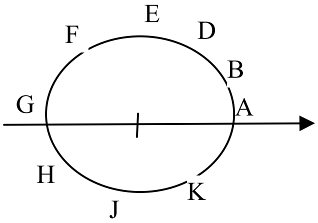




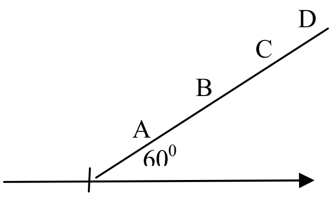
P617) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin.
a)A (r=3, $\theta=0^0$)   b) B(r=3, $\theta=30^0$)
d)D (r=3, $\theta=60^0$)   e)E (r=3, $\theta=90^0$)
f)F (r=3, $\theta=120^0$)   g) G(r=3, $\theta=180^0$)

h) H(r=3, θ=225^0), j)J (r=3, θ=270^0) k)K (r=3, θ=330^0)

Cozum: noktalarin hepsinde r=3 dur o halde noktalar r=3 yaricapli cember uzerinde bulunacaktir.

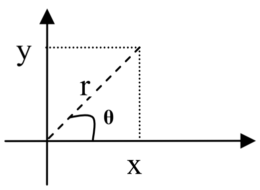


P623) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin.
a)A (r=3, θ=60^0) b)B (r=6, θ=60^0)
a)C (r=9, θ=60^0) a)D (r=12, θ=60^0)
Cozum. noktalarin hepsi θ=60^0 lik aci dogrusu uzerindedir.



---------------------------- ----------------------------

y=f(x) ve r=g(θ) fonksiyonlarinin donusumu.



x=r cos θ
y=r sin θ

r=$\sqrt{x^2+y^2}$

θ=$\tan^{-1}\frac{y}{x}$

P231) $y^3=x^2+3$, ise r=f(θ) nedir.
Cozum: x=r cos θ, y=r sin θ konulursa,
$(r \sin θ)^3 = (r \cos θ)^2+3$,

P231) $y^2=-x^2+16$, ise r=f(θ) nedir.
Cozum:
$(r \sin θ)^2 = -(r \cos θ)^2+10$,
$(r \sin θ)^2 + (r \cos θ)^2=10$,
$r^2 \sin^2 θ + r^2 \cos^2 θ =10$,
$r^2 (\sin^2 θ + \cos^2 θ) =10$,
$r^2 (1) =10$,
$r^2 =10$,

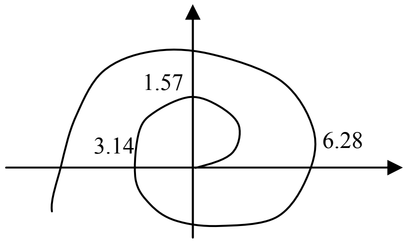
θ ne olursa olsun r=$\sqrt{10}$ dur. su halde aranan fonksiyon bir cemberdir.

-------------------- ------------------------------------

Kutupsal koordinatlarda Grafik Cizimi.
Derece olarak belirtilmemise Θ devamli olarak radyan alinir.

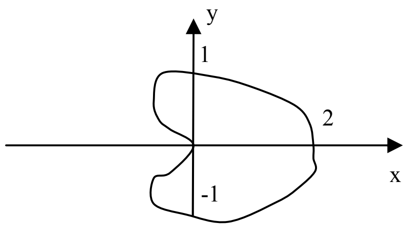
Ornek 312 : r= Θ, grafigini cizin.

Θ(radyan)	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10
Θ(derece)	0	5.7	90	180	360	572
r	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10



Ornek 313: r=1+cos(Θ), grafigini cizin.

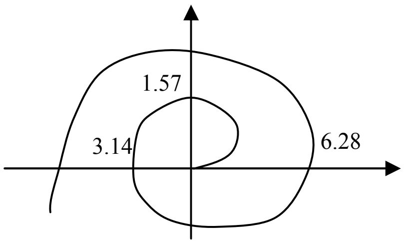
Θ(derece)	0	45	90	135	180	225	270	315	360
r	2	1.7	1	0.3	0	0.3	1	1.7	2



Kutupsal koordinatlar

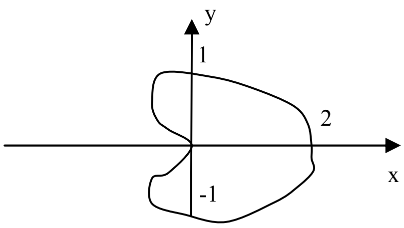
Ornek 312 : r=Θ, grafigini cizin.

Θ(radyan)	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10
Θ(derece)	0	5.7	90	180	360	572
r	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10



Ornek 313: r=1+cos(Θ), grafigini cizin.

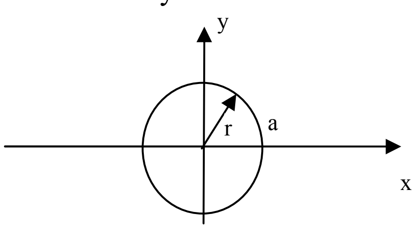
Θ(derece)	0	45	90	135	180	225	270	315	360
r	2	1.7	1	0.3	0	0.3	1	1.7	2



Kutupsal koordinatlarda integrasyon.

Integral alinan alan kutupsal koordinatlara uygun ise sekil dairesel veya kutupsal formda basit oluyor ise bu metod tatbik edilir.

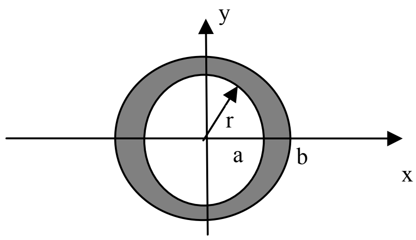
Ornek 315. r=f(Θ)=a ise. Asagidaki bolge (daire) icin alan formulunu yazin.



$$\int_{\theta=0}^{\theta=360} \int_{r=0}^{r=a} r dr\, d\theta$$

Ornek 315. r=f(Θ)=a ise. Asagidaki bolge (daire parcasi) icin alan formulunu yazin.

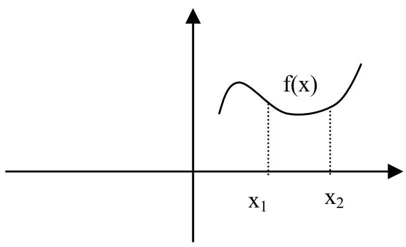
Ornek 323. r=f(Θ)=a ise. Asagidaki bolge icin alan formulunu yazin.



$$\int_{\theta=0}^{\theta=360} \int_{r=a}^{r=b} r dr\, d\theta$$

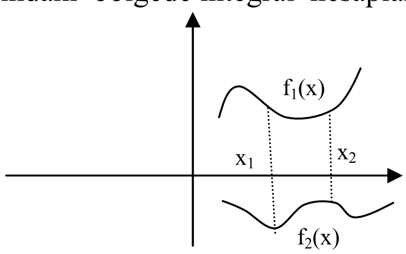
-- -

Tek katli Integralin anlami f(x) egrisi ile x ekseni arasinda kalan alandir.



-- - ----

Cift katli Integralde $f_1(x)$ egrisi ile $f_2(x)$ egrileri arasindaki bolgede integral hesaplanir.



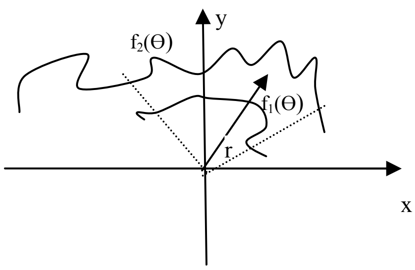
$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} g(x,y)dy\, dx$$

ozel olarak g(x,y)=1 ise integral sonucu **alan**i verir.

----------------------------------- -----------------

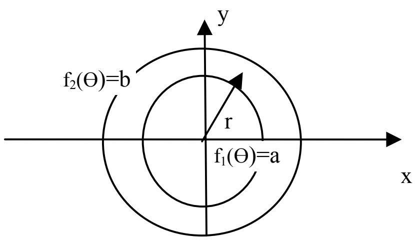
kutupsal koordinatlarda da benzer durum vardir.

$$\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} g(r,\ \theta)dr\ \ d\theta$$



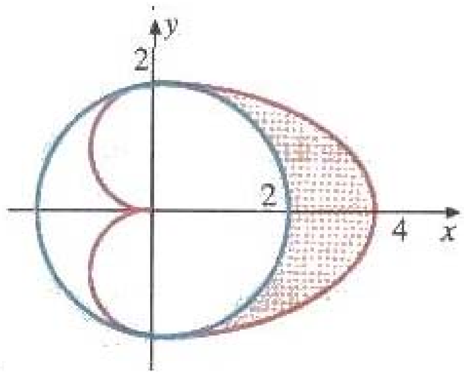
$g(r,\Theta)=r$ ise integral sonucu alani verir.

Ornek 351: a yaricapli cember ile b yaricapli cember arasinda kalan alani hesaplayin.



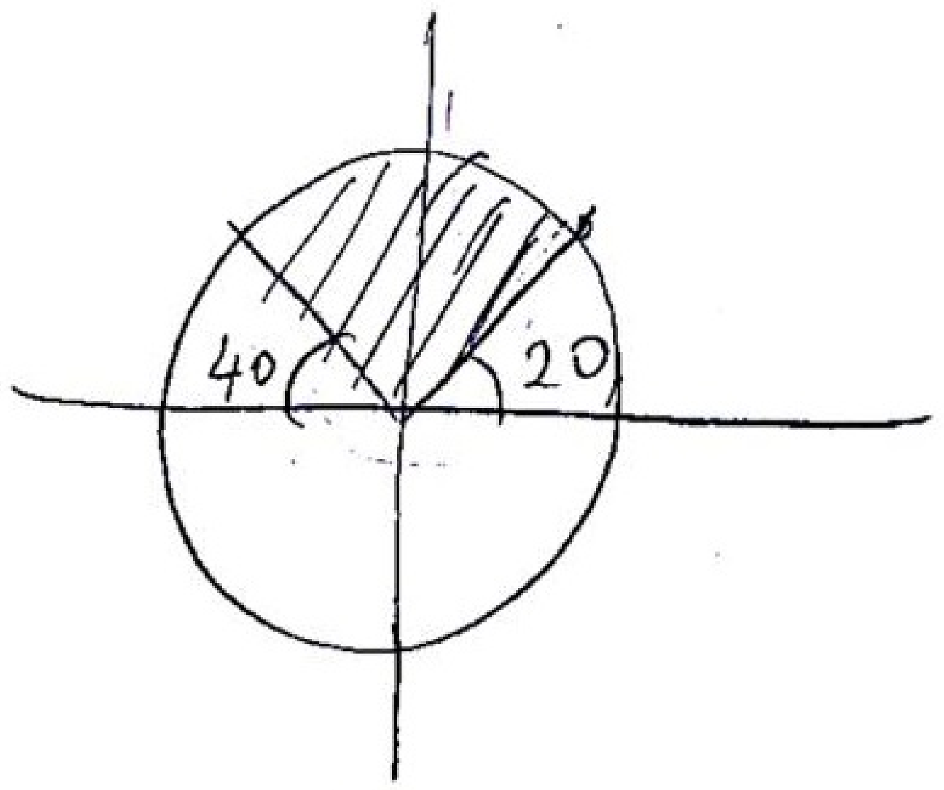
$$\text{Alan}=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=a}^{r=b} r\,dr\,d\theta=\pi(b^2-a^2)$$

Ornek 352. 2 yaricapli cember ile $r=2(1+\cos\Theta)$ egrisi arasinda kalan alani hesaplayin. Θ bu soruda φ olarak gosterilmis.



$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi$$

p316) Taralı alan için alan formulünü yazın. alanı hesaplayın



yarıçap = 10

$$20^\circ = 20 \times \frac{3.14}{180} = 0.35 \text{ radyan}$$

$$180 - 40 = 140^\circ$$

$$140^\circ = 140 \times \frac{3.14}{180} = 2.44$$

$$\int_{\theta=20^\circ}^{140^\circ}\int_{r=0}^{r=10} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0.35\text{ radyan}}^{2.44\text{ radyan}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{10} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0.35}^{\theta=2.44}\left(\frac{10^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)d\theta = 50\int_{\theta=0.35}^{2.44} d\theta = 50\,\theta\Big|_{0.35}^{2.44}$$

$$= 50\,(2.44 - 0.35) = 104.5$$

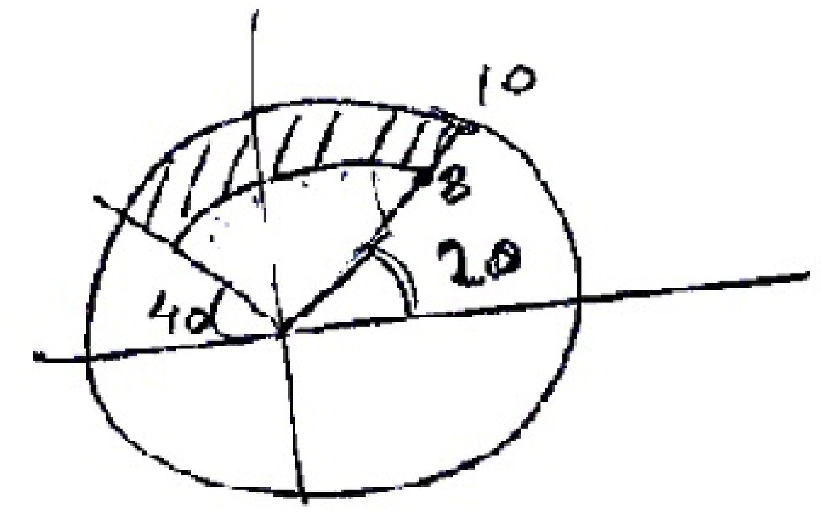
Not: daire parçası $140-20 = 120^\circ$ lik bir parçadır. Tüm alan $\pi r^2 = 3.14 \times 100 = 314$

360° — 314

120° — x

$$x = \frac{314 \times 120}{360} = 104.5$$

p317) Taralı alan için alan formulünü yazın.



yarıçap = 10

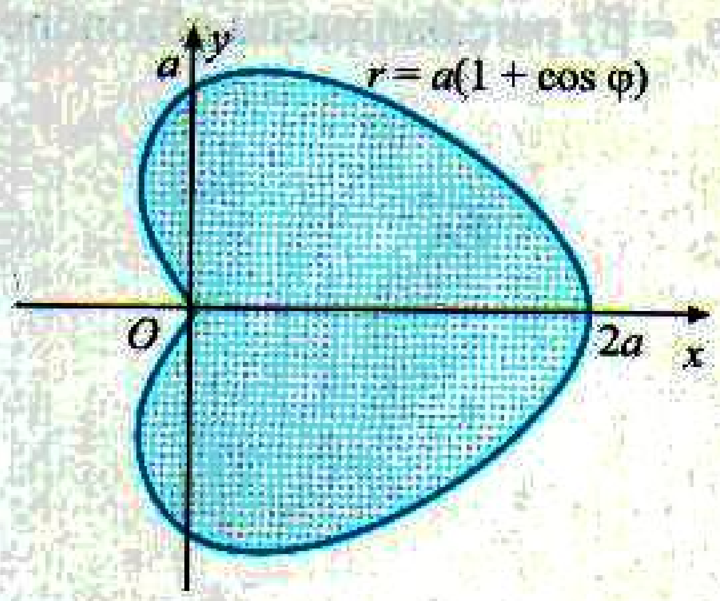
taralı alan yarıçapı = 8

$$\int_{\theta=0.35}^{2.44}\int_{r=8}^{10} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta} \frac{r^2}{2}\Big|_8^{10} d\theta = \int_{\theta}\left(\frac{10^2}{2}-\frac{8^2}{2}\right)d\theta$$

$$= 18\int d\theta = 18\,\theta\Big|_{0.35}^{2.44} = 37.6$$

ÖRNEK 15 $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm Kardiyoidin grafiği yanda verilmiştir.



$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right]d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}2\pi+0+0\right]=\frac{3}{2}\pi a^2$$

birimkare olur.

Not

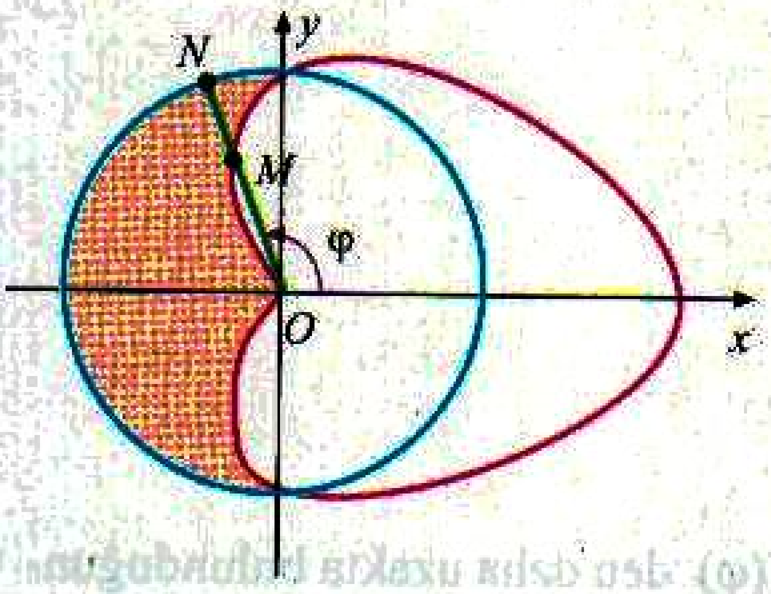
Kardiyoid kutup eksenine göre simetrik olduğundan sözkonusu alan

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi=\int_0^{\pi} r^2 d\varphi$$

biçiminde de hesaplanabilir.

ÖRNEK 16 $r=2$ çemberinin içinde, $r=2\,(1+\cos\varphi)$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm O kutup noktasından geçen ve sözkonusu bölgeden geçen ışın gözönüne alındığında, ışının eğrileri kestiği M noktası O kutbuna daha yakındır. O halde $r_{yakın}=2(1+\cos\varphi)$, $r_{uzak}=2$ dir. Diğer taraftan $[MN]$ doğru parçasının, alanı istenen bölgeyi taraması için φ nin $\frac{\pi}{2}$ den $\frac{3\pi}{2}$ ye kadar değişmesi gerekir. Buna göre,



$$A=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[2^2-2^2(1+\cos\varphi)^2\right]d\varphi=-2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right]d\varphi$$

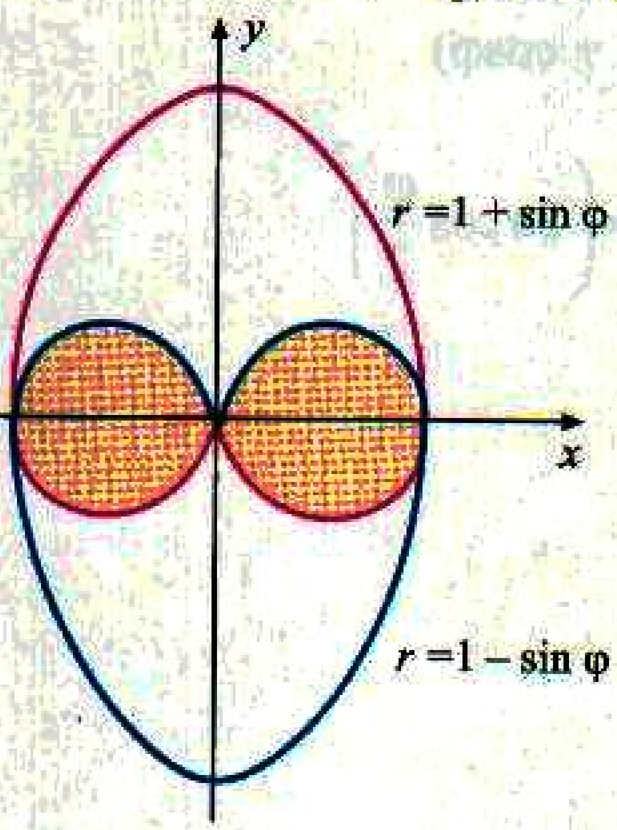
$$=-2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi\right]d\varphi$$

$$=-2\left(2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}=8-\pi$$

br^2 olur.

ÖRNEK 17 $r = 1 + \sin\varphi$ ve $r = 1 - \sin\varphi$ eğrilerinin iç bölgelerinin ortak noktalarından oluşan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm Sözkonusu alan yandaki şekilde gösterilmiştir. Taralı alan 4 tane simetrik alandan oluştuğundan, bunların birinin alanını bulup 4 ile çarpmak yeterdir. Birinci bölgedeki alanı bulalım.

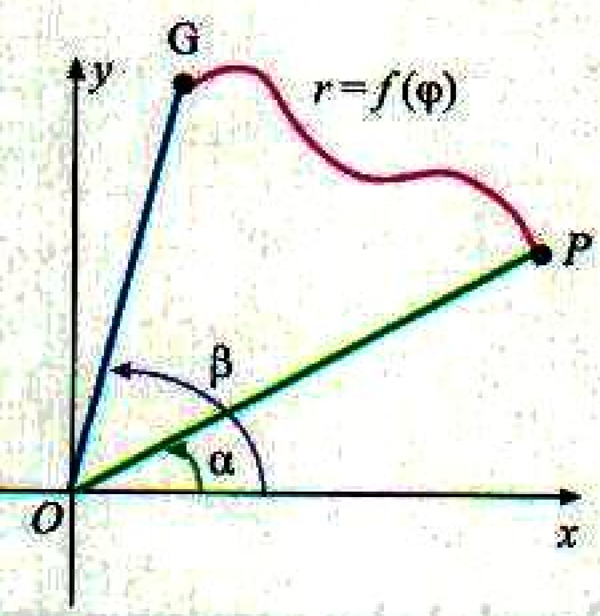


$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)^2\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-2\sin\varphi+\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right] d\varphi$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\cos\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}-2 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

9.4 KUTUPSAL KOORDİNATLARDA YAY UZUNLUĞU HESABI



Kartezyen koordinatlarda $y = f(x)$ denklemi ile verilen eğrinin yay uzunluğu diferensiyelinin

$$d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

olduğunu biliyoruz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$$

olduğundan

$$d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$$

olduğundan

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2+(r')^2 \text{ dir.}$$

dir. Buna göre, yay diferensiyeli

$$d\ell = \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

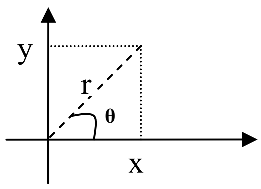
olur. O halde eğri üzerinde $P(r_1, \alpha)$, $Q(r_2, \beta)$ noktalarını birleştiren yayın uzunluğu

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

birimdir.

Koordinat Donusumleri
1)Duzlemde Kartezyen koordinat sistemi
2)Duzlemde kutupsal koordinat sistemi
3)Uzayda Kartezyen koordinat sistemi
4)Uzayda Silindirik koordinat sistemi
5)Uzayda Kuresel koordinat sistemi
--------   -------------------------------

Duzlemde Kartezyen ve Kutupsal Koord. Sist.
Duzlemde bir noktanin x,y ile belirtilmesi kartezyen koordinat sistemi, r(genlik,uzunluk.mesafe) ve θ (aci) ile belirtilmesi kutupsal koordinat sistemi olur.



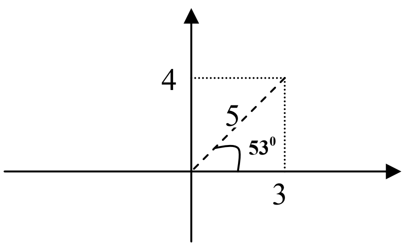
x=r cos θ
y=r sin θ

r=$\sqrt{x^2+y^2}$

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$

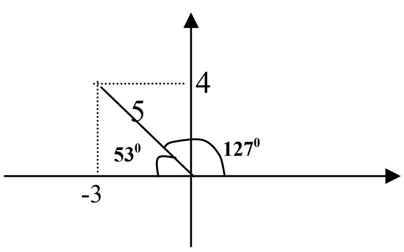
tan^{-1}(z): arg tan(z) demektir.
Ornek Asagidaki kartezyen koordinat sisteminde verilen noktalari kutupsal koordinat sisteminde belirtin. a)(3,4) b)(-3,4), c)(-3.-4), d)(3,-4)
Cozum:
a)x=3, y=4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5,

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(4/3) = 53.1^0



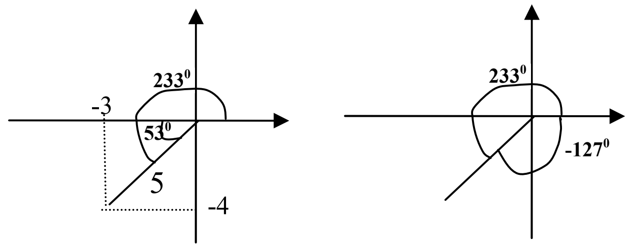
b)x=-3, y=4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{(-3)^2+4^2}$ =5,

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(4/(-3)) =180-53.1^0=127^0



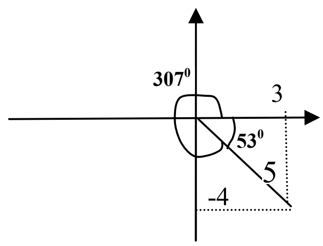
c)x=-3, y=-4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ = r=$\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$ =5,

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(-4/(-3)) =180+53.1^0=233^0=360-233^0=-127^0



d)x=3, y=-4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{3^2+(-4)^2}$ =5,

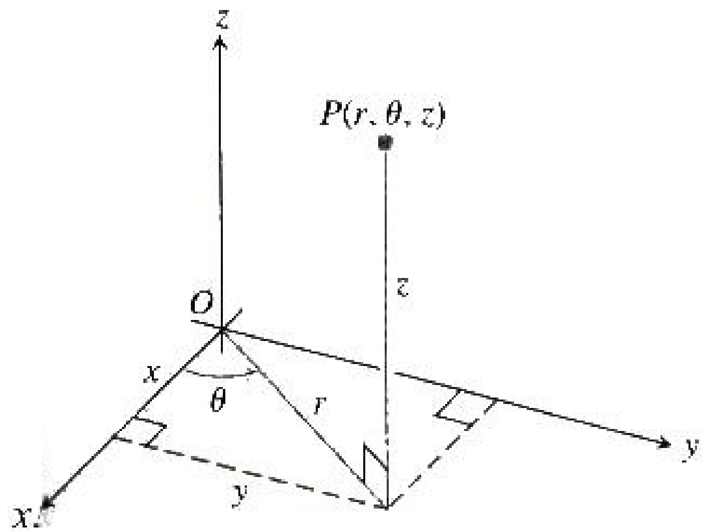
θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(-4/3) =-53.1^0=360-53=307



Uzayda Silindirik Koordinat Sistemi

Silindirik koordinatlar (r, θ, z) sıralı üçlüleri ile uzayda bir P noktasını temsil ederler. Burada,

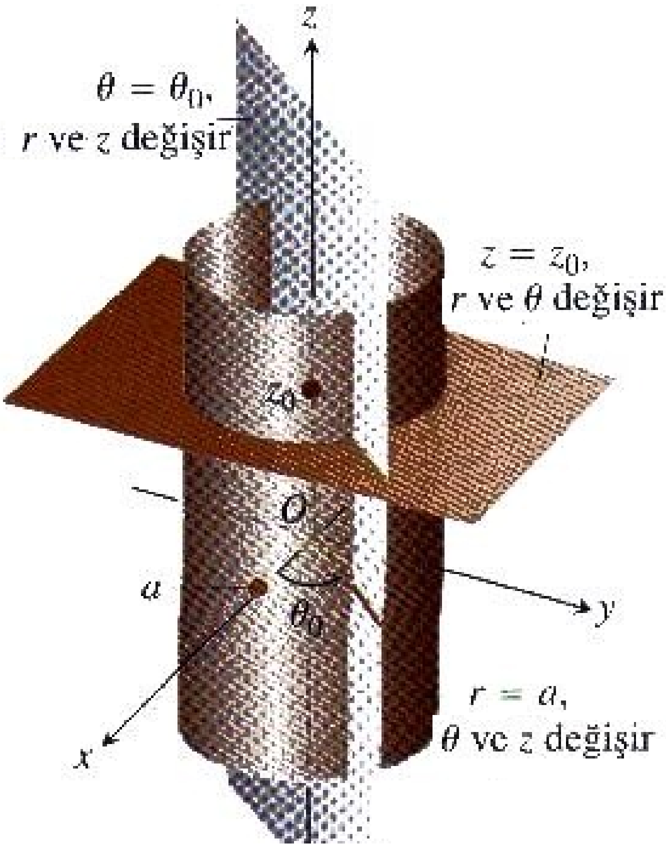
1. r ve θ, P'nin xy-düzlemine dik izdüşümünün kutupsal koordinatlarıdır.
2. z kartezyen dikey koordinattır.



Kartezyen (x, y, z) ve Silindirik (r, θ, z) Koordinatlarını Bağlayan Denklemler

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = y/x$$

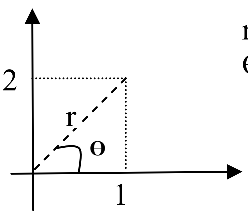


Ornek Problem. Asagidaki kartezyen noktalari silindirik koordinata cevirin.

a)(1,2,3), b)(-1,-2,3)

Cozum. a)x=1, y=2, z=3,

Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



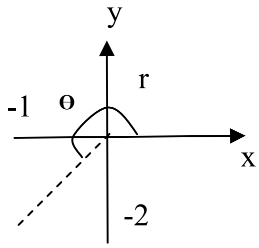
r=$\sqrt{1^2+2^2}=2.23$

ϴ=$\tan^{-1}(2/1)=63^0$

b)(-1,-2,3)

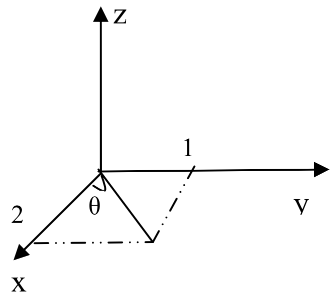
r=$\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=2.23$

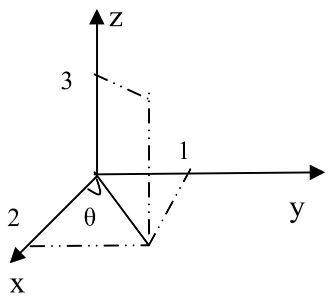
ϴ=$\tan^{-1}(-2/-1)=180+63=243^0$

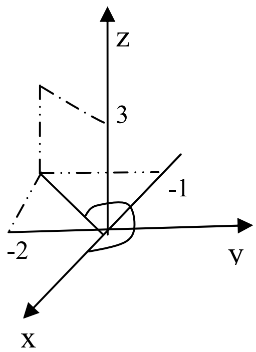


r=$\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=2.23$

ϴ=$\tan^{-1}(-2/-1)=180+63=243^0$







Uzayda Kuresel Koordinat Sistemi

Küresel Koordinatlar uzayda bir P noktasını,

1. ρ, P'den orijine uzaklık.
2. ϕ, $\overrightarrow{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açı $(0 \le \phi \le \pi)$
3. θ, silindirik koordinatlardaki açı

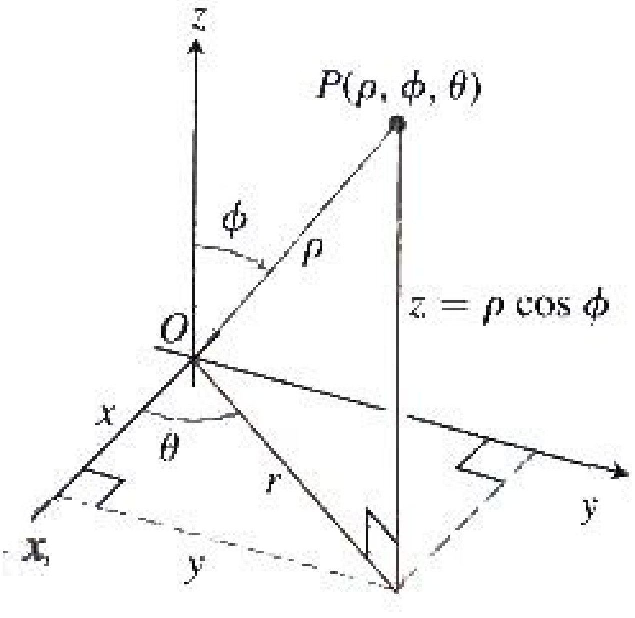
olmak üzere, sıralı (ρ, ϕ, θ) üçlüleri ile temsil eder.

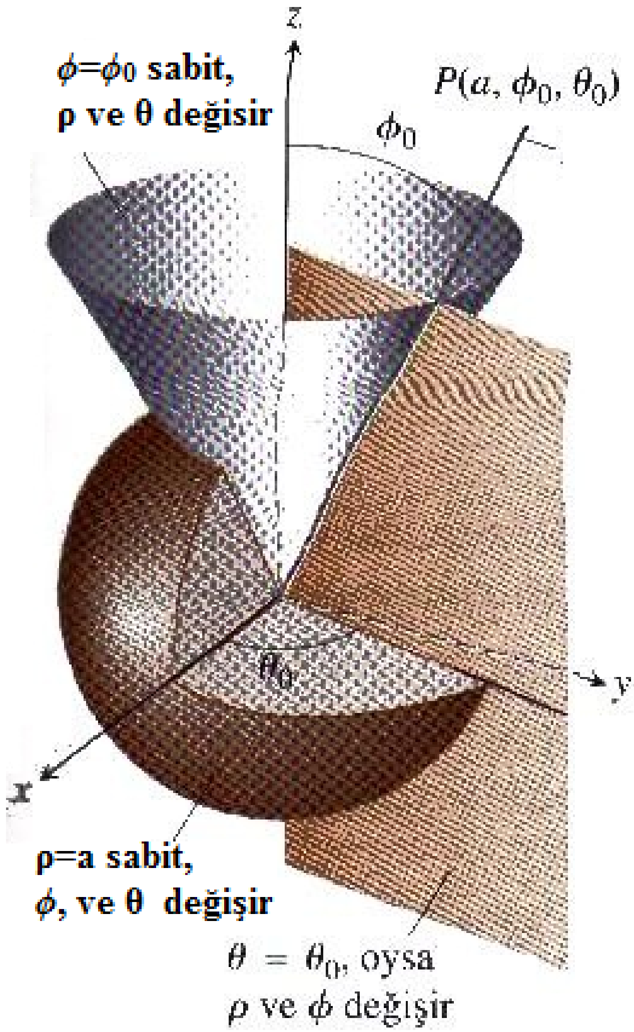
Kuresel(ρ, ϕ, θ), Silindirik(r,θ,z), Kartezyen(x,y,z) arsindaki bagintilar.

$$r = \rho \sin \phi, \qquad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta,$$

$$z = \rho \cos \phi, \qquad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$





Koordinat Dönüşüm Formülleri

SİLİNDİRİKTEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN SİLİNDİRİĞE
$x = r \cos \theta$	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$	$r = \rho \sin \phi$
$y = r \sin \theta$	$y = \rho \sin \phi \sin \theta$	$z = \rho \cos \phi$
$z = z$	$z = \rho \cos \phi$	$\theta = \theta$

HACIM FORMULLERI

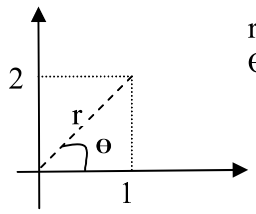
$$\begin{aligned} dV &= dx\, dy\, dz \\ &= dz\, r\, dr\, d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

Ornek Problem. Asagidaki kartezyen noktalari silindirik ve kuresel koordinatlara cevirin.

a)(1,2,3), b)(-1,-2,3)

Cozum. a)x=1, y=2, z=3,

Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



r= $\sqrt{1^2+2^2}=2.23$

ϴ=$\tan^{-1}(2/1)=63^0$

Kuresel koordinatlar icin

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{z^2+\rho^2}=3.74$

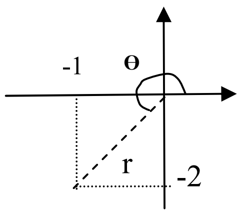
z= ρ cos(ϕ) → ϕ= arg cos(z/ρ)

ϕ= arg cos(3/3.74)=36.66^0

ϴ = 63^0 (silindirik koordinat ile ϴ aynidir)

Cozum. b)x=-1, y=-2, z=3,

Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



r= $\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=2.23$

ϴ=$\tan^{-1}(-2/-1)=180+63$

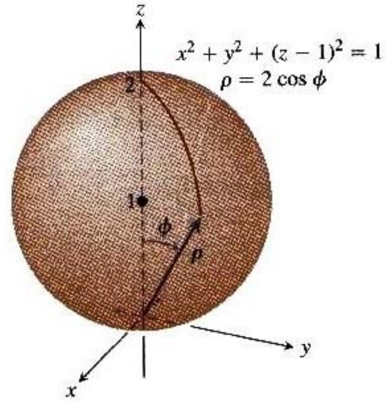
$=243^0=-117^0$

Kuresel koordinatlar icin

ϴ = 243^0 (silindirik koordinat ile ϴ aynidir)

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{z^2+\rho^2}=3.74$

ϕ= arg cos(z/ρ) =arg cos(3/3.74)=36.66^0



ŞEKİL 15.43 Örnek 3'teki küre.

ÖRNEK 3 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz.

Çözüm x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırız:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$
$$\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 = 1$$
$$\rho^2 \sin^2\phi \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + \rho^2\cos^2\phi - 2\rho\cos\phi + 1 = 1$$
$$\rho^2 \underbrace{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}_{1} = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho = 2\cos\phi$$

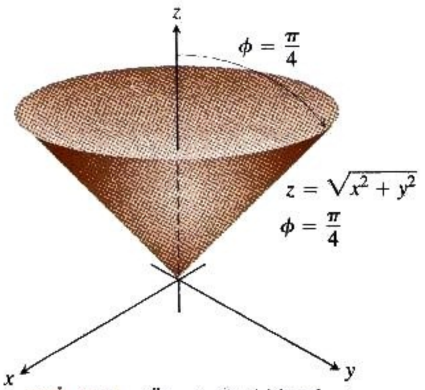
Şekil 15.43'e bakın.

ÖRNEK 4 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz (Şekil 15.44).

Çözüm 1 *Geometri kullanın.* Koni, z-eksenine göre simetriktir ve yz-düzleminin birinci bölgesini $z = y$ doğrusu boyunca keser. Bu nedenle, koni ile pozitif z-ekseni arasındaki açı $\pi/4$ radyandır. Koni, küresel ϕ koordinatı $\pi/4$'e eşit olan noktalardan oluşur dolayısıyla denklemi $\phi = \pi/4$'tür.

Çözüm 2 *Çebir kullanın.* x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırsak aynı sonucu elde ederiz:



ŞEKİL 15.44 Örnek 4'teki koni.

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	
$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi}$	Örnek 3
$\rho\cos\phi = \rho\sin\phi$	$\rho \geq 0$, $\sin\phi \geq 0$
$\cos\phi = \sin\phi$	
$\phi = \frac{\pi}{4}$	$0 \leq \phi \leq \pi$

Küresel koordinatlar, merkezleri orijinde olan küreleri, kenarı z-ekseni olan yarıdüzlemleri ve tepe noktaları orijinde, eksenleri z-ekseninde olan konileri tanımlamakta yararlıdır. Bu gibi yüzeylerin sabit koordinat değerli denklemleri vardır:

$\rho = 4$	Küre, yarıçap 4, merkez orijinde
$\phi = \frac{\pi}{3}$	Orijinden yukarı açılan koni, pozitif z-ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar
$\theta = \frac{\pi}{3}$	z-ekseni etrafında dönen yarı düzlem, pozitif x-ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar.

13.11 BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

(u, v) noktaları bir D bölgesinin elemanları olmak üzere,

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases} \qquad (13.6)$$

$$J = \frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial (u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Hatirlatma:determinat: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=ab-cd, Ornek: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$=$2_x6-5_x4$=-8,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (12+5) - 2(0-10) + 3(0-8) = 13.$$

$$c_1b_2a_3 \quad c_2b_3a_1 \quad c_3b_1a_2$$

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$$

$$a_1b_2c_3 \quad a_2b_3c_1 \quad a_3b_1c_2$$

$$\Delta = \left(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2\right) - \left(c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2\right).$$

ÖRNEK : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm : $\left| \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (0 + 4 + 12) - (0 + 1 + 30) = 16 - 31 = -15.$

Jakobien Hesabi

P441)
x=u+2v, y=3u+4v

$$j = \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1_x4-3_x2=-2$

P442) $x=u^2+v^3$, $y=\cos(u)+\sin(2v)$

$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -\sin(u) & 2\cos(2v) \end{vmatrix} = 4u\cos(2v) + 2v\sin(u)$

balci128 ornek

KOORDINAT DONUSUMLERINDE ALAN HACIM HESABI

Üç Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Bölüm 15.6'daki silindirik ve küresel koordinat dönüşümleri, üç katlı integrallerdeki değişkenlerin değişimlerini, üç boyutlu bölgelerin dönüşümleri olarak resimleyen bir dönüşüm yönteminin özel durumlarıdır. Yöntem, şimdi iki yerine üç boyutta çalışmamızın dışında, iki katlı integrallerdeki yöntem gibidir.

uvw-uzayındaki bir *G* bölgesinin *xyz*-uzayındaki bir *D* bölgesine, Şekil 15.51'de önerildiği gibi,

$$x = g(u, v, w), \qquad y = h(u, v, w), \qquad z = k(u, v, w)$$

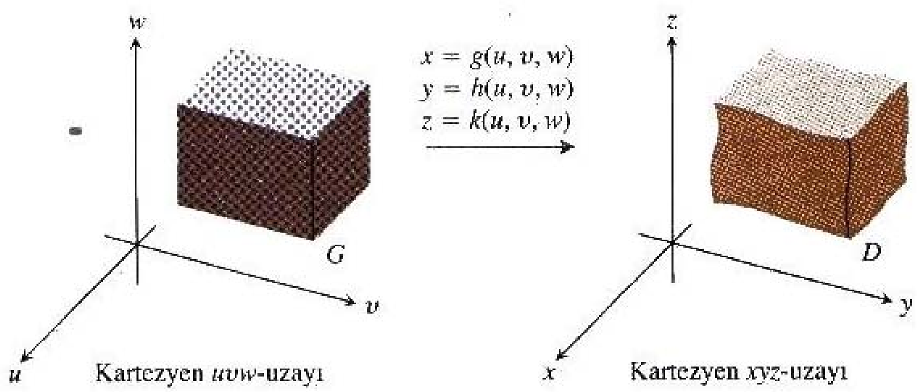
formundaki diferansiyellenebilir denklemlerle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayın. Bu durumda, *D* üzerinde tanımlı herhangi bir $F(x, y, z)$ fonksiyonu *G* üzerinde tanımlı bir

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

fonksiyonu olarak düşünülebilir. *g*, *h* ve *k*'nin birinci mertebe kısmi türevleri var ve sürekli iseler, $F(x, y, z)$'nin *D* üzerindeki integrali $H(u, v, w)$'nun *G* üzerindeki integraline

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G H(u, v, w)\,|J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw \qquad (7)$$

denklemiyle bağlıdır.



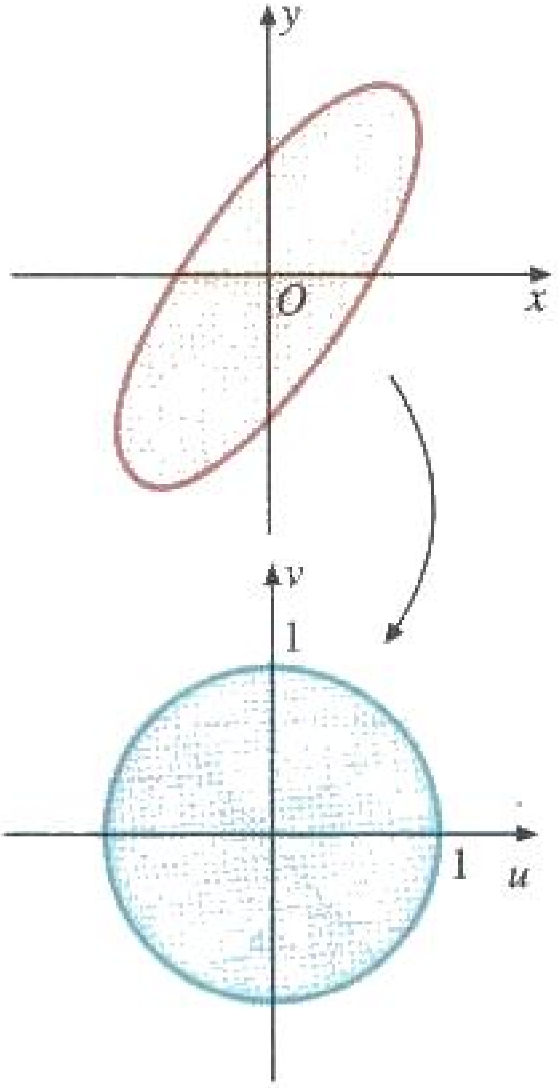
$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}\; r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{14}{3}\pi$$

bulunur.

ÖRNEK : B bölgesi $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$ elipsi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = 3u - v \end{cases}$$



dönüşümü yardımıyla

$$I = \iint_B \sqrt{2x^2 - 2xy + y^2}\; dxdy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$

denkleminde

$x = 2u + v,$

$y = 3u - v$

yazılırsa

$2\,(2u + v)^2 - 2\,(2u + v)\,(3u - v) + (3u - v)^2 = 5$

$\Rightarrow\; 5\,(u^2 + v^2) = 5$

$\Rightarrow\; u^2 + v^2 = 1$

çemberi bulunur.

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

olduğundan

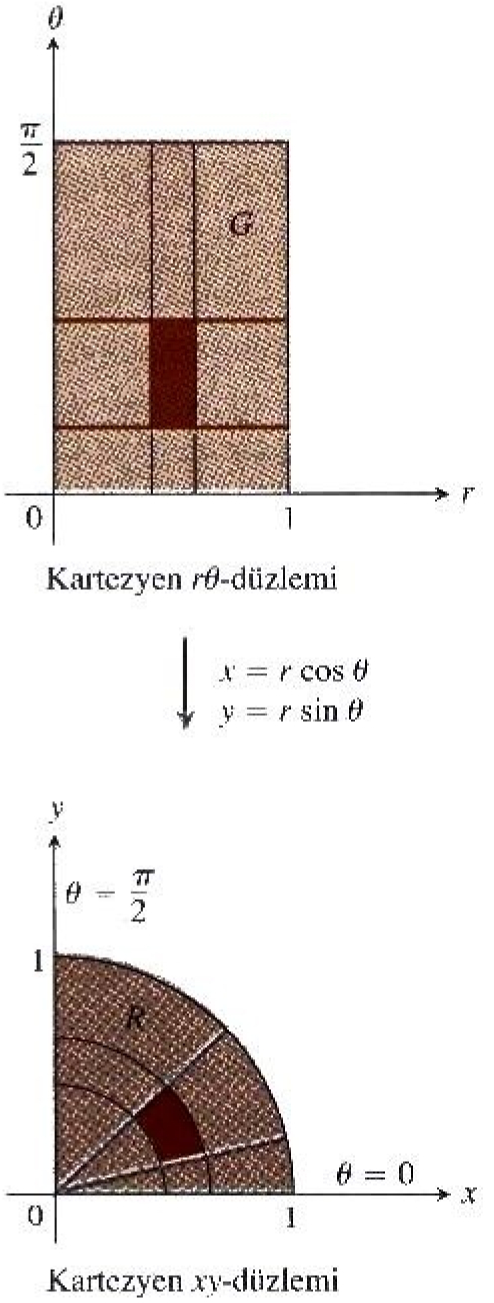
$$I = \iint_B \sqrt{2x^2 - 2xy + y^2}\; dxdy = \iint_D \sqrt{5\,(u^2 + v^2)}\; 5\; du\, dv$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$I = 5\sqrt{5} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r.r\; dr\; d\theta = 5\sqrt{5} \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 d\theta = \frac{5\sqrt{5}}{3} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{10}{3}\sqrt{5}\,\pi$$

bulunur.



ŞEKİL 15.48 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür.

(3) denkleminin sağ tarafındaki integralin, $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$'nın kutupsal koordinat düzleminde bir bölgede integrali olmadığına dikkat edin. $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ve r'nin çarpımının, *Kartezyen* $r\theta$-düzleminde bir G bölgesindeki integralidir.

Aşağıda başka bir değişken dönüşümünün örneği vardır.

ÖRNEK 1 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

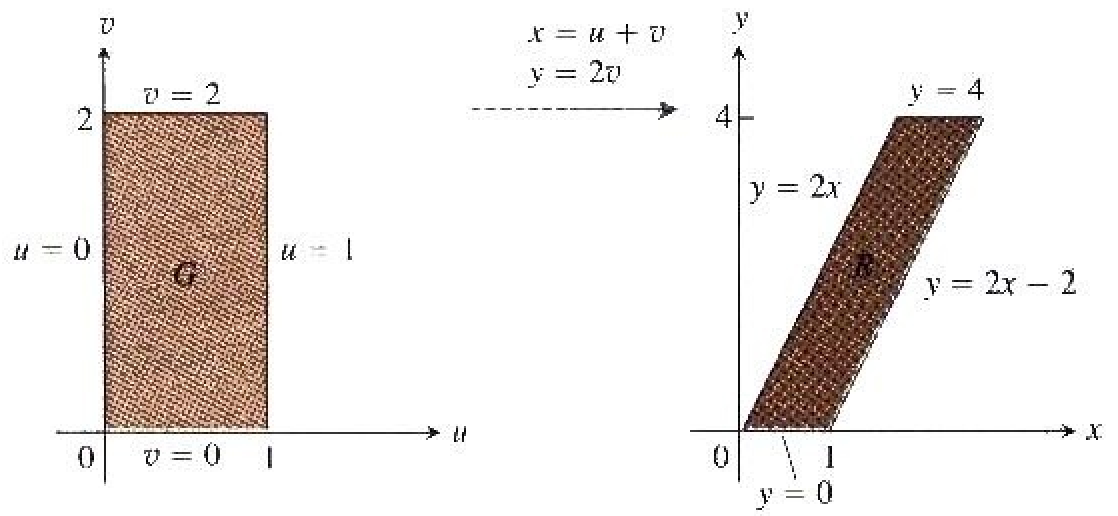
$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

integralini

$$u = \frac{2x-y}{2}, \qquad v = \frac{y}{2} \tag{4}$$

dönüşümünü uygulayarak ve uv-düzleminde uygun bir bölgede integre ederek hesaplayın.

Çözüm xy-düzlemindeki R integrasyon bölgesini çizer ve sınırlarını belirleriz (Şekil 15.49).



ŞEKİL 15.49 $x = u + v$ ve $y = 2v$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür. Dönüşümü $u = (2x - y)/2$ ve $v = y/2$ denklemleriyle tersine çevirmek R'yi G'ye dönüştürür (Örnek 1).

(1) denklemini uygulamak için, karşılık gelen uv-bölgesi G'yi ve dönüşümün Jakobiyenini bulmamız gerekir. Bunları bulmak için, (4) denklemlerinden x ve y'yi u ve v cinsinden çözeriz. Kısa bir hesaplama

$$x = u + v \qquad y = 2v \tag{5}$$

verir. Bu ifadeleri R'nin sınırlarının denklemlerinde yerine koyarak G'nin sınırlarını buluruz (Şekil 15.49).

***R*'nin sınırlarının *xy*-denklemleri**	**G'nin sınırlarının karşılık gelen *uv*-denklemleri**	**Basitleştirimiş *uv*-denklemleri**
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

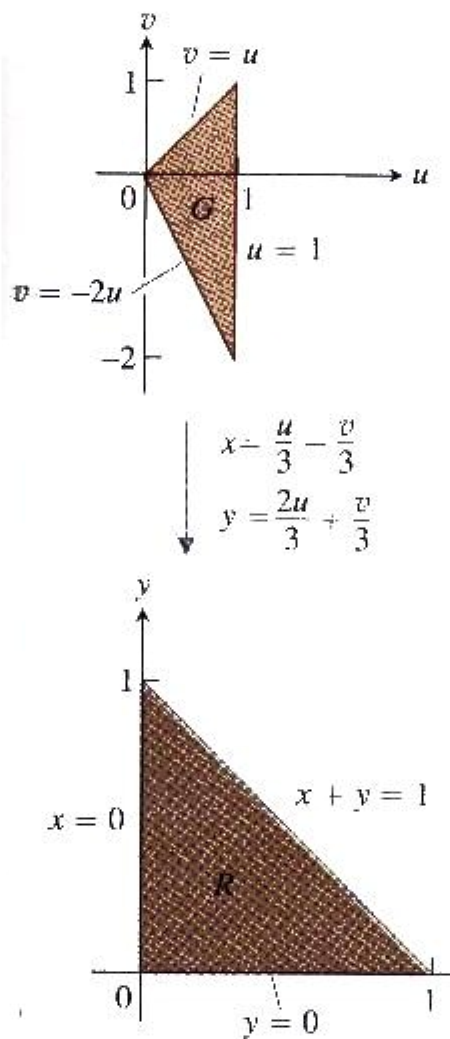
Dönüşümün Jakobiyeni (yine (5) denklemlerinden)

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u+v)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u}(2v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(2v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

bulunur. Artık (1) denklemini uygulamak için her şeye sahibiz:

$$\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\int_{v=0}^{v=2}\int_{u=0}^{u=1}u\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$=\int_0^2\int_0^1(u)(2)\,du\,dv=\int_0^2\left[u^2\right]_0^1dv=\int_0^2dv=2$$



ŞEKİL 15.50 $x=(u/3)-(v/3)$ ve $y=(2u/3)+(v/3)$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür. Dönüşümü $u=x+y$ ve $v=y-2x$ denklemleriyle tersine çevirmek, R'yi G'ye dönüştürür (Örnek 2).

ÖRNEK 2 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$$

Çözüm xy-düzlemindeki integrasyon bölgesi R'yi çizer ve sınırları belirleriz (Şekil 15.50). İntegrand, $u=x+y$ ve $v=y-2x$ dönüşümünü önerir. Biraz cebir, x ve y'yi u ve v cinsinden verir:

$$x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3},\qquad y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}$$

(6) denklemlerinden uv-bölgesi'nin sınırlarını bulabiliriz (Şekil 15.50).

R'nin sınırlarının xy-denklemleri	**G'nin sınırlarının karşılık gelen uv-denklemleri**	**Basitleştirimiş uv-denklemleri**
$x+y=1$	$\left(\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\right)+\left(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\right)=1$	$u=1$
$x=0$	$\frac{u}{3}-\frac{v}{3}=0$	$v=u$
$y=0$	$\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}=0$	$v=-2u$

(6) denklemindeki dönüşümün Jakobiyeni

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

(1) denklemini uygulayarak, integrali hesaplarız:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 |J(u,v)|\,dv\,du$$

$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv\,du = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{v=-2u}^{v=u} du$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,du = \int_0^1 u^{7/2}\,du = \frac{2}{9}u^{9/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Üç Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Bölüm 15.6'daki silindirik ve küresel koordinat dönüşümleri, üç katlı integrallerdeki değişkenlerin değişimlerini, üç boyutlu bölgelerin dönüşümleri olarak resimleyen bir dönüşüm yönteminin özel durumlarıdır. Yöntem, şimdi iki yerine üç boyutta çalışmamızın dışında, iki katlı integrallerdeki yöntem gibidir.

uvw-uzayındaki bir G bölgesinin *xyz*-uzayındaki bir D bölgesine, Şekil 15.51'de önerildiği gibi,

$$x = g(u, v, w), \qquad y = h(u, v, w), \qquad z = k(u, v, w)$$

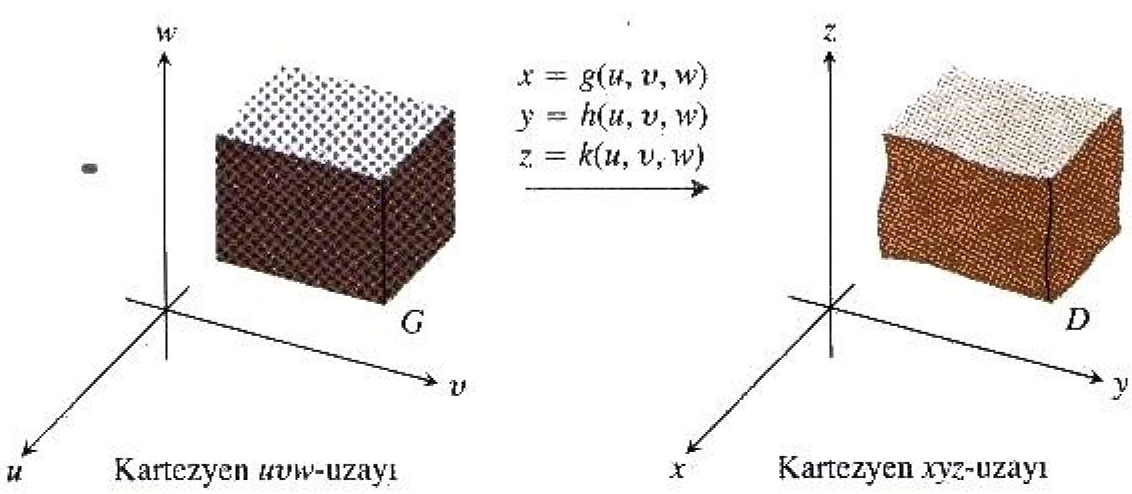
formundaki diferansiyellenebilir denklemlerle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayın. Bu durumda, D üzerinde tanımlı herhangi bir $F(x, y, z)$ fonksiyonu G üzerinde tanımlı bir

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

fonksiyonu olarak düşünülebilir. g, h ve k'nin birinci mertebe kısmi türevleri var ve sürekli iseler, $F(x, y, z)$'nin D üzerindeki integrali $H(u, v, w)$'nun G üzerindeki integraline

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(u,v,w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw \qquad (7)$$

denklemiyle bağlıdır.



ŞEKİL 15.51 $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ ve $z = k(u, v, w)$ denklemleri Kartezyen *xyz*-uzayının bir D bölgesindeki bir integrali Kartezyen *uvw*-uzayının bir G bölgesindeki bir integrale dönüştürmemizi sağlar.