Nümerik Analiz

1. Tek değişkenli denklemlerin nümerik çözümleri
2. Tek değişkenli denklemlerin MATLAB ile cozumu.
3. Lineer denklem sistemlerinin cozumu
4. Cok değişkenli lineer olmayan denklemlerin nümerik çözümleri
5. İnterpolasyon
6. Nümerik türev
7. İntegrallerin yaklaşık çözümleri ile ilgili metodlar ve hata analizleri,
8. Diferansiyel denklemler için nümerik metodlar

   Runge-Kutta metodu
9. Symbolik Matematik
10. Sınır-değer problemlerinin çözümleri

Dokuman sayfasi
http://eng.harran.edu.tr/~rtasaltin

Prof. Dr. Ramazan Taşaltın

Analitik çözüm

$x^2 - 7 = 0$

$x^2 = 7$

$x = \mp\sqrt{7}$

$x = \mp 2.6458$

Nümerik çözüm

$x^2 - 7 = 0$

$x = 2$ verelim

$2^2 - 7 = 4 - 7 = -3$

$x = 3$ verelim

$3^2 - 7 = 2$

$x = 2.5$ verelim

$2.5^2 - 7 = 6.25 - 7 = -0.75$

$x = 2.6$ verelim

$2.6^2 - 7 = -0.24$

$x = 2.7$ verelim

$2.7^2 - 7 = 0.29$

$x = 2.65$ verelim

$2.65^2 - 7 = 0.02$

$x^2 - 7 = 0$ denkleminin kökü yaklaşık olarak 2.65 dir

Analitik çözüm çok az denklemlerde vardır.

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{-3 \mp \sqrt{3^2 - 4 \times 2}}{2}$

$x = -2, \; x = -1$

$x^5 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$

Analitik çözüm yok

$x^3 - 8 = 0$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

$x^3 + 2x - 8 = 0$

Analitik çözüm Yok

$\sin x = 0{,}5$

$x = \arcsin 0{,}5$

$= 30°$

$\sin x = x + 0{,}1$

Analitik çözüm yok

$e^x = 5$

$\ln e^x = \ln 5$

$x = \ln 5 = 1{,}6094$

$e^x = x$

Analitik çözüm Yok

$\sin x = \cos x$

$x = ?$

iki tarafı cosx'e böl

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$

$tg\, x = 1$

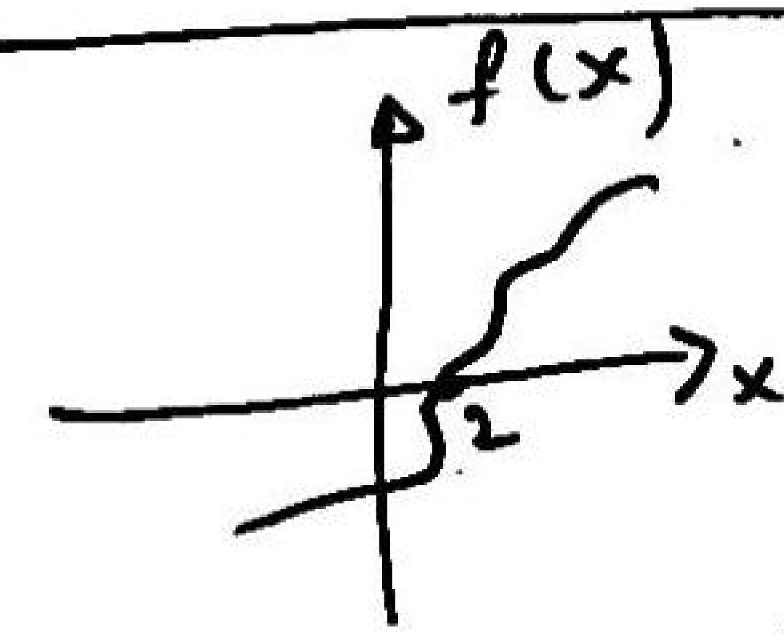
$x = 45^0$

$\sin x = \cos x + 0{,}2$

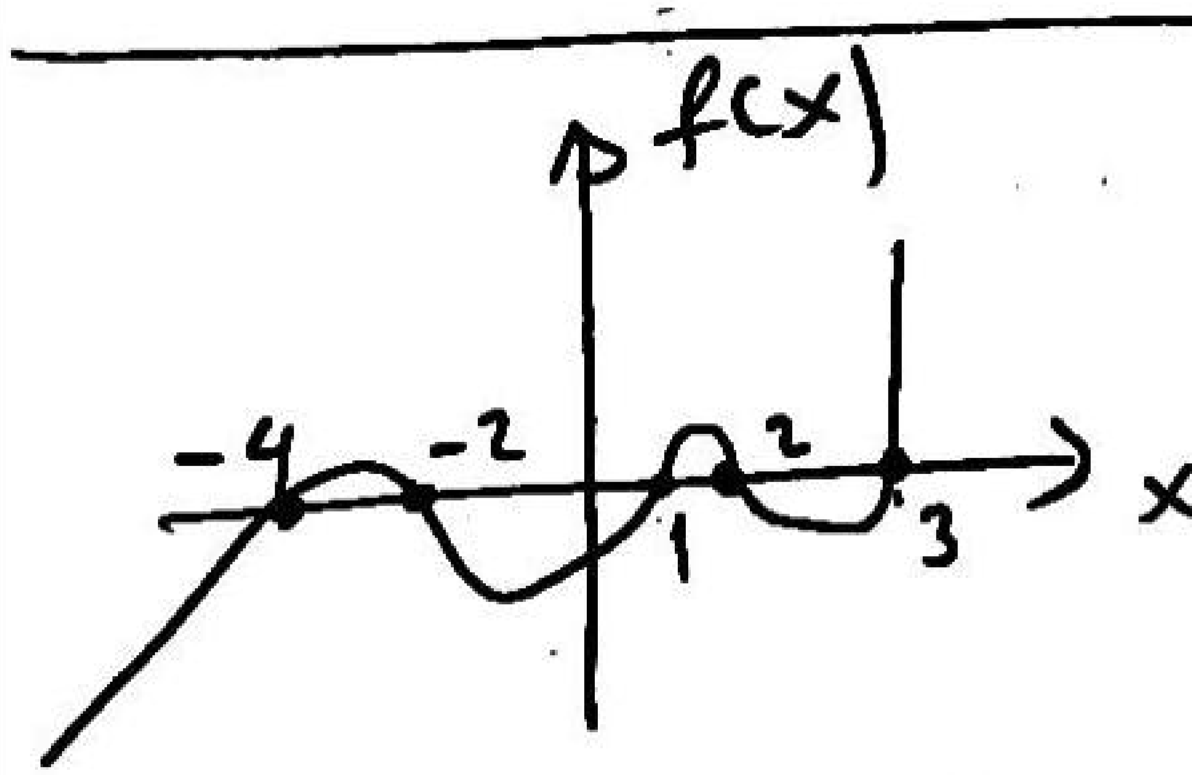
Analitik çözüm YOK

Mühendislikte ortaya çıkan denklemlerde Analitik çözüm hemen hemen hiç yoktur. Bu yüzden Numerik (Sayısal) çözüm kullanılır.

$f(x) = 0$ şartını sağlayan x değerlerine f(x) denkleminin kökü denir.



f(x) in x=2de bir kökü vardır.



f(x) in 5 tane kökü var.

$x = -4$

$x = -2$

$x = 1$

$x = 2$

$x = 3$

$x = f(x)$

Sayısal yöntemlerde $x = f(x)$ denklemi ortaya çıkar.

$x - f(x) = g(x)$

$g(x) = 0$ denkleminin kökleridir.

Yani $x = f(x)$ i sağlayan x değerleri

$g(x) = x - f(x) = 0$

denkleminin kökleri demektir.

$x = f(x)$ denkleminin kökleri $y = x$, $y = f(x)$ grafiklerinin kesim noktasıdır.

351) grafik ile

$g(x) = x - \cos(x) = 0$

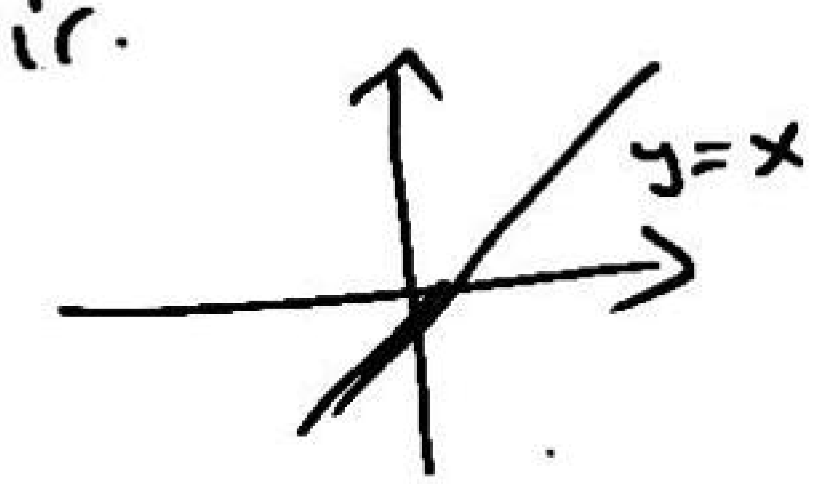
Köklerini bulun

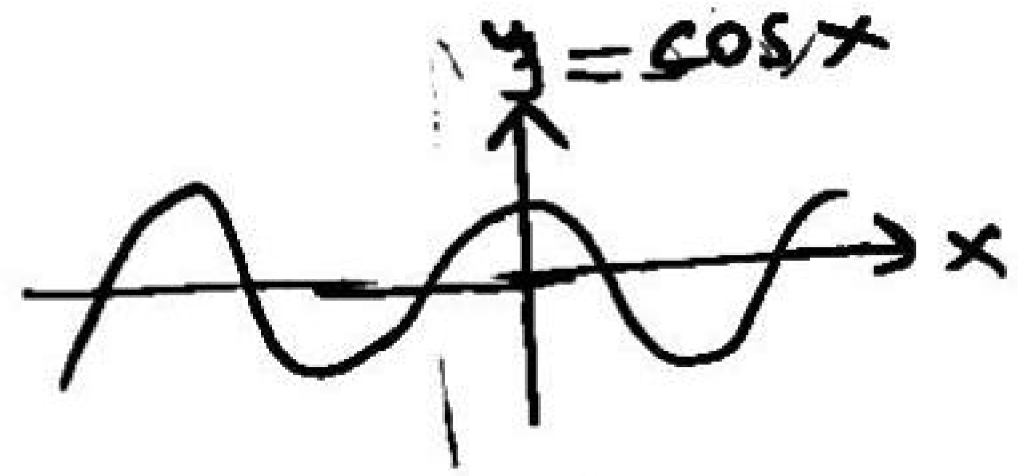
Cevap)

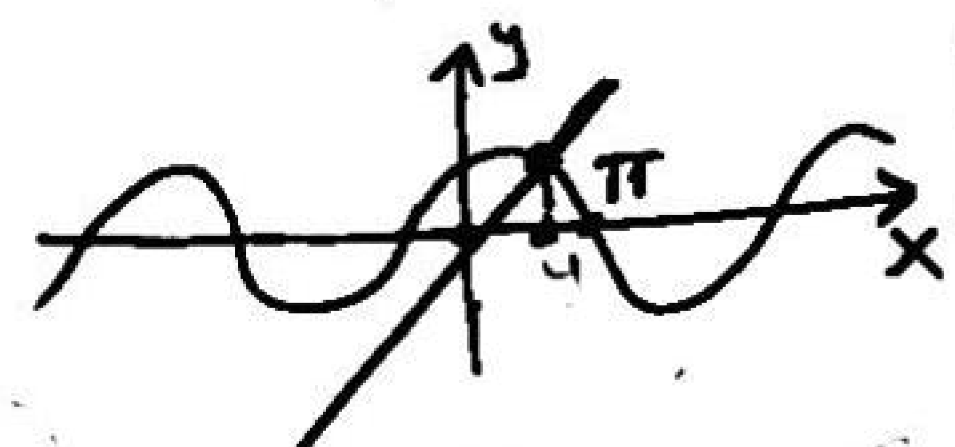
$y = x$ çizin

$y = \cos(x)$ çizin.

Kesim noktaları $g(x) = 0$ ın köklerini verir.





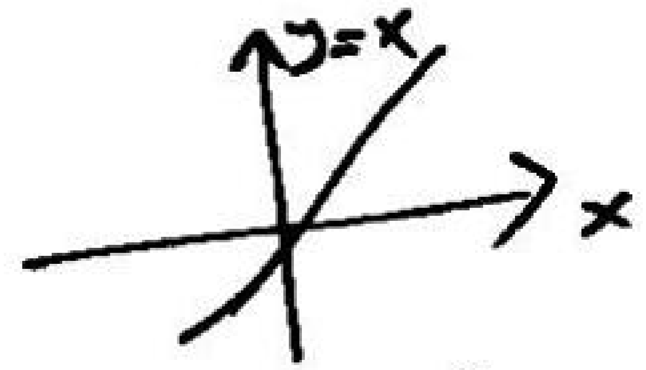


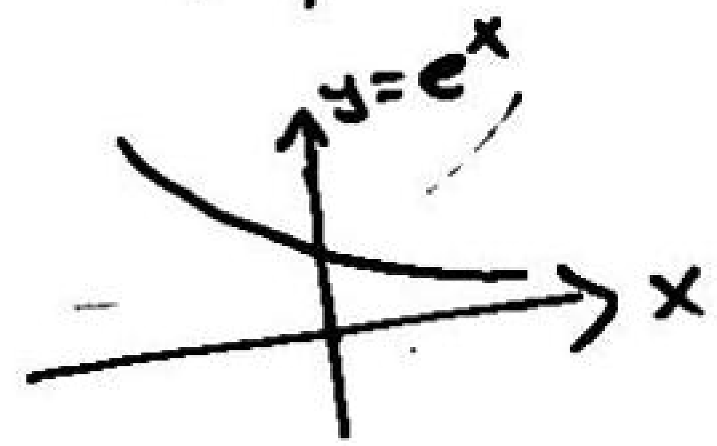
$0 < x < \pi$ arasında $x = \cos x$ veya $x - \cos x = 0$ denkleminin bir kökü vardır.

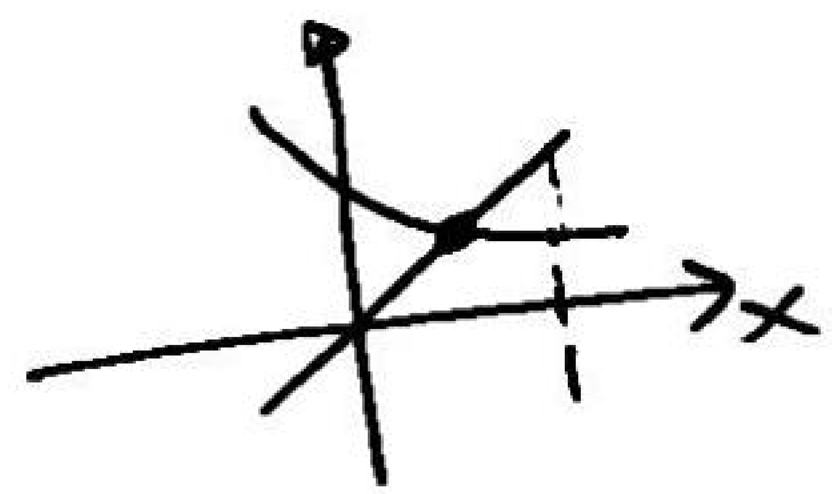
352)

$g(x) = x - e^{-x} = 0$

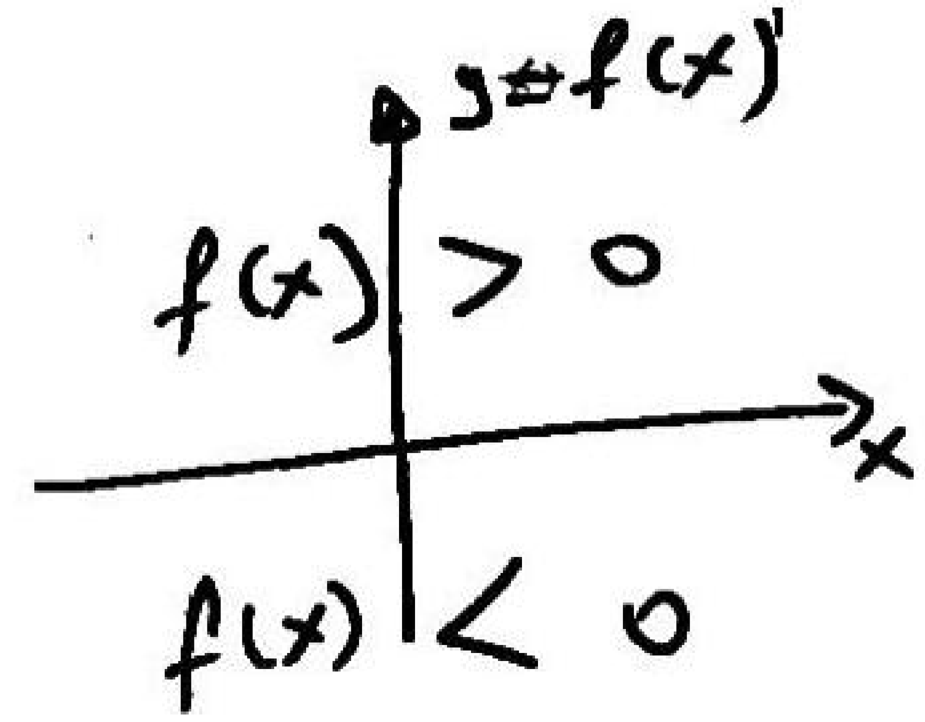
Köklerini bulun.







$0 < x < 1$ arasında $g(x) = x - e^{-x} = 0$ denkleminin bir kökü vardır.

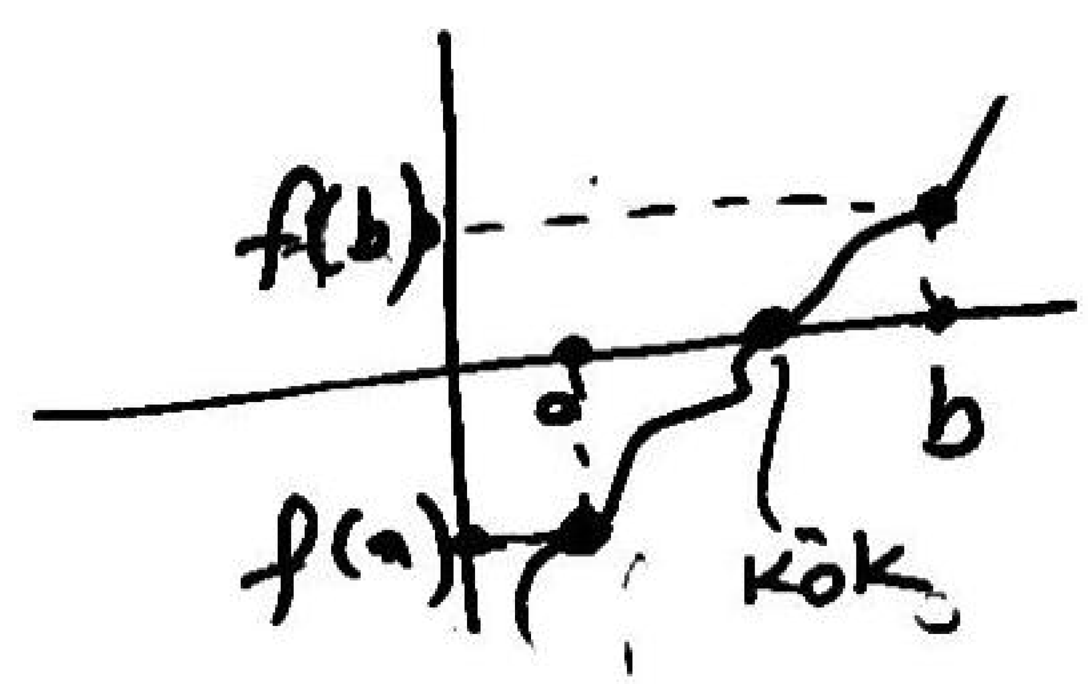


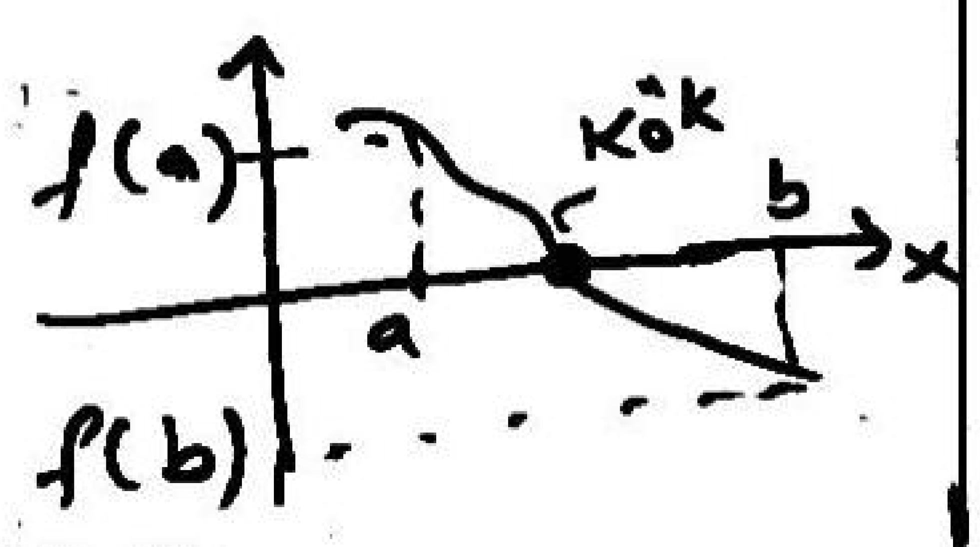
Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonu.

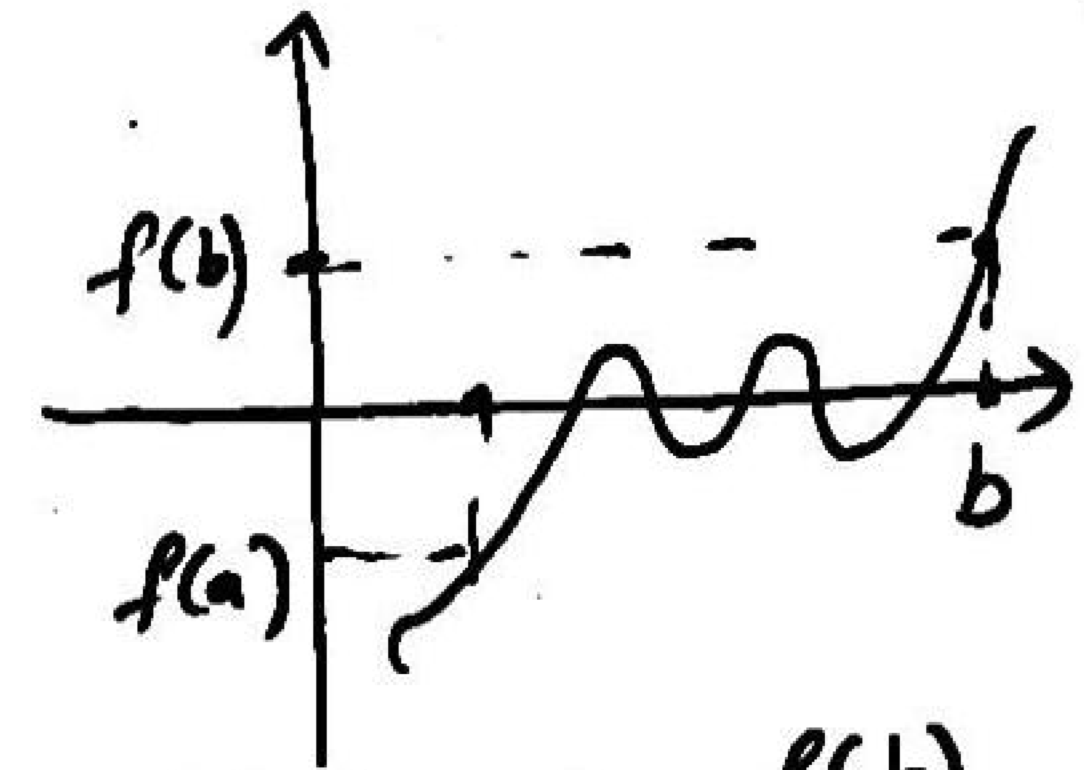
$x = a$ için $f(x) < 0$

$x = b$ için $f(x) > 0$

ise $a < x < b$ arasında $f(x) = 0$ denkleminin kökü mutlaka vardır. En az bir kök vardır. Birden fazla da kök olabilir.







$f(a)$ ve $f(b)$ zıt işaretli $a < x < b$ arasında mutlaka kök vardır. Burada birden fazla kök var.

341

$f(x) = x - \cos x = 0$

denkleminin $x=0$ ile $x=1$ arasında bir kökü var. Onu bulun.

Çözüm =

$x=0$ için $f(0) = 0 - \cos 0 = -1$

$x=1$ için $f(1) = 1 - \cos(1) = 1 - 0{,}5403 = 0{,}4597$

$x=0 \rightarrow f(0) = -1 < 0,$

$x=1 \rightarrow f(1) = 0{,}4597 > 0$

$f(0)$ ve $f(1)$ farklı işarette o halde arada mutlaka kök var.

Not: $f(a)$ ve $f(b)$ farklı işarette ise

$f(a)\, f(b) < 0$

$(-)(+) = -$

$(+)(-) = -$

$x=0$ ile $x=1$ arasında kök var fakat nerede olduğunu bilmiyoruz. En makul olanı $x = \frac{0+1}{2} = 0.5$ de kökü varsaymak.

$x=0.5$ için

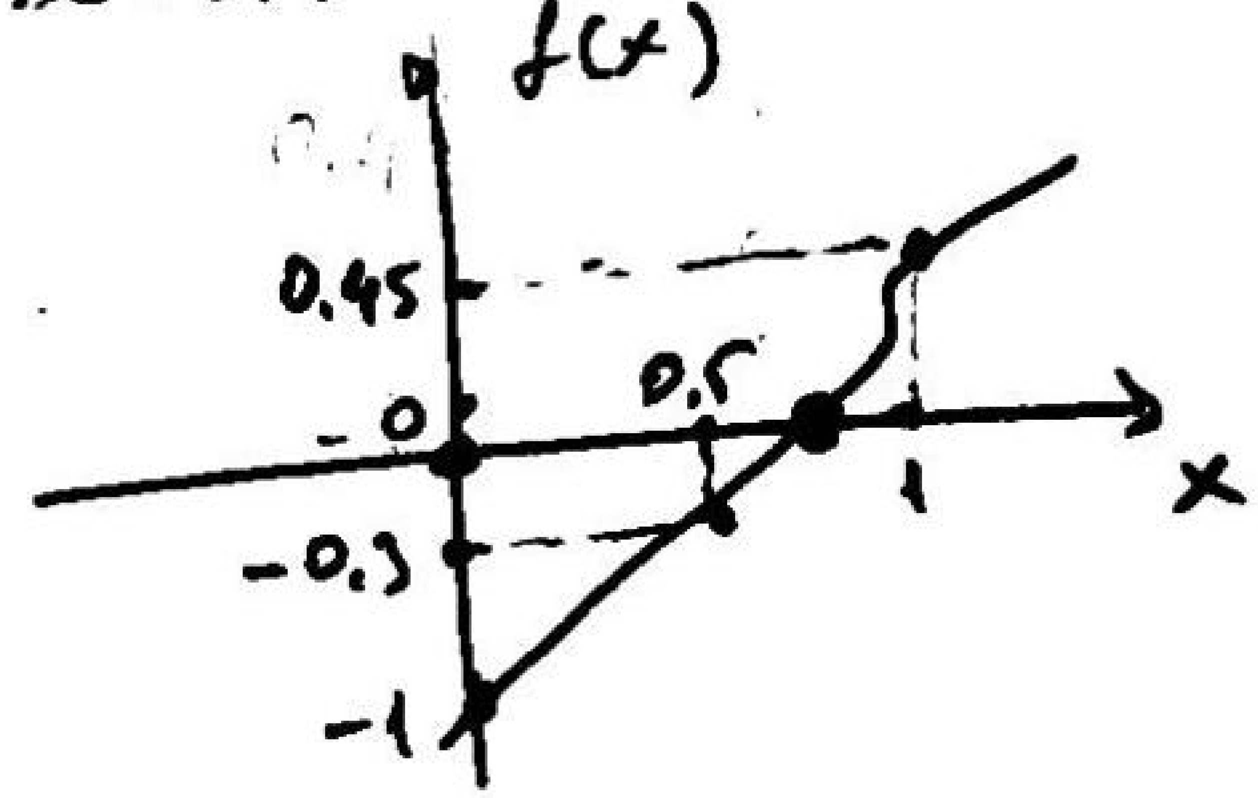
$f(0.5) = 0.5 - \cos(0.5)$

$= 0{,}5 - 0{,}8776$

$= -0{,}3776$

x	0	0.5	1
f(x)	−1	−0.377	0.4597

sonuç: Kök $x=0.5$ ile $x=1$ arasındadır.



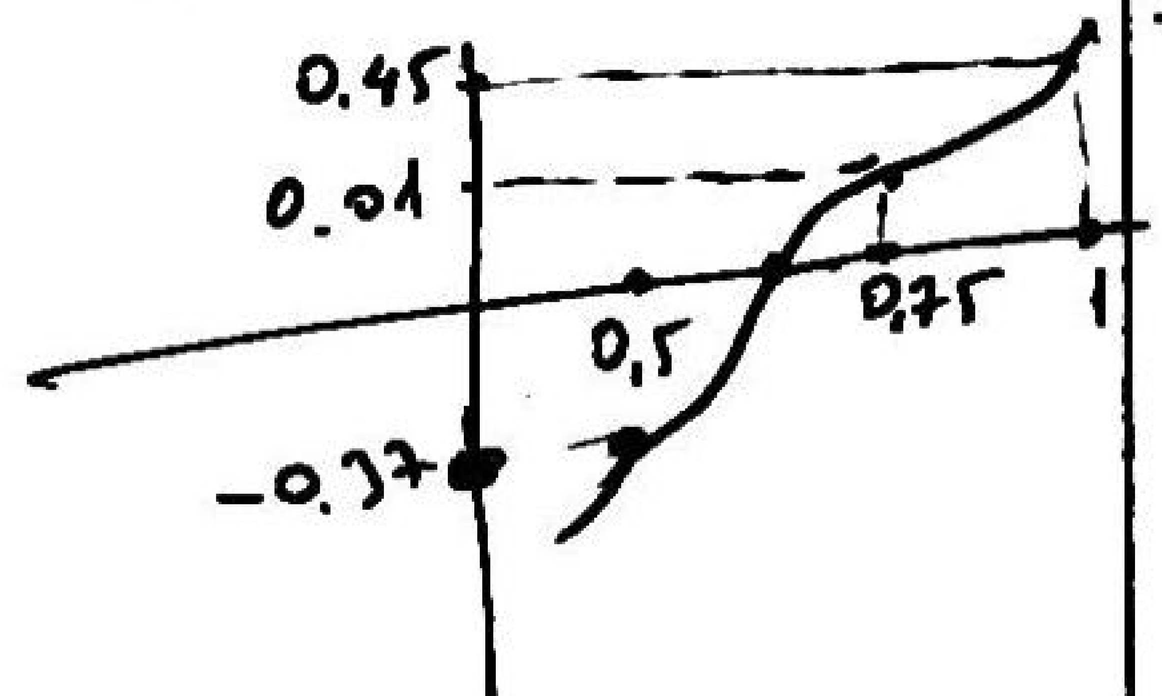
makul olan $x = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$

$f(0{,}75) = 0{,}75 - \cos(0{,}75)$

$= 0{,}75 - 0{,}7317$

$= 0{,}01$

x	0.5	0.75	1
f(x)	−0.37	0.01	0.45



Kök 0.5 ile 0.75 arasındadır.

$x = \frac{0.5+0.75}{2} = 0{,}625$

$f(0.625) = 0.625 - \cos(0.625)$

$= 0.625 - 0.8110$

$= -0.18$

x	0,5	0.625	0.75
f(x)	−0.37	−0.18	0.01

$x = \frac{0.625+0.75}{2} = 0{,}6875$

$f(0{,}6875) = 0{,}6875 - \cos(0{,}6875)$

$= -0{,}08$

x	0.625	0.6875	0.75
f(x)	−0.18	−0.08	0.01

$x = \frac{0.6875+0.75}{2} = 0.7188$

$f(0.7188) = -0.037$

⋮

$x = \frac{0.7390+0.7393}{2}$

$= 0.73915$

$f(0.73915) = 0.0001$

Kök $x = \underline{0.7391}$ dir

Burada bulduğumuz değerleri yazalım.

x	f(x)
0	-1
0.5	-0.776
0.625	-.0186
0.6875	-0.08
0.70	-0.06
0.7188	-0.0338
0.7390	-0.0001
0.7391	0.00002
0.7392	0.0002
0.7393	0.0004
0.75	0.0183

Eğer x = 0.6875 kök dersek -0.08 lik bir hata yapıyoruz.

x = 7188 kök dersek -0.03 lük bir hata yapıyoruz.

8

x = 0.7391 dersek hata 0.00002 olur.

Doğru rakam sayısı

x = 0.7 → 1 rakam

x = 0.73 → 2 "

x = 0.739 → 3 "

x = 0.739085133 → 9 rakam

x = 0.7 0.1 doğruluk ile doğru

x = 0.73 0.01 " " "

x = 0.739085 0.00000001 " "

doğruluk derecesi: gerçek değere yakınlığı ifade eder.

Yariya Bolme yontemi

[a b] araliginda $f(x)=0$ sartini saglayan x degerini bulun.

Ornek: $f(x)=-x^2-\cos(x)+2=0$ a=0.5, b=2

Cozum:

Kontrol:

$$f(a)=f(0.5)=-0.5^2-\cos(0.5)+2=-0.25-0.8766+2$$
$$=0.8724$$

$$f(b)=f(2)=-2^2-\cos(2)+2=-4+0.4161+2=-1.5839$$

f(a) ve f(b) farkli isarette. f(a) pozitif f(b) negatif o halde arada kesinlikle bir kok var.

Algorithm:

Start:

$$mid=\frac{a+b}{2} \quad \text{ve} \quad f(mid)=-mid^2-\cos(mid)+2$$

If $f(mid)f(a)>0$ then a=mid, else b=mid.

Goto start.

$f(mid)f(a)>0$ olmasi $f(mid)$ ve $f(a)$ degerleri ayni isarette demektir. Ya her ikisi de pozitif ya her ikisi de negatifdir.

$$mid=\frac{0.5+2}{2}=1.25$$

$$f(mid)=f(1.25)=-1.25^2-\cos(1.25)+2$$
$$=-1.5625-0.3153+2$$
$$=0.12222$$

Test:

$f(mid)=f(1.25)=0.1222>0$ and

$f(a)=f(0.5)=0.8724>0$

$f(mid)$ and $f(a)$ has the same sign so

a=mid=1.25

Algorithmayi tekrar uygula: a=1.25 b=2

$$mid=\frac{1.25+2}{2}=1.625$$

$$f(mid)=f(1.625)=-1.625^2-\cos(1.625)+2$$
$$=-2.64-0.0542+2$$
$$=-0.5864$$

$f(mid)=f(1.625)=-0.5864<0$

$f(a)=f(1.25)=0.12222>0$

$f(mid)$ ve $f(a)$ zit isarette

b=mid=1.625

Algorithmayi tekrar uygula: a=1.25 b=1.625

$$mid=\frac{1.25+1.625}{2}=1.4375$$

$f(mid)=f(1.4375)=-0.1993$

$f(mid)$ ve $f(a)$ zit isarette

b=mid=1.4375

Algorithmayi tekrar uygula: a=1.25 b=1.4375

	a	b	mid
1	0.5	2	1.25
2	1.25	2	1.625
3	1.25	1.625	1.4375
4	1.25	1.4375	1. 34375
5	1.25	1. 34375	1. 296875
6	1. 296875	1.34375	1. 3203125
7	1. 3203125	1.34375	1. 3203125
8	1. 3203125	1.3320312	1. .3261718
9	1.3203125	1.3261718	1. 3232421
10	1. 3232421	1.3261718	1. 3247070
11	1. 3247070	1.3261718	1. 3254394
12	1.3254394	1.3261718	1.3258056
.....	...	....	...
40	1.325622	1.325622	1.3256225

	f(mid)	f(a)	b-a
1	0.1222	0.8724	1.5
2	-0.5864	0.1222	0.75
3	-0.1993	0.1222	0.375
4	-0.0308	0.1222	0.1875
5	0.0476	0.1222	0.09375
6	0.0089	0.0476	0.046875
7	-0.0108	0.0089	0.0234375
8	-0.0009	0.0089	0.0117187
9	0.0040	0.0089	0.0058593
10	0.0015	0.0040	0.0029297
11	0.0003	0.0015	0.0014648
12	-0.0003	0.0003	0.0007324
.....	...	...	....
40	0.0000000	0.000000	0.0000000

4

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

4.1 GİRİŞ

Matematikte veya hidrolik, dinamik, mekanik, elektrik gibi mühendisliğin çeşitli alanlarında çok sık karşılaşılan denklemlerden biri de lineer olmayan denklem veya denklem sistemleridir. İki veya daha yüksek dereceden polinomlar veya trigonometrik, logaritmik, üstel gibi lineer olmayan terimler içeren denklemler *lineer olmayan* veya *nonlineer* denklemlerdir. Grafiği çizildiğinde bir eğri elde edilen bu tip denklemler lineer terimler de içerebilir. Örneğin;

$$x^3 + 2.x^2 - 5.Sin\,x = 0$$

veya

$$x - tan\,x = e^{-x}$$

denklemleri tek bilinmeyenli lineer olmayan denklemlerdir. Genelde nonlineer denklemler $f(x) = 0$ kapalı formunda yazılır. Karşılaşılan denklemlerin çoğu tek değişkenli olmakla beraber çok değişkenli $f(x_1, x_2, x_3,..) = 0$ formundaki denklemlerin çözümü de söz konusu olabilir. n değişkenli nonlineer denklem çözümü için n adet denklem verilmelidir.

Lineer olmayan bir denklemin çözümü, köklerinin bulunması veya bir başka ifadeyle denklemi sağlayan x değerinin veya değerlerinin bulunması işlemidir. Tek değişkenli bir fonksiyon için bu değerler aynı zamanda, eğrinin x eksenini kestiği noktalardır. Bu bakımdan lineer denklemlerin çözümü ile farklılıklar gösterir. Mesela lineer bağımsız denklem sistemlerinin tek çözümü söz konusu iken nonlineer denklemler için bu söylenemez. Nonlineer denklemlerin birden fazla kökleri, katlı kökleri veya karmaşık kökleri olabilir. Lineer olmayan denklem veya denklem takımlarının çözümü (köklerinin bulunması) için çoğu zaman analitik yöntem mevcut değildir. Fonksiyonun grafiğinin çizilmesi ile kökler yaklaşık belirlenebilirse de hassas bir hesap için çeşitli sayısal analiz yöntemlerine ihtiyaç duyulur.

4.2 TEK DEĞİŞKENLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

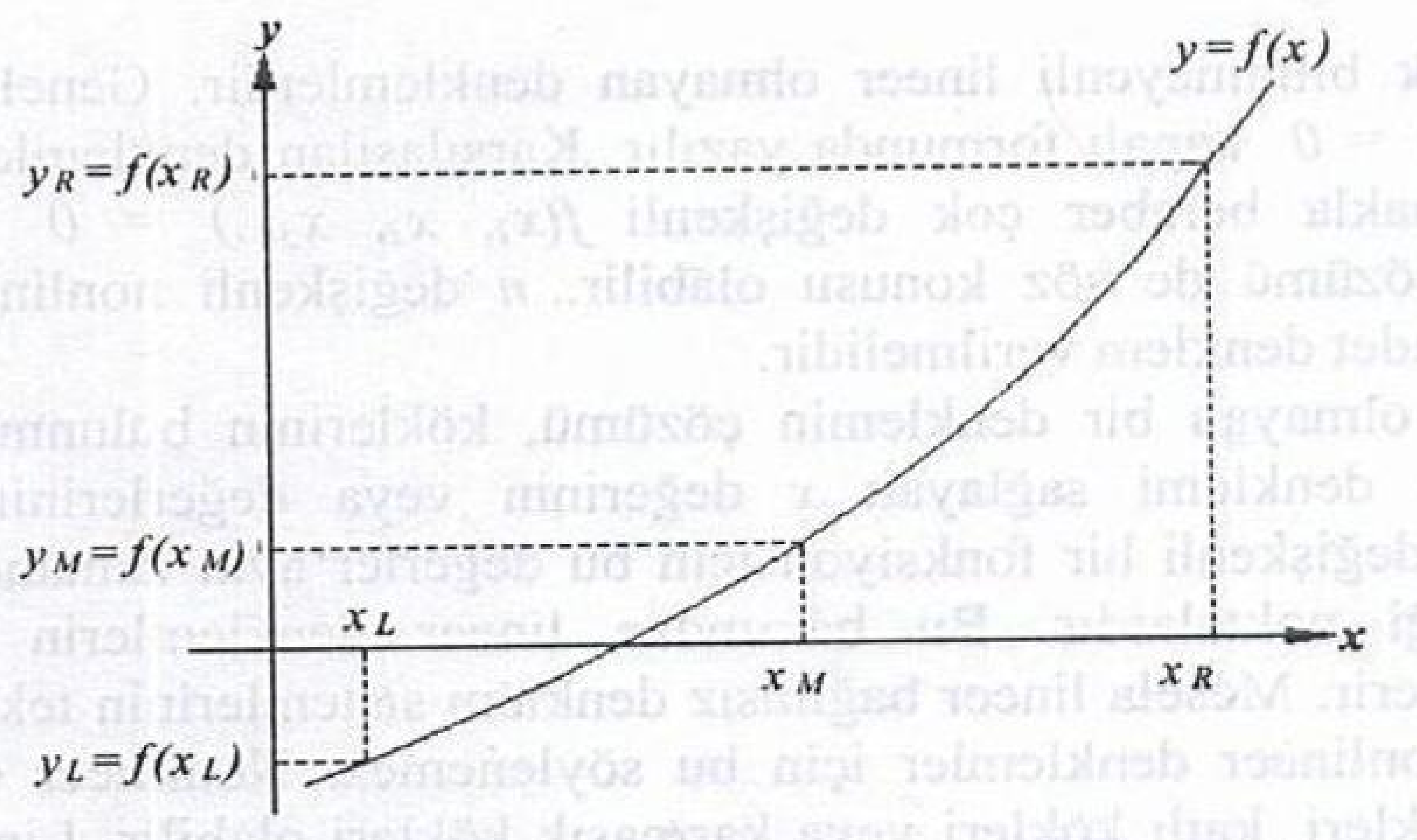
Tek değişkenli $f(x) = 0$ denklemini çözmek için de değişik yöntemler kullanılmaktadır. Bunlar iteratif yöntemler olup kökler için tahmini değerlerin alınmasını gerektirir. Bu yöntemlerin bir kısmı, nonlineer denklemin yerine lineer bir denklem kabul edip çözüme ulaşma esasına dayanır. Bu bölümde, yaygın olarak kullanılan

1. Yarıya Bölme
2. Lineer İnterpolasyon (Regula-Falsi)
3. Basit İterasyon
4. Newton-Raphson
5. Secant

yöntemleri üzerinde durulacaktır.

4.2.1 Yarıya Bölme Yöntemi

Verilen bir $f(x)=0$ denklemi $[x_L,x_R]$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. x_L ve x_R değerlerinin verilen fonksiyonda yazılması ile elde edilen $f(x_R)$ ve $f(x_L)$ ters işaretli ise, fonksiyon $[x_L, x_R]$ aralığında x eksenini kesiyor demek olur ki söz konusu aralıkta en az bir kökün var olduğunu gösterir (Şekil 4.1). Yarıya Bölme Yöntemi, bu aralığı ard arda ikiye bölerek kök değerine yaklaşma esasına dayanır. Dolayısıyla yöntemin uygulanmasında izlenecek yol aşağıdaki gibi özetlenebilir.



Şekil 4.1 yarıya bölme yönteminin grafik gösterimi

1-) Başlangıç için x_L ve x_R değerleri seçilir ve bunlar fonksiyonda yerine yazılır.

2-) $y_L \cdot y_R < 0$ ise bu aralıkta kök var demektir. Bu durumda aralık ikiye bölünür.

$$x_M = \frac{x_L + x_R}{2} \qquad (4.1)$$

3-) x_M, fonksiyonda yazılarak y_M bulunur. Eğer;

a) $|y_M| \leq$ TD ise aranan kök x_M 'dir. İşlem sonlandırılır.
b) $y_L \cdot y_M < 0$ ise kök x_L ve x_M arasındadır. Bu durumda

$$x_R \leftarrow x_M \text{ ve } y_R \leftarrow y_M$$

alınarak 2. adımdan itibaren işlemler tekrar edilir.

c) $y_L \cdot y_M > 0$ ise kök x_R ve x_M arasındadır. Bu durumda;

$$x_L \leftarrow x_M \text{ ve } y_L \leftarrow y_M$$

alınarak 2. adımdan itibaren işlem tekrar edilir.

Aralığı yarıya bölme işlemini sonlandırmak için iki kriter kullanılabilir. $|y_M| \leq$ TD1 veya $| x_L - x_R | \leq$ TD2. 3-a adımında bu kriterlerden biri veya her ikisi de kullanılabilir. Bu şartlardan birincisi ve/veya ikincisi sağlanıyorsa yarıya bölme işlemine son verilir. Aranan kök x_M dir.

Bu bölümde nümerik yaklaşımın en temel uğraşlarından birisi olan **kök bulma problemi** üzerinde durulacaktır. Bu süreçte verilen bir f fonksiyonu için $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan ve denklemin **kökü, çözümü** ya da **sıfır yeri** olarak adlandırılan reel x sayılarına çeşitli metodlar kullanılarak yaklaşımlarda bulunulacaktır.

2.1 İkiye Bölme Metodu

Kök bulma problemi incelenirken göz önüne alınacak ilk teknik temel olarak Ara Değer Teoremi kullanılarak elde edilen **İkiye Bölme Metodu**dur.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerinin işaretleri farklı ise Ara Değer Teoremi'ne göre (a, b) aralığında $f(p) = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir p sayısı vardır. Bu prosedür her ne kadar verilen aralıkta birden fazla kök olması durumunda da kullanışlı olsa da biz kolaylık sağlaması bakımından (a, b) aralığında f fonksiyonunun tek türlü belirli bir kökü olduğunu varsayacağız.

İkiye bölme yöntemi $[a, b]$ aralığını ikiye bölmek sureti ile parçalayarak her bir adımda kökün yer aldığı alt aralığın tespit edilmesi olgusuna dayanır.

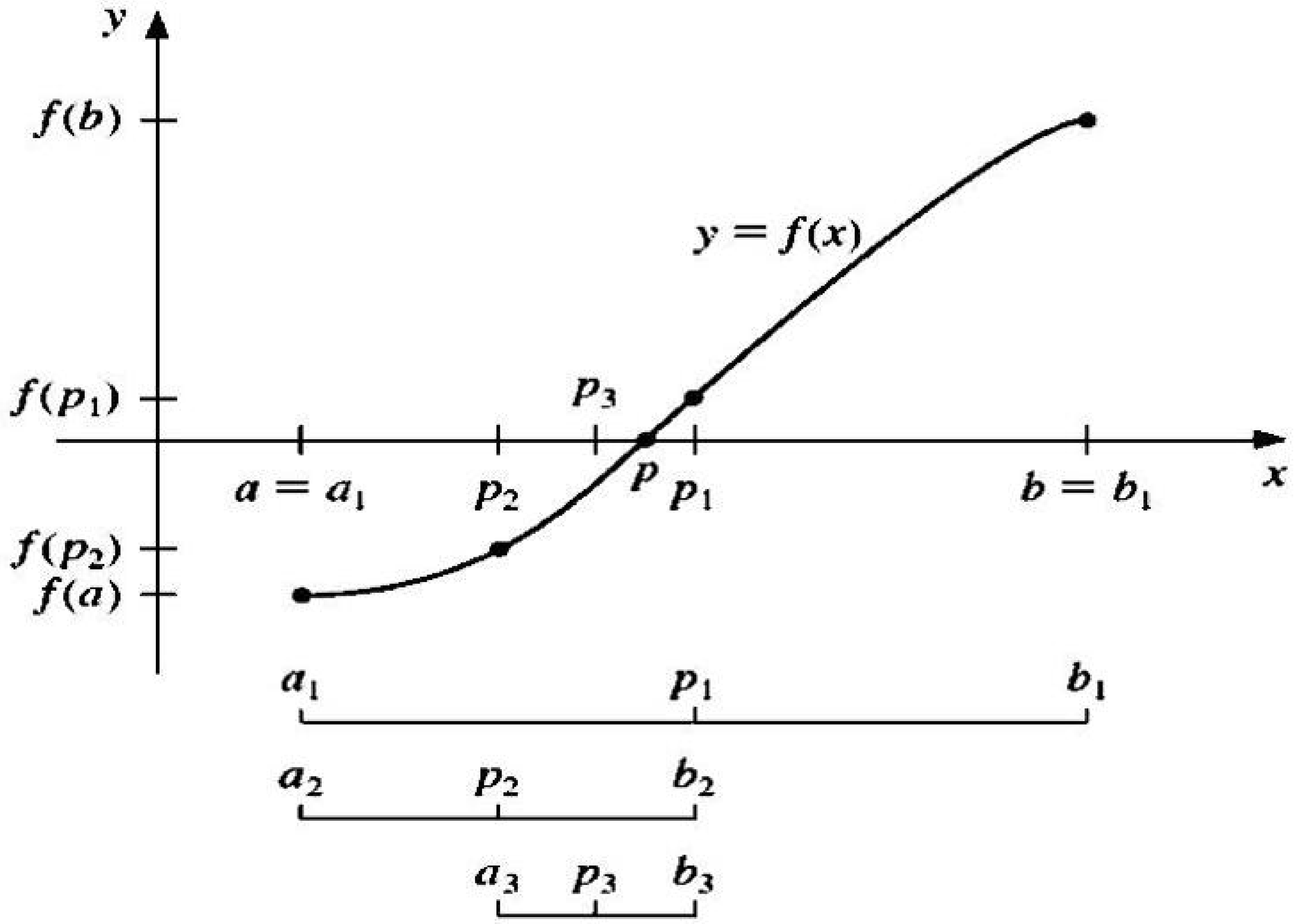
$a_1 = a$, $b_1 = b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının orta noktası olan

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

noktası göz önüne alınsın:

- Eğer $f(p_1) = 0$ ise $p = p_1$ verilen denklemin köküdür.
- Eğer $f(p_1) \neq 0$ ise $f(p_1)$ değeri ya $f(a_1)$ ya da $f(b_1)$ ile aynı işaretlidir.
  - Eğer $f(p_1)$ ile $f(a_1)$ aynı işaretli ise $p \in (p_1, b_1)$ dir. Bu durumda $a_2 = p_1$ ve $b_2 = b_1$ alınır.
  - Eğer $f(p_1)$ ile $f(a_1)$ farklı işaretli ise $p \in (a_1, p_1)$ dir. Bu durumda $a_2 = a_1$ ve $b_2 = p_1$ alınır.

Daha sonra verilen denklemin bir kökünü barındırdığı bilinen $[a_2, b_2]$ aralığının orta noktası yukarıda anlatıldığı şekilde tespit edilip aynı presedür uygulanarak kök değeri verilen bir ε hassaslık değeri ile belirlenir (Bkz Şekil 2.1).



Şekil 2.1: İkiye bölme metodu

Yukarıda anlatılan prosedür sonlu sayıda tekrarlandıktan sonra bulunan değer gerçek kök değerine bir yaklaşımdır. Dolayısıyla durma kriteri dediğimiz bir tolerans değerinin sağlandığının, yani yapılan yaklaşımın istediğimiz ε hassaslığında olduğunun kontrol edilmesi gerekir. Örneğin, bir ε değeri verildiğinde $p_1, p_2, \cdots, p_k$ her bir adımda kök değerine yapılan yaklaşımlar olmak üzere $n = 1, \cdots, k$ için

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon, \tag{2.1}$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \ p_n \neq 0 \tag{2.2}$$

veya

$$|f(p_n)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

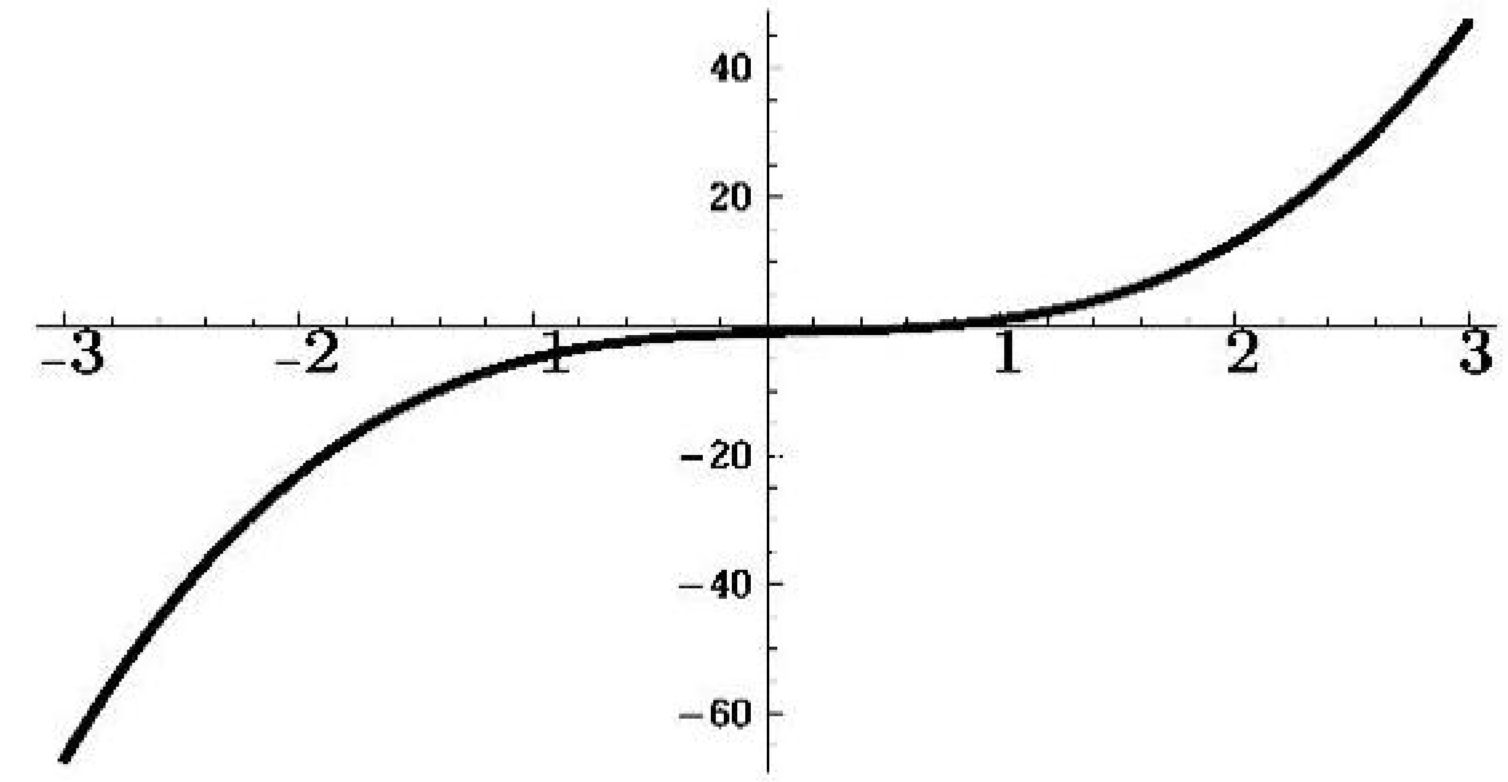
eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında yapılan yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilebilir. Bununla birlikte yukarıda verilen durma kriterlerinin kullanımında bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır: Örneğin, öyle $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri vardır ki $p_n - p_{n-1}$ farkının sıfıra yakınsamasına karşın dizinin kendisi ıraksaktır. Diğer tarafta, $f(p_n)$ değeri sıfıra çok yakınken p_n ifadesi verilen aralıktaki gerçek kök değeri p'den çok farklı olabilir. Eğer f ya da p hakkında herhangi bir bilgi verilmemişse (2.2) eşitsizliğini kullanmak oranın bağıl hatayı test etmeye yakın sonuçlar vereceğinden en uygun durma kriteridir.

İkiye bölme algoritması kullanılarak bir yaklaşım yapılmak istendiğinde öncelikle $f(a)f(b) < 0$ eşitsizliğini sağlayacak $[a, b]$ aralığının tespit edilmesi gerekir. Her bir adımda, bulunan bu aralık ikiye bölünerek kökü barındıran alt aralık tayin edildiğinden, $[a, b]$ başlangıç aralığının küçük olması avantajlı bir

durumdur. Örneğin $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ fonksiyonu göz önüne alınsın (Bkz. Şekil 2.2).

$$f(-4)f(4) < 0 \text{ ve } f(0)f(1) < 0$$

olmasına karşın f fonksiyonunun bir kökünü barındıran $[a, b]$ aralığını $[-4, 4]$ yerine $[0, 1]$ şeklinde almak işlem yükü açısından daha mantıklıdır.



Şekil 2.2: $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ fonksiyonunun grafiği

Aşağıdaki örnek ikiye bölme metodunun ne şekilde işletildiğine dair bir uygulama olarak verilmektedir. Bu örnekte bağıl hata sınırının 0.0001'den küçük olduğu bir yaklaşım yapılmakta ve bu yaklaşımı elde etmek için

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < 10^{-4}$$

eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakılmaktadır.

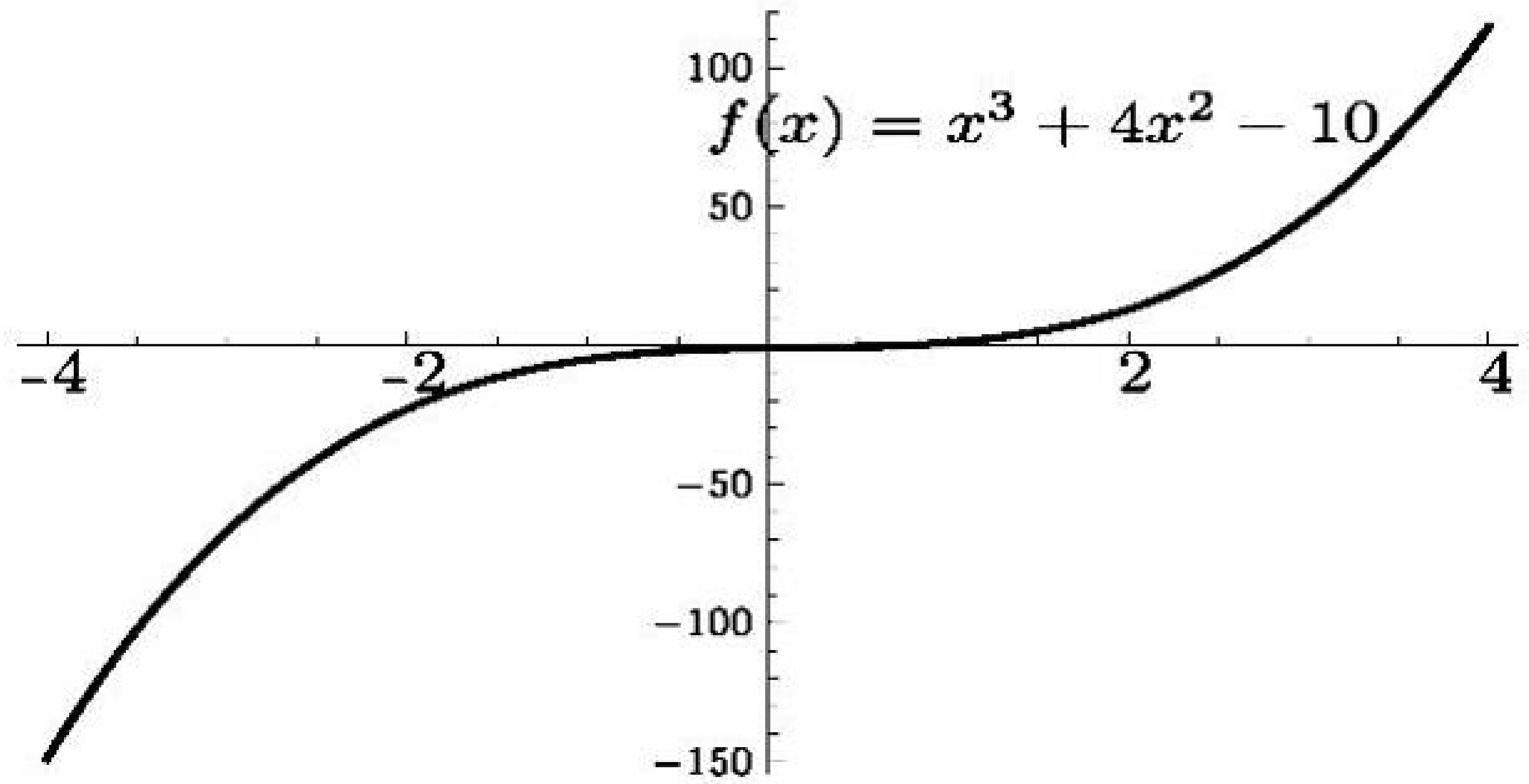
Örnek 2.1.1. *$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz ve ikiye bölme metodunu kullanarak bu aralıktaki köke en az 10^{-4} hassaslıkla bir yaklaşımda bulununuz.*

Çözüm. Sürekli f fonksiyonu için $f(1) = -5 < 0$ ve $f(2) = 14 > 0$ olduğundan Teorem 1.1.8 ile verilen Ara Değer Teoremi'ne göre sürekli $f(x)$ fonksiyonunun verilen aralıkta en az bir kökü vardır.

İkiye bölme metodunun ilk adımında $[1, 2]$ aralığının orta noktası 1.5 değeri göz önüne alınır. $f(1.5) = 2.375 > 0$ olduğundan kökün $[1, 1.5]$ aralığında yer aldığı sonucu elde edilir. Dolayısıyla yeni aralığımız $[1, 1.5]$ olarak tespit edilir. Bu aralığın orta noktası 1.375 değeri için $f(1.375) = 0.16211 > 0$ olduğundan verilen denkleme ait kökün $[1, 1.375]$ aralığında yer aldığı sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde hareket ederek aşağıdaki tablo elde edilir:

n	a_n	p_n	b_n	$f(p_n)$
1	1.0	1.5	2.0	2.375
2	1.0	1.25	1.5	−1.796875
3	1.25	1.375	1.5	0.162109375
4	1.25	1.3125	1.375	−0.8483886719
5	1.3125	1.34375	1.375	−0.350982666
6	1.34375	1.359375	1.375	−0.09640884399
7	1.359375	1.3671875	1.375	0.03235578537
8	1.359375	1.36328125	1.3671875	−0.03214997053
9	1.36328125	1.365234375	1.3671875	0.00007202476263
10	1.36328125	1.364257813	1.365234375	−0.01604669075
11	1.364257813	1.364746094	1.365234375	−0.007989262813
12	1.364746094	1.364990234	1.365234375	−0.003959101523
13	1.364990234	1.365112305	1.365234375	−0.00194365901

Şekil 2.3'de $f(x)$ fonksiyonunun x eksenini kestiği nokta, yani sıfır yeri gösterilmektedir.



Şekil 2.3: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonun grafiği

Tablodan görüldüğü üzere 13 iterasyon sonucunda p köküne bir yaklaşım **1.365112305** olarak elde edilmiştir. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata için bir sınır

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan $|a_{14}| < |p|$ olduğundan istenen durma kriteri kullanılarak

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} < \frac{0.000122070}{1.365112305} = 0.8942121432 \times 10^{-4}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre yapılan yaklaşımın hassaslığının en az 10^{-4} olduğu görülür. Aslında dokuz ondalık basamak ile aranan kökün gerçek değeri $p =$ 1.365230013'tür. Bu durumda p_9 yaklaşımı p_{13}'den daha iyi bir yaklaşımdır.

Bu olgu $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$ olmasından sezilmekle birlikte gerçek kök değerinin ne olduğu bilinmeden kesin bir yargıya varmak doğru olmaz.

İkiye bölme metodu konsept olarak her ne kadar kolay anlaşılır olsa da önemli dezavantajları vardır. $|p - p_n|$ farkının çok küçük olmasını sağlayacak n iterasyon sayısı kimi zaman çok büyük bir sayı olabilir. Buna göre gerçek kök değerine yakınsaması yavaştır. Fakat, metot kesinlikle kök değerine yakınsar. Yani, eğer verilen fonksiyon sürekli ise bu metot kullanılarak sıfır yerine bir yaklaşımda bulunmak her zaman mümkündür. Dolayısıyla yakınsaması daha hızlı metotlara geçmeden önce ikiye bölme metodunu incelemek bir başlangıç olarak önemlidir.

Örnek 2.1.2. İkiye bölme metodunu kullanarak $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla $\sqrt{3}$ değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm. Öncelikte metot verilen bir fonksiyonun köklerinin bulunması için kullanıldığından kökü $\sqrt{3}$ olan bir fonksiyon tanımlamak gerekir. Tüm olası seçimler içerisinde söz konusu fonksiyonu kolaylık sağlaması bakımından $f(x) = x^2 - 3$ olarak tanımlayıp pozitif kökünü göz önüne alalım.

$$f(a) = f(1.7) = -0.11 < 0 \text{ ve } f(b) = f(1.8) = 0.24 > 0$$

olduğundan Ara Değer Teoremi'ne göre $[a, b] = [1.7, 1.8]$ aralığında $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun bir kökü vardır. Diğer bir değişle $\sqrt{3}$ değeri $(1.7, 1.8)$ aralığında yer alır. Buna göre aşağıdaki tablo elde edilir:

n	a_n	p_n	b_n	$f(p_n)$
1	1.7	1.75	1.8	0.625×10^{-1}
2	1.7	1.725	1.75	-0.24375×10^{-1}
3	1.725	1.7375	1.75	0.1890625×10^{-1}
4	1.725	1.73125	1.7375	$-0.27734375 \times 10^{-2}$
5	1.73125	1.734375	1.7375	$0.8056640625 \times 10^{-2}$
6	1.73125	1.7328125	1.734375	$0.2639160156 \times 10^{-1}$
7	1.73125	1.73203125	1.7328125	$-0.6774902344 \times 10^{-4}$

Dolayısıyla $|f(p_7)| = 0.6774902344 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ olduğundan verilen hassaslık değeri ile aranan kök $p \approx p_7 = 1.73203125$ şeklinde elde edilir.

Örnek 2.1.3. **(a)** $f(x) = e^{-x} - \sin x$ fonksiyonunun kökünü barındıran bir aralık tespit ediniz.

(b) Yukarıda tespit ettiğiniz aralıktaki köke ikiye bölme metodunun ilk 4 adımını gerçekleyerek bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

(a) Her yerde sürekli $f(x)$ fonksiyonu Ara Değer Teoremi'nin koşulunu sağladığından reel sayılar içinde $a < b$ eşitsizliğini sağlayan bir a, b sayı çiftini

$f(a)f(b) < 0$ ifadesini gerçekleyecek şekilde bulmak yeterlidir. Burada $a = 0$ ve $b = 1$ olarak göz önüne alınırsa

$$f(a) = f(0) = e^0 - \sin 0 = 1 > 0$$

ve

$$f(b) = f(1) = e^{-1} - \sin 1 = -0.47359 < 0$$

olduğundan $f(0)f(1) < 0$ koşulu sağlanır. Bu ise Ara Değer Teoremi'ne göre $[0, 1]$ aralığında $f(x) = e^{-x} - \sin x$ fonksiyonunun bir kökünün olduğu anlamına gelir.

(b)

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	0	1	0.5	0.12711
2	0.5	1	0.75	−0.20927
3	0.5	0.75	0.625	−0.049836
4	0.5	0.625	0.5625	0.036480

Buna göre aranan kök 10^{-1} hassaslık ile $p \approx p_4 = 0.5625$ olarak bulunur.

Teorem 2.1.4. *$f \in C[a, b]$ ve $f(a)f(b) < 0$ olsun. Bu durumda ikiye bölme metodu ile elde edilen $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonunun verilen aralıktaki p köküne yakınsar ve $n \geq 1$ için*

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Her $n \geq 1$ için $p \in (a_n, b_n)$ ve

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$$

dır. Ayrıca, $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ olduğundan

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^n}$$

elde edilir. □

İkiye bölme metodunda

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

olduğundan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p köküne $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ hızında yakınsar. Yani

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

dır.

$x = f_i(x)$ in çözümü

231

$x = \cos(x)$

Başlangıç değerini gir

$x = 0$

$x = \cos(0) = 1$

$x = \cos(1) = 0.5403$

$x = \cos(0.5403) = 0.85$

$x = \cos(0.8576) = 0.6543$

$x = \cos(0.6543) = 0.7935$

$x = \cos(0.7935) = 0.7014$

$x =$

$= 0.7392$

$x = \cos(0.7392) = 0.7390$

$x = \cos(0.7390) = 0.7391$

$x = \cos(0.7391) = 0.7391$

aynı

$x = \cos x$

aynı

o halde çözüm $x = 0.7391$

232

$x = e^{-x}$ in çözümü

Başlangıç değer $x = 0$ al

$x = e^{-0} = 1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.71} = 0.3679$

$x = e^{-0.3679} = 0.6922$

$x = e^{-0.6922} = 0.5005$

$x = e^{-0.5005} = 0.6062$

$x = e^{-0.5669} = 0.5673$

$x = e^{-0.5673} = 0.5671$

$x = e^{-0.5671} = 0.5672$

$x = e^{-0.5672} = 0.5672$

$x = e^{-0.5672} = 0.5672$

aynı

o halde çözüm

$x = 0.5672$

Note: problem verilirken
$x - \cos x = 0$ kökünü bul
$x - e^{-x} = 0$ kökünü bul
şeklinde verilir.

261

$$x - \frac{1}{4} e^{x} = 0$$

denklemini çözün.

Başlangıç değeri $x=0$

$$x = \frac{1}{4} e^{x}$$

$$x = \frac{1}{4} e^{0} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 1.2840 = 0.3210$$

$$x = \frac{1}{4} e^{0.3210} = 0.3446$$

$$x = \frac{1}{4} e^{0.3446} = 0.3529$$

$$x = \frac{1}{4} e^{0.3529} = 0.3558$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{1}{4} e^{0.3574} = \underbrace{0.3574}_{\text{Kök}}$$

262

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Sabit nokta yöntemiyle köklerini bulun.

Not:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \mp \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1)}}{2}$$

$$x_1 = -0.618$$

$$x_2 = 1.6189$$

İki kök var.

Biz sabit nokta yöntemiyle çözmeye çalışacağız

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \sqrt{x+1}$$

$x=0$ başlangıç değeri

$$x = \sqrt{0+1} = 1$$

$$x = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1.4$$

$$x = \sqrt{1.4+1} = \sqrt{2.4} = 1.5538$$

$$x = \sqrt{1.5538+1} = 1.5981$$

$$x = \sqrt{1.5981+1} = 1.6119$$

$$x = \sqrt{1.6119+1} = 1.6161$$

$$\vdots$$

$$x = \sqrt{1.6180+1} = 1.6180$$

aynı

Kök $x = 1.6180$

Kökün birini bulduk diğer kökü nasıl bulacağız.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = -\sqrt{x+1}$$

Varsayalım

Başlangıç değeri $x=0$

$$x = -\sqrt{0+1} = -1$$

$$x = -\sqrt{-1+1} = 0$$

$$x = -\sqrt{0+1} = -1$$

$$x = -\sqrt{-1+1} = 0$$

$x=0$ başlangıç değeri çalışmadı.

$x=0.1$ verelim.

$$x = -\sqrt{x+1}$$

$$x = -\sqrt{0.1+1} = -\sqrt{1.1} = -1.0488$$

$$x = -\sqrt{-1.048+1} = -\sqrt{-0.048}$$

reel sayılardan bir çözüm arıyoruz. Çözümsüzlük çıktı

$x = -0.1$ başlangıç değerini deneyelim.

$$x = -\sqrt{x+1}$$

$$x = -\sqrt{-0.1+1} = -\sqrt{0.9} = -0.9487$$

$$x = -\sqrt{-0.9487+1} = -0.2265$$

$$x = -\sqrt{-0.2265+1} = -0.8795$$

$$x = -\sqrt{-0.8795+1} = -0.3471$$

$x=-\sqrt{-0.3471+1}=-0.8080$

⋮

$x=-\sqrt{-0.6180+1}=-0.6180$

aynı

Kök $x=-0.6180$

Çözüm her zaman bulunabilir mi

$x^2-x-1=0$

$x^2-1=x$

$x=x^2-1$

çözmeye çalışalım.

başlangıç değeri olarak $x=0$ verelim.

$x=0^2-1=-1$

$x=(-1)^2-1=0$

$x=0^2-1=-1$

$x=0$ başlangıç değeri çalışmadı.

$x=0.5$ verelim

$x=x^2-1=0.5^2-1=-0.75$

$x=(-0.75)^2-1=-0.4375$

$x=(-0.4375)^2-1=-0.8086$

⋮

$x=(-0.0195)^2-1=-0.9996$

$x=(-0.9996)^2-1=-0.0008$

$x=(-0.0008)^2-1=-1$

$x=(-1)^2-1=0$

$x=0^2-1=-1$

$x=(-1)^2-1=0$

$x=0.5$ başlangıç değeri çalışmadı.

$x=2$ verelim.

$x=x^2-1$

$x=2^2-1=3$

$x=3^2-1=8$

$x=8^2-1=63$

$x=63^2-1=3968$

$x=63^2-1=3968$

$x=3968^2-1=15745023$

$x=\infty$

$x=2$ çözüme ulaştırmadı.

Sonuç:

$x=x^2-1$ denklemini çözemedik.

aynı denklemi

$x=\sqrt{x+1}$ veya

$x=-\sqrt{x+1}$ şeklinde

yazdığımızda çözüm bulduk.

Aynı denklemi değişik yazınca <u>çözüm bulundu</u>.

Not: "Çözüm yok" ve "çözüm bulunamadı" farklı şeylerdir.

$x=\frac{1}{4}e^x$ denklemini başlangıç değerini $x=0$ alarak çözmüştük.

başlangıç değerini $x=3$ alarak çözmeye çalışalım.

$x=\frac{1}{4}e^x=\frac{1}{4}e^3$

$=\frac{1}{4}\,20.085$

$=5.021$

$x=\frac{1}{4}e^{5.021}=37.90$

$x=\frac{1}{4}e^{37.90}=7244108526355\ldots$

$x=\infty$

$x=0$ ile çözüm bulundu

$x=3$ ile çözüm bulunamadı

$x = g(x)$ şeklinde verilen denklemin (16)
sabit nokta yöntemiyle çözümü
yakınsaması için şart, çözüm civarında
$$|g'(x_0)| < 0$$ olmalıdır.

Örnek p 281
$f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ $\quad x = x^2 - 1 = g(x)$

$$g'(x) = 2x$$
$$|2x| < 0 \quad x < \frac{1}{2}$$

Eğer çözüm $x < \frac{1}{2}$ ise ve biz de başlangıç değeri olarak $|x| < \frac{1}{2}$ vermiş isek çözüm yakınsayabilir. çözüm $x = -0.61$, $x = 1.61$ idi. Bu yöntemle çözüm bulunmaz

p.282
$$f(x) = x^2 - x - 1$$
$$x^2 = x + 1$$
$$x = \sqrt{x+1} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$|g'(x)| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right| < 1$$

$x > -1$ olduğu sürece $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < 1$ olur. dolayısıyla devamlı yakınsar, çöz...

282
$$f(x) = x - \frac{1}{4}e^x$$

$$x = \frac{1}{4}e^x = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{4}e^x$$

$$\left|\frac{1}{4}e^x\right| < 1$$

$$e^x < 4$$

$$\ln e^x < \ln 4$$

$$x < \ln 4 = 1.38$$

Eğer çözüm $x < 1.38$ ise ve biz de başlangıç olarak $x < 1.38$ çözüm vermişsek yakınsayabilir ve çözümü buluruz. $x = 0.3574$ çözüm idi. $x = 0$ başlangıç değeri için

17
çözümü bulduk
$x = 3$ başlangıç değeri için çözüm yakınsamadı.

Basit Iterasyon. (Fixed Point Algorithm)

$f(x)=0$ denklemi $x=g(x)$ denklemine donusturulur.

Ornek:3.11

$$f(x) = x - \cos x + 0.1e^{x} = 0$$

denklemi

$x=\cos(x)+0.1e^{x}$.

Haline donusturulur. Burada

$g(x)=\cos(x)+0.1e^{x}$

olacaktir.

Ornek: :3.12 $f(x)=x^2-\cos x-1=0$

$x^2=\cos x+1$ and $x=\pm\sqrt{\cos x+1}$

Boylece $g(x)=\sqrt{\cos x+1}$ veya $g(x)=-\sqrt{\cos x+1}$

Basit Iterasyon Algoritmasi. (Fixed Point Algorithm)

Step 1. $x=g(x)$ denklemini elde et.

Step 2. x degeri icin bir tahmin yap. $x=x_0$

Step 3. $x_1=g(x_0)$ hesapla

Step 4. $x_2=g(x_1)$, $x_3=g(x_2)$, $x_4=g(x_3)$ ....
degerlerini hesapla.

Step 5. Iterasyona devam et. Taaa ki $x_{n+1}\cong x_n$ olana kadar.

Example: $f(x)=x^3+4x^2-10=0$

Step 1: $4x^2=10-x^3$, $x^2=\dfrac{10-x^3}{4}$,

$$x=\sqrt{\frac{10-x^3}{4}}$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{10-x^3}{4}}$$

Step 2: Estimate a guess $x_0=1$

Step 3: $x_1=g(1)=\sqrt{\dfrac{10-1^3}{4}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=1.5$

Step 4: $x_2=g(1.5)=\sqrt{\dfrac{10-x_1^3}{4}}=\sqrt{\dfrac{10-1.5^3}{4}}=1.287$

Step 5: $x_3=\sqrt{\dfrac{10-x_2^3}{4}}=\sqrt{\dfrac{10-1.287^3}{4}}=1.4025$

$x_4=\sqrt{\dfrac{10-x_3^3}{4}}=\sqrt{\dfrac{10-1.4025^3}{4}}=1.3455$

$x_5=1.3752$, $x_6=1.3601$, $x_7=1.3678$,

$x_8=1.3639$

....

$x_{25}=1.365230014$ $x_{26}=1.365230012$,

$x_{27}=1.365230013$

4.2.3 Basit İterasyon

$f(x) = 0$ kapalı formda verilen nonlineer bir fonksiyonda x herhangi bir şekilde yalnız bırakılarak diğer terimler sağ tarafa atıldığında fonksiyon

$$x = g(x) \tag{4.4}$$

şekline gelmiş olur. Eğer denklemi sağlayan kök değeri bilinmiş olsa bu değer yukarıdaki ifadenin sağ tarafında yazıldığında elde edilecek x değeri yine aynı kök değeri olacaktır. Kök değeri bilinmediğine göre, denklemin sağ tarafında x yerine tahmini bir değer (x_0) konulduğunda hesaplanacak yeni x değeri

$$x_1 = g(x_0)$$

kök değerine daha yakın olabileceği düşüncesi basit iterasyon yönteminin esasını teşkil eder. Dolayısıyla iteratif bir yöntem olan basit iterasyona tahmini bir değer (x_0) ile başlanır. Ardışık yerine koymalarla kök değerine belirli bir tolerans dahilinde yaklaşılır.

Kısaca özetlenen bu yöntemde işlem adımları şöyle sıralanabilir.

1-) Verilen $f(x) = 0$ fonksiyonu $x = g(x)$ formunda yazılır.

2-) İterasyon başlangıcı için tahmini bir x_0 başlangıç değeri alınır ve $g(x)$'de yerine yazılarak x_1 değeri bulunur. x_1, $g(x)$' de tekrar yazılarak x_2 bulunur. Bu işlem n defa tekrarlandığında n. iterasyon için genel denklem;

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{4.5}$$

olur.

3-) İterasyona $|x_{n+1} - x_n| < TD$. oluncaya kadar devam edilir. Bu şart sağlanıyorsa aranan kök x_{n+1} 'dir.

Örnek4.2: Aşağıdaki denklemin en küçük pozitif kökünü bulunuz.

$$f(x) = x^3 - x - 3 = 0$$

Çözüm: Verilen denklem üç değişik tarzda $x = g(x)$ haline getirilebilir:

1) $x = x^3 - 3 = g(x)$

2) $x = \sqrt[3]{x+3} = g(x)$

3) $x = \dfrac{3}{x^2 - 1} = g(x)$

Başlangıç değerini sıfır (x_0= 1.5) alarak her üç denklemle basit iterasyon uygulandığında elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Başlangıç değeri aynı olmasına rağmen her zaman yakınsama olmadığı ve üç halden sadece birisinin sonuç verdiği görülmektedir. Yani verilen fonksiyon $x = g(x)$ formunda yazılırken gelişigüzel değil, uygun bir tarzda yazılmalıdır. Aksi halde yakınsama sağlanamaz ve çözüme ulaşılamaz. Uygun $x = g(x)$ formu *yakınsama kriterini* sağlayan formdur. Dolayısıyla yukarda yazılan üç değişik ifadeden sadece yakınsama kriterini sağlayan ikinci form sonuç vermektedir.

İter(n)	$x_{n+1} = x_n^3 - 3$	$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 3}$	$x_{n+1} = \dfrac{3}{x_n^2 - 1}$
0	1.5	1.5	1.5
1	0.375	1.651	2.4
2	-2.947	1.669	0.63
3	-28.601	1.671	-4.974
4	-23399.241	1.672	0.126
5		1.672	-3.049
6			0.362
7			-3.452
8			
9			

Yakınsama Şartı

Basit iterasyonun genel ifadesi olan

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

denkleminde gerçek kök değeri (x_r) yazılırsa

$$x_r = g(x_r) \tag{4.6}$$

olacaktır. Bu iki ifade taraf tarafa çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_r = g(x_n) - g(x_r)$$

elde edilir. Bu ifadenin sağ tarafı (x_n - x_r) terimi ile çarpılıp bölünürse ve ortalama değer teoremi gözönüne alınırsa

$$x_{n+1} - x_r = (g(x_n) - g(x_r))\frac{x_n - x_r}{x_n - x_r} = \frac{g(x_n) - g(x_r)}{x_n - x_r}(x_n - x_r)$$

$$= g'(x_s)(x_n - x_r)$$

yazılabilir. Burada x_s değeri, x_n ve x_r aralığında bir x değeridir. Mutlak hata e ile gösterilirse

$$\underbrace{x_{n+1} - x_r}_{e_{n+1}} = g'(x_s) \,.\, \underbrace{(x_n - x_r)}_{e_n} \Rightarrow$$

$$e_{n+1} = g'(x_s) \,.\, e_n \tag{4.7}$$

sonucuna ulaşılır. Yakınsamanın olabilmesi için hatanın iterasyon süresince azalması gerekir. Yani (n+1). adımdaki hatanın daha küçük olması gerekir ($e_{n+1} < e_n$). Bu ise ancak çarpanın mutlak değerce 1'den küçük olması ile sağlanır. Bu şart

$$|g'(x_s)| < 1 \tag{4.8}$$

yakınsama kriteri olarak bilinir.

Örnek 4.3: Yukarıdaki soruda yakınsama kriterini irdeleyiniz.

<u>*Çözüm:*</u> Verilen denklem üç değişik tarzda $x = g(x)$ halinde yazılmıştı. Her durumda $g(x)$ fonksiyonunun türevini alıp kök civarında inceleyelim.

1) $x = x^3 - 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad |g'(x_s)| > 1$

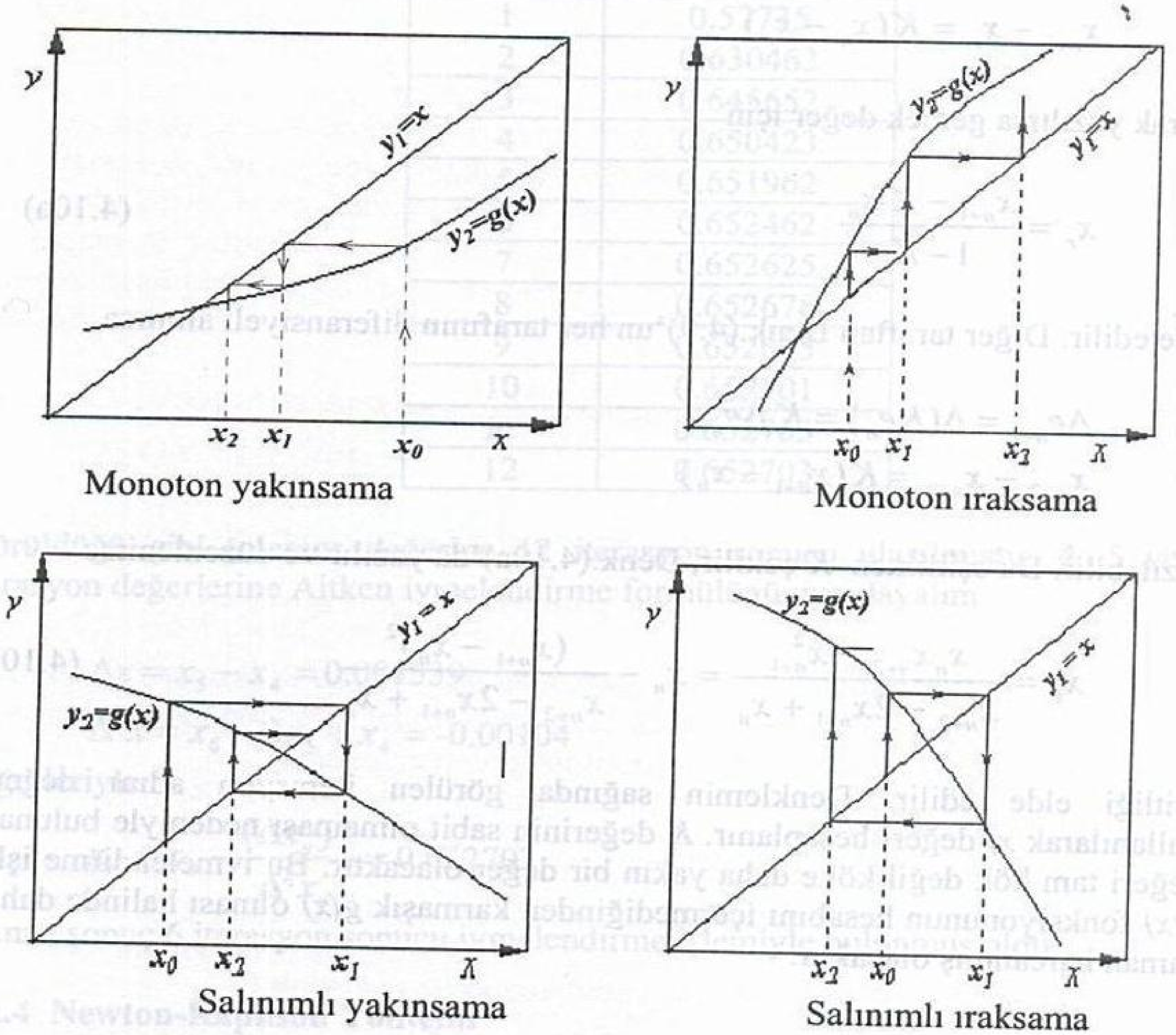
2) $x = \sqrt[3]{x+3} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad |g'(x_s)| < 1$

3) $x = \dfrac{3}{x^2 - 1} \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad |g'(x_s)| > 1$

Bu türevlerden sadece ikincisi pozitif x değerleri için daima 1'den küçüktür. Dolayısıyla ikinci yazılış tarzı kesin olarak yakınsama şartını sağlamaktadır. Birincisi (x >0.58) için daima birden büyük, sonuncusu da genelde birden büyük bazı x değerleri için ise birden küçük olmaktadır. Dolayısıyla bunlar basit iterasyonda sonuç vermeleri beklenmemelidir.

Yakınsama şartının yakınsamayı nasıl etkilediği geometrik bir şekil üzerinde basitçe gösterilebilir. Basit iterasyonun özünü oluşturan $x = g(x)$ ifadesi iki eğrinin kesim noktasının bulunması işlemi gibi düşünülebilir. Yani y_1=x eğrisi ile y_2=$g(x)$ eğrisinin kesim noktası için $x = g(x)$ denklemini kullandığımıza göre bu kesim noktası aynı zamanda aradığımız çözüm değeri olacaktır. Aşağıdaki dört şekil üzerinde $g(x)$ fonksiyonunun eğimine göre iki eğrinin kesim noktasını ve bunun yakınsamayı nasıl etkilediği gösterilmiştir (Şekil 4.4). Görüldüğü gibi y_2 eğrisinin eğiminin mutlak değerce 1'den büyük olması durumlarında ilk tahmin

noktası kök değerine yakın olsa bile iterasyon boyunca eğrilerin kesim noktasında uzaklaşma meydana gelmektedir.



Şekil 4.4 Basit iterasyonda yakınsama ve ıraksama olayının geometrik açıklaması

Basit iterasyonda yakınsama hızı çok düşük olabilir. Yakınsamayı hızlandırmak için kullanılan bir yöntem *Aitken ivmelendirmesi* olarak anılır. Bu yöntemde iterasyon esnasında elde edilen değerler tekrar işleme tabi tutularak köke yakın yeni bir değer elde edilir.

Denk.(4.7)'de kök civarındaki türev K gibi bir sabit olarak düşünülürse $.e_n = (x_n - x_r)$ olmak üzere

$$e_{n+1} = g'(x_s) \,.\, e_n = K \,.\, e_n \tag{4.9}$$

yazılabilir. Veya

$$x_{n+1} - x_r = K(x_n - x_r)$$

olarak yazılırsa gerçek değer için

$$x_r = \frac{x_{n+1} - K x_n}{1 - K} \qquad (4.10a)$$

elde edilir. Diğer taraftan Denk.(4.9)'un her tarafının diferansiyeli alınırsa

$$\Delta e_{n+1} = \Delta(Ke_n) = K\,\Delta e_n$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = K(x_{n+1} - x_n)$$

yazılabilir. Bu eşitlikten K çekilir, Denk.(4.10a)'da yazılır ve düzenlenirse

$$x_r = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \qquad (4.10b)$$

eşitliği elde edilir. Denklemin sağında görülen iterasyon adım değerleri kullanılarak x_r değeri hesaplanır. K değerinin sabit olmaması nedeniyle bulunan x_r değeri tam kök değil köke daha yakın bir değer olacaktır. Bu ivmelendirme işlemi *g(x)* fonksiyonunun hesabını içermediğinden karmaşık *g(x)* olması halinde daha az zaman harcanmış olacaktır.

Örnek 4.4: $y = x^3 + 1$ kübiği ile $y = 3x^2$ parabolünün arakesit noktalarından birini hesaplayınız. (TD= 10^{-6})

<u>*Çözüm:*</u> Basit iterasyonu kullanmak üzere *x= g(x)* formunu oluşturalım ve sıfır değeriyle iterasyon yapalım

$$3x^2 = x^3 + 1 \qquad x_{n+1} = +\sqrt{(x_n^{\ 3} + 1)/3}$$

$$x = +\sqrt{(x^3 + 1)/3}$$

n	x_n
	0
1	0.57735
2	0.630463
3	0.645652
4	0.650423
5	0.651962
6	0.652462
7	0.652625
8	0.652678
9	0.652695
10	0.652701
11	0.652703
12	0.652703

Görüldüğü gibi tolerans değerine 12 iterasyon sonucu ulaşılmıştır. 4, 5 ve 6. iterasyon değerlerine Aitken ivmelendirme formülünü uygulayalım

$$\Delta x = x_5 - x_4 = 0.001539$$

$$\Delta^2 x = x_6 - 2x_5 + x_4 = -0.00104$$

değerleriyle

$$x_r = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = 0.652703$$

aranan sonuç 6 iterasyon sonucu ivmelendirme işlemiyle bulunmuş oldu.

2.2 Sabit Nokta İterasyonu

Bir fonksiyonun sabit noktaları fonksiyon altındaki görüntüsü yine kendi değerine eşit olan noktalarıdır.

Tanım 2.2.1. *Bir g fonksiyonu verilsin. $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir noktaya g fonksiyonunun* ***sabit noktası*** *denir.*

Bu bölümde sabit nokta problemine bir çözümün ne şekilde bulunacağı ve sabit nokta problemi ile kök bulma problemi arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Aşağıda anlatıldığı anlamda kök bulma problemi ile sabit nokta problemi birbirine denk sınıflardır:

- Verilen bir $f(p) = 0$ kök bulma problemi için

  $$g(x) = x - f(x) \text{ ya da } g(x) = x + 3f(x)$$

  gibi çok farklı şekillerde p noktasında bir sabit nokta içeren g fonksiyonları tanımlanabilir. Zira

  $$g(p) = p - f(p) = p - 0 = p \Rightarrow g(p) = p$$

  dir.

- Tersine, eğer g fonksiyonunun bir sabit noktası p ise, örneğin

  $$f(x) = x - g(x)$$

  olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun bir kökü

  $$f(p) = p - g(p) = p - p = 0$$

  sağlandığından p'dir.

Her ne kadar üzerinde durulan konu verilen bir denklemin köklerine bir yaklaşım yapma problemi olsa da sabit nokta barındıran fonksiyonlar kullanılarak kök bulma problemini çözme yolunda güçlü bir metot elde etmek mümkündür.

Öncelikle, verilen bir fonksiyonun sabit noktalarını bulma problemini incelemeden önce sabit nokta konseptini daha da anlaşılır kılmak amacı ile aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 2.2.2. $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonun herhangi bir sabit noktasını tespit ediniz.

Çözüm. Bir $g(x)$ fonksiyonu için p sabit noktası $g(p) = p$ eşitliğini sağladığından $p = p^2 - 2$ yani $p^2 - p - 2 = (p+1)(p-2) = 0$ denkleminin çözümü olan $p = -1$ ve $p = 2$ noktaları aranan sabit noktalar olarak bulunur. Gerçekten

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \text{ ve } g(2) = (2)^2 - 2 = -1$$

dir. Tanımından da anlaşılacağı üzere sabit noktalar verilen g fonksiyonu ile $y = x$ doğrusunun kesim noktalarında yer alırlar. Bu durum Şekil 2.4'de gösterilmektedir.

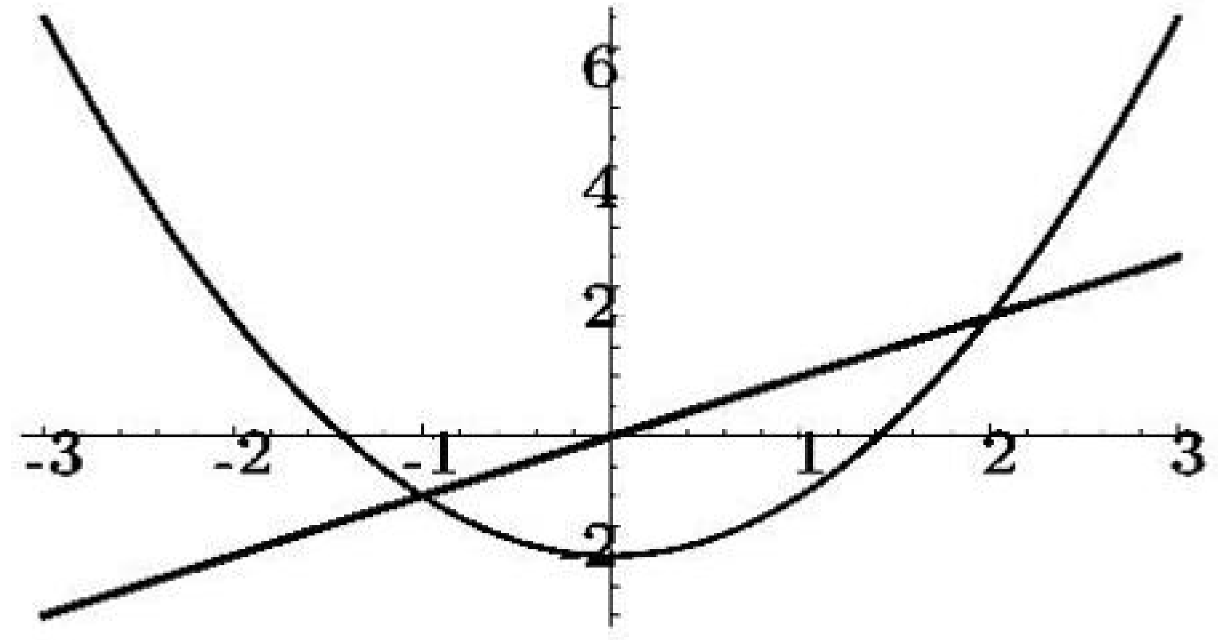
Aşağıdaki teorem bize sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili olarak yeter şartı vermektedir.

Teorem 2.2.3. **(i)** *Eğer $g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ ise $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır.*

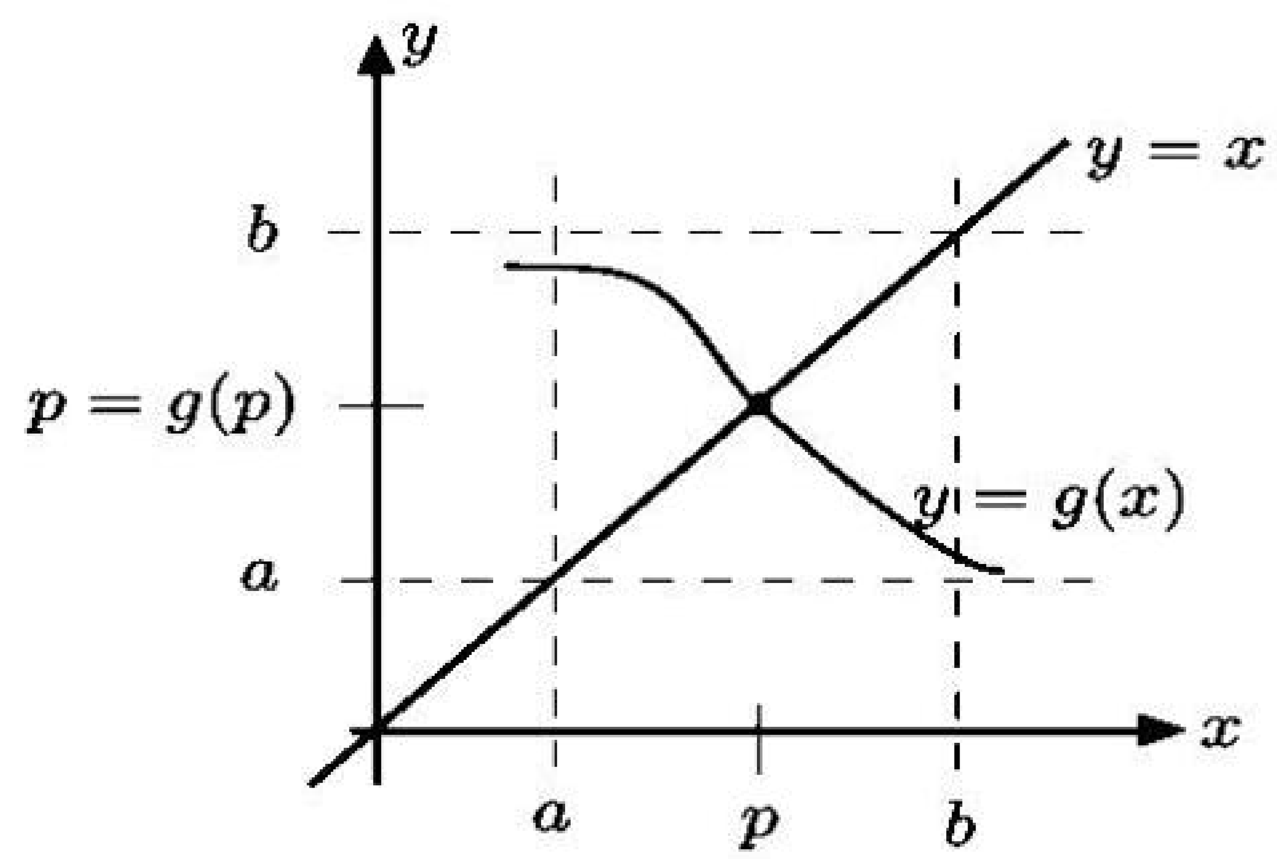
(ii) *Yukarıda verilenlere ek olarak (a, b) üzerinde $g'(x)$ türevi mevcut ve her $x \in (a, b)$ için*

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $k < 1$ pozitif sabiti var ise $[a, b]$ aralığında g'nin tek türlü belirli bir sabit noktası vardır (Bkz Şekil 2.5).



Şekil 2.4: $y = x$ ve $y = x^2 - 2$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 2.5: Sabit noktaların varlığı ve tekliği

Kanıt. **(i)** Eğer $g(a) = a$ veya $g(b) = b$ ise g'nin sabit noktası uç noktalarda yer alır. Diğer durumda her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olduğundan $g(a) > a$ ve $g(b) < b$'dir. $h(x) = g(x) - x$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[a, b]$ aralığında süreklidir ve

$$h(a) = g(a) - a > 0 \text{ ve } h(b) = g(b) - b < 0$$

eşitsizliklerini gerçekler. Dolayısıyla Ara Değer Teoremi'ne göre $h(p) = 0$ olacak şekilde bir p sayısı (a, b) aralığında mevcuttur. Bu p sayısı

$$0 = h(p) = g(p) - p$$

olduğundan $g(p) = p$ eşitliğini sağlar. Yani (a, b) aralığında yer alan p sayısı g fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

(ii) Yukarıdaki koşullara ek olarak $|g'(x)| \leq k < 1$ sağlansın ve $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun p ve q gibi iki farklı sabit noktası var olsun. Ortalama Değer Teoremi'ne göre p ile q arasında ve dolayısıyla $[a, b]$ aralığı içinde bir ξ sayısı

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur. Buna göre yukarıdaki ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınır, $g(p) = p$, $g(q) = q$ ve $|g'(\xi)| \leq k < 1$ olduğu kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$$

çelişkisi elde edilir. Bu ise bizi $p \neq q$ varsayımının yanlış olduğu sonucuna götürür. Yani $p = q$'dur, yani $[a, b]$ aralığındaki sabit nokta tek türlü belirlidir.

□

Örnek 2.2.4. $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ *fonksiyonunun* $[-1, 1]$ *aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. $g'(x) = \frac{2x}{3}$ olduğundan sürekli $g(x)$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında türevi mevcuttur. Ayrıca $g(x)$ fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini ya sınır noktaları olan $x = -1$ veya $x = 1$'de ya da türevini sıfır yapan $x = 0$ noktasında alır. $g(-1) = g(1) = 0$ ve $g(0) = -\frac{1}{3}$ olduğundan g fonksiyonun $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında mutlak maksimumu ve $x = 0$ noktasında ise mutlak minimumu vardır. Buna göre her $x \in [-1, 1]$ için

$$-\frac{1}{3} < g(x) \text{ ve } g(x) < 0$$

olduğundan $g(x) \in [a, b] = [-1, 1]$ sağlanır. Dolayısıyla verilen aralıkta fonksiyonun en az bir tane sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} \left|\frac{2x}{3}\right| = \frac{2}{3} = k < 1$$

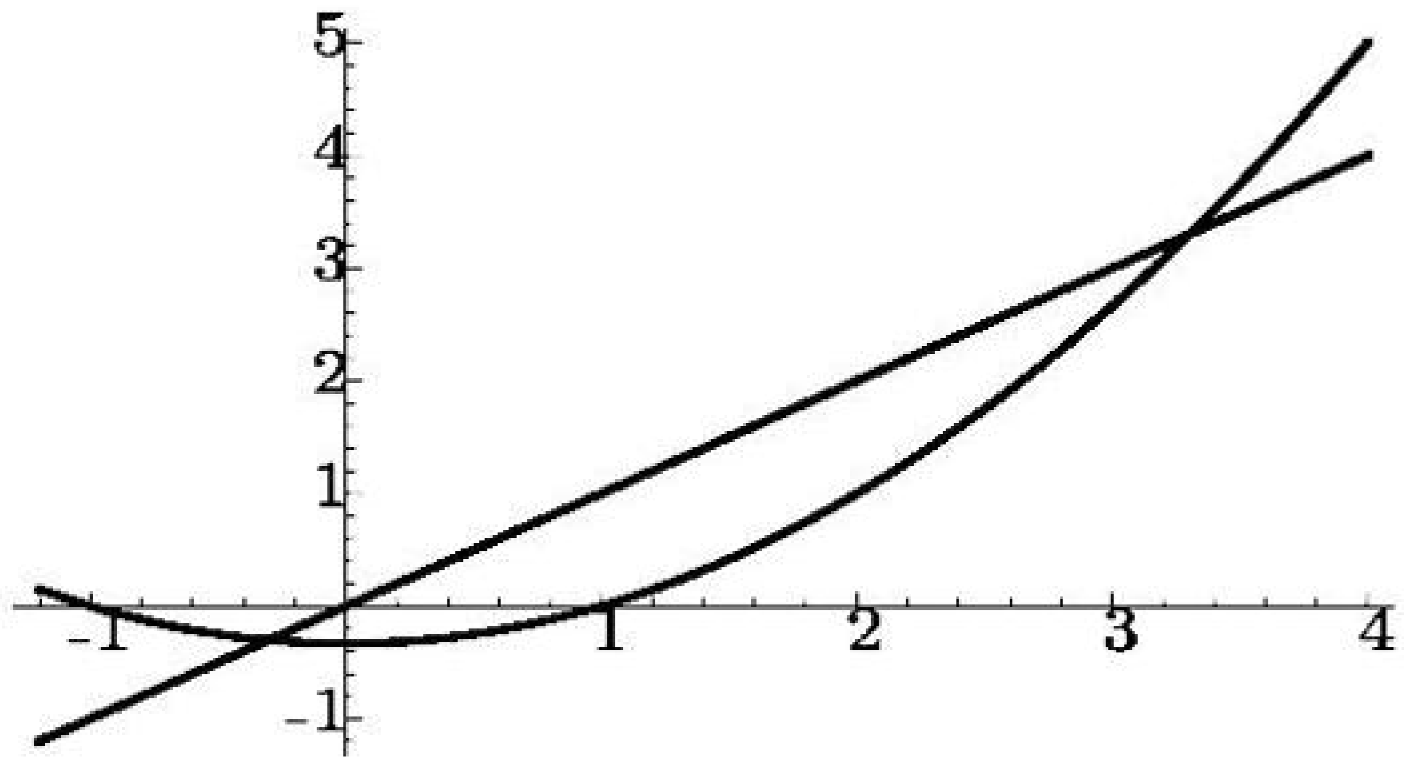
eşitsizliği de gerçeklendiğinden $[-1, 1]$ aralığında yer alan sabit nokta tek türlü belirlidir.

Örnek 2.2.4 ile $[-1, 1]$ aralığında tek türlü belirli olduğu saptanan sabit nokta cebirsel olarak bulunabilir: $p = g(p) = \frac{p^2-1}{3}$ olduğundan $p^2 - 3p - 1 = 0$ kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden iki tane kök bulunur. Bunlardan biri $[-1, 1]$ aralığında yer alan

$$p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

olup g fonksiyonunun sabit noktasıdır (Bkz Şekil 2.6). Diğer taraftan $p^2 - 3p - 1 = 0$ denkleminin diğer bir kökü $[3, 4]$ aralığında yer alan $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$'dır. Bununla beraber $g(3) = \frac{3^2-1}{3} = 2.\bar{6} \notin [3, 4]$ olduğundan $[3, 4]$ aralığı ile göz önüne alındığında g fonksiyonu Teorem 2.2.3'ün hipotez koşullarını sağlamaz. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 verilen bir fonksiyonun söz konusu aralıktaki sabit noktasının varlığını garantilemek için yeterdir fakat gerek değildir.

Örnek 2.2.5. $g(x) = 3^{-x}$ *fonksiyonunun* $[0, 1]$ *aralığında tek türlü belirli bir sabit noktasının varlığının Teorem 2.2.3 kullanılarak gösterilemeyeceğini, fakat aslında bu aralıkta verilen fonksiyona ait sadece bir sabit noktanın mevcut olduğunu gösteriniz.*



Şekil 2.6: $y = (x^2 - 1)/3$ fonksiyonunun sabit noktaları

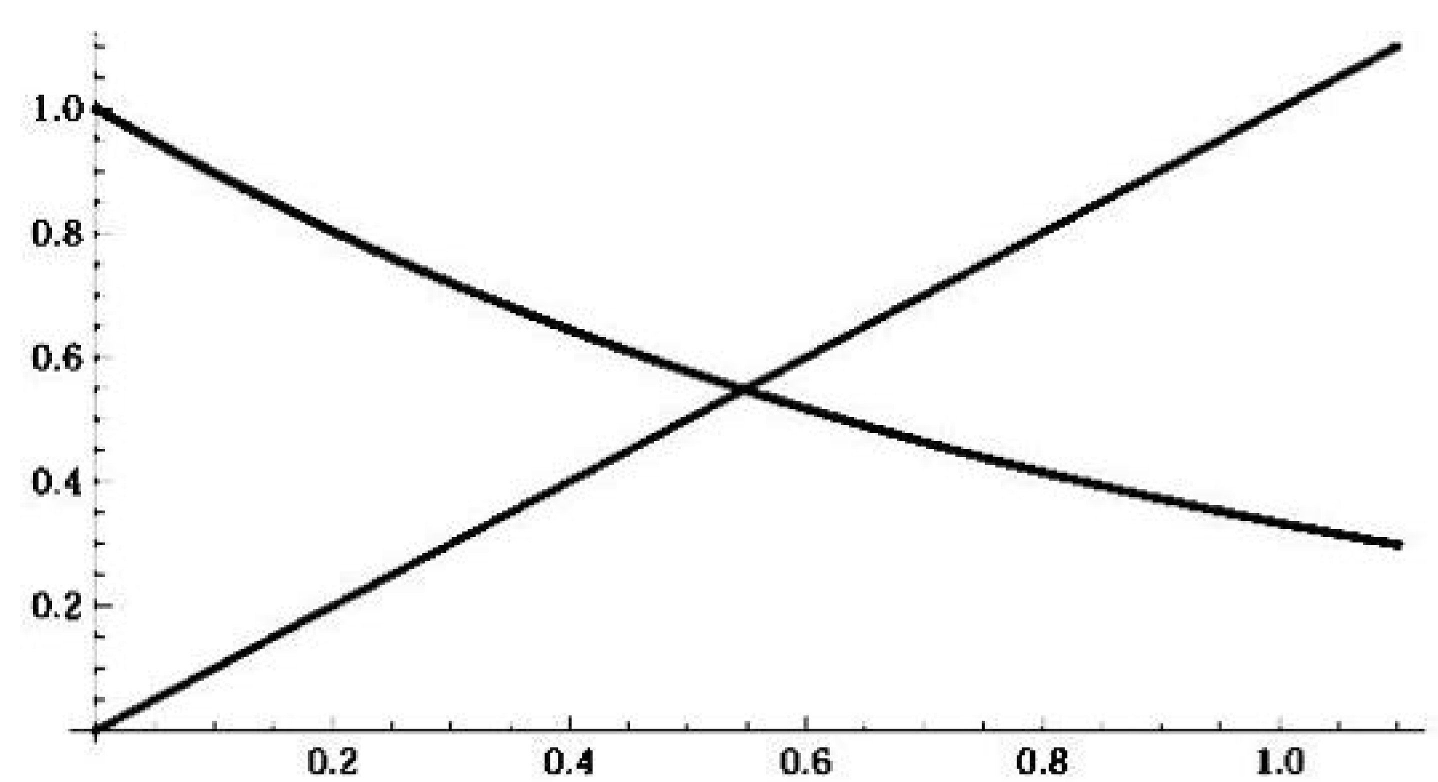
Çözüm. $[0, 1]$ aralığında $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ olduğundan sürekli $g(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta monoton azalandır. Buna göre maksimum değerini aralığın sol ucunda, minimum değerini ise sağ ucunda alır. Ayrıca

$$g(1) = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0)$$

olduğundan her $x \in [0, 1]$ için $g(x) \in [0, 1]$ sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.2.3'ün ilk kısmına göre $[0, 1]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$g'(0.01) = -3^{-0.01} \ln 3 = -1.086608855$$

olduğundan en azından $(0, 1)$ aralığında yer alan 0.01 noktası için $|g'(x)| \nleq 1$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 kullanılarak var olduğu bilinen sabit noktanın tekliği hakkında bir hüküm bildirilemez. Burada dikkat edilmesi gereken nokta $|g'(x)| \nleq 1$ olmasından sabit noktanın verilen aralıkta tek türlü belirli olmadığı sonucu çıkmaz. Teklik hakkında herhangi bir bilgi elde edilememiş olur. Gerçekte, $[0, 1]$ aralığında $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonun grafiği g monoton azalan olduğundan $y = x$ doğrusunu sadece bir kez keser ve kesim noktası g'nin tek türlü belirli sabit noktasıdır. Bu durum Şekil 2.7'de gösterilmektedir.



Şekil 2.7: $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonunun sabit noktası

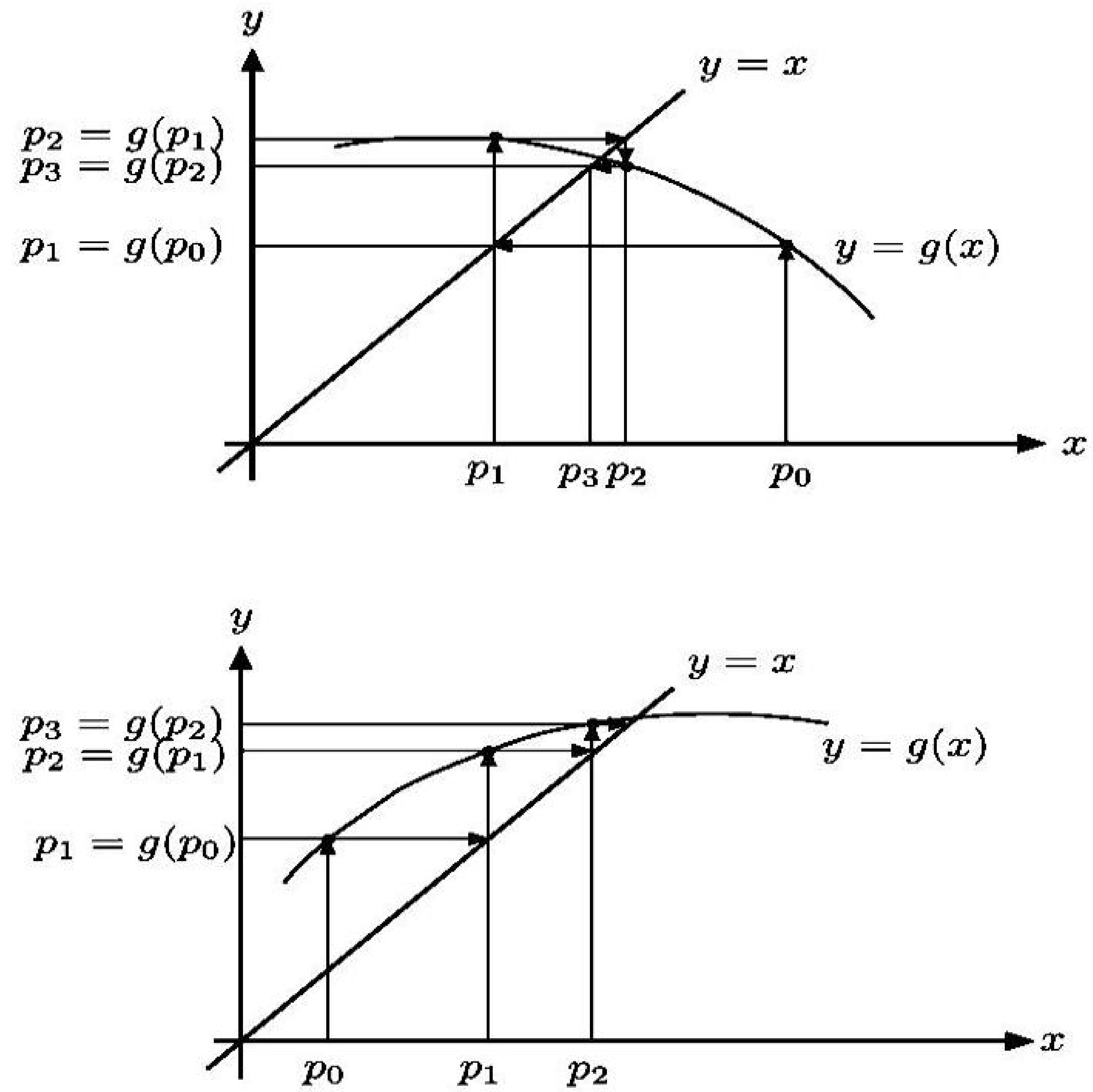
2.2.1 Sabit Nokta İterasyonu

Bu aşamada Örnek 2.2.5'de verilen g fonksiyonunun $p = g(p) = 3^{-p}$ eşitliğini gerçekleyen sabit noktalarını tespit etmemizi sağlayacak bir yöntem bilmediğimiz için söz konusu sabit noktaları belirleyemeyiz. Bununla birlikte belirli bir yakınsaklık derecesine sahip olarak verilen fonksiyonun sabit noktaları için yaklaşımlarda bulunabiliriz.

g fonksiyonunun sabit noktasına bir yaklaşımda bulunmak için bir p_0 ilk yaklaşım değeri seçelim ve her $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ olacak şekilde $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımlayalım. Eğer bu dizi p'ye yakınsar ve g fonksiyonu sürekli ise

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

sağlanır ve $x = g(x)$ ifadesi için çözüm elde edilmiş olur. Bu teknik **sabit nokta** ya da **fonksiyonel iterasyon** olarak adlandırılır (Bkz. Şekil 2.8).



Şekil 2.8: Sabit nokta iterasyonu

Örnek 2.2.6. Şimdi Örnek 2.1.1'de incelenen $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin $[1, 2]$ aralığında tek türlü belirli bir çözümünün olduğunu biliyoruz. Bu köke sabit nokta iterasyonu ile bir yaklaşımda bulunmak için $x = g(x)$ şeklinde bir fonksiyon tanımlamak gerekir. Bu fonksiyon verilen denklem kullanılarak pek çok farklı şekilde oluşturulabilir. Örneğin $4x^2 = 10 - x^3$ yazarsak $x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$ olduğundan $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ elde edilir. Biz $[1, 2]$ aralığındaki çözüm ile ilgilendiğimizden pozitif olan $x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ ifadesini sabit nokta fonksiyonu adayı olarak seçebiliriz. Bunun yanında $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denklemi kullanılarak $x = g(x)$ eşitliğini sağlayan başka fonksiyonlar da yazılabilir:

(a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

(b) $x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$

(c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

(d) $x = g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$

(e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$

Okuyucu, yukarıdaki şekilde tanımlanan her fonksiyonun $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığındaki çözümünü sabit nokta iterasyonu metodu ile bulmak için kullanılabilecek Teorem 2.2.3'in koşullarını sağlayan sabit nokta fonksiyonu olup olmadığını araştırmalıdır ki bu fonksiyonlardan (b) ile verilen $[1, 2]$ aralığında sürekli değil iken, (a) her $x \in [1, 2]$ için $g(x) \in [1, 2]$ içermesini sağlamaz. Şimdi bu ayrıntıya değinmeden verilen aralıkta herhangi bir p_0 başlangıç yaklaşımı seçelim ve bulunan yaklaşımlarda elde edilen sonuçlardan tespit edilen sabit nokta fonksiyonu adaylarından hangilerinin isteneni sağladığını görelim. Eğer $p_0 = 1.5$ olarak alınır ve g'nin yukarıdaki şekilde tanımlanan tüm seçimleri kullanılarak

$$p_n = g(p_{n-1})$$

sabit nokta iterasyonu uygulanırsa aşağıdaki tablo değerleri elde edilir. Diğer taraftan Örnek 2.1.1'de belirtildiği üzere gerçek kök değeri 1.365230013'dür. Bu değere ikiye bölme metodu uygulanarak ulaşılmak istendiğinde 27 iterasyon yapmak gerekirken (c), (d) ve (e) ile verilen fonksiyonlar kullanılarak yapılan yaklaşımlarda farklı iterasyon sayılarına karşılık gerçek kök değerine ulaşılmaktadır. Bununla beraber (a) ile verilen fonksiyon ıraksak iken (b) ile verilen fonksiyonun üçüncü adımı tanımsızdır.

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.81649658	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.73242188	2.99690881	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.720012	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Yukarıdaki örnekten görüleceği üzere verilen bir denklemin çözümüne sabit nokta iterasyonu metodu kullanılarak yapılacak bir yaklaşımda iki önemli problem ortaya çıkmaktadır. Bunlardan ilki sabit nokta fonksiyonunun tanımlanması, bir diğeri de tanımlanan bu fonksiyonun uygun bir adım sayısı ile sonucu vermesidir. Bu aşamada aşağıdaki teorem ve ilişkili sonuç bu sorulara cevap olacaktır:

Teorem 2.2.7. (Sabit Nokta Teoremi)
$g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olsun. Bunlara ek olarak g' türevi (a, b) aralığında mevcut ve her $x \in (a, b)$ için

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < k < 1$ sayısı var olsun. Buna göre $[a, b]$ aralığındaki her p_0 sayısı için

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan dizi $[a, b]$ aralığında tek türlü belirli bir p sabit noktasına yakınsar.

Kanıt. Teorem 2.2.3'den biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir p sabit noktası tektürlü belirli olacak şekilde mevcuttur. Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]$ aralığını kendi içine resmettiğinden yukarıdaki şekilde verilen $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 0$ için tanımlıdır ve $p_n \in [a, b]$ bağıntısını gerçekler. Diğer taraftan $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği ve Ortalama Değer Teoremi kullanılarak her n için $\xi_n \in (a, b)$ olmak üzere

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p| \tag{2.4}$$

ifadesi elde edilir. Bu prosedür indaktif olarak uygulandığında

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n|p_0 - p|$$

sonucuna ulaşılır. $0 < k < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

elde edilir. Yani, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p'ye yakınsar. □

Sonuç 2.2.8. *g fonksiyonu Teorem 2.2.7'nin koşullarını sağlıyorsa p sabit noktasına yapılan p_n yaklaşımında oluşan mutlak hata için bir sınır $n \geq 1$ olmak üzere*

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \tag{2.5}$$

veya

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \tag{2.6}$$

eşitsizlikleri ile elde edilir.

Kanıt. $p \in [a,b]$ olduğundan (2.4) eşitsizliğinden

$$|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $n \geq 1$ için Teorem 2.2.7'nin ispat tarzındaki gibi hareket ederek

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k|p_n - p_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n |p_1 - p_0|$$

bulunur. Dolayısıyla $m > n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} |p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} + \cdots + p_{n+1} - p_n| \\ &\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots k^n |p_1 - p_0| \\ &= k^n |p_1 - p_0|(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{m\to\infty} p_m = p$ olduğundan

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \leq \lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $0 < k < 1$ için $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ serisi toplamı $\frac{1}{1-k}$ olan geometrik bir seri olduğundan

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

eşitsizliği elde edilir. □

Yukarıdaki sonuçta verilen her iki eşitsizlik de türevi sınırlayan k sayısına bağlıdır. Ayrıca bu k değeri ne kadar küçük olursa yakınsama hızı o kadar yüksek olacaktır. Eğer k değeri 1'e yakın ise yakınsama çok düşük bir hızda gerçekleşir.

Örnek 2.2.9. Teorem 2.2.7 ve Sonuç 2.2.8'de elde edilen sonuçları Örnek 2.2.6'da tanımlanan fonksiyonlar üzerinde uygulayalım:

(a) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ için $g_1(1) = 6$ ve $g_1(2) = -12$ olduğundan g_1 fonksiyonu $[1,2]$ aralığını kendi içine resmetmez. Ayrıca, $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ olduğundan her $x \in [1,2]$ için $|g_1'(x)| > 1$ sağlanır. Her ne kadar Teorem 2.2.7, g_1 şeklinde tanımlanan fonksiyonun bu metotda kullanılmayacağını söylemesede, yakınsamanın garantisi yoktur. Keza örneğe ilişkin tabloda fonksiyonun sabit noktaya yakınsamadığı görülmektedir.

(b) $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ için $g_2 \notin C[1,2]$'dir ve g_2 verilen $[1,2]$ aralığını $[1,2]$ içine resmetmez. Ayrıca yukarıdaki tablodan da görüldüğü üzere $p_n = g_2(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $p_0 = 1.5$ için tanımsızdır. Bundan daha fazla olarak, $|g_2'(p)| \approx 3.4$ olduğundan $|g_2'(x)| < 1$ eşitsizliğini sağlayan ve $p \approx 1.356$ değerini içeren bir aralık yoktur. Dolayısıyla bu metod ile yakınsaklık garanti edilemez.

(c) $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[1,2]$ aralığında süreklidir. Ayrıca her $x \in [1,2]$ için

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0$$

olduğundan monoton azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini sol uçta, minimum değerini ise aralığın sağ ucunda alır. Diğer yandan

$$g_3(1) = 1.5 < 2 \text{ fakat } g_3(2) = 0.7071067812 \not> 1$$

olduğundan g_3 fonksiyonu $[1,2]$ aralığını kendi içine resmetmez. Ayrıca $|g_3'(2)| \approx 2.12 \not< 1$ olduğundan $[1,2]$ aralığında $|g_3'(x)| \leq k_3^* < 1$ eşitsizliği de geçersizdir. Diğer taraftan $p_0 = 1.5$ olmak üzere $[1, 1.5]$ aralığında $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ disizi yakınsaktır. Yani $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ fonksiyonun sabit noktaları ve dolayısıyla $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$ fonksiyonunun çözümü olan p sayısı $[1, 1.5]$ aralığında $p_0 = 1.5$ alınması durumunda elde edilebilir. Bu aralıkta da yukarıda olduğu gibi $g'(x) < 0$ sağlandığından $g_3(x)$ fonksiyonu monoton azalandır ve her $x \in [1, 1.5]$ için

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1.5$$

eşitsizliği gerçeklendiğinden g_3 fonksiyonu $[1, 1.5]$ aralığını kendi içine resmeder. Diğer taraftan $|g_3'(x)| \leq |g'(1.5)| \approx k_2 = 0.66 < 1$ sağlandığından Teorem 2.2.7'e göre yakınsaklığın sağlandığı sonucuna ulaşılır ki biz zaten yukarıdaki tabloda kök değerine bir yaklaşım elde etmiştik.

(d) $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[1,2]$ aralığında süreklidir. Ayrıca

$$g_4'(x) = -\frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} < 0$$

olduğundan $[1,2]$ aralığında monoton azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini aralığın sol ucunda minimum değerini ise sağ ucunda alır. Buna göre her $x \in [1,2]$ için

$$1 < 1.29 \approx g_4(2) \leq g_4(x) \leq g_4(1) \approx 1.41 < 2$$

eşitsizlikleri sağlandığından $g(x) \in [1,2]$ bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |g_4'(x)| &= \left| -\frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \leq \max_{1 \leq x \leq 2} \left| \frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \\ &= \left| \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} \right| \approx k_3 = 0.14142 < 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki buna göre Teorem 2.2.7'e göre yakınsama garantidir. Daha fazla olarak, türev için elde edilen birden küçük üst sınır değeri (d) şıkkında $k < 0.15$ (c) şıkkında ise 0.66 olarak elde edildiğinden Sonuç 2.2.8'e göre g_4 fonksiyonu sabit noktaya g_3'e göre daha hızlı yakınsayacaktır. Bu olgu yukarıdaki tabloda görülmektedir.

(e) Sabit nokta fonksiyonun $g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ şeklinde seçilmesi ile yukarıda yakınsaklığını ortaya koyduğumuz tüm fonksiyonlardan daha hızlı bir biçimde sabit noktaya yakınsayan bir $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi elde edilmiş olur. Okuyucu diğer şıklardaki gibi hareket ederek bu durumu analiz etmelidir.

Örnek 2.2.10. **(a)** $\sin x - \frac{x}{1.4} = 0$ denkleminin $[1, \pi/2]$ aralığındaki çözümünü Sabit-Nokta Metodu ile elde etmek için bir $g(x)$ sabit nokta fonksiyonu belirleyiniz.

(b) (a) şıkkında elde edilen $g(x)$ fonksiyonunu kullanarak $p_0 = 1.4$ olmak üzere yukarıda verilen denklemin çözümünü $\varepsilon = 10^{-6}$ hassaslıkla bulmak için yapılması gereken iterasyon sayısını hesaplayınız.

Çözüm.

(a) $\sin x - \frac{x}{1.4} = 0 \Rightarrow x = 1.4 \sin x$ olduğundan $g(x) = 1.4 \sin x$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin koşullarını sağladığını gösterelim. Yukarıdaki şekilde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonun $[1, \pi/2]$ aralığında sürekli olduğu açıktır. Ayrıca $g'(x) = 1.4 \cos x$ fonksiyonu her $x \in [1, \pi/2]$ için pozitif olduğudan $g(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta monoton artandır. Dolayısıyla maksimum değerini $\pi/2$'de ve minumum değerini ise 1'de alır ve $g(x)$ fonksiyonunun alacağı tüm değerler $g(\pi/2)$ ve $g(1)$ değerleri arasında olur.

$$g(\pi/2) = 1.4 \sin \frac{\pi}{2} = 1.4 < \frac{\pi}{2} = 1.5708$$

ve

$$g(1) = 1.4 \sin 1 = 1.1781 > 1$$

gerçeklendiğinden her $x \in [1, \pi/2]$ için $g(x) \in [1, \pi/2]$ sağlanır. Yani $g(x)$ fonksiyonun $[1, \pi/2]$ aralığında en az bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$|g'(x)| = |1.4 \cos x| = 1.4 |\cos x| \leq 1.4 \max_{1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\cos x|$$

olduğundan $h(x) = \cos x$ dersek bu fonksiyon $x \in [1, \pi/2]$ için $h'(x) = -\sin x < 0$ özelliğini sağladığından monotan azalandır ve ekstremum değerlerini uç noktalarda alır. Buna göre

$$|h(1)| = |\cos 1| = 0.54030 > |h(\pi/2)| = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

olduğundan

$$|g'(x)| \leq 1.4 \max_{1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\cos x| = 1.4 \cos 1 = k = 0.75642 < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki şekilde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası vardır.

(b) $p_0 = 1.4$ ise $p_1 = g(p_0) = 1.4 \sin 1.4 = 1.3796$'dır. n iterasyon sayısını göstermek üzere $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \leq 10^{-6}$ olduğundan

$$|p_n - p| \leq \frac{0.75642^n}{1 - 0.75642} |1.3796 - 1.4| \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{0.75642^n}{0.24358}(0.0204) \leq 10^{-6} \Rightarrow$$

$$0.75642^n \leq 0.11940 \times 10^{-4} \Rightarrow n \log(0.75642) \leq \log(0.11940 \times 10^{-4}) \Rightarrow$$
$$n(-0.12124) \leq -4.9230 \Rightarrow n \geq 40.605$$

yani $n \geq 41$ elde edilir.

Örnek 2.2.11. Sabit Nokta Metodunu kullanarak $xe^x = 0.3$ denkleminin $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökünü beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanarak $p_0 = 0.2$ olmak üzere 10^{-4} hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonunun bir sabit nokta fonksiyonunun $g(x) = 0.3e^{-x}$ olduğunu gösterelim. Açık olarak üstel $g(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de ve özel olarak $[0.1, 0.9]$ aralığında süreklidir. Ayrıca $g'(x) = -0.3e^{-x} < 0$ eşitsizliği her x için sağlandığından fonksiyon monoton azalandır. Dolayısıyla $g(x)$ maksimum değerini $[0.1, 0.9]$ aralığının solunda, minimum değerini ise sağında alır.

$$g(0.1) = 0.3e^{-0.1} = 0.27145 < 0.9$$
$$g(0.9) = 0.9e^{-0.9} = 0.12197 > 0.1$$

olduğundan her $x \in [0.1, 0.9]$ için $g(x) \in [0.1, 0.9]$ sağlanır. Dolayısıyla Sabit Nokta Teoremi'ne göre verilen aralıkta $g(x)$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Ayrıca

$$|g'(x)| = |0.3e^{-x}| \leqq 0.3 \max_{0.1 \leqq x \leqq 0.9} e^{-x} = 0.3e^{-0.1} = 0.27145 = k < 1$$

sağlandığından yani $g(x)$ fonksiyonunun mutlak değeri üstten $k = 0.27145$ gibi birden küçük bir sayı ile sınırlı olduğundan, Sabit Nokta Teoremi'ne göre $[0.1, 0.9]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonunun sabit noktası tek türlü belirlidir. Şimdi Sabit Nokta Metodu'nu kullanarak 10^{-4} hassaslıkla istenen kökü bulalım. Buna göre

$$p_n = g(p_{n-1}) \Rightarrow p_n = 0.3e^{-p_{n-1}}$$

olduğundan

n	p_n	$g(p_n)$	$\|p_n - g(p_n)\|$
0	0.20000	0.24562	0.45620×10^{-1}
1	0.24562	0.23467	0.10950×10^{-1}
2	0.23467	0.23725	0.25800×10^{-2}
3	0.23725	0.23664	0.61000×10^{-3}
4	0.23664	0.23678	0.14000×10^{-3}
5	0.23678	0.23675	0.30000×10^{-4}

elde edilir. Dolayısıyla $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonun $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökü 10^{-4} hassaslıkla $p_5 = 0.23675$ olarak bulunur.

Hatırlatmalar

$P(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğru denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru denklemi

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

Pr 165. $y = x^3 + 2x^2 + 8$ eğrisine $x = 1$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulun.

$x_0 = 1$ noktasında

$y_0 = 1^3 + 2 \times 1^2 + 8 = 11$

$y' = 3x^2 + 4x$

$y' = 3 \times 1^2 + 4 \times 1 = 7$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 11 = 7(x - 1)$

$y = 11 + 7x - 7$

$y = 7x + 4$

Pr 166 $y = \sin x^2$ eğrisine $x = 1$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulun.

cevab:

$y' = 2x \cdot \cos x^2$

$m = 2 \times 1 \times \cos 1^2$

$m = 1.08$

$x_0 = 1 \quad y_0 = \sin 1^2 = 0.8$

$y - 0.8 = 1.08(x - 1)$

$y = 1.08x - 0.28$

Pr 167 $y = x^2$ eğrisinin $x = 0$ noktasındaki teğetini bulun

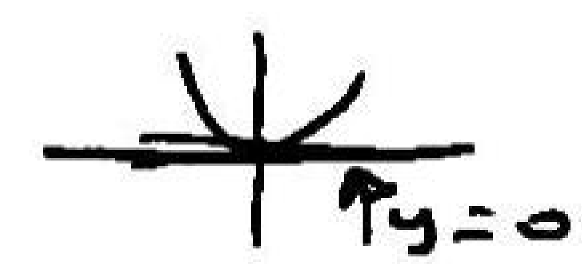
cevap: $y = x^2 \quad y' = 2x$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad m = 2 \times 0 = 0$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = 0(x - 0)$

$y = 0$



Pr 17 $y=x^3+2x^2+8$ eğrisine $x=1$ noktasında çizilen teğetin x eksenini kestiği noktayı bulun.

Cevap

Önceki problemde teğet denklemi $y=7x+4$ olarak bulmuştu. x eksenini kestiği nokta

$$0=7x+4$$

$$x=-\frac{4}{7}$$

Pr 18

$y=f(x)$ eğrisine $x=x_0$ noktasında çizilen teğeti bulun.

Cevap.

$$y_0=f(x_0)$$

$$y'=f'(x)$$

$$m=f'(x_0)$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y=mx-mx_0+y_0$$

$$y=mx-mx_0+y_0$$

$$y=f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+y_0$$

x eksenini kestiği yer

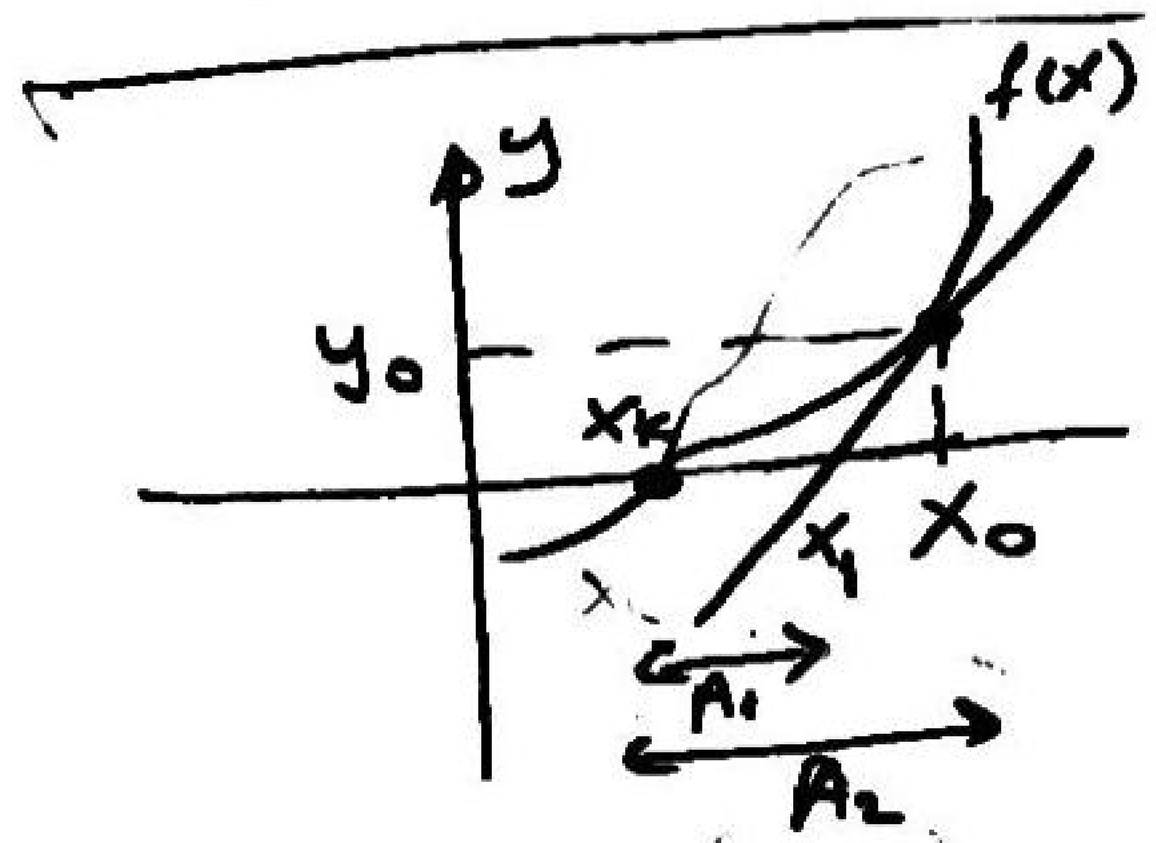
$$0=f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+y_0$$

$$x=\frac{f'(x_0).x_0-y_0}{f'(x_0)}$$

$$x=x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}$$

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Newton - Raphson Metodu:



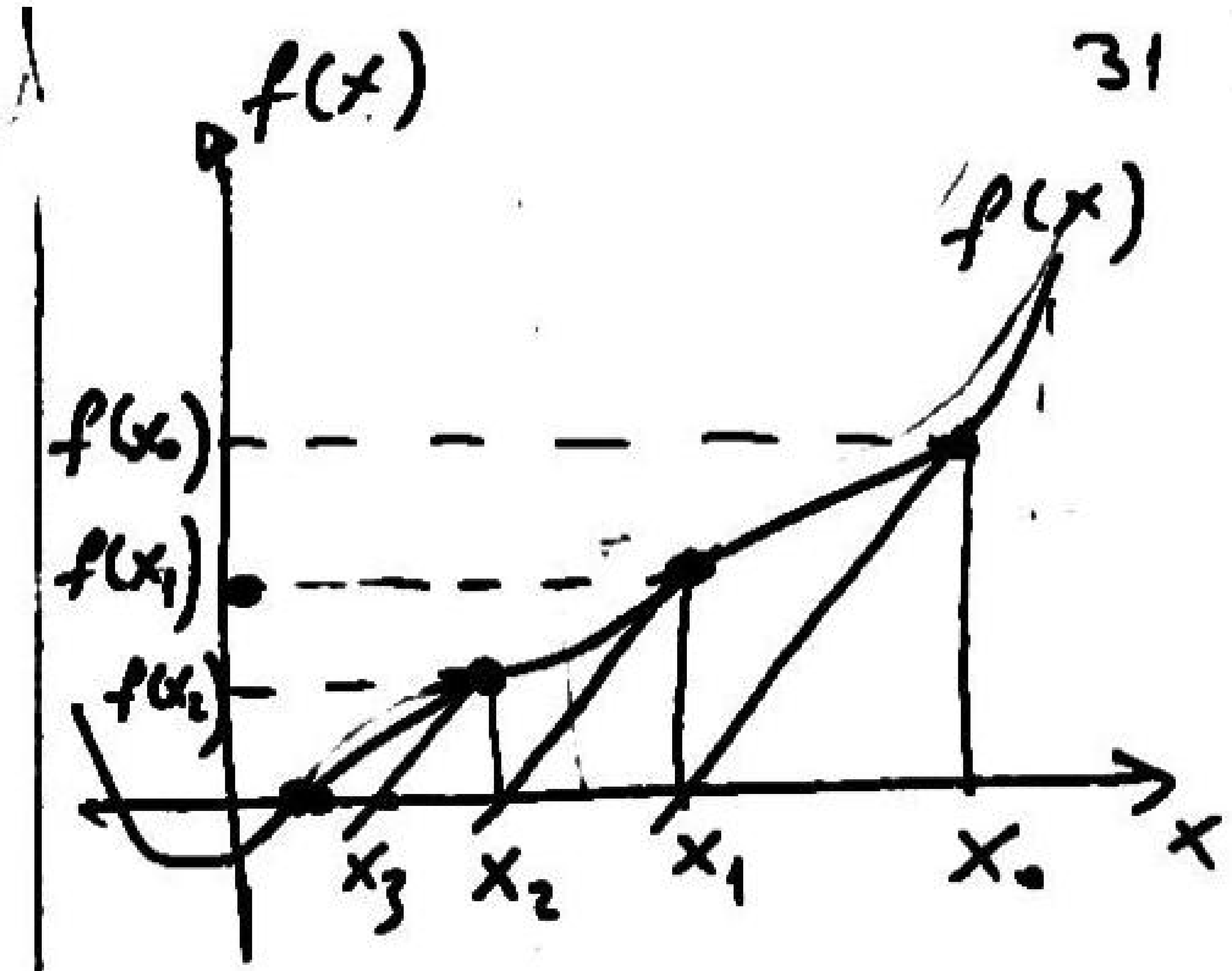
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

bulmuştuk.

Netwton-R. metodu.

x_1 noktasının x_k noktasına x_0'ra nazaran daha yakın olduğu prensibine dayanır.

$$A_1<A_2$$



$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Eğer $|x_{n+1}-x_n|<0.001$ ise kök'e 0,001 kadar yaklaşmışız demektir.

Pr 183

$f(x) = x^2 - 4$ denkleminde

$x_0 = 10.$ $x_1 = ?$ $x_2 = ?$ $x_3 = ?$

Cevap

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f(x_0) = f(10) = 10^2 - 4 = 96$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x_0) = f'(10) = 20$$

$$x_1 = 10 - \frac{96}{20} = 5.2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 5.2 - \frac{5.2^2 - 4}{2 \times 5.2} = 2.98$$

$$x_3 = 2.98 - \frac{2.98^2 - 4}{2 \times 2.98} = 2.16$$

$\vdots$

$$x_4 = 2.16 - \frac{2.16^2 - 4}{2 \times 2.16} = 2.006$$

$x_5 = 2.00009$

$x_6 = 2.000000003$

Pr 184

32

$f(x) = x^5 - 3x^2 - 20$

$x = 3$ alarak $x_1 = ?$ $x_2 = ?$

Cevap.

$$f'(x) = 5x^4 - 6x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{3^5 - 3 \times 3^2 + 20}{5 \times 3^4 - 6 \times 3}$$

$$= 2.49$$

$$x_2 = 2.49 - \frac{2.49^5 - 3 \times 2.49^2 + 20}{5 \times 2.49^4 - 6 \times 2.49}$$

$$= 2.16$$

$x_3 = 2.024$

$x_4 = 2.02$

$x_5 = 2.0004$

$x_6 = 2.0000001$

$x_7 = 2.00000000001$

$f(2) = 2^5 - 3 \times 2^2 - 20 = 0$

$x = 2$ kök dür.

Newton-Rapson Method.

$f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Algorithm

Step 1- x degeri icin bir tahmin yap $x = x_0$

Step 2- $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Step 3 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Step 4 Iterasyona devam et, Taaa ki $x_{n+1} \cong x_n$ olana kadar

Ornek: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 4x^2 - 10) = 3x^2 - 8x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 - 8x}$$

Step 1: $x_0 = 2$

Step 2 $x_1 = x_0 - \frac{x_0^{\ 3} + 4x_0^{\ 2} - 10}{3x_0^{\ 2} - 8x_0}$

$$x_1 = 2 - \frac{2^3 + 4 \quad 2^2 - 10}{3 \quad 2^2 - 8 \quad 2} = 1.5$$

Step 3: $x_2 = 1.5 - \frac{1.5^3 + 4 \quad 1.5^2 - 10}{3 \quad 1.5^2 - 8 \quad 1.5} = 1.37333$

$$x_3 = 1.3733 - \frac{1.3733^3 + 4 \quad 1.3733^2 - 10}{3 \quad 1.3733^2 - 8 \quad 1.3733} = 1.365262$$

$x_4 = 36523001391$, $x_5 = 36523001341$ ……

$x_{10} = 1.36523001341$, $x_{11} = 1.36523001341$

Secant Method

$$x_{n+2} = x_n - \frac{f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

Step 1: Estimate x_0, x_1

Step 2: Calculate $f(x_0), f(x_1)$

Step 3: Calculate $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

Step 4 Calculate $f(x_2)$ and $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$

Step 5 calculate x_4, x_5, x_6..... Continue the iteration untill $x_{n+1} \cong x_n$

Example $f(x) = \cos x - x = 0$

Step 1: Estimate x_0, x_1 $\quad x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$

Step 2: $f(x_0) = f(0.5) = \cos(0.5) - 0.5 = 0.37758$,

$f(x_1) = f(0.6) = \cos(0.6) - 0.6 = 0.225335$

Step 3:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.6 - \frac{0.225335(0.6 - 0.5)}{0.225335 - 0.37758}$$

$=0.748008$

Step 4: $f(x_2) = \cos(0.74808) - 0.74808 = -0.014962$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x1)} = 0.74808 - \frac{-0.014962(0.74808 - (}{-0.014962 - 0.22533}$$

$=0.73885$

Step 5: $x_4 = 0.739084$, $x_5 = 0.73908513$,

$x_6 = 0.73908513$

n	x_n
	0
1	0.57735
2	0.630463
3	0.645652
4	0.650423
5	0.651962
6	0.652462
7	0.652625
8	0.652678
9	0.652695
10	0.652701
11	0.652703
12	0.652703

Görüldüğü gibi tolerans değerine 12 iterasyon sonucu ulaşılmıştır. 4, 5 ve 6. iterasyon değerlerine Aitken ivmelendirme formülünü uygulayalım

$$\Delta x = x_5 - x_4 = 0.001539$$

$$\Delta^2 x = x_6 - 2x_5 + x_4 = -0.00104$$

değerleriyle

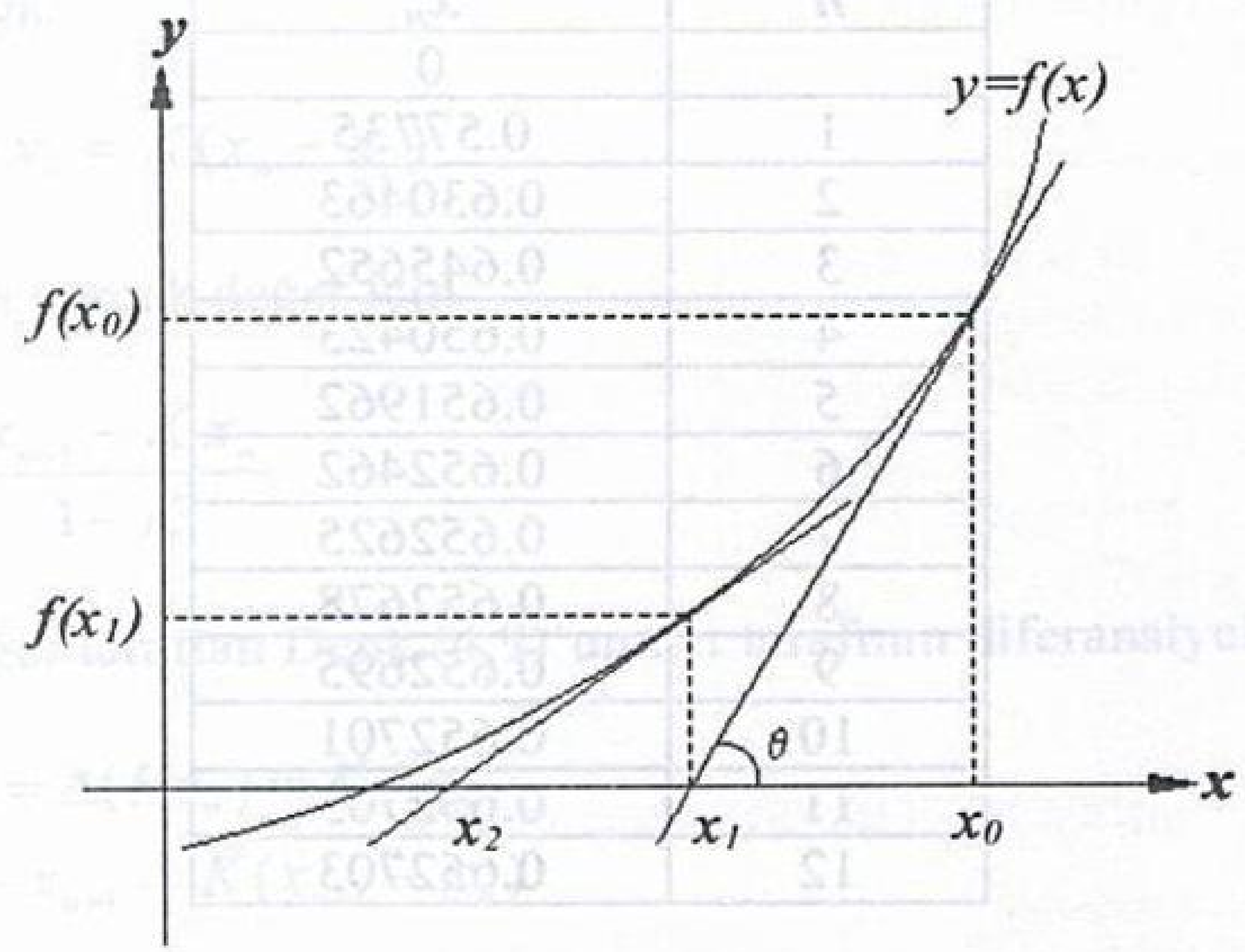
$$x_r = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = 0.652703$$

aranan sonuç 6 iterasyon sonucu ivmelendirme işlemiyle bulunmuş oldu.

4.2.4 Newton-Raphson Yöntemi

İşlem adımları açısından basit iterasyon yöntemi gibidir. Ancak iterasyon formülü farklı olup verilen fonksiyonun türevini de kullanır. Bu formül aşağıdaki şekilden yararlanarak kolayca elde edilebilir. Yöntem, seçilen noktadaki teğetin eğiminden yararlanarak köke yakın bir başka noktanın bulunması esasına dayanır. Kök civarında seçilen bir x_0 noktasındaki fonksiyonun teğetinin x eksenini kestiği x_1 noktası şeklin geometrisinden

$$\tan\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (4.11)$$



Şekil 4.5 Newton-Raphson yönteminin grafik gösterimi

Bulunan x_1 noktasındaki eğimden yararlanarak, benzer şekilde, x_2 noktası bulunabilir. İterasyona devam edilerek istenildiği kadar kök değerine yaklaşmak mümkündür. Genel olarak n. iterasyona ait iterasyon denklemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (4.12)$$

olacaktır. Buna göre yönteme ait işlem adımları şöyle sıralanabilir.

1-) Verilen $f(x) = 0$ fonksiyonun türevi alınır.

2-) İterasyona başlamak için tahmini bir başlangıç değeri alınır (x_0). Genel iterasyon denklemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

kullanılarak yeni x değerleri bulunur.

3-) İterasyona

$|x_{n+1} - x_n| < TD_1$

ve/veya

$|f(x_{n+1})| < TD_2$

oluncaya kadar devam edilir.

4-) Tolerans değeri sağlanıyorsa aranan kök x_{n+1} dir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, fonksiyonun türevi ele alınan nokta için sıfır ise iterasyon formülünün tanımsız hale geleceğidir. Genelde Newton-Raphson yöntemi daha hızlı sonuç verir. Ancak bu yöntemin de yetersiz kaldığı veya sonuç vermediği bazı durumlar vardır.

Örnek 4.5:. Aşağıdaki denklemin en küçük pozitif kökünü hesaplayınız.

$$f(x) = 3x + Sinx - e^x$$

Çözüm: Newton-Raphson yöntemi için fonksiyonun türevi

$$f' = 3 + Cosx - e^x$$

genel iterasyon denkleminde yazılırsa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n + Sinx_n - e^{x_n}}{3 + Cosx_n - e^{x_n}}$$

elde edilir. İterasyona $x_0=0$ ilk değeri ile başlanırsa ve x değerinin radyan olduğu göz önüne alınırsa elde edilecek iterasyon değerler

$n=$	0	1	2	3
$x_n=$	0	0.3333	0.3602	0.3604

olacaktır. Aranan kök değeri x= 0.3604'tür.

Yakınsama hızı

Newton-Raphson yönteminin yakınsama şartı ve yakınsama hızını veren bağıntılar elde edilebilir. Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemlerinin genel iterasyon formülleri mukayese edilirse g(x) fonksiyonuna karşılık Newton-Raphson yönteminde

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4.13}$$

ifadesinin geldiği görülür. Yakınsama için türevin büyüklüğü önemli olduğuna göre

$$|g'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| < 1 \tag{4.14}$$

Newton-Raphson yöntemine ait yakınsama kriteri elde edilir.

Yakınsama hızını elde etmek üzere Taylor serisi kullanılabilir. Basit iterasyondan

$$x_{n+1} - x_r = g(x_n) - g(x_r) \tag{4.15}$$

olduğu bilinmektedir. Diğer yandan $g(x)$ fonksiyonu kök civarında Taylor serisine açılır ve yüksek mertebeden türevler atılırsa

$$g(x_n) = g(x_r) + (x_n - x_r)g'(x_r) + (x_n - x_r)^2 \frac{g''(x_r)}{2} \tag{4.16}$$

yazılabilir. Yukarıdaki yakınsama şartı ifadesinden, kök değeri için $f(x_r)=0$ olduğundan

$$g'(x_r) = \frac{f(x_r)f''(x_r)}{\left(f'(x_r)\right)^2} = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. Buna göre yukarıdaki açılım

$$g(x_n) = g(x_r) + (x_n - x_r)^2 \frac{g''(x_r)}{2}$$

haline gelecektir. Bu ifade düzenlenirse

$$g(x_n)-g(r)=(x_n-x_r)^2\frac{g''(x_r)}{2}$$

ve Eşt.(4.15) kullanılırsa

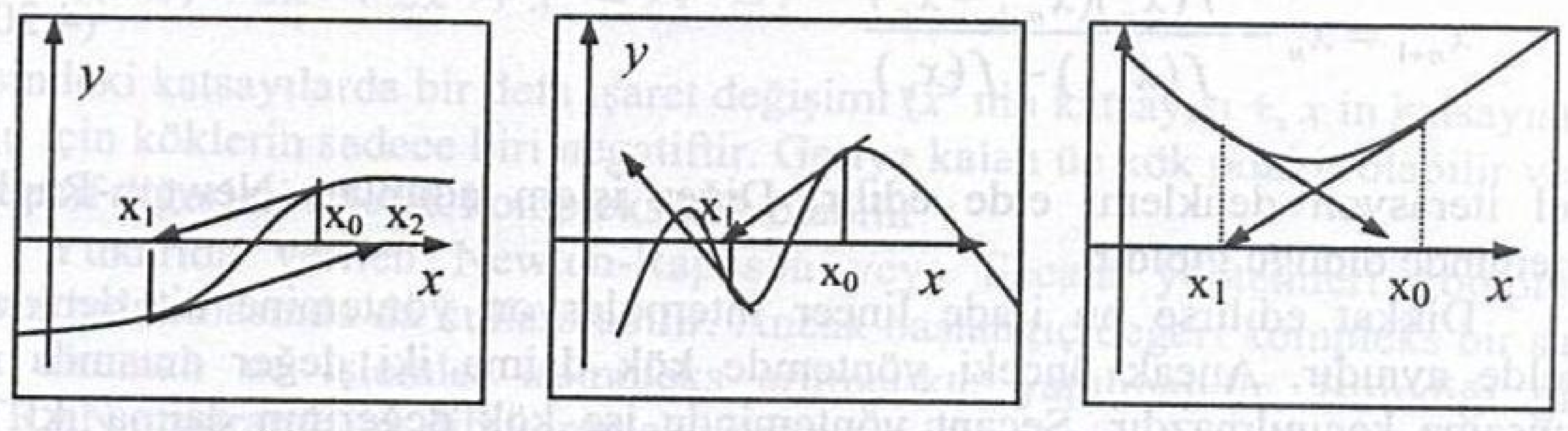
$$x_{n+1}-x_r=(x_n-x_r)^2\frac{g''(x_r)}{2}$$

elde edilir. Burada mutlak hata tanımı kullanılırsa

$$e_{n+1}=e_n{}^2\frac{g''(x_r)}{2} \qquad (4.18)$$

yazılabilir. Görüldüğü Newton-Raphson yöntemi ikinci dereceden yakınsama hızına sahip olup basit itersayona göre genelde daha hızlı sonuç verir.

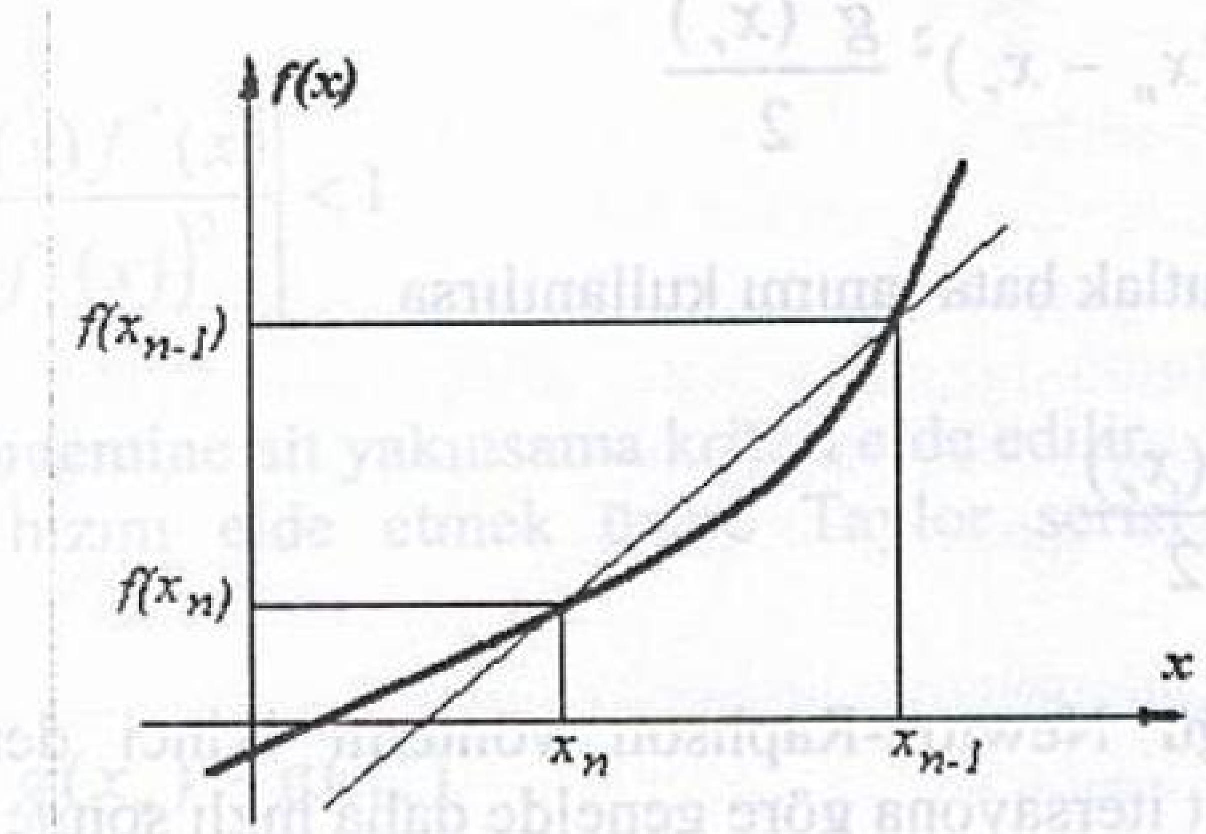
Yüksek yakınsama hızı nedeniyle çok sık kullanılan Newton-Raphson yöntemi bazı durumlarda çok yavaş kalabilir veya aşağıdaki grafik gösterimlerde olduğu gibi sonuç vermeyebilir. Şekil 4.6a'da başlangıç noktasındaki teğetin eğimine bağlı olarak ikinci nokta kök değerinin daha uzağına düşmekte ve böyle devam etmektedir. Şekil 4.6b'de birbirine yakın birden fazla kök olması hali görülmektedir. Başlangıç değerine bağlı olarak en yakın kök yerine bir başka kök değerine yakınsama olabileceği gibi ıraksama da olabilir. Şekil 4.6c'de ise kök olmamasına rağmen minimum nokta nedeniyle kök varmış gibi salınımlı yakınsama olabilmektedir. Ancak tepe noktasında genel iterasyon formülünün tanımsız hale geleceği açık olup aynı durum negatif bölgedeki maksimum nokta için de geçerlidir.



Şekil 4.6 Newton-Raphson yönteminin başarısız kalabildiği durumlar

4.2.5 Secant Yöntemi

Newton-Raphson yönteminin türev ifadesinden kurtarılmış şeklidir. Verilen fonksiyonun türevinin alınması zor veya problemli olduğu hallerde fonksiyonun türevi yerine yaklaşık olarak Şekil 4.7'deki kirişin eğimi



Şekil 4.7 Secant yönteminin grafik gösterimi

$$f'(x_n)\cong\frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{x_{n-1}-x_n} \qquad (4.19)$$

ifadesi kullanılabilir. Bu denklem ve çıkarılışı ileride sayısal türev konusu içerisinde verilecektir. Bu ifade Newton-Raphson denkleminde kullanılırsa Secant yöntemi için

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_{n-1}-x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)} \qquad (4.20)$$

genel iterasyon denklemi elde edilir. Diğer işlem adımları Newton-Raphson yönteminde olduğu gibidir.

Dikkat edilirse bu ifade lineer interpolasyon yöntemine ait denklemle temelde aynıdır. Ancak önceki yöntemde kök daima iki değer arasında olup yakınsama kaçınılmazdır. Secant yönteminde ise kök değerinin daima iki sınır arasında kalması söz konusu olmayıp bazı durumlarda ıraksama olabilir.

sağlandığından yani $g(x)$ fonksiyonunun mutlak değeri üstten $k = 0.27145$ gibi birden küçük bir sayı ile sınırlı olduğundan, Sabit Nokta Teoremi'ne göre $[0.1, 0.9]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonunun sabit noktası tek türlü belirlidir. Şimdi Sabit Nokta Metodu'nu kullanarak 10^{-4} hassaslıkla istenen kökü bulalım. Buna göre

$$p_n = g(p_{n-1}) \Rightarrow p_n = 0.3e^{-p_{n-1}}$$

olduğundan

n	p_n	$g(p_n)$	$\lvert p_n - g(p_n)\rvert$
0	0.20000	0.24562	0.45620×10^{-1}
1	0.24562	0.23467	0.10950×10^{-1}
2	0.23467	0.23725	0.25800×10^{-2}
3	0.23725	0.23664	0.61000×10^{-3}
4	0.23664	0.23678	0.14000×10^{-3}
5	0.23678	0.23675	0.30000×10^{-4}

elde edilir. Dolayısıyla $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonun $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökü 10^{-4} hassaslıkla $p_5 = 0.23675$ olarak bulunur.

2.3 Newton, Secant ve Regula Falsi Metotları

Newton metodu ya da diğer bilinen bir ismi ile **Newton-Raphson metodu** kök bulma probleminde kullanılan en güçlü ve iyi bilinen metotlardan birisidir. Bu bölümde anlatılacak diğer yaklaşım teknikleri Newton metodu kullanılarak elde edilmektedir. Newton metodunu ortaya koymak için pek çok yol izlenebilir. Biz metodun inşaasını Taylor polinomları ile yapacağız.

2.3.1 Newton Metodu

$f \in C^2[a,b]$ olsun. $f'(p_0) \neq 0$ ve $|p-p_0|$ farkı yeterince küçük olmak üzere p kök değerine $p_0 \in [a,b]$ gibi bir yaklaşım yapılsın. $f(x)$ fonksiyonunun p_0 civarında birinci Taylor polinomunu $\xi(x)$ sayısı x ile p_0 arasında olmak üzere

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{(x-p_0)^2}{2} f''(\xi(x))$$

şeklinde yazılabilir. Burada eğer $x = p$ alınırsa $\xi(p)$ sayısı p ile p_0 arasında olmak üzere

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

elde edilir. $f(p) = 0$ olduğundan

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

eşitliğine ulaşılır.

Newton metodu $|p-p_0|$ farkının çok küçük olduğu varsayımı altında $(p-p_0)^2$ değerinin çok daha küçük olması olgusuna dayanır. Buna göre oluşan hata ihmal edilebilir bir büyüklüktedir. Dolayısıyla

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

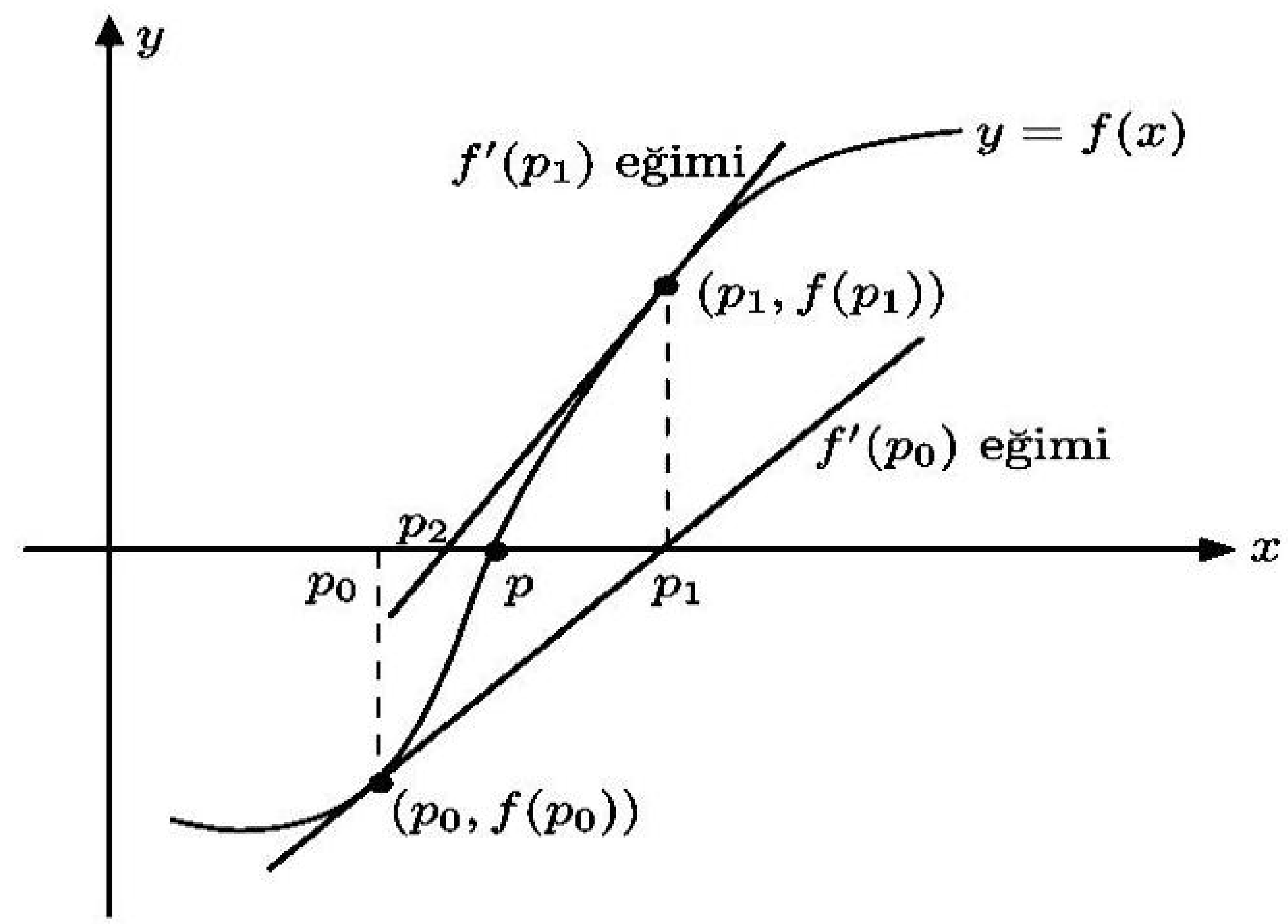
yazılabilir. Bu ifade p'ye göre düzenlenirse

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1, \;\; f'(p_0) \neq 0$$

elde edilir. Rekürsif olarak $n \geq 1$ için $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanırsa p_0 başlangıç yaklaşımı olmak üzere Newton metodu elde edilmiş olur (Bkz. Şekil 2.9).



Şekil 2.9: Newton metodu

İkiye bölme metodunda açıklanan tüm durma kriterleri Newton metodunda da kullanılabilir. Yani, bir ε değeri verildiğinde $p_1, p_2, \cdots, p_k$ her bir adımda kök değerine yapılan yaklaşımlar olmak üzere $n = 1, \cdots, k$ için

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon, \tag{2.8}$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \;\; p_n \neq 0 \tag{2.9}$$

veya

$$|f(p_n)| < \varepsilon \tag{2.10}$$

eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında yapılan yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilebilir. Fakat biliyoruz ki ne (2.8) ne (2.9) ne de (2.10)'dan elde edilen sonuçlar $|p_n - p|$ gerçek hata değerine tam olarak eşit değildir.

Newton metodu $n \geq 1$ için

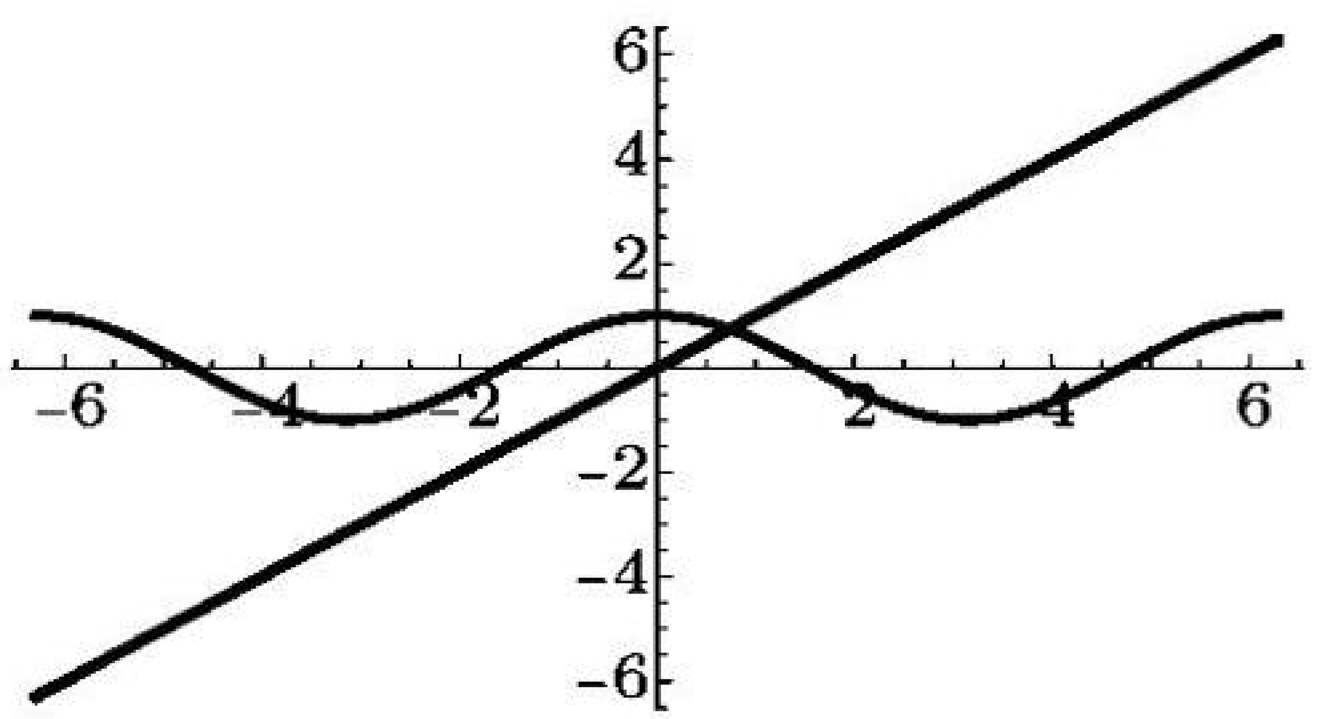
$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \tag{2.11}$$

olmak üzere $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel bir iterasyon tekniğidir. Bu metodun herhangi bir n noktasında $f'(p_{n-1}) = 0$ değerini alması durumda kullanılamayacağı (2.7)'den açıktır. Daha sonra gösterileceği üzere teknik f' ifadesinin sınırının sıfıra uzak olması durumda daha kuvvetli hale gelmektedir.

Örnek 2.3.1. $f(x) = \cos x - x = 0$ foksiyonu göz önüne alınsın. **(a)** sabit nokta ve **(b)** Newton metotlarını kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kök değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

(a) Verilen kök bulma problemi $x = \cos x$ şeklinde bir sabit nokta problemine dönüştürülebilir. Şekil 2.10'dan görüldüğü gibi $x = \cos x$ denkleminin tek türlü belirli sabit noktası $[0, \pi/2]$ aralığında yer alır.



Şekil 2.10: $x = \cos x$ ve $y = x$ eğrilerinin grafikleri

Grafik göz önüne alınmazsa $[0, \pi/2]$ aralığında $g(x) = \cos x$ fonksiyonunun tek türlü belirli bir sabit noktasının olduğu, yani Teorem 2.2.7'nin koşullarının sağlandığının gösterilmesi okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır.

$p_0 = \pi/4$ olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1}) = \cos(p_{n-1})$ alınırsa sabit nokta iterasyonu ile aşağıdaki tablo elde edilir:

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

Bu aşamada dikkat edilmesi gereken bir husus yakınsamanın göz önüne alınan fonksiyon için çok yavaş olduğudur. Zira uygulanan sekiz adımda $p_n = g(p_{n-1})$ eşitliği sağlanmamıştır. Dolayısıyla adım sayısını arttırmak gerekir.

(b) $f(x) = \cos x - x = 0$ fonksiyonunun $f'(x) = -\sin x - 1$ türevi üzerinde çalışılan $[0, \pi/2]$ aralığıda sıfırdan farklı olduğundan Newton metodu kullanılabilir. Buna göre $p_0 = \pi/4$ seçilir ve $n \geq 1$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_n = p_{n-1} - \frac{\cos x - x}{-\sin x - 1}$$

dizisi göz önüne alınırsa aşağıdaki tablo değerleri elde edilir:

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Tabloya göre 10 ondalık basamak alınarak yapılan bu yaklaşımda p_3 ile p_4 değerleri aynı olduğundan aranan kök değerinin 0.7390851332 olduğu sonucuna ulaşılır.

2.3.1.1 Newton Metodunda Yakınsama

Örnek 2.3.1'de görüldüğü üzere Newton metodu ile az sayıda iteresyonla, yakınsaması çok hızlı yaklaşımlar yapmak mümkündür. Örnek 2.3.1'de sabit nokta metodu ile elde edilen yedinci iterasyon değerinden daha iyi bir yaklaşıma Newton metodunun ilk iterasyonunda rastlanmaktadır. Şimdi Newton metodunun neden bu kadar etkili olduğunu inceleyelim: Newton metodunun Taylor serisi kullanılarak yapılan inşaasında p_0 başlangıç yaklaşımı büyük önem taşımaktadır. Aslında en kritik varsayım $|p - p_0|$ değerinin çok küçük olduğu ve dolayısıyla $(p - p_0)^2$ ifadesini içeren terimin ihmal edilebileceğidir. Bu varsayım p_0 başlangıç yaklaşımı p gerçek kök değerinden çok farklı olması durumunda geçersiz olacaktır. Eğer p_0 yaklaşımı gerçek kök değerine yeterince yakın değil ise Newton metodu ile yapılan yaklaşımda yakınsamanın sağlanamayacağı şüphesi oluşabilir. Çoğu durumda, istisnalar olmakla birlikle, zayıf başlangıç yaklaşımı altında dahi yakınsamanın gerçeklendiği gözlemlenmektedir.

Teorem 2.3.2. *$f \in C^2[a,b]$ olsun. Eğer bir $p \in (a,b)$ için $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ koşulları sağlanıyorsa, alınan her $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ başlangıç yaklaşımı için Newton metodu kullanılarak yaratılan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p kök değerine yakınsamasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı vardır.*

Kanıt. İspat Newton metodunun

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde bir fonksiyonel iterasyon olarak analiz edilmesi olgusuna dayanır. k sayısı $(0,1)$ aralığında yeralsın. g fonksiyonunun kendini kendi içine resmettiği bir $[p-\delta, p+\delta]$ aralığını her $x \in (p-\delta, p+\delta)$ için $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği sağlanacak şekilde tespit edelim.

Analiz derslerinden biliyoruz ki $[a,b]$ aralığında sürekli bir h fonksiyonu için $p \in (a,b)$ olmak üzere $h(p) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, $[a,b]$'nin bir alt aralığı olan $[p-\delta_1, p+\delta_1]$ aralığında yer alan her x değeri için $h(x) \neq 0$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\delta_1 > 0$ sayısı mevcuttur. $h \equiv f'$ olarak göz önüne alınabilir. Zira f' süreklidir ve $f'(p) \neq 0$ koşulunu sağlar. Buna göre bir $\delta_1 > 0$ sayısı için $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1] \subseteq [a,b]$ olmak üzere $f'(x) \neq 0$ eşitsizliği gerçeklenir. Diğer taraftan $f \in C^2[a,b]$ ve her $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$ için

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

olduğundan $g \in C^1[p-\delta_1, p+\delta_1]$ bulunur.

$f(p) = 0$ kabulü altında

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

olduğu sonucu elde edilir. Diğer taraftan yine analiz derslerinden biliyoruz ki $[a,b]$ aralığında sürekli bir h fonksiyonu için $p \in (a,b)$ olmak üzere $h(p) = 0$ koşulu sağlanıyorsa, $[a,b]$'nin bir alt aralığı olan $[p-\delta, p+\delta]$ aralığında yer alan her x değeri için $|h(x)| \leq k$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Gerekli koşulları sağladığından $h \equiv g'$ alınabilir. Bu durumda $0 < \delta < \delta_1$ koşulunu sağlayan bir δ sayısı için $x \in [p-\delta, p+\delta] \subseteq [a,b]$ olmak üzere $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği gerçeklenir.

Şimdi g fonksiyonunun $[p-\delta, p+\delta]$ aralığını kendi içine resmettiğini gösterelim: Ortalama Değer Teoremi'ne göre $x \in [p-\delta, p+\delta]$ için $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p|$ eşitliğini sağlayacak bir ξ sayısı x ile p arasında mevcuttur. Buna göre

$$|g(x) - g(p)| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p| \leq k|x-p| < |x-p|$$

elde edilir. x sayısı $x \in [p-\delta, p+\delta]$ aralığında yer aldığından $|x-p| < \delta$ sağlanır ve dolayısıyla $|g(x)-p| < \delta$ olduğu sonucuna ulaşılır. $|g(x)-p| < \delta$ yazılımından her $x \in [p-\delta, p+\delta]$ için $p-\delta \leq g(x) \leq p+\delta$ eşitsizliği elde edildiğinden g fonksiyonunun $[p-\delta, p+\delta]$ aralığını kendi içine resmettiği bulunur.

Yukarıda elde edilen tüm çıkarımlardan $g(x)$ fonksiyonunun $[p-\delta, p+\delta]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin (Teorem 2.2.7) koşullarını sağladığı sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla ner $n \geq 1$ için

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

şeklinde tanımlanan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ başlangıç yaklaşımı için p kök değerine yakınsar. □

Örnek 2.3.3. $p_0 = 3$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanarak $y = x^3 - 4x - 5$ ve $y = e^x - 4x - 5$ eğrilerinin bir kesim noktasını Newton metodunu ile $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. Bu iki eğri aynı bir (x,y) noktasında kesişeceğinden $x^3 - 4x - 5 = e^x - 4x - 5 \Rightarrow x^3 = e^x$ eşitliğini sağlayan x noktası ya da buna denk olarak $f(x) = x^3 - e^x$ fonksiyonunun kökleri aranmalıdır. $f(x)$ fonksiyonu her mertebeden sürekli türevlere sahiptir ve $f'(x) = 3x^2 - e^x$ türev fonksiyonu $p_0 = 3$ başlangıç yaklaşımı için $f'(p_0) = f'(3) = 3 \cdot 3^2 - e^3 = 6.9145 \neq 0$ sağladığından Newton metodu kullanılabilir. Buna göre $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ için gerekli işlemler aşağıdaki gibi yapılır:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{6.9145}{6.9145} = 2 \Rightarrow f(p_1) = f(2) = 0.61094 > \varepsilon$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{0.61094}{4.6109} = 1.8675 \Rightarrow$$

$$f(p_2) = f(1.8675) = 0.40915 \times 10^{-1} > \varepsilon$$

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)} = 1.8675 - \frac{f(1.8675)}{f'(1.8675)} = 1.8675 - \frac{0.040915}{3.9906} = 1.8572 \Rightarrow$$

$$f(p_3) = f(1.8572) = 0.63619 \times 10^{-4} < \varepsilon$$

n	p_n	$f(p_n)$
0	3	6.9145
1	2	0.61094
2	1.8675	0.40915×10^{-1}
3	1.8572	0.63619×10^{-4}

Buna göre yukarıda verilen iki eğrinin kesim noktasının apsisine, 10^{-3} hassaslıkla yapılan yaklaşımın değeri $p_3 = 1.8572$ olarak elde edilir.

2.3.2 Secant Metodu

Newton metodu çok güçlü bir kök bulma tekniği olmakla birlikte her iterasyonda f fonksiyonunun türevinin aldığı değerin kontrol edilmesi gerekliliği bir zorluk olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırarak Newton metodundan daha zayıf bir metot elde etmek mümkündür. Bir p_{n-1} noktasındaki türev

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

ifadesi ile verildiğinden p_{n-1} değerinin p_{n-2}'ye yakın olduğu kullanılarak

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

elde edilir. Bu yaklaşım değeri

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Newton metodunda kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{\frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}} \\ &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \end{aligned} \tag{2.12}$$

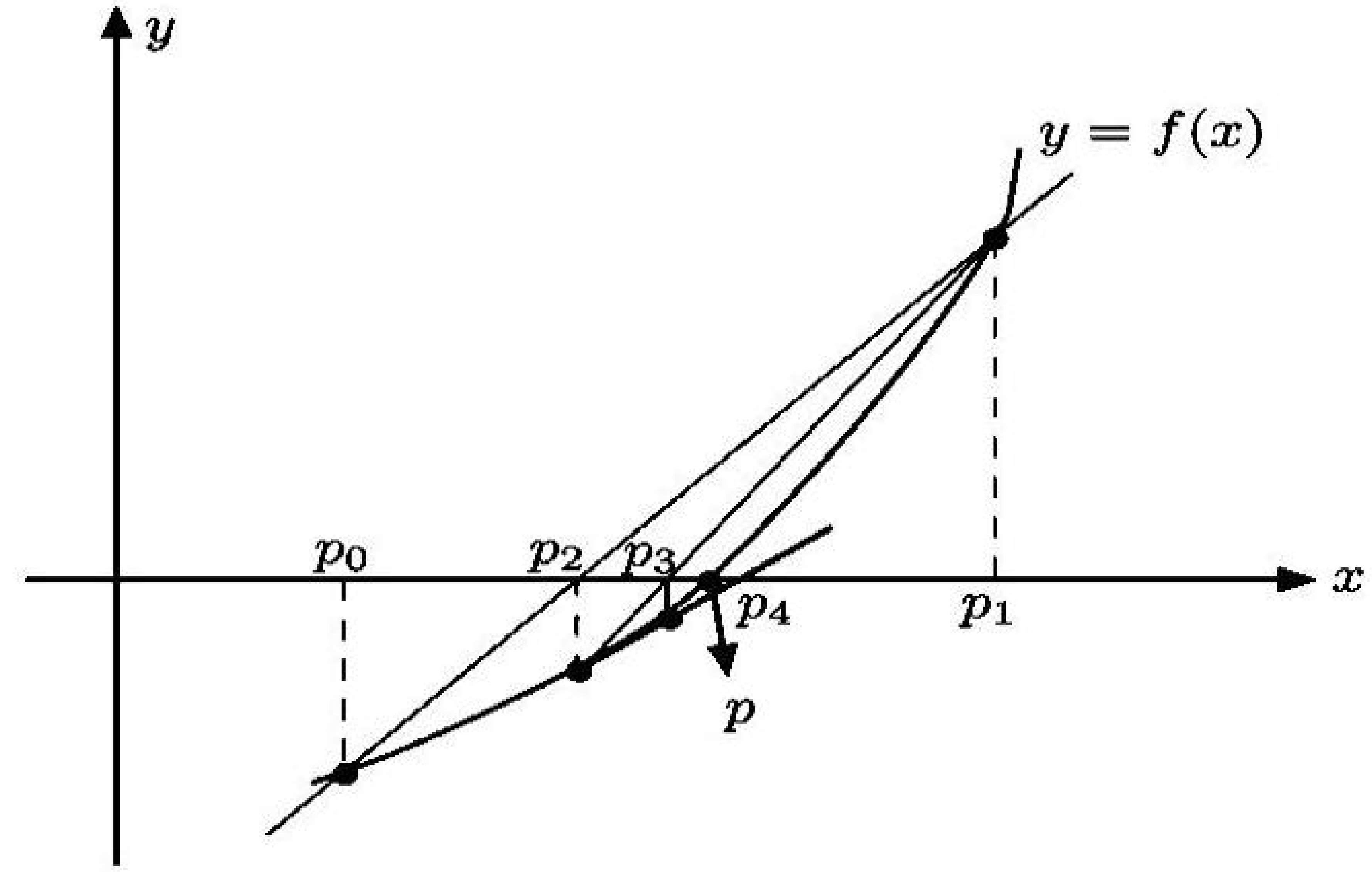
ifadesine ulaşılır. Yukarıda ifade edilen kök bulma tekniğine **Secant Metodu** adı verilir (Bkz. Şekil 2.11). Sekant metodunda Newton'dan farklı olarak p_0 ve p_1 gibi iki tane başlangıç yaklaşımı belirlemek gerekir.

Örnek 2.3.4. Örnek 2.3.1'de göz önüne alınan $x = \cos x$ denkleminin çözümüne Secant metodunu kullanarak yaklaşımlarda bulununuz. Bulduğunuz bu yaklaşımları Newton metodu ile elde edilen yaklaşımlarla kıyaslayınız.

Çözüm. $f(x) = \cos x - x$ olmak üzere, Örnek 2.3.1'de $p_0 = \pi/4$ başlangıç yaklaşımı için Newton ve sabit nokta metotları ile elde edilen yaklaşımların karşılaştırılması yapılmıştı. Şimdi problemi Secant metodu ile çözelim. Bunun için iki tane başlangıç yaklaşımına ihtiyaç vardır. $p_0 = 0.5$ ve $p_1 = \pi/4$ olarak seçilsin. $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \\ &= p_{n-1} - \frac{(\cos p_{n-1} - p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \end{aligned}$$

iterasyonu yapılarak aşağıdaki tablo elde edilir:



Şekil 2.11: Secant metodu

n	p_n
0	0.5000000000
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Örnek 2.3.1'den biliyoruz ki on ondalık basamak kullanılarak yapılan yaklaşım ile elde edilen kök değeri 0.7390851332'dir ve bu değere Newton metodu ile p_3 yaklaşımında, Secant metodu ile p_5 yaklaşımında ulaşılmıştır. Bu örnekte Secant metodunun yakınsama hızı Newton metoduna göre daha yavaş iken sabit nokta iterasyonu metodunun yakınsama hızına kıyasla çok daha hızlıdır.

Örnek 2.3.5. $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1.2$ olmak üzere Secant Metodunu kullanarak $\ln x = \cos x$ denkleminin bir çözümünü beş-dijit yuvarlama aritmetiği ile $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = \ln x - \cos x$ olsun. Bu denklemin kökleri bize yukarıdaki eşitliği sağlayan x değerini verir. Şimdi Secant metodunu uygulayarak $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1.2$ için köke yaklaşım yapalım.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

olduğundan

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} = 1.2 - \frac{f(1.2)(1.2-1)}{f(1.2) - f(1)}$$
$$= 1.2 - \frac{(-0.18004)(0.2)}{(-0.18004) - (-0.54030)} = 1.3$$
$$f(p_2) = f(1.3) = -0.51346 \times 10^{-2} \Rightarrow$$
$$|f(p_2)| = |f(1.3)| = 0.51346 \times 10^{-2} > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)(p_2 - p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} = 1.3 - \frac{f(1.3)(1.3-1.2)}{f(1.3) - f(1.2)}$$
$$= 1.3 - \frac{(-0.51346 \times 10^{-2})(1.3 - 1.2)}{(-0.51346 \times 10^{-2}) - (-0.18004)} = 1.3029$$
$$f(p_3) = f(1.3029) = -0.11084 \times 10^{-3} \Rightarrow$$
$$|f(p_3)| = |f(1.3029)| = 0.11084 \times 10^{-3} \leq \varepsilon = 10^{-3}$$

elde edilir. Buna göre aranan kök $p \approx p_3 = 1.3029$ olarak hesaplanır.

n	p_n	$f(p_n)$
0	1	-0.54030
1	1.2	-0.18004
2	1.3	-0.51346×10^{-2}
3	1.3029	0.11084×10^{-3}

2.3.3 Regula Falsi Metodu

Eğer bir yaklaşımda Secant metodunu kullanarak iterasyonlar oluşturur, aynı zamanda ikiye bölme metodunda olduğu gibi her bir adımda kökü ihtiva eden aralığı test ederek ilerlersek **Regula Falsi Metodu** ile bir yaklaşımda bulunmuş oluruz.

Bu metotla önce $f(p_0)f(p_1) < 0$ koşulunu sağlayan p_0 ve p_1 başlangıç yaklaşımları seçilir. Daha sonra Secant metodunda elde edilen iteratif formül kullanılarak, $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_1, f(p_1))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta olan p_2 yaklaşımı bulunur. p_3 yaklaşımını elde etmek için $f(p_1)$, $f(p_2)$ ve $f(p_3)$ değerlerinin işaretlerine bakılır. Eğer $f(p_1)f(p_2) < 0$ ise $(p_1, f(p_1))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 yaklaşımı olarak elde edilir. Eğer $f(p_0)f(p_2) < 0$ ise $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 yaklaşımı olarak elde edilir. Bu prosedür tekrarlanarak $p_4, p_5, \cdots$ yaklaşımları bulunur.

Şekil 2.12'de grafik anlamda Secant ve Regula Falsi metodu arasındaki fark gösterilmektedir. Secant metodunda işaretine bakılmaksızın elde edilen ardaşık yaklaşım noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği noktanın yeni yaklaşım değeri olarak elde edilmesine karşın, Regula Falsi metodunda ardaşık yaklaşım noktalarını birleştiren doğru parçasının x eksenini kestiği yeni yaklaşım noktasının işaretinin kendinden önceki iki yaklaşımın işaretleri ile karşılaştırılması yapılmaktadır. Şekil 2.12'de görüldüğü üzere Secant ve Regula

Örnek 4.12: Aşağıdaki denklemin [1,6] arasındaki kökünü 0.01 toleransla

$$f(x) = x^3 - 4x - 15$$

a) Yarıya bölme
b) Basit itersyon
c) Newton-Raphson

yöntemleriyle hesaplayınız

Çözüm:

a) Yarıya bölme yöntemini kullanarak çözüm:

x_L=1 ve x_R=6 alarak

$$\left.\begin{array}{l} y_L = f(1) = -18 \\ y_R = f(6) = 177 \end{array}\right\} \quad y_L \cdot y_R < 0 \text{ olduğundan arada kök var}.$$

$$x_M = \frac{x_R + x_L}{2} = 3.5 \rightarrow y_M = f(3.5) = 13.875 > TD$$

$$y_L \cdot y_M < 0 \Rightarrow \quad x_R = x_M = 3.5$$

$$\text{Yeni} \quad x_M = \frac{1 + 3.5}{2} = 2.25 \rightarrow y_M = f(2.25) = -12.6 \Rightarrow |y_M| > TD$$

$$y_L \cdot y_M > 0 \Rightarrow \quad x_L = x_M = 2.25$$

$$\text{Yeni} \quad x_M = \frac{2.25 + 3.5}{2} = 2.875 \rightarrow y_M = f(2.875) = -2.736 \Rightarrow |y_M| > TD$$

$$y_L \cdot y_M > 0 \Rightarrow \quad x_L = x_M = 2.875$$

$$\text{Yeni} \quad x_M = \frac{2.875 + 3.5}{2} = 3.1875 \rightarrow y_M = f(3.1875) = 4.635 > TD$$

$$y_L \cdot y_M < 0 \Rightarrow \quad x_R = x_M = 3.1875$$

$$\text{Yeni} \quad x_M = \frac{2.875 + 3.1875}{2} = 3.03125 \rightarrow y_M = f(3.03125) = 0.7275 > TD$$

$$y_L \cdot y_M < 0 \Rightarrow \quad x_R = x_M = 3.03125$$

Yeni

$$x_M = \frac{2.875 + 3.03125}{2} = 2.953125 \rightarrow y_M = f(2.953125) = -1.058 \Rightarrow |y_M| > TD$$

$$y_L \cdot y_M > 0 \Rightarrow \quad x_L = x_M = 2.953125$$

$$x_M = \frac{2.953125 + 3.03125}{2} = 2.99218 \rightarrow y_M = f(2.99218) = -0.179 \Rightarrow |y_M| < TD$$

Tolerans değer sağlandığından aranan yaklaşık kök değeri $x_M = 2.99218$ 'dir. Daha hassas bir sonuç için tolerans değer daha küçük tutularak yarıya bölme işlemine devam edilebilir.

b) Basit iterasyonla

Verilen denklemden x çekilerek

$$x = \sqrt[3]{4x + 15}$$

veya iterasyon denklemi olarak

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{4x_n + 15}$$

yazılabilir. Başlangıç olarak 2 değeri ile başlayıp iterasyonla sonuca yaklaşım aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi mümkündür. Tolerans değerini sağlayan 2.9995 değeri aranan kök değeridir.

n	$x_{n+1} = \sqrt[3]{4x_n + 15}$
	2
0	2.844
1	2.9766
2	2.9965
3	2.9995

c) Newton – Raphson yöntemi için fonksiyonun türevi alınırsa

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

iterasyon denklemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

başlangıç değeri 2 ile aşağıdaki sonuçları verecektir.

n	x_{n+1}
	2
0	3.875
1	3.200514
2	3.014141
3	3.000078

Bu sonuçlara göre aranan kök 3.000078'dir.

Verilen denklemin sözkonusu aralıktaki gerçek kökü 3 'tür. Buna göre sonuca en hızlı yaklaşan Newton-Raphson yöntemi olmuştur.

Örnek 4.13: Katı partiküller içeren bir akışkanın hareketinde sürtünme faktörünün *Reynolds* sayısına bağlılığı;

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{k}\ln(\text{Re}\sqrt{f}) + (14 - \frac{5.6}{k})$$

denklemiyle verilmektedir. Burada f : sürtünme katsayısı, *Re* Reynolds sayısı ve k bir sabittir. % 0.08 partikül konsantrasyonu için k=0.28 ise *Re* = 3750 için f sürtünme katsayısını basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleriyle hesaplayınız

Çözüm : Verilen ifadeyi basitleştirmek amacıyla

$$\sqrt{f} = x$$

tanımını yapıp ifadeyi yeniden düzenlersek ve sayısal değerleri yerine yazarsak

$$\frac{1}{x} = \frac{\ln(\text{Re}.x)}{k} + (14 - \frac{5.6}{k}) = \frac{\ln x}{k} + \frac{\ln \text{Re}}{k} + (14 - \frac{5.6}{k}) = \frac{\ln x}{k} + 23.391$$

elde edilir.

Basit iterasyon:	Newton-Raphson:
Yakınsama kriterini sağlayacak şekilde ifadeden x çekilirse	Fonksiyonun kapalı formu ve türevi $f(x)=\dfrac{x\ln x}{k}+23.3911x-1=0$
$x_{n+1}=\dfrac{1}{\dfrac{\ln x_n}{k}+23.3911}$	$f'(x)=\dfrac{\ln x}{k}+\dfrac{1}{k}+23.3911$
yazılabilir. İterasyona x_0=0.5 ile başlandığında elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır:	$x_{n+1}=x_n-\dfrac{\dfrac{x_n\ln x_n}{k}+23.3911x_n-1}{\dfrac{\ln x_n+1}{k}+23.3911}$ Buna göre aynı başlangıç değeri ile elde edilen iterasyon sonuçları aşağıdadır:

n	x_n (Basit iterasyon)	x_n (Newton-Raphson)
0	0.5	0.5
1	0.0478	0.11376
2	0.07979	0.040516
3	0.06963	0.07379
4	0.072073	0.071574
5	0.07143	0.0715674
6	0.07160	0.0715674
7	0.071556	
8	0.07156	
	$f=0.2675$	$f=0.2675$

olarak sürtünme katsayısı elde edilir. Görüldüğü gibi Newton-Raphson daha hızlı yakınsamıştır.

MATLAB TANITIMI

1- MATLAB programini baslatin.

MATLAB satirlari >> ile baslar. Diger satirlar aciklama satirlaridir.

\>>

2- Basit Hesaplari asagidaki sekilde yapabilirsiniz.

\>>a=5; b=6; c=a*b; d=a/b; e=sin(a);

\>>a=5, b=6, c=a*b,

3- Karisik hesaplamalar.

```
>> a=5;  b=6; c=7;
>> y=2*a+3*b+log(c)
```

y=2a+3b+ln(c)

```
>>z=a^2+b^3+exp(c)
```

$z=a^2+b^3+e^c$

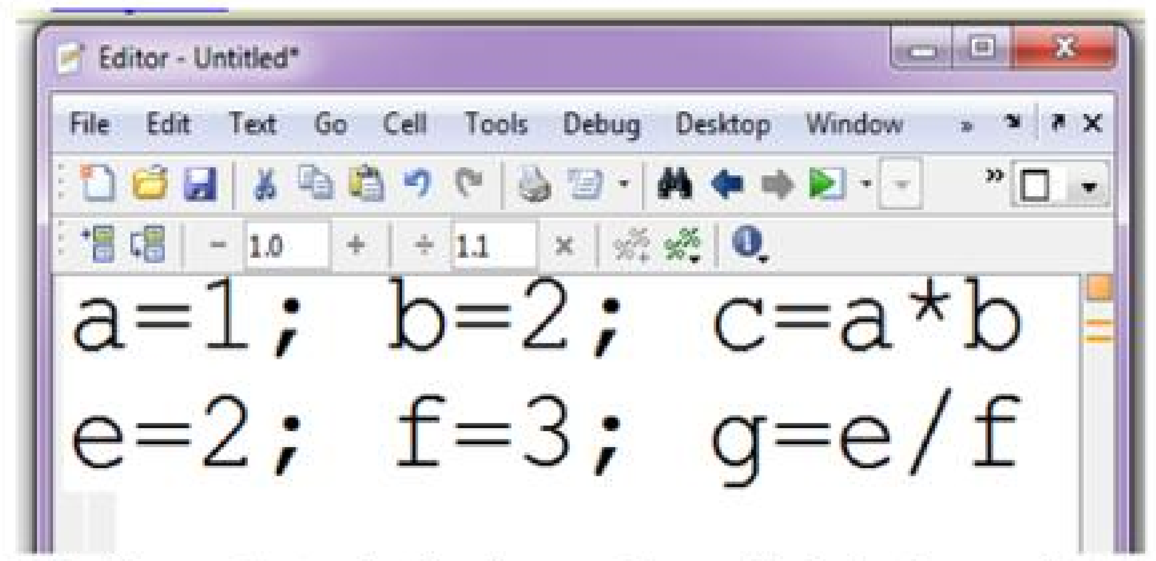
4. a) islemleri ekrandaki pencereye yazip anlik hesaplar yapabilirsiniz.

4. b) islemleri bir dosyaya yazip dosyadaki tum islemleri bir anda yaptirabilirsiniz.

5)Dosya acmak icin

File-New-Script butonlarina basiniz.

Ekrana gelen editor pencereye yazmak istediginiz komutlari yazin



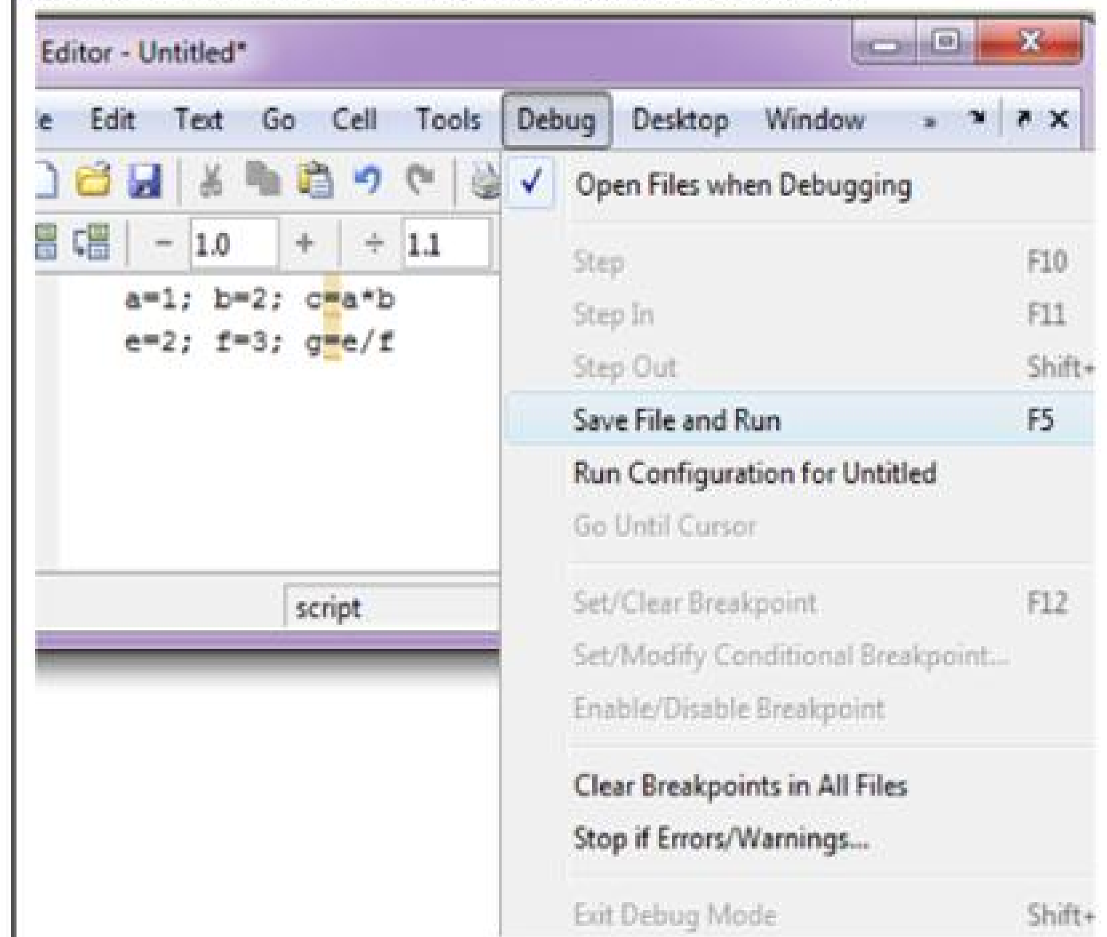
File-Save butonlarina basarak yazdiginiz dosyayi kaydedin. dosya adina herhangibir isim yazabilirsiniz. Ornek olarak **deneme1** yazin.

Bu sekilde kaydedilmis dosya 3 sekilde **run** edilebilir (kosturulabilir.). Uc metod ayni islevi gorur.

1.)yazdiginiz editor penceresinde.

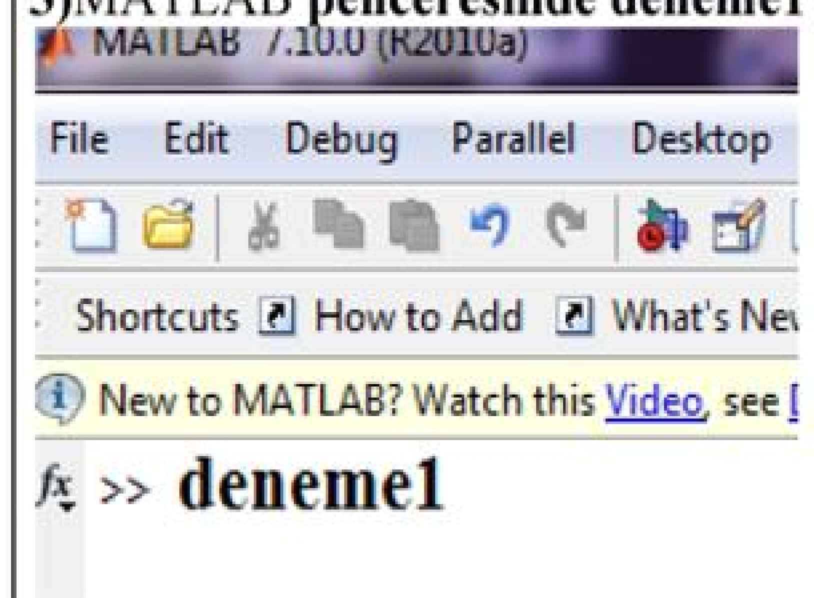
Debug

Save File and Run butonlarina basarak



2) klavyedeki **F5** tusuna basarak.

3)MATLAB **penceresinde deneme1** yazarak



Bu uc metoddan birisi yazdiginiz programi kosturmak icin yeterlidir.

Yazdiginiz dosyayi (deneme1) bilgisayari kapatip tekrar actiktan sonra yeniden kosturabilirsiniz. Yada deneme1 dosyasini baska bir bilgisayara tasiyip o bilgisayardaki MATLAB da kosturabilirsiniz.

Ozetle:

1)Programinizi bir dosyaya yazrsiniz

2)Dosyayi kadedersiniz

3)Programi (yukarida anlatilan 3 metoddan birisi ile) kosturursunuz.

MATLAB CALISMA

Ln(x)	e tabanina gore logaritma	log(x)
Log(x)	10 tabanina gore logaritma	log10(x)
e^x	exponensiyel fonksiyon	exp(x)
sin(x)	sinus fonksiyonu	sin(x)
cos(x)	kosinus	cos(x)
$\sin^{-1}$(x)	arc sin(x)	asin(x)
$\cos^{-1}$(x)	arc cos(x)	acos(x)
$\sqrt{x}$	Karekok	sqrt(x)

1)x=2 icin asagidaki fonksiyonun degerini hesaplayin

$$f(x) = 4x^3 - 10\cos(2x) + \sqrt{x^2+1}$$

fx=4*x^3-10*cos(2*x)+sqrt(x^2+1)

2)x=2 icin asagidaki fonksiyonun degerini hesaplayin

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{4x^3 - 10\cos(2x)}$$

fx= (x+sqrt(x^2+1))/(4*x^3-10*cos(2*x))

3)x=0 icin $f(x) = \frac{1}{x}$ degerini hesaplayin

4)x=-1 icin $\sqrt{x}$ degerini hesaplayin

5)x=-4 icin $\sqrt{x}$ degerini hesaplayin

6)x=-10 icin $\sqrt{x}$ degerini hesaplayin

7)Ln(10), Log(10), Ln(0) degerlerini hesaplayin

8)Ln(-10) degerlerini hesaplayin

9)cos(60^0) yi hesaplayin

10)arc cos(0.5) i hesaplayin.

11) arc cos(2) , arc sin(2) i hesaplayin.

Dosyaya Yazma

1)deneme1.m dosyanin icine asagidaki formulu yazin.

$$\text{ff} = x^3 - 4x + 10$$

a)Matlab ekraninda

\>>x=1; deneme1

yazarak x=1 icin ff i hesaplayin

b) >>x=2; deneme1

b) >>x=3; deneme1

b) >>x=4; deneme1

yazarak x=2,3,4 icin ff i hesaplayin

2)deneme2.m dosyanin icine asagidaki formulu yazin.

$$hip = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a)Matlab ekraninda

\>> a=3; b=4; deneme2

yazarak a=3; b=4; icin hipotenusu hesaplayin

\>> a=4; b=4; deneme2

\>> a=7; b=2; deneme2

\>> a=30; b=10; deneme2

yazarak degisik a,b degerleri icin hipotenusu hesaplayin

3)deneme3.m dosyanin icine asagidaki formulleri yazin.

$$kok1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad kok2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

Matlab ekraninda

\>>a=1; b=3; c=2; deneme3

\>>a=1; b=6; c=5; deneme3

\>>a=1; b=2; c=1; deneme3

\>>a=1; b=4; c=13; deneme3

yazarak cesitli a,b,c degerleri icin, ikinci derece denklemin koklerini bulun.

```
%yariya bolme yontemiyle kok
bulma
clear all;
%x-cos(x)=0
a=0.5; b=2;

 mid=(a+b)/2
 fmid=mid-cos(mid);
 fa=a-cos(a);
 if fmid*fa>0,
        a=mid
 else
        b=mid
 end;

 mid=(a+b)/2
 fmid=mid-cos(mid);
 fa=a-cos(a);
 if fmid*fa>0,
        a=mid
 else
        b=mid
 end;

 mid=(a+b)/2
 fmid=mid-cos(mid);
 fa=a-cos(a);
 if fmid*fa>0,
        a=mid
 else
        b=mid
 end;
---  --------------
%yariya bolme yontemiyle kok
bulma (for loop)
clear all;
%x-cos(x)=0
a=0.5; b=2;

for kk=1:3 %10,100, 1000
 mid=(a+b)/2
 fmid=mid-cos(mid);
 fa=a-cos(a);
 if fmid*fa>0,
        a=mid
 else
        b=mid
 end;
end;

[a b]
------------- --------
%yariya bolme yontemiyle kok
bulma
%DOnguyu uzatmamak icin if
konulmus
clear all;
%x-cos(x)=0
a=0.5; b=2;

for kk=1:100 %10,100, 1000
 mid=(a+b)/2
 fmid=mid-cos(mid);
 fa=a-cos(a);
 if fmid*fa>0,
        a=mid
 else
        b=mid
 end;
  if abs(b-a)<0.0001, break;
end;
end;

[a b]
------------ ------------
%Sabit nokta  yontemiyle kok
bulma
clear all;
%x-cos(x)=0
x=0;
x1=cos(x);

x=x1;
x1=cos(x);

x=x1;
x1=cos(x);

x=x1;
x1=cos(x);

x=x1;
x1=cos(x);
%veya
x=cos(x);
x=cos(x);
x=cos(x);
```

```
x=cos(x);
x=cos(x);
---------- ----------
%Sabit nokta  yontemiyle kok
bulma (for loop)
clear all;
%x-cos(x)=0
x=0;
x1=cos(x);

for kk=1:4
  x=x1;
  x1=cos(x)
end;
[x1,x]
------------------ ------
%Sabit nokta  yontemiyle kok
bulma (for loop).Donguyu
uzatmamak icin if konulmus
clear all;
%x-cos(x)=0
x=0;
x1=cos(x);
for kk=1:100
  x=x1;
  x1=cos(x)
  if abs(x1-x)<0.001, break,
end;
  kk
end;
[x1,x]
----------- ----------
%Newton Raphson  yontemiyle kok
bulma
 %f=x-cos(x),  f'=1+sin(x)
x0=0;
fx=x0-cos(x0);
ftx=1+sin(x0);
x1=x0-fx/ftx;
x0=x1;
fx=x0-cos(x0);
ftx=1+sin(x0);
x1=x0-fx/ftx;

x0=x1;
fx=x0-cos(x0);
ftx=1+sin(x0);
x1=x0-fx/ftx;
 x0,x1
----------- ----------
%Newton Raphson  yontemiyle kok
bulma (for loop)
clear all
%f=x-cos(x),  f'=1+sin(x)
x0=0;
fx=x0-cos(x0);
ftx=1+sin(x0);
x1=x0-fx/ftx;

for kk=1:2
  x0=x1;
  fx=x0-cos(x0);
  ftx=1+sin(x0);
  x1=x0-fx/ftx;
end;

x0,x1
------------- -----------
%Newton Raphson  yontemiyle kok
bulma (for loop)
%Donguyu uzatmamak icin if
konulmus
clear all
%f=x-cos(x),  f'=1+sin(x)
x0=0;
fx=x0-cos(x0);
ftx=1+sin(x0);
x1=x0-fx/ftx;

for kk=1:200
  x0=x1;
  fx=x0-cos(x0);
  ftx=1+sin(x0);
  x1=x0-fx/ftx;
  if abs(x1-x0)<0.0001, break,
end
  kk
end;

x0,x1
----------- -------------
```

MATLAB da Fonksiyon Tanimi

--------------------- -------------------

A)
1)Bir yeni dosya acin (file new)
2)Asagidaki satirlari dosyanin icine yazin.
(----- ile baslayan satirlari yazmayin)
3)Dosyaya hipotenus ismi vererek kaydedin. (save)

```
------------------- -----------
function  cc=hipotenus(x,y)
cc=sqrt(x^2+y^2)
---------------- -------------
>>hipotenus(3,4)
>>hipotenus(1,2)
>>hipotenus(10,20)
```

yazarak degisik degerler icin programi kosturun.

B)
1)Bir yeni dosya acin (file new)
2)Asagidaki satirlari dosyanin icine yazin.
(----- ile baslayan satirlari yazmayin)
3)Dosyaya hipveaci ismi vererek kaydedin. (save)

```
------------------- -----------
function  [aci, genlik]=hipveaci(x,y)
genlik=sqrt(x^2+y^2)
aci=180*atan(y/x)/pi
---------------- -------------
>>[aa,bb]= hipveaci (3,4)
>> [aa,bb]=hipveaci (1,2)
>> [aa,bb]=hipveaci (10,20)
```

yazarak degisik degerler icin programi kosturun.

C)
1)Bir yeni dosya acin (file new)
2)Asagidaki satirlari dosyanin icine yazin.
3)Dosyaya kok2bul ismi vererek kaydedin. (save)

```
------------------- -----------
function  [kok1, kok2]=kok2bul(a,b,c)
delta=b^2 - 4*a*c
if delta<0,
  disp(' Kokler Komplex ');
  disp(' MATLAB  Komplex koku de hesaplar');
end;

kok1=(-b+sqrt(delta))/2
kok2=(-b - sqrt(delta))/2
---------------- -------------
>>kok2bul(1,3,2)
>>kok2bul(1,4,2)
>>kok2bul(1,4,4)
```

yazarak degisik degerler icin programi kosturun.

D)
1)Bir yeni dosya acin (file new)
2)Asagidaki satirlari dosyanin icine yazin.
3)Dosyaya shacim ismi vererek kaydedin. (save)

```
------------------- -----------
function  hh=shacim(r,h)
hh=pi*r^2*h
---------------------------- ---------------------
>>shacim(2,3)
>>shacim(5,5)
```

yazarak degisik degerler icin programi kosturun.

E)
1)Bir yeni dosya acin (file new)
2)Asagidaki satirlari dosyanin icine yazin.
3)Dosyaya alanvehacim ismi vererek kaydedin. (save)

```
------------------- -----------
function  [alan, hacim]= alanvehacim (r,h)
hacim=pi*r^2*h
alan=pi*r^2+2*pi*h
---------------------------- ---------------------
>> [aa,bb]=alanvehacim (2,3)
>> [aa,bb]=alanvehacim (5,10)
>> [aa,bb]=alanvehacim (100,200)
```

yazarak degisik degerler icin programi kosturun.

F)
1)Bir yeni dosya acin (file new)
2)Asagidaki satirlari dosyanin icine yazin.
3)Dosyaya maxbul ismi vererek kaydedin. (save)

```
------------------- -----------
function  qq= maxbul(aa,bb)
qq=aa
if bb>qq, qq=bb;  end;
---------------------------- ---------------------
>> mm= maxbul(2,3)
>> mm= maxbul(3,2)
>> mm= maxbul(20,300)
>> mm= maxbul(-20,3)
```

yazarak degisik degerler icin programi kosturun.

Vektorlerin lineer bagimsizligi

P 201) aa=[1 2 3] ile bb=[10 20 30] vektorleri lineer bagimlidir. Cunku aa yi 10 nile carparsak bb yi elde ederiz.

P 202) aa=[1 2 3], bb=[5 1 8], cc=[6 3 11] vektorleri lineer bagimlidir. Cunku aa ve bb yi toplarsak cc yi elde ederiz.

P 203) aa=[1 2 3], bb=[1 1 1], cc=[11 12 13] vektorleri lineer bagimlidir. Cunku aa ve bb nin 10 katini toplarsak cc yi elde ederiz.

P 204) aa=[1 2], bb=[1 1],
vektorleri lineer bagimsizdir. Cunku aa yi carpip bb yi elde edecegimiz bir sayi yoktur.

P 204) aa=[1 0 0], bb=[0 1 0], cc=[0 0 1] vektorleri lineer bagimsizdir. Cunku aa yi bir sayi ile carpip bb yi baska bir sayi ile carpip cc yi elde etmemize imkan yoktur.

Lineer =dogrusal

Lineer bagimsiz=Dogrusal anlamda bagimsiz. Aralarinda dogrusal bir iliski yok.

Lineer denklem sistemleri

x+2=10 : Lineer denklem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 7y &= 20 \end{aligned}$$ Lineer Denklem Sistemi

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10, \\ 2x + 5y + 4z &= 20 \\ 5x + 13y + 9z &= 70 \end{aligned}$$ Lineer Denklem Sistemi

$x^2=4$ lineer olmayan denklem

$x^2+2x+4=0$ lineer olmayan denklem

$x + \cos(x)=0$ lineer olmayan denklem

$x + e^x = 0$ lineer olmayan denklem

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 10, \\ 2x + 4y &= 20 \end{aligned}$$ Liner olmayan denklem sistemi

Lineer olmayan denklem yerine kisaca **nonlineer** denklem denir.

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ 2x + xy &= 20 \end{aligned}$$ Liner olmayan denklem sistemi

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ 2x + \cos(y) &= 20 \end{aligned}$$ Liner olmayan denklem sistemi

P 211

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 4y &= 20 \end{aligned}$$ **Denklem Takimini Cozun**

x + 2y =10 => x=10-2y
Ikinci denklemde yerine koy
2(10-2y) + 4y = 20
20-4y)+ 4y = 20
20=20
Sonuc:
x+2y=10 => x=10-2y sartini saglayan butun x ve y ler her iki denklemi de cozer.
(x=0, y=5), (x=2, y=4), (x=4, y=3), ...
Denklem takiminin sonsuz cozumu vardir.

P 212

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 4y &= 30 \end{aligned}$$ **Denklem Takimini Cozun**

x + 2y = 10 => x=10-2y
Ikinci denklemde yerine koy
2(10-2y) + 4y = 30
20-4y)+ 4y = 30
20=30
Her iki denklemi cozecek x ve y degerleri mevcut degildir. Denklem takimi Cozumsuz.

P 213

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 3y &= 19 \end{aligned}$$ **Denklem Takimini Cozun**

x + 2y =
10 => x=10-2y
Ikinci denklemde yerine koy
2(10-2y) + 3y = 19
20-4y+ 3y = 19
-y=-20+19
y=1
x=10-2y=8
Denklemin cozumu tekdir. (x=8, y=1) denkelmin tek cozumudur.

Cozumun Varligi ve Tekligi
Bir lineer denklem takiminda katsayilar matrisi lineer bagimli ise cozum ya yoktur veya sonsuz coxum vardir.
Katsayilar matrisi ornek 211 ve 212 de
1.satir - -> 1 2
2. satir -->2 4
Birinci satiri -2 ile carpip 2. satira eklesek sifir olur. Yani birinci ve ikinci satir arasinda bir baginti vardir.

Bu durumda ya cozum yoktur veya sonsuz cozum vardir. KIsaca cozum tek degildir. Veya cozumler birbirine lineer bagimlidir.

TAHLIL
Durum1)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 4y &= 20 \end{aligned}$$ **Denklem sisteminde**

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisine katsayilar matrisi

$B=\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{bmatrix}$ matrisine

genisletilmis(augmented) matris denir.

Yukaridaki ornekte ikinci satir birinci satirin iki katidir. Bu A icinde B icinde boyledir. Dolayisi **ile sonsuz cozum vardir.**

Durum2)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 4y &= 30 \end{aligned}$$ **Denklem sisteminde**

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 30 \end{bmatrix}$ m atrisine

A matrisinde ikinci satir birincinin iki katidir. B matrisinde ikinci satir birincinin iki kati degildir. A matrisinin satirlari lineer bagimli B matrisinin satirlari lineer bagimli degil lineer bagimsizdir**. Cozum yoktur.**

Durum3)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10, \\ 2x + 3y &= 19 \end{aligned}$$ **Denklem sisteminde**

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 19 \end{bmatrix}$

A nin satirlari lineer bagimsizdir. satirlar arasinda dogrusal bir baglanti yoktur. yani birinci satiri bir sayi ile carpip ikinci satiri elde edemeyiz. B nin satirlari da bagimsizdir.
Sonuc: Denklem sisteminin cozumu vardir ve tekdir.

Cok degiskenli denklemler
Iki degiskenli bir denklemde durumu gormek kolaydir. 3 degiskenli bir sistemde durumu gormek o kadar kolay olmaz.

P 231)

x + 2y +3z= 10,
2x + 5y +4z= 20
5x + 13y+9z =50

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

Ilk bakista farkedilmemektedir. Ancak satirlar lineer bagimlidir. Birinci satiri -1 ile carpip, ikinci satiri 3 ile carpip eklersek ucuncu satiri elde ederiz.

[1 2 3]x (-1) = [- 1 -2 -3]

[2 5 4]x 3 = [6 15 12]
+

[5 13 9]

B matrisi icin durum aynidir. B nin satirlari lineer bagimlidir.

[1 2 3 10]x (-1) = [- 1 -2 -3 -10]

[2 5 4 20]x 3 = [6 15 12 60]
+

[5 13 9 50]

Sonuc: sonsuz sayida cozum vardir. P211 de oldugu gibi.

P 232)

x + 2y +3z= 10,
2x + 5y +4z= 20
5x + 13y+9z =70

A matr
isi ayni fakat B de son elemen 50 yerine 70 olmus. A matrisinin satirlari lineer bagimli B nin satirlari lineer bagimsizdir.
Sonuc: Bu denklemi saglayan bir x,y,z yoktur. cozum yoktur.

Lineer bagimsizligin hesabi
Bir denklem sistemi verildiginde o denkleme sisteminin lineer bagiml;i bagimsiz oldugunu anlamanin en kolay yolu matrisin alt tarafini sifir yapmaya calismaktir.

Gaus Eliminasyon Yontemiyle Lineer denklemlerin cozumu

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 17 & 14 \\ 1 & 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \xRightarrow{\text{Augmented Matrix}} \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 17 & 14 & 15 \\ 1 & 13 & 14 & 30 \end{bmatrix}$$

Birinci satiri 2 ile carp ikinci satira ilave et.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 17 & 14 & 15 \\ 1 & 13 & 14 & 30 \end{bmatrix} \qquad R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 4-2*2 & 17-2*6 & 14-2*8 & 15-2*4 \\ 1 & 13 & 14 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & 13 & 14 & 30 \end{bmatrix}$$

Birinci satiri -0.5 ile carp ucuncu satira ilave et.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & 13 & 14 & 30 \end{bmatrix} \qquad R_3 - 0.5R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 1-0.5*2 & 13-0.5*6 & 14-0.5*8 & 3-0.5*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 10 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

Ikinci satiri -2 ile carp ikinci satira ilave et.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 10 & 10 & 28 \end{bmatrix} \quad R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 10-2*5 & 10-2*(-2) & 28-2*7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

Sonuc denklemleri yaz.

$$2x + 6y + 8z = 4$$
$$5y - 2z = 17$$
$$14z = 14$$

Sondan Baslayarak denklemleri coz.

$$14z = 14 \;\Rightarrow\; z = \frac{14}{14} = 1$$

$$5y - 2z = 7 \;\Rightarrow\; 5y - 2*1 = 7 \;\Rightarrow\; 5y = 9 \;\Rightarrow\; y = \frac{9}{5} = 1.8$$

$$2x + 6y + 8z = 4 \;\Rightarrow\; 2x + 6*1.8 + 8*1 = 4 \;\Rightarrow\; 2x + 10.8 + 8 = 4 \;\Rightarrow\; x = -7.4$$

During the process we converted the coefficient matrix into **upper triangular Form**

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 17 & 14 & 15 \\ 1 & 13 & 14 & 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

LINEER DENKLEMLER (Denklem sayisi= Bilinmeyen sayisi)

$$\begin{matrix} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tek Cozum} \longrightarrow \begin{matrix} y=2 \\ x=1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x+y+z=7 \\ 4x-3y+z=6 \\ 2x-7y-2z=-9 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & -2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-4R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-2R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -22 \\ 0 & -11 & -4 & -23 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tek Cozum} \longrightarrow \begin{matrix} z=3 \\ y=1 \\ x=2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sonsuz Cozum}$$

$$\begin{matrix} x+y+z=7 \\ 4x-3y+z=6 \\ 2x-7y-z=-8 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-4R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-2R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -22 \\ 0 & -11 & -3 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sonsuz Cozum}$$

$$\begin{matrix} x+y=4 \\ 2x+2y=6 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cozum yok}$$

$$\begin{matrix} x+y+z=7 \\ 4x-3y+z=6 \\ 2x-7y-z=-5 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-4R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-2R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -22 \\ 0 & -11 & -3 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cozum yok}$$

Ozet

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ldots\ldots 0 \quad X \quad X \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tek Cozum} \qquad \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad 0\ldots 0 \quad 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sonsuz Cozum} \qquad \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad 0\ldots 0 \quad X \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cozum Yok}$$

Genisletilmis matris Gaus eliminasyon yontemiyle alt ucgeni sifirlamaya calis.
Eger en son satir tamamen sifir ise cozum sonsuz tane
Eger en son satirin en son 2 elemani sifirdan farkli ise tek cozum
Eger en son satirin sadece en son 1 elemani sifirdan farkli ise tek cozum yok

$$\begin{matrix} x+y+2z+3w=1 \\ x+y+3z+5w=4 \\ 2x+5y+8z+11w=6 \\ -x+2y+4z+4w=4 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4-R_1 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-R_2 \rightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3 \rightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Unique Solution} \quad \begin{matrix} w=2.5 \\ z=-2 \\ y=-0.1667 \\ x=-2.333 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4-3R_1 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3+4R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4+2R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \text{No Solution}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & -7 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2-2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4-3R_1 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3+4R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4+2R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Multiple Solution}$$

rank=lineer bagimsiz satir sayisi.

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=0$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\0&3&3\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=3$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=3$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\\1&2\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}1&10\\2&20\\3&30\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=4$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=4$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=4$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=4$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix},\quad \text{rank }(A)=4$$

A: katsayilar matrisi

$\tilde{A}$ **: Genisletilmis matris.**

r : bilinmeyen sayisi. (nxn icin denklem sayisi)

rank A=rank $\tilde{A}$ =r ==>tek cozum

rank A=rank $\tilde{A}$ < r ==>sonsuz cozum

rank A< rank $\tilde{A}$ ==> cozum yok

$$A=\begin{vmatrix}2&4&2&0&8\\0&4&0&1&10\\0&0&5&2&8\\0&0&0&7&2\\0&0&0&14&4\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}2&4&2&0&8\\0&4&0&1&10\\0&0&5&2&8\\0&0&0&7&2\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

Rank A=rank $\tilde{A}$ =r=4 **Tek Cozum**

$$A=\begin{vmatrix}2&4&2&0&8\\0&4&2&1&10\\0&0&0&2&8\\0&0&0&6&2\\0&0&0&14&4\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}2&4&2&0&8\\0&4&2&1&10\\0&0&0&2&8\\0&0&0&0&-22\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

Rank A=3, rank $\tilde{A}$ =4 **Cozum yok**

$$A=\begin{vmatrix}2&4&2&0&8\\0&4&2&1&10\\0&0&0&2&8\\0&0&0&4&16\\0&0&0&20&80\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}2&4&2&0&8\\0&4&2&1&10\\0&0&0&2&8\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

rank A=rank $\tilde{A}$ =3<4 **Sonsuz cozum**

---

dependent.

VECTORLER

>> a = [7 2 5], b = [9 0 3]
>>c=1:5
c= 1 2 3 4 5

>>d=5:8
d= 5 6 7 8

>>e=0:2:10
0 2 4 6 8 10

>>f=0:0.1:0.6
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6

>>g=zeros(1,6)
0 0 0 0 0 0

>>h=zeros(1,4)
0 0 0 0

>>k=ones(1,7)
1 1 1 1 1 1 1

>>m=ones(1,3)
1 1 1

TOPLAMA ve CIKARMA

>>a=[2 8 10], b=[1 4 3]

>> c= a + b
2 8 10
\+ 1 4 3
----
3 12 13

c=[3 12 13]

>>d=10*a
d=[20 80 100]

>>e=5*b
5 20 15

>>f=10*a + 5*b
25 100 115

>>g= a-b
2 4 7

VEKTORLERIN IC ICE KONULMASI

>>h = [1:5]
1 2 3 4 5

>>k = [1:5 1:3]
1 2 3 4 5 1 2 3

>>m = [0:2:10 10:3:22]
0 2 4 6 8 10 13 16 19 22

>> a = [8 10 3], b= [4 7 8]
>> c= [a b]
8 10 3 4 7 8

>> d = [a a a]
8 10 3 8 10 3 8 10 3

Komplex vectors

>> a = [3+4*j -6 +9j 2+5j -7j 30]

>> w = abs(a)
5 10.81 5.38 7 30

$\sqrt{3^2+4^2}=5, \quad \sqrt{6^2+9^2}=10.81 \ldots$

>> p=angle(a)
0.92 2.15 1.19 -1.57 0

>> s=angle(a)*180/pi
53.13 123.69 68.19 -90 0

$$\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=0.92^{\text{radian}}=53.13^0$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{9}{-6}\right)=2.15^{\text{radian}}=123.69^0$$

MATRISLER:

Asagidakileri yazin
>> a=[10 20 30; 40 50 60; 100 80 90];
>> b=[1 2 3; 4 5 6; -2 8 9];
c=[15 25 35];

$$a=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\\ 100 & 80 & 90\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ -2 & 8 & 9\end{bmatrix},$$
$$c=[15 \quad 25 \quad 35],$$

Toplama, Cikarma, Carpma, Bolme, normal islemler gibi yapilir.

>>qq=a+b, ww=a-b; ee=a*d;

$$qq=\begin{bmatrix}11 & 22 & 33\\ 44 & 55 & 66\\ -98 & 88 & 99\end{bmatrix}, ww=\begin{bmatrix}9 & 18 & 27\\ 36 & 45 & 54\\ 102 & 72 & 81\end{bmatrix}, ee=\begin{bmatrix}200\\ 440\\ 710\end{bmatrix}$$

' isareti matris transpozesi icin kullanilir.

```
>>m=[1 2 3; 4 5 6],  n=a',  d=[1 2 5]'
```

$$m=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \qquad n=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}, \qquad d=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$$

Satir ve Sutun islemleri

Asagidaki ifadeleri yazin ve G matrisini ekranda gorun

>> G=[10 20 30 40; 210 220 230 240 ; 310 320 330 340; 410 420 430 440];

$$G=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30 & 40\\ 210 & 220 & 230 & 240\\ 310 & 320 & 330 & 340\\ 410 & 420 & 430 & 440\end{bmatrix}$$

Asagidaki ifadeleri yazin ve sonuclari ekranda gorun
>>h=G(:,1), k= G(:,2), m= G(:,4), n=G(1,:), p=G(2,:),

$$h=\begin{bmatrix}10\\ 210\\ 310\\ 410\end{bmatrix}, k=\begin{bmatrix}20\\ 220\\ 320\\ 420\end{bmatrix}, m=\begin{bmatrix}40\\ 240\\ 340\\ 440\end{bmatrix},$$
$$n=[10 \quad 20 \quad 30 \quad 40],$$
$$p=[410 \quad 420 \quad 430 \quad 440]$$

Ayrica , r=G(1:2,:), t=G(:,1:2), s=G(1:2,1:2)

$$r=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30 & 40\\ 210 & 220 & 230 & 240\end{bmatrix}, t=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 210 & 220\\ 310 & 320\\ 410 & 420\end{bmatrix},$$
$$s=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 210 & 220\end{bmatrix},$$

>> aa=1:10
$aa=[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10]$
>> aa=1:7, bb=sin(aa),
bb=[0.84 0.9 0.14 -0.75 -0.95 -0.27 0.65]
her elemanin ayri ayri sinusu alinir
bb=[sin(1) sin(2) sin(3) sin(4) sin(5) sin(6) sin(7)];

Matrices can be nested into each other. Examine the following examples.
>>a=[1 2 3]; b=[10 100 200]; c=[11 22 33]; d=[a; b; c]; e=[a b c];

$$d=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 10 & 100 & 200\\ 11 & 22 & 33\end{bmatrix},$$
$$e=[1 \quad 2 \quad 3 \quad 10 \quad 100 \quad 200 \quad 11 \quad 22 \quad 33]$$

>>a=[1 2; 3 4]; b=[a [10 20]'; 7 8 9]

$$a=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 10\\ 3 & 4 & 20\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

MATLAB da tanimlanmis fonksiyoanlar
zeros(n,m) n x m boyutlu, tum elemanlari sifir matrix
ones(n,m) n x m boyutlu, tum elemanlari 1 matrix
eye(n) n x n boyutlu birim matris. tum elemanlari 0 sadece kosegen elemanlari 1.
size(qq) Bir matrisin boyutlarini verir. m ve n yi verir
qq' Transpose of the matrix qq
inv(qq) matris tersi (inversi)
diag(qq) diagonal of the matrix qq
sum(qq) sutunlarin toplami
det(qq) determinant of the matrix qq.

Example 1)

>>ww=ones(2,3), ff=zeros(3,4), gg=eye(3),

$$ww=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad ff=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$gg=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Example 2)
>>[wrow wcolumn]=size(ww),
wrow=2 wcolumn=3

>>[frow fcolumn]=size(ff),
frow=3 frow=4

Example 3)

>>q=[1 2; 3 4], p=[10 20; 30 40];

r=[[q zeros(2,2)] [ones(2,2) p]]

$$q=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad q=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix},$$

$$r=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 & 20\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 30 & 40\end{bmatrix}$$

Example 4)
>> e = [zeros(1,4) ones(1,3)]
0 0 0 0 1 1 1

>> e = [zeros(1,4) ones(1,3)]
0 0 0 0 1 1 1

```
>> f = [ ones(1,3)   10*ones(1,4) ]
   1  1  1   10  10  10  10

>> g = 10*[1:3]
     10  20  30

>> h = [ ones(1,3)   10:2:20]
 1  1  1   10  12  14  16  18  29

>> k =[ 10*ones(1,3)  17   10:3:19 ]
    10  20  30    17  10   13   16  19
```


```
>> f = [ ones(1,3)   10*ones(1,4) ]
   1  1  1   10  10  10  10

>> g = 10*[1:3]
     10  20  30

>> h = [ ones(1,3)   10:2:20]
 1  1  1   10  12  14  16  18  29

>> k =[ 10*ones(1,3)  17   10:3:19 ]
    10  20  30    17  10   13   16  19
```


Example 5)

```
>>  aa=[4 6 0  0 2   2   40    60]
>>bb=sum(aa)
   bb=114
```

vektorun tum elemanlari toplandi.

4 + 6 + 0 + 0 + 2 + 2 + 40 +60=114

Example 6)

Most built-in functions (sin,cos,tan, exp..) also works for matrices.

```
>>a=[1 2;   3 4];

   >> b=sin(a);
```

$$b=\begin{bmatrix}\sin(1) & \sin(2)\\ \sin(3) & \sin(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.841 & 0.909\\ 0.141 & -0.756\end{bmatrix},$$

```
>> c=exp(a);
```

$$c=\begin{bmatrix}e^1 & e^2\\ e^3 & e^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.718 & 7.389\\ 20.08 & 54.59\end{bmatrix}$$

MATRISLERDE SCALAR CARPMA VE BOLME

x=a.*b , a ve b vectorlerinin scalar carpimini verir.

Normal carpmada kullanilan * yerine .* kullanildigina dikkat ediniz.

```
>> a = [ 15  16   12   20 ],   b =[ 10   4    6   5 ],  x=a.*b
x =  [ 150  64 72  100]
15 * 10 = 150
16 * 4  = 64
12 * 6 = 72
20 * 5 =100

>> a = [15  16   12   20 ],  b =[ 10   4    6   5 ], y=a./b
```

Normal bolmede kullanilan / yerine ./ kullanildigina dikkat ediniz.

```
y = [  1.5   4  2  4 ]
15 / 10 = 1.5
16 / 4  = 4
12 / 6 =  2
20 / 5 =  4

>>q=[1 2;  3 4],    p=[10 20;  30 40];    w=p+q
```

$$p=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad q=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix}11 & 22\\ 33 & 44\end{bmatrix}$$

```
>>q=[1 2;  3 4],  p=[10  20;  30 40];    z=q.*p,    k=p./q
```

$$z=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 90 & 160\end{bmatrix}, k=\begin{bmatrix}10 & 10\\ 10 & 40\end{bmatrix}$$

MATRIS CARPIMLARI

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\\ 50 & 60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}310 & 400\\ 580 & 760\end{bmatrix}$$

```
>>aa=[2 3 4; 5 6 7],   bb=[10 20; 30 40; 50 60], x=aa*bb
```

$$x=\begin{bmatrix}310 & 400\\ 580 & 760\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 20\\ 30\end{bmatrix}=200$$

```
>>a=[2 3 4], b=[10 20 30]',  x=a*b
x=200
```

$$\begin{bmatrix}10\\ 20\\ 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 30 & 40\\ 40 & 60 & 80\\ 60 & 90 & 120\end{bmatrix}$$

```
>>a=[2 3 4], b=[10 20 30]',  x=b*a
```

$$x=\begin{bmatrix}20 & 30 & 40\\ 40 & 60 & 80\\ 60 & 90 & 120\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 20 & 30\end{bmatrix}$ = HATALI ISLEM

```
>>a=[2 3 4], b=[10 20 30],  x=a*b
```

??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.

Matris boyutlari uyusmazsa carpma tanimsizdir.

DIMENSION ERROR

```
>> a = [ 2  5  4  ],  b = [ 8  3  12   5]
>>x = a + b
```

?? Error using ==> plus
Matrix dimensions must agree.

eleman eleman yapilan islemlerde a ve b ayni boyutta olmalidir.

x = a*b, y = a.*b, z = a/b w=a./b

hepsi hatalidir.

Ornek 431 : x=0; x=1; x=8 x=5; icin $y=3x^2+5x+7$ degerini hesaplayin bir matris halinde gosterin.

Method 1.

```
    a1=0;  b1=3*a1^2 + 5*a1 +7

    a2=1;  b2=3*a2^2 + 5*a2 +7

    a3=8;  b3=3*a3^2 + 5*a3 +7

    a4=5;  b4=3*a4^2 + 5*a4 +7

tt=[a1 b1;  a2 b2;  a3 b3; a4 b4]
   tt=
     0      7
     1     15
     8    239
     5    107
```

Method 2.

```
    aa=[0 1 8  5]
    aa_Length=length(aa);
 for kk=1:aa_Length,
bb(kk)= 3* aa(kk) ^2 + 5*aa(kk) +7
 end;
bb=[7    15    239    107]

tt=[aa' bb']

 tt=
     0      7
     1     15
     8    239
     5    107
```

Method 3.

```
    aa=[0 1 8  5]
    bb=3*aa.^2 + 5*aa +7
```

Method 4.

```
    aa=[0 1 8  5]
    pol_coef =[3 5 7]



  b1=polyval(pol_coef,0)

  b2=polyval(pol_coef,0)

  b3=polyval(pol_coef,0)

  b4=polyval(pol_coef,0)
bb=[ b1 b2 b3 b4]
```

Method 5.

```
  aa=[0 1 8  5]
  pol_coef =[3 5 7]
  bb=polyval(pol_coef,aa)
```

Problem: $y = 3x^2 + e^{0.1x} - 20\sin(x)$
Calculate y for x=0, x=0.5 , x=1, and x=2

Long method:

```
>> x=0,  y = 3*x^2 + exp(0.1*x) -20*sin(x)
       1
>> x=0.5,  y = 3*x^2 + exp(0.1*x) -20*sin(x)
      -7.78

>> x=1,  y = 3*x^2 + exp(0.1*x) -20*sin(x)
      -12.72
```

Short method

```
>> x=[0   0.5   1    2],
>> y = 3* x.^2 + exp(0.1*x) - 20*sin(x)
       1    -7.78    -12.72    -4.96
```

Notice **the dot .** in x.^2

for

```
>> for kk=1:4,   aa(kk)=kk^3; end;

aa=[1^3    2^3    3^3   4^3 ]

aa=[  1    8   27   64]
```

MATRIS KARESI VE USTEL ISLEMLER

>> a=[2 5 7 -8], b=a^2

??? Error using ==> mpower
Matrix must be square.

>> a=[2 5 7 -8], b=a.^2
b=[4 25 49 64]

$2^2 = 4 \qquad 5^2 = 25 \qquad 7^2 = 49 \qquad (-)8^2 = 64$

>> a=[2 5 7 -8], b=a.^3
b=[8 125 343 -512]

>>a=[1 2; 3 4]; d=a•^2;

$$d = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix},$$

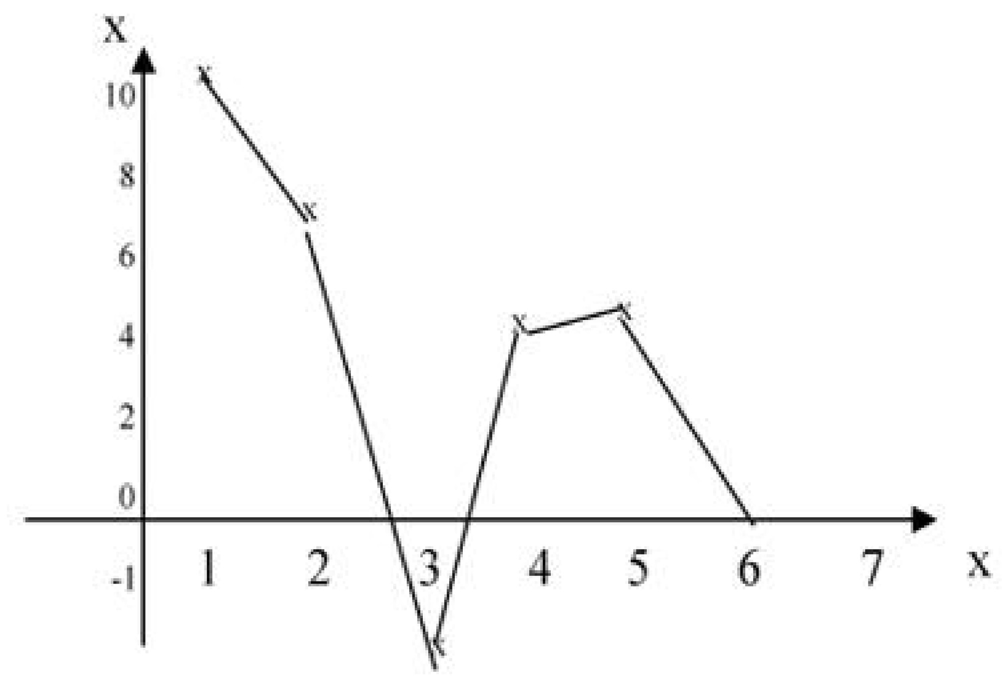
>> g=a^2

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

a•^2 ile a^2 arasindaki farki gozelemleyin.

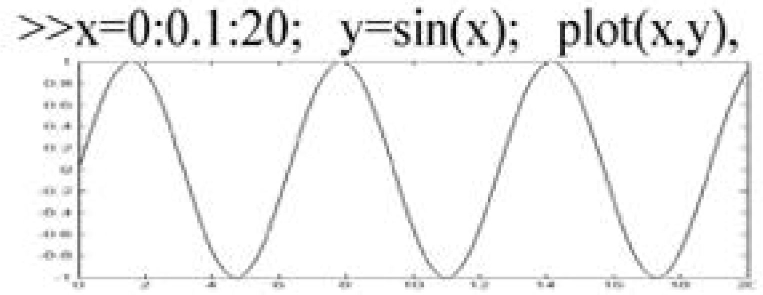
MATLAB'da grafik cizimi

x=[1 2 3 4 5 6]; y=[10 7 -1 5 6 0];
x-y duzleminde asagidaki grafigi elde ederiz.



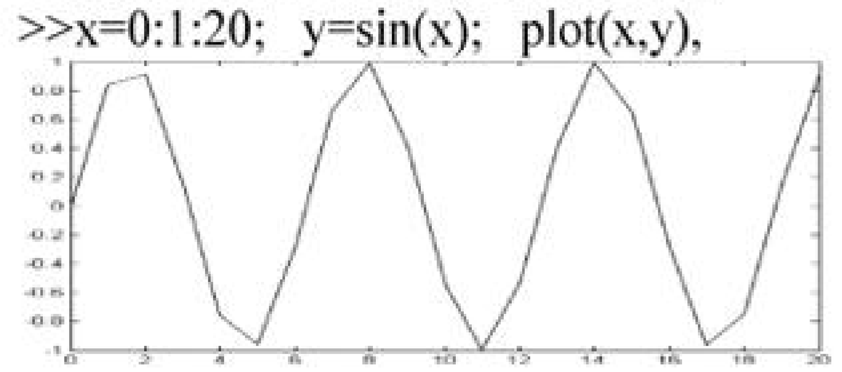
x e karsilik y yi cizmek icin MATLAB komutu
plot(x,y)

>>x=0:0.1:20; y=sin(x); plot(x,y),

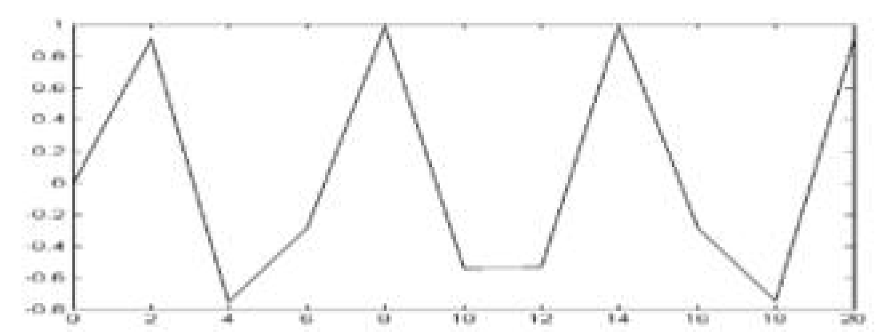


Graphic Resolution (cozunurluk)

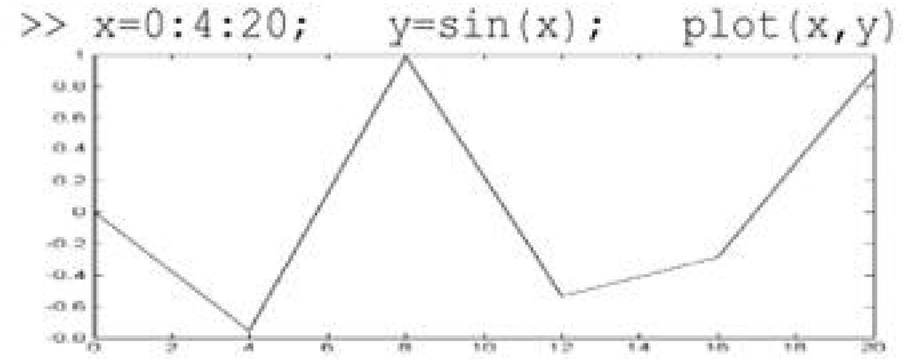
>>x=0:1:20; y=sin(x); plot(x,y),



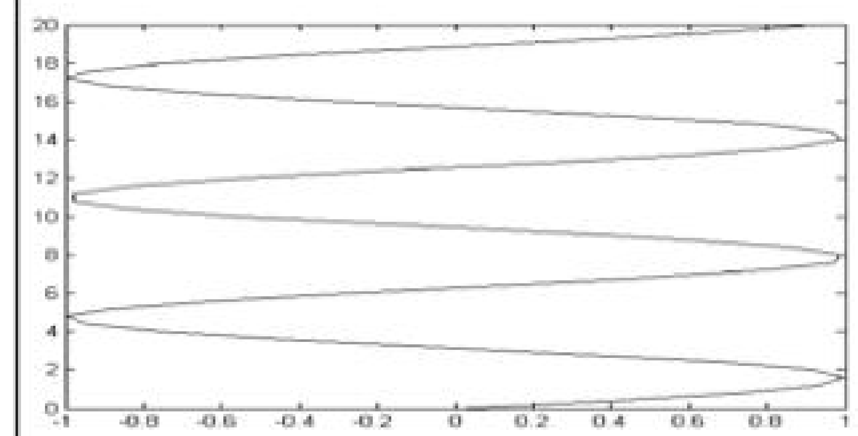
```
>>x=0:2:20;    y=sin(x);    plot(x,y),
```



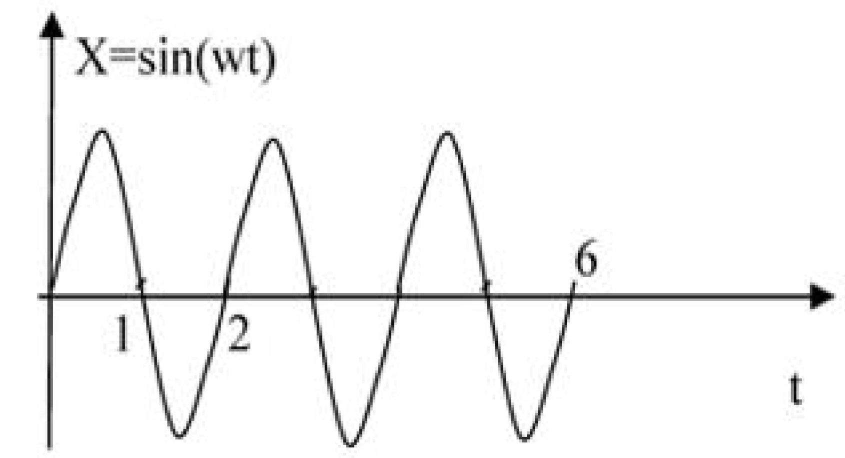
```
>> x=0:4:20;    y=sin(x);    plot(x,y),
```



```
>> x=0:0.1:20;    y=sin(x);    plot(y,x),
```



Problem 32: Asagidaki grafigi cizin.

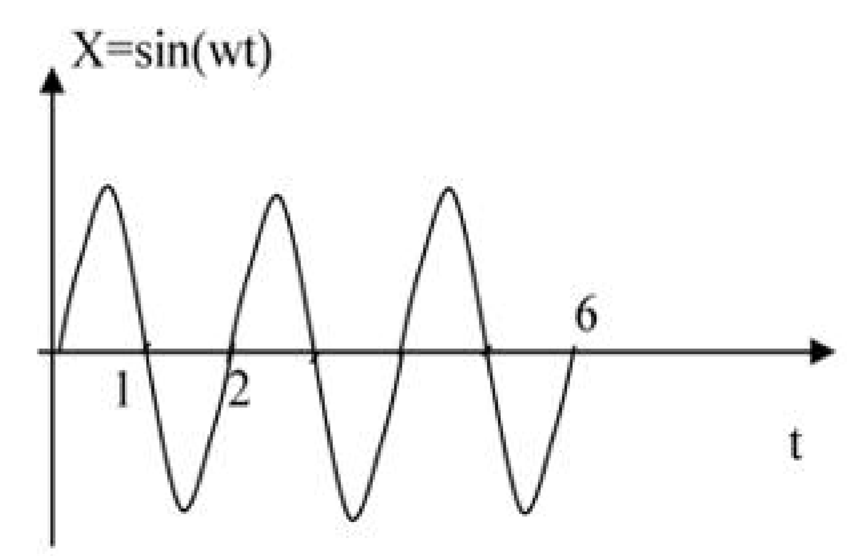


Cozum

t=0:0.1:6;
TT=2;
w=2*pi/TT;
x=sin(w*t);
plot(t,x);

t=0:0.1:6; TT=2; w=2*pi/TT; x=sin(w*t);plot(t,x);

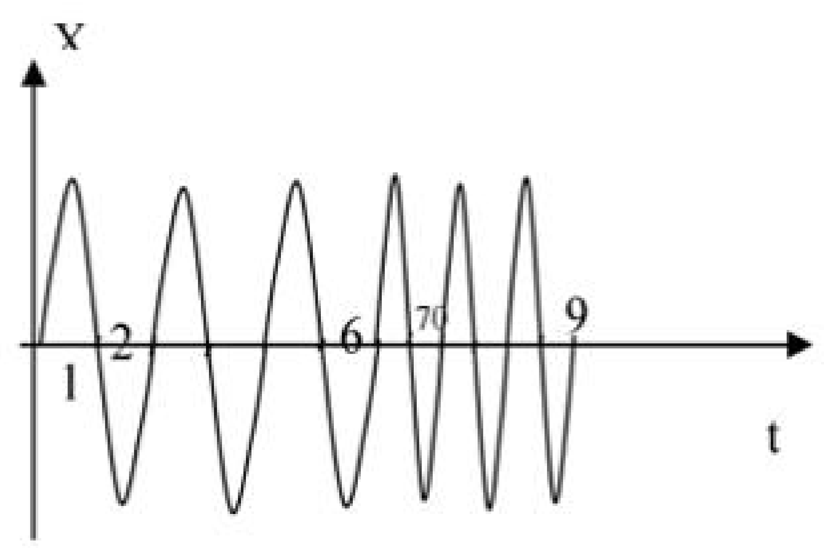
Problem 33: Asagidaki grafigi cizin.



Solution

t=0:0.1:60; TT=20; w=2*pi/TT; x=sin(w*t); plot(t,x);

Problem 34: Asagidaki grafigi cizin..
Note: frequency is doubled from t=60 to t=90



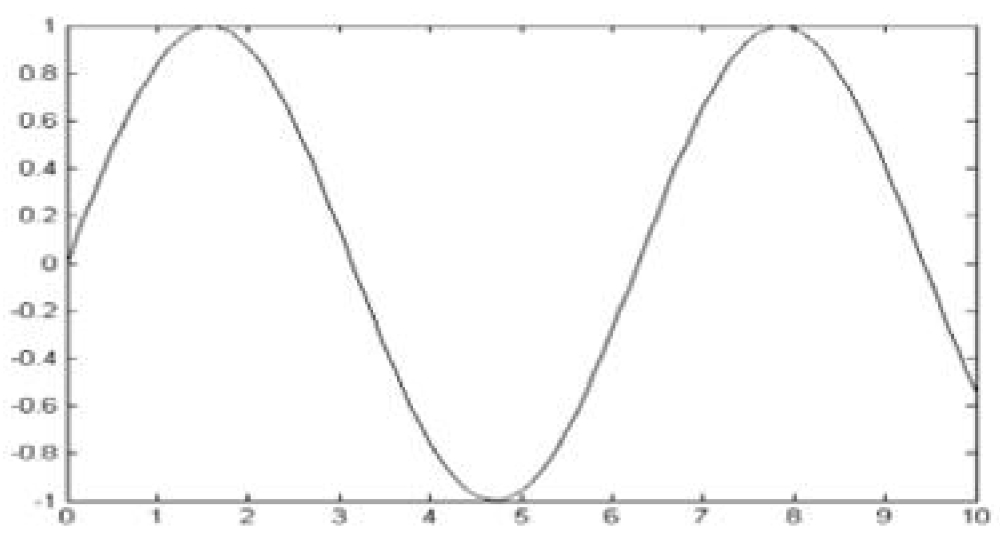
Solution

t1=0:0.1:60; TT1=20; w1=2*pi/TT1; x1=sin(w1*t1);

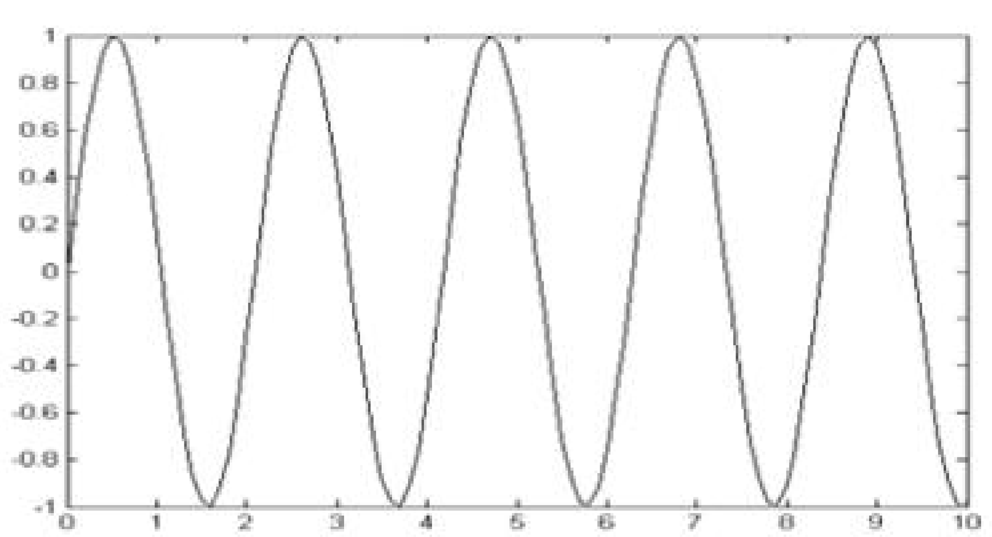
t2=60:0.1:90; TT2=10; w2=2*pi/TT2; x2=sin(w2*t2);

tTotal=[t1 t2]; xTotal=[x1 x2]; plot(tTotal,xTotal);

Problem 35: Draw x=sin(t) t=0 to 10
Solution:
t=0:0.1:10; w1=1; x1=sin(w1*t); plot(t,x1);

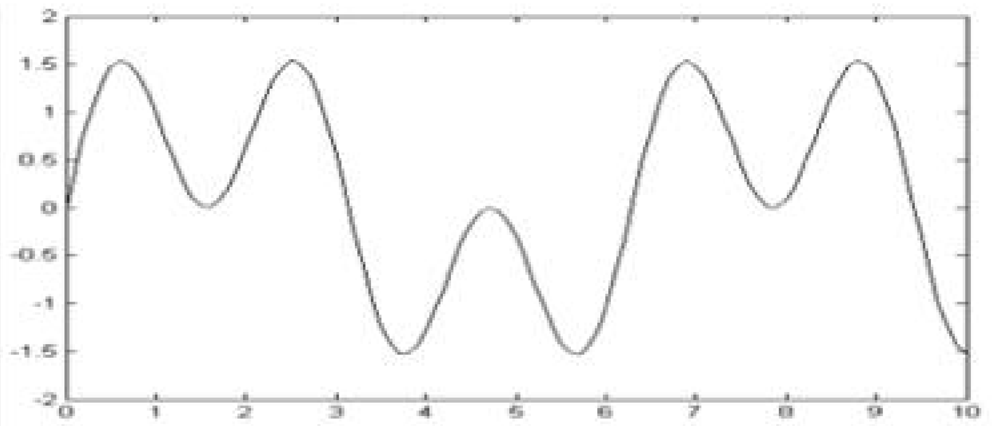


Problem 36: Draw x=sin(3t) t=0 to 10
Solution:
t=0:0.1:10; w1=3; x1=sin(w1*t); plot(t,x1);



Problem 37: Draw x= sin(t) + sin(3t) t=0 to 10
Solution:
t=0:0.1:10; w1=1; w2=3;

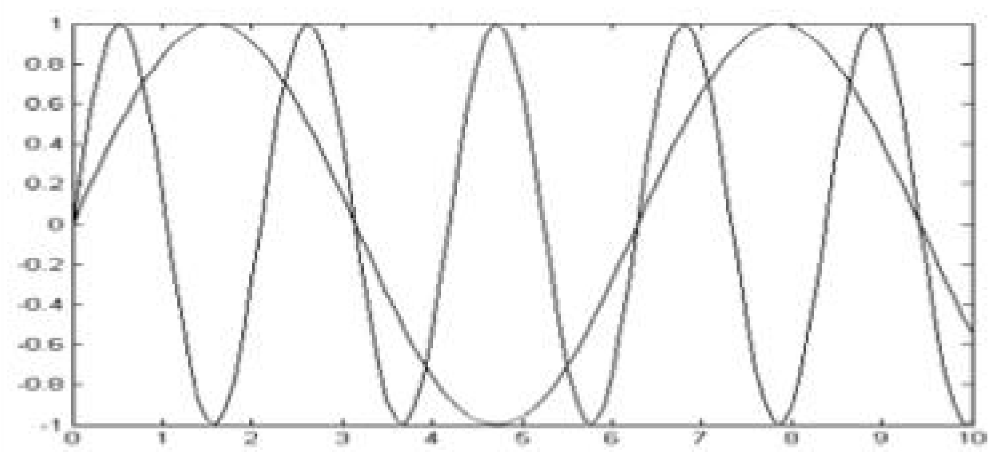
x1=[sin(w1*t)+sin(w2*t)]; plot(t,x);



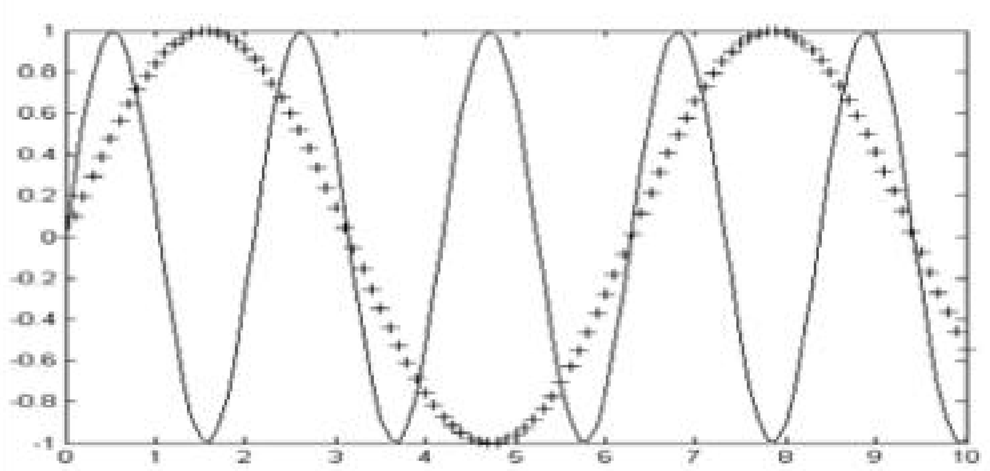
Problem 38: Draw x1= sin(t) and x2= sin(3t) t=0 to 10
Solution
t=0:0.1:10; w1=1; w2=3;

x1=[sin(w1*t)]; x2=[sin(w2*t)];

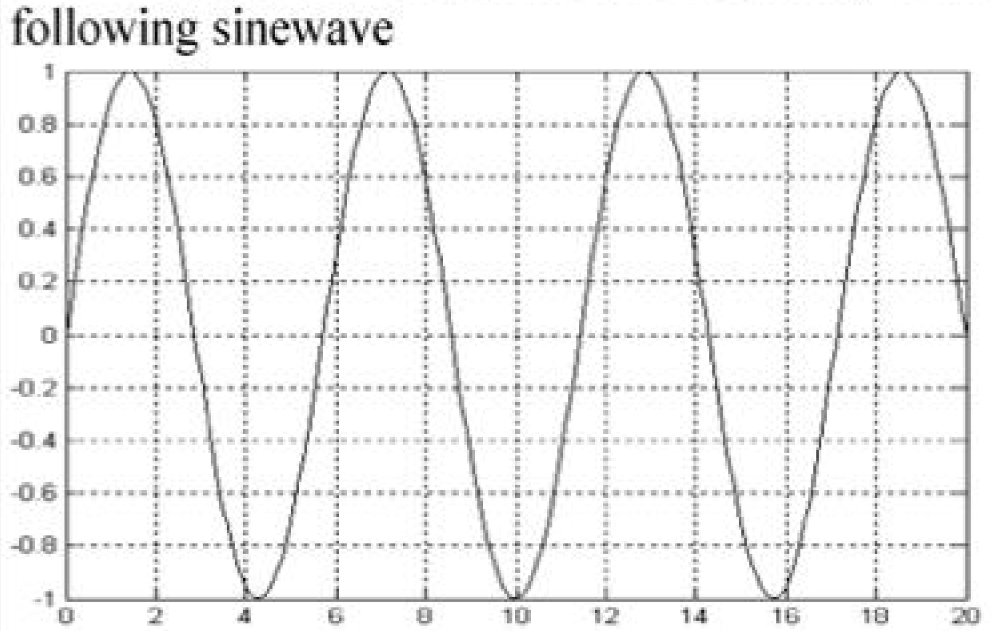
plot(t, x1 , t , x2);



plot(t, x1 ,'+', t , x2);



Exercise 57. Find the period and frequency of the following sinewave



T= f= w=

T=17/3=5.666 ???

261)Asagidaki dizileri olusturan komutlari yazin
a) 1 11 21 31 41 51
b) 1 11 21 31 41 51 ....251 261
c) 0.1 0.3 0.5 0.7 0.9
d) -0.1 -0.3 -0.5 -0.7 -0.9
e) -1 -2 -3 -4 .... -99 -100
f) 1 4 9 16 25 256
g) -20 -19 -18 -17 0
h) 0 1 2 3 4 5 6 20
j) -20 -19 -18 ....0 100 101 102 120
k) 1 1 1 1 1 .... 1 (yuz tane 1)
l) 2 2 2 2 2 .... 2 (yuz tane 2)
m) 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 (10 defa 1 2 3 4 5 tekrar)

262)matrisleri yazin.

$$a=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix},$$

$$, ee=\begin{bmatrix}200\\ 440\\ 710\end{bmatrix}, \quad m=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \qquad d=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$$

263)Once G matrisini elde edin sonra G matrisinden asagidakileri elde edin

$$G=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30 & 40\\ 210 & 220 & 230 & 240\\ 310 & 320 & 330 & 340\\ 410 & 420 & 430 & 440\end{bmatrix}$$

$$n=\begin{bmatrix}410 & 420 & 430\end{bmatrix}$$

,

$$p=\begin{bmatrix}230\\ 330\end{bmatrix}$$

264)Matrisleri **eye, ones** ve **zeros** kullanarak elde edin

$$ww=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad ff=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$gg=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

265) ones ve zeros kullanarak elde edin.
aa=[0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0]

$$bb=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

cc=[0 0 0 0 1 1 1 10 10 10 10]

266)ones, zerso, **:** kullanarak elde edin.
a) 1 1 1 1 10 12 14 16 18 ... 20
b) 1 1 1 1 -10 -12 -14 -16 -18 ... -20
c) 10 12 14 16 18 ... 20 0 0 0 0 1 1 1 1

267) aa=[1 2 3]; bb= sum(aa)
ekrana bb nin degeri ne olarak yazilir. .

268) aa=[1 2 3]' ; bb= sum(aa)
ekrana bb nin degeri ne olarak yazilir. .

269) aa=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]; bb= sum(aa)
ekrana bb nin degeri ne olarak yazilir. .

270)`q=[1 2; 3 4], p=[10 20; 30 40];`

aa=q.*p, bb=p.*q, cc=q*p, dd=p*q,
aa,bb,cc,dd nin degerleri nedir.

271) `aa=[2 3 4], bb=[10 20 30]',`
`p=aa*bb, q=bb*aa, r=bb*aa',carpimlari neledir.`

281)Asagidaki matrisleri MATLAB komutlariyla elde edin.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \; C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix}100 & 100\\ 100 & 100\end{bmatrix},$$

282)
>>A=[1 2 3; 10 20 30; 40 50 60],

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\end{bmatrix}$$

B matrisini A matrisinin satir ve sutunlarini degistirerek elde edin.
C matrisini A matrisinin satir ve sutunlarini degistirerek elde edin.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 40 & 50 & 60\\ 10 & 20 & 30\end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 40 & 60 & 50\\ 10 & 30 & 20\end{bmatrix}$$

283) Asagidaki matrisi zeros ve ones komutlari ile elde edin. ornek olarak n=3, m=4, k=5, p=6, q=2,r=3 alin

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1\;1\;..\;1\;1}}^{n} & \overbrace{\hphantom{0\;0\;..\;0}}^{m} \end{array} \\ q\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \begin{bmatrix} 1\;1\;..\;1\;1 & 0\;0\;..\;0 \\ 1\;1\;..\;1\;1 & 0\;0\;..\;0 \\ ..\;..\;..\;..\;..\;.. & \\ 1\;1\;..\;1\;1 & 0\;0\;..\;0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overbrace{\hphantom{1\;1\;..\;1\;1}}^{n} & \overbrace{\hphantom{0\;0\;..0}}^{m} & \overbrace{\hphantom{2\;2\;...\;2}}^{k} \end{array} \\ q\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \begin{bmatrix} 1\;1\;..\;1\;1 & 0\;0\;..0 & 2\;2\;...\;2 \\ 1\;1\;..\;1\;1 & 0\;0\;..\;0 & 2\;2\;...2 \\ ..\;..\;..\;..\;..\;.. & & \\ 1\;1\;..\;1\;1 & 0\;0\;..\;0 & 2\;2\;...2 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1\;\;1\;\;..\;\;1\;\;1}}^{n} \\ q\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \\ m\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \\ k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \\ p\left\{\vphantom{1}\right. & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 1 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & ..0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & ..0 & 0 & .. & 0 \end{bmatrix}$$

C)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overbrace{\hphantom{1\;\;1\;\;..\;\;1\;\;1}}^{n} & \overbrace{\hphantom{0\;0\;..0}}^{m} & \overbrace{\hphantom{0..\;0}}^{k} \end{array} \\ & \\ p\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \\ q\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \\ r\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \end{array} \begin{bmatrix} 1\;\;1\;\;..\;\;1\;\;1 & 0\;0\;..0 & 0..\;0 \\ 1\;\;1\;\;..\;\;1\;\;1 & 0\;0\;..\;0 & 0..\;0 \\ ..\;\;..\;\;..\;\;..\;\;.. & ..\;\;..\;\;.. & . \\ 1\;\;1\;\;..\;\;1\;\;1 & 0\;0\;..0 & 0\;..0 \\ 4\;\;4\;\;..\;4\;\;4 & 1\;\;0\;..0 & 0..\;0 \\ 4\;\;4\;\;..\;4\;\;4 & 0\;\;1\;..0 & 0..\;0 \\ ..\;\;..\;\;..\;\;..\;\;.. & ..\;\;..\;\;.. & . \\ 4\;\;4\;\;..\;4\;\;4 & 0\;\;0\;..1 & 0..\;0 \\ 0\;\;0\;\;..\;0\;\;0 & 0\;0..\;0 & 0..\;0 \\ ..\;\;..\;\;..\;\;..\;\;.. & ..\;\;..\;\;.. & ... \\ 0\;\;0\;..\;0\;\;0 & ..\;\;0\;\;\;0 & 0\;..\;0 \end{bmatrix}$$

LINEER OLMAYAN DENKLEM SISTEMLERI
BASIT ITERASYON YONTEMI

$f_1(x_1,x_2,x_3)=0$

$f_2(x_1,x_2,x_3)=0$

$f_3(x_1,x_2,x_3)=0$

....

$f_n(x_1,x_2,x_3)=0$

Esitlikleri asagidaki forma donustur

$x_1=g_1(x_1,x_2,x_3)=0$

$x_2=g_2(x_1,x_2,x_3)=0$

$x_3=g_3(x_1,x_2,x_3)=0$

....

$x_n=g_n(x_1,x_2,x_3)=0$

Ornek

$$f_1(x,y,z)=3x-\cos(yz)-\frac{1}{2}=0$$

$$f_2(x,y,z)=x^2-81(y+0.1)^2+\sin(z)+1.06=0$$

$$f_3(x,y,z)=e^{-XY}+20z+\frac{10\pi-3}{3}=0$$

x_1, y_1, z_1, yerine x,y,z kullanalim

$$x=\frac{1}{3}\cos(yz)+\frac{1}{6}$$

$$y=\frac{1}{9}\sqrt{x^2+\sin(z)+1.06}-0.1$$

$$z=-\frac{1}{20}e^{-XY}-\frac{10\pi-3}{60}$$

$$x_{K+1}=\frac{1}{3}\cos(y_K z_K)+\frac{1}{6}$$

$$y_{K+1}=\frac{1}{9}\sqrt{x_K{}^2+\sin(z_K)+1.06}-0.1$$

$$z_{K+1}=-\frac{1}{20}e^{-X_K Y_K}-\frac{10\pi-3}{60}$$

$$x_1=\frac{1}{3}\cos(y_0 z_0)+\frac{1}{6}$$

$$y_1=\frac{1}{9}\sqrt{x_0{}^2+\sin(z_0)+1.06}-0.1$$

$$z_1=-\frac{1}{20}e^{-X_0 Y_0}-\frac{10\pi-3}{60}$$

$$x_2=\frac{1}{3}\cos(y_1 z_1)+\frac{1}{6}$$

$$y_2=\frac{1}{9}\sqrt{x_1{}^2+\sin(z_1)+1.06}-0.1$$

$$z_2=-\frac{1}{20}e^{-X_1 Y_1}-\frac{10\pi-3}{60}$$

$$x_3=\frac{1}{3}\cos(y_2 z_2)+\frac{1}{6}$$

$$y_3=\frac{1}{9}\sqrt{x_2{}^2+\sin(z_2)+1.06}-0.1$$

$$z_3=-\frac{1}{20}e^{-X_2 Y_2}-\frac{10\pi-3}{60}$$

Baslangicta bir cozum tahmin et.

$x_0=0.1$, $y_0=0.1$, $z_0=-0.1$

x_1, y_1, z_1 ri hesapla

$$x_1=\frac{1}{3}\cos(0.1\quad(-0.1))+\frac{1}{6}=0.499$$

$$y_1=\frac{1}{9}\sqrt{0.1^2+\sin(-0.1)+1.06}-0.1=0.0094$$

$$z_1=-\frac{1}{20}e^{-(0.1\quad 0.1)}-\frac{10\pi-3}{3}=-0.5230$$

----

x_1, y_1, z_1 denklemde yerine koy x_2, y_2, z_2 hesapla

$$x_2=\frac{1}{3}\cos(0.0094(-0.523))+\frac{1}{6}=0.4999$$

$$y_2=\frac{1}{9}\sqrt{0.499^2+\sin(-0.523)+1.06}-0.1=0.00002$$

$$z_2=-\frac{1}{20}e^{-(0.499\quad 0.0094)}-\frac{10\pi-3}{3}=-0.5235$$

Bu sekilde iterasyona devam et.

$x_3, y_3, z_3,\quad x_4, y_4, z_4,\quad \ldots\ldots x_{99}, y_{99}, z_{99},$

ta ki gercek koklere yaklasana kadar.

k	x	y	z
0	0.1000000	0.10000000	-0.1000000
1	0.4999833	0.00944114	-0.5231012
2	0.4999959	0.00002556	-0.5233633
3	0.4999999	0.00001233	-0.5235981
4	0.4999999	0.00000003	-0.5235984
5	0.5000000	0.00000001	-0.5235987
6	0.5000000	0.00000000	-0.5235987

$x_5=0.5,\ y_5=0,\ z_5=-0.523598$

$x_6=0.5,\ y_6=0,\ z_6=-0.523598$

Burada gercek koklere yaklasmanin kriteri: $|x_{K+1}-x_K|+|y_{K+1}-y_K|+|z_{K+1}-z_K|<0.000001$ olarak alinmistir ve 6 iterasyon yeterli olmustur.

Asagida degisik baslangic degerleri icin iterasyon verilmistir.

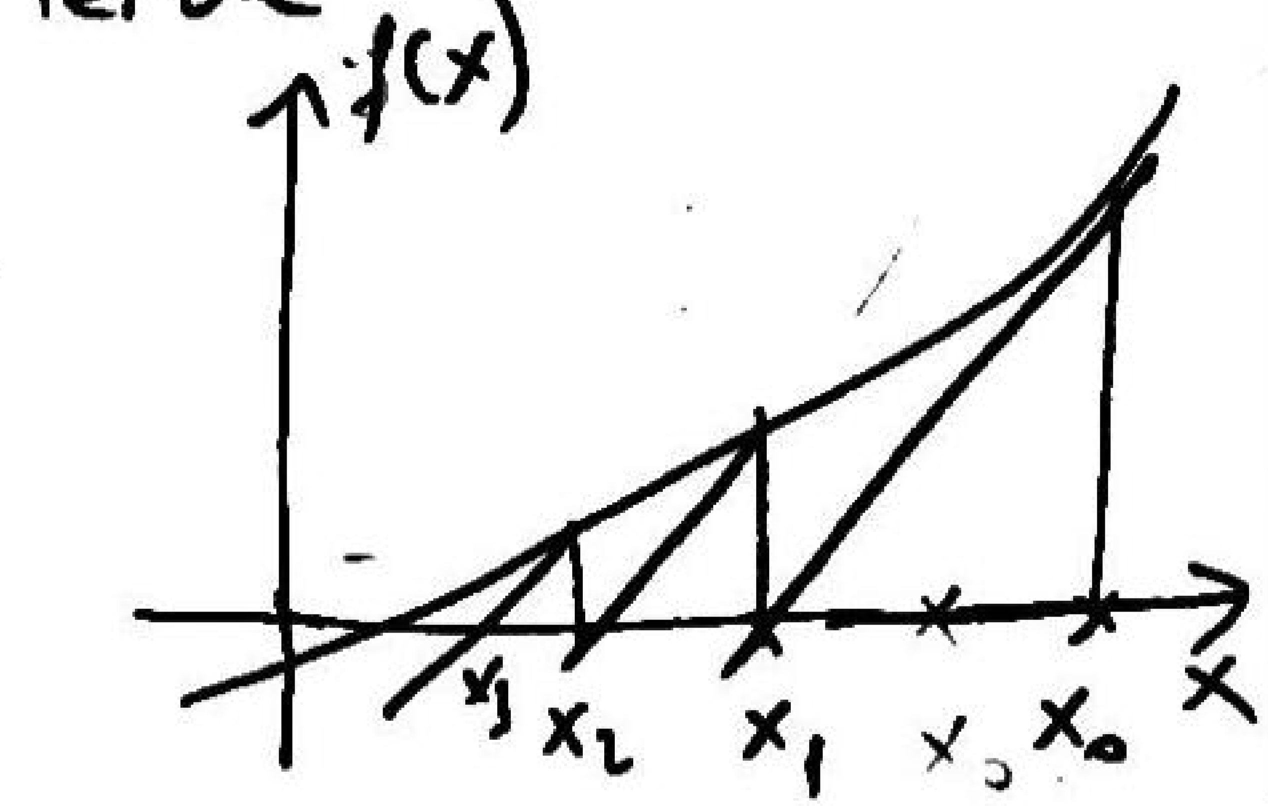
1	10	10	10
2	0.4541062	1.013974	-0.4735987
3	0.4622982	0.0000074	-0.5051487
4	0.5	-0.00125590	-0.5235986
5	0.4999999	0.000000007	-0.5236301
6	0.5	-0.0000017	-0.5235987
7	0.5	0	-0.5235988

```
%basit iterasyon yontemi
xx1=[1 1 1 ]*10
for kk=1:7
[ff]=newtf51(xx1);
top(kk,:)=xx1'
xx1=ff
end;

%f1(x,y,z), f2(x,y,z), f3(x,y,z)
function [FF]=newtf51(XX1)
x=XX1(1);  y=XX1(2);  z=XX1(3);
FF=[1/3*cos(y*z)+1/6;
   1/9*sqrt(x^2+sin(z)+1.06)-0.1;
   -1/20*exp(-x*y)-(10*pi-3)/60];
```

Newton Yöntemi

Tek değişkenli denklemlerde



x_0 verildiğinde x_1 i bulmak için x_0 noktasından teğet çiziyorum teğetin x eksenini kestiği x_1 noktası bizim yeni noktamız idi. Çok değişkenli fonksiyonlarda da durum benzeridir.

$$X_1 = X_0 - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Çok değişkenli sistemler

$$X_1 = X_0 - \left[f'(x)\right]^{-1} f(x)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \left[J\right]^{-1} f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Burada

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisi olarak adlandırılır

$$x - \cos y - 5e^{-x} = 0, \quad y^2 - x^2 - 1 = 0$$

Newton yöntemiyle çözün.

$$f_1(x,y) = x - \cos y - 5e^{-x} = 0$$
$$f_2(x,y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{df_1}{dx} = 1 + 5e^{-x} \qquad \frac{df_1}{dy} = \sin y$$

$$\frac{df_2}{dx} = -2x \qquad \frac{df_2}{dy} = 2y$$

$$J = \begin{bmatrix} 1+5e^{-x} & \sin y \\ -2x & 2y \end{bmatrix}$$

$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$ başlangıç değerini alalım

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - [J(x_0 y_0)]^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$f_1(x_0, y_0) = x_0 - \cos y_0 - 5e^{-x_0}$$
$$= 1 - \cos 1 - 5e^{-1} = -1.37$$

$$f_2(x_0, y_0) = y_0^2 - x_0^2 - 1 = 1^2 - 1^2 - 1 = -1$$

$$J = \begin{bmatrix} 1+5e^{-x_0} & \sin y_0 \\ -2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.83 & 0.84 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 2.83 & 0.84 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.27 & -0.11 \\ 0.27 & 0.38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.27 & -0.11 \\ 0.27 & 0.38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.37 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.26 \\ -0.76 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1.26 \\ 1.76 \end{matrix}$$

$x_1 = 1.26 \quad y_1 = 1.76$

Şimdi x_2 y_2 yi hesaplayalım

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+5e^{-x_1} & \sin y_1 \\ -2x_1 & 2y_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, y_1) \\ f_2(x_1, y_1) \end{bmatrix}$$

$$f_1(x_1, y_1) = 1.26 - \cos(1.76) - 5e^{-1.26} = 0.030$$

$$f_2(x_1, y_1) = 1.76^2 - 1.26^2 - 1 = 0.51$$

$$J = \begin{bmatrix} 1+5e^{-1.26} & \sin(1.76) \\ -2 \times 1.26 & 2 \times 1.76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.41 & 0.98 \\ -2.52 & 3.52 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.32 & -0.089 \\ 0.229 & 0.2201 \end{bmatrix}$$

(74)

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.26 \\ 1.76 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.32 & -0.085 \\ 0.223 & 0.220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.030 \\ 0.51 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.26 \\ 1.76 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.035 \\ 0.119 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.295 \\ 1.64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2979 \\ 1.6385 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2979 \\ 1.6385 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2979 \\ 1.6385 \end{bmatrix}$$

COK DEGISKENLI DENKLEMLERDE NEWTON METHOD

$f_1(x_1,x_2,x_3)=0$

$f_2(x_1,x_2,x_3)=0$

$f_3(x_1,x_2,x_3)=0$

....

$f_n(x_1,x_2,x_3)=0$

x_1, y_1, z_1, yerine x,y,z kullanalim

$f_1(x,y,z)=0$

$f_2(x,y,z)=0$

$f_3(x,y,z)=0$

Newton algoritmasi

$X_{K+1} = X_K - J(X_K)^{-1} F(X_K))$

$$X_{K+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix}, \; X_K = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

$$F(X_K) = \begin{bmatrix} f_1(x_k,y_k,z_k) \\ f_2(x_k,y_k,z_k) \\ f_3(x_k,y_k,z_k) \end{bmatrix}$$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ornek

$$f_1(x,y,z) = 3x - \cos(yz) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x,y,z) = x^2 - 81(y+0.1)^2 + \sin(z) + 1.06 = 0 \text{---}$$

$$f_3(x,y,z) = e^{-XY} + 20z + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = z\sin(yz), \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = y\sin(yz),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -162(y+0.1), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \cos(z),$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = -ye^{-xy}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = -xe^{-xy}, \frac{\partial f_3}{\partial z} = 20$$

$$J = \begin{bmatrix} 3 & z\sin(yz) & y\sin(yz) \\ 2x & -162(y+0.1) & \cos(z) \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} & 20 \end{bmatrix}$$

1)Baslangic tahminlerini gir

2) $F(X_0)$, $J(X_0)$, $J^{-1}(X_0)$ hesapla

3) $X_1 = X_0 - J(X_0)^{-1} F(X_0)$ hesapla

4) $X_1 \Rightarrow X_0$ degisikligini yap

5)adim 2 ye git.

1)

x_0=0.1, y_0=0.1, z_0=-0.1

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

2) Calculate $F(X_0)$

$$F(X_0) = \begin{bmatrix} f_1(x_0,y_0,z_0) \\ f_2(x_0,y_0,z_0) \\ f_3(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\ 0.1 - \cos(0.1(-0.1)) - \frac{1}{2} \\ 0.1^2 - 81(0.1+0.1)^2 + \sin(-0.1) + 1.06 \\ e^{-0.1\ 0.1} + 20(-0.1) + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -2.2698 \\ 8.4820 \end{bmatrix}$$

3) Calculate $J(X_0)$

$$J(X_0) = \begin{bmatrix} 3 & z_0\sin(y_0 z_0) & y_0\sin(y_0 z_0) \\ 2x_0 & -162(y_0+0.1) & \cos(z_0) \\ -y_0 e^{-x_0 y_0} & -x_0 e^{-x_0 y_0} & 20 \end{bmatrix}$$

$$J(X_0)=\begin{bmatrix}3 & -0.1\sin(0.1(-0.1)) & 0.1\sin(0.1(-0.1))\\ 2\ 0.1 & -162(0.1+0.1) & \cos(-0.1)\\ -0.1e^{-0.1\ 0.1} & -0.1e^{-0.1\ 0.1} & 20\end{bmatrix}$$

$$J(X_0)=\begin{bmatrix}3. & 0.001 & -0.001\\ 0.2 & -32.4 & 0.995\\ -0.099 & -0.099 & 20\end{bmatrix}$$

4) Calculate $[J(X_0)]^{-1}$

$$J^{-1}(X_0)=[J(X_0)]^{-1}=\begin{bmatrix}0.3333 & 0.0000 & 0.0000\\ 0.0021 & -0.0309 & 0.0015\\ 0.0017 & -0.0002 & 0.0500\end{bmatrix}$$

5)The multivariable Newton method is

$X_1=X_0-J(X_0)^{-1}\,F(X_0)$

or

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}J(x_0,y_0,z_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f_1(x_0,y_0,z_0)\\ f_2(x_0,y_0,z_0)\\ f_3(x_0,y_0,z_0)\end{bmatrix}$$

Substituting the numerical values we have

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\\ -0.1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.3333 & 0.0000 & 0.0000\\ 0.0021 & -0.0309 & 0.0015\\ 0.0017 & -0.0002 & 0.0500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.2\\ -2.269\\ 8.48\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\\ -0.1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-0.399\\ 0.0806\\ 0.4225\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4999\\ 0.0194\\ -0.522\end{bmatrix}$$

$x_1=0.4999,\quad y_1=0.0194,\quad z_1=-0.522$

In the same way Calculate

$F(X_1),\quad J(X_1),\quad [J(X_1)]^{-1}$

$$F(X_1)=\begin{bmatrix}-0.0034\\ -0.34466\\ 0.031325\end{bmatrix}$$

$$J(X_1)=\begin{bmatrix}3. & 0.0053 & -0.0002\\ 0.999 & -19.34 & 0.866\\ -0.0192 & -0.495 & 20\end{bmatrix}$$

$$[J(X_1)]^{-1}=\begin{bmatrix}0.3333 & 0.0001 & 0.0000\\ 0.0173 & -0.0517 & 0.0022\\ 0.0007 & -0.0013 & 0.0501\end{bmatrix}$$

And

$X_2=X_1-[J(X_1)]^{-1}F(X_1)$

$$X_2=\begin{bmatrix}0.5000\\ 0.0015\\ -0.5245\end{bmatrix}$$

Thus

$x_2=0.5\quad y_2=0.0015\quad z_2=-0.5245$

Continuing the iteration we get

$$X_3=X_2-[J(X_2)]^{-1}F(X_2)=\begin{bmatrix}0.5000001\\ 0.000007\\ -0.52367\end{bmatrix}$$

…….

…….

………

$$X_9=\begin{bmatrix}0.5000000\\ 0.0000000\\ -0.523598\end{bmatrix}$$

$$X_{10}=\begin{bmatrix}0.5000000\\ 0.0000000\\ -0.523598\end{bmatrix}$$

$$X_{11}=\begin{bmatrix}0.5000000\\ 0.0000000\\ -0.523598\end{bmatrix}$$

Since $\|X_{11}-X_{10}\|<0.0000001$, we conclude that the solution is

x=0.5 y=0 z=-0.523598, within 0.0000001 accuracy.

1	0.4998697	0.01946685	-0.5215205
2	0.5000142	0.001588591	-0.523557
3	0.5000001	0.000012	-0.5235985
4	0.5	0	-0.5235988
5	0.5	0	-0.5235988
6	0.5	0	-0.5235988
7	0.5	0	-0.5235988
8	0.5	0	-0.5235988
9	0.5	0	-0.5235988

MATLAB code to solve the above equation is given below

```
%Multivariable Newton-Raphson Algorithm
%initial guess
   XX0=[0.1 0.1 -0.1]';
%Start iteration
for kk=1:20,
   x0=XX0(1); y0=XX0(2); z0=XX0(3);
     %calculate  f1,f2,f3
   FF=[3*x0-cos(y0*z0)-1/2;
     x0^2-81*(y0+0.1)^2+sin(z0)+1.06;
     exp(x0*y0)+20*z0+(10*pi-3)/3 ];
      %calculate jacobian
  JJ=[3      z0*sin(y0*z0)    y0*sin(y0*z0) ;
    2*x0  -162*(y0+0.1)     cos(z0);
   -y0*exp(-x0*y0)  -x0*exp(-x0*y0)   20  ];
  IJJ=inv(JJ);
  XX1=XX0-IJJ*FF;
   if norm(XX1-XX0)<0.0000001,
          break; end;
 XX0=XX1;
end;
%display the roots that was found
x0,y0,z0
```

```
clear all
 XX1=[0.1 0.1 -0.1]';
 for kk=1:20,
    XX0=XX1;
    [FF,JJ]=newtonf1(XX0);
    IJJ=inv(JJ);
    XX1=XX0-IJJ*FF;
    %FF,JJ,IJJ,XX1,pause;
    top(kk,:)=XX1;
 end;
 XX1
top
yazyaz33(top,[7 7 7 7],'X')


%f1(x,y,z), f2(x,y,z), f3(x,y,z) and The
JACOBIAN is calculated
function [FF,JJ]=newtonf1(XX1)
x=XX1(1);  y=XX1(2);  z=XX1(3);
FF=[3*x-cos(y*z)-0.5;
    x^2-81*(y+0.1)^2+sin(z)+1.06;
    exp(-x*y)+20*z+(10*pi-3)/3];
if nargout<2, return; end;
%jacobian
JJ=[3      z*sin(y*z)    y*sin(y*z);
    2*x      -162*(y+0.1)  cos(z);
   -y*exp(-x*y) -x*exp(-x*y)  20];
```

341) $f(x)=x^5 - 10x -1$, rin x=1 ile x=2 arasinda mutlak bir koku oldugunu gosterin.

342) $f(x)=x-e^x+4=0$, denkleminin x=1 ile x=2 arasinda bir koku var oldugu biliniyor. Bu kok sabit nokta iterasyonu ile bulunabilirmi.

343) $f(x)=x-Ln(x)=0$, denkleminin x=0.1 ile x=2 arasinda bir koku var oldugu biliniyor. Bu kok sabit nokta iterasyonu ile bulunabilirmi.

344) $-10<x<10$ icin $y=x+\sin(x)$ grafigini cizin.

345) $-10<x<10$ icin $y=x+\sin(x) -5e^{-x}$ grafigini cizin.

346) $0<x<3$ icin $y=x^5 - 10x -1$ grafigini cizin. Grafige bakarak $f(x)=x^5 - 10x -1$ polinomunun bir kokunun degerini klasik olarak bulun

347) $0<x<4$ icin $y=x^3 - 10$ grafigini cizin. Newton yontemiyle kok bulunmak isteniyor baslangic degeri olarak $x_0=3$ alinirsa x_1 rin degeri ne olur.

348) a>x>b araliginda f(x) polinomunun bir kokunun oldugu biliniyor. Asagidaki cumlelerden hangileri dogrudur
a) Bu kok yariya bolme yontemiyle kesin olarak hesaplanabilir.
b) Bu kok sabit nokta iterasyonu ile kesin olarak hesaplanabilir.
c) Bu kok Newton Rapson yontemiyle kesin olarak hesaplanabilir.

349) x=g(x) denkleminin sabit nokta yontemiyle kokunun bulunabilmesi icin gerekli sart
....
olmasidir.

350) $f_1(x)=x^2+y^2+z^2$, $f_2(x)=\sin(x^2)+\cos(y^2)$, $f_3(x)=e^{xyz} + Ln(xyz)$ Jakobiani hesaplayin.

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\0&3&3\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\\1&2\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&10\\2&20\\3&30\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, rank (A)=

$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$, rank (A)=

a) tek cozum b) sonsuz cozum c) cozum yok

411) $3x-4y=10$, $1.5x-2y=5$

412) $3x-4y=10$, $1.5x+2y=5$

413) $3x-4y=10$, $1.5x+2y=5$

414) $3x-4y=10$, $1.5x-2y=15$

415) $3x-4y=10$, $-1.5x+2y=15$

415) $3x-4y=10$, $-1.5x+2y=15$

417) $x-y+z=10$, $2x+3y+4z=20$, $3x+2y+5z=20$

418) $x-y+z=10$, $2x+3y+4z=20$, $3x+2y+5z=30$

419) $x-y+z=10$, $2x+3y-4z=20$, $6x+4y-6z=20$

420) $x-y+z=10$, $2x+3y-4z=20$, $6x+4y-6z=30$

421) $x-y+z=10$, $2x+3y-4z=20$, $6x+4y-8z=20$

A: katsayilar matrisi

$\tilde{A}$ **: Genisletilmis matris.**

r : bilinmeyen sayisi. (nxn icin denklem sayisi)

rank A=rank $\tilde{A}$ =r ==>tek cozum

rank A=rank $\tilde{A}$ < r ==>sonsuz cozum

rank A< rank $\tilde{A}$ ==> cozum yok

2 4 2 0 8 | 2 4 2 0 8
0 4 0 1 10 | 0 4 0 1
10
A= 0 0 5 2 8 → 0 0 5 2 8

Rank A=rank $\tilde{A}$ =r=4 **Tek Cozum**

2 4 2 0 8 | 2 4 2 0
8
0 4 2 1 10 | 0 4 2 1
10

Rank A=3, rank $\tilde{A}$ =4 **Cozum yok**

2 4 2 0 8 | 2 4 2 0 8
0 4 2 1 10 | 0 4 2 1 10
A= 0 0 0 2 8 → 0 0 0 2
8

rank A=rank $\tilde{A}$ =3<4 **Sonsuz cozum**

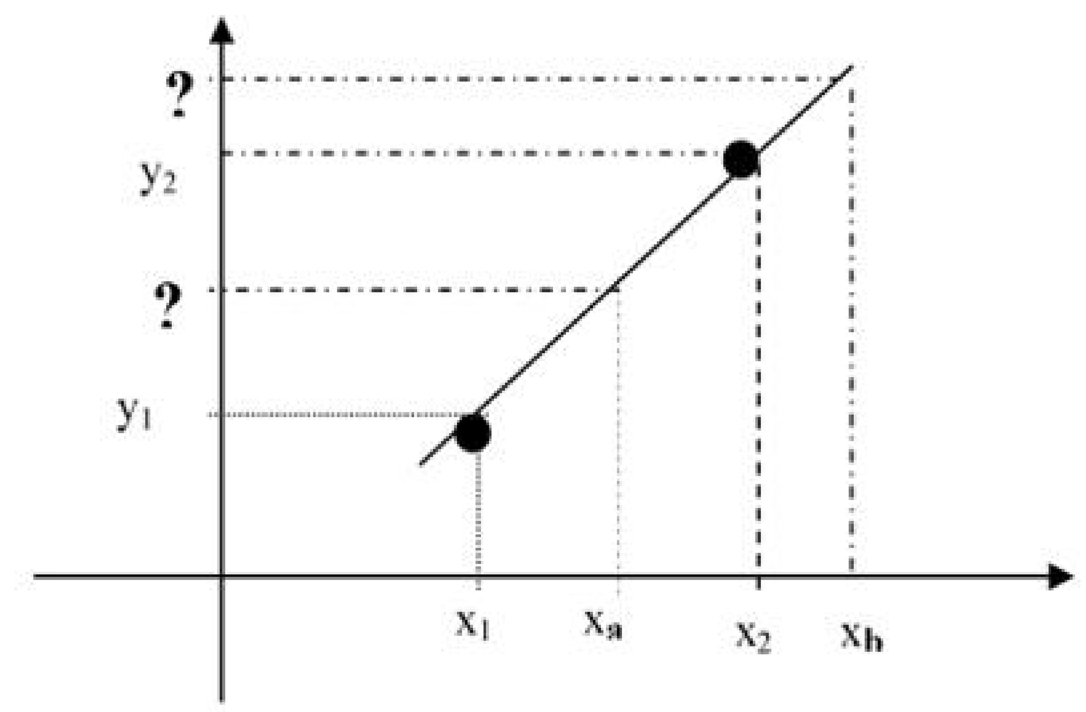
dependent.

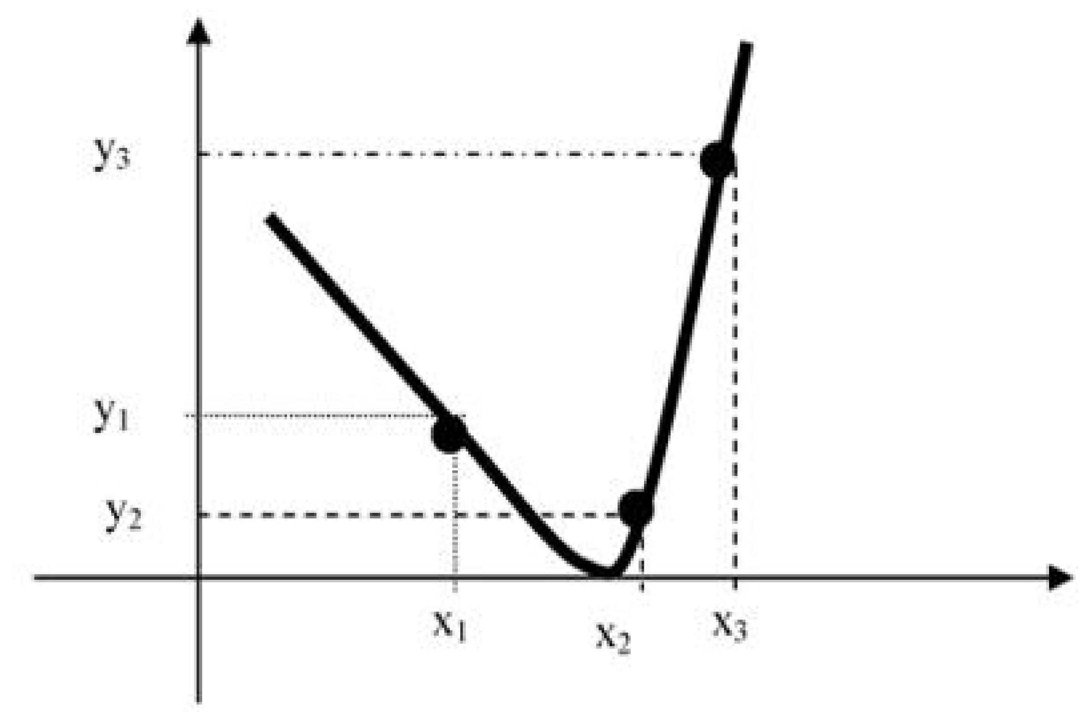
INTERPOLASYON OZET.

x-y duzleminde iki (veya daha fazla) nokta verildiginde

a) bu noktalardan gecen bir dogru (parabol, kubik egri) bulmak.

b) Hesaplanan dogru (parabol egri) yardimiyla verilen bir x degerine karsilik gelen y degerini bulmak.





PR315 (1,2), (3,4) noktalarindan gecen dogru denklemini bulunuz. x=5, x=10 icin y degerini hesaplayin

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

$$\frac{y-4}{4-2}=\frac{x-3}{3-1} \qquad y-4=2\frac{x-3}{2} \qquad y=x+1$$

x=5 icin y=5+1=6

x=10 icin y=10+1=11

PR321 (0,2), (1,6), (2,12), noktalarindan gecen parabol denklemini bulun. x=3, x=7 icin y degerini hesaplayin

$y= ax^2+bx+c$

$2= a\,0^2+b\,0+c$ ==> 2=c

$6= a\,1^2+b\,1+c$ ==> 6=a+b+c ==> a+b=6-c=4

$12= a\,2^2+b\,2+c$ ==> 12=4a+2b+c ==> 4a+2b=12-c=10

a+b=4 ve 4a+2b=10 cozulurse ==> a=1 b=3

Sonuc Istenen polinom $y= x^2+3x+2$

x=3 icin $y= x^2+3x+2 = 3^2+3\,3+2=20$

x=7 icin $y= x^2+3x+2 = 7^2+3\,7+2=72$

Problem NMD1 a) Tabloda verilen data icin polinom bulun **b)** f(4) u hesaplayin)

x_k	2	5
$f(x_k)$	100	50

Cozum: 2 data var bir dogru yaklasimi yapabiliriz.

f(x)=ax+b

For x=2 f(x)=100.

For x=5 f(x)=50

Thus

100=a 2+b

50=a 5+b

Solving for a and b we get

a=-16.66 b=133.33

Thus the required polynomial is

f(x)=-16.66 x +133.33

b)for x=4, f(x) is

f(4)=-16.66 4+1 33.33=66.69

Problem PR321 (0,2), (1,6), (2,12), noktalarindan gecen parabol denklemini bulun. x=3, x=7 icin y degerini hesaplayin

$y= ax^2+bx+c$

$2= a\,0^2+b\,0+c$ ==> 2=c

$6= a\,1^2+b\,1+c$ ==> 6=a+b+c ==> a+b=6-c=4

$12= a\,2^2+b\,2+c$ ==> 12=4a+2b+c ==> 4a+2b=12-c=10

a+b=4 ve 4a+2b=10 cozulurse ==> a=1 b=3

Sonuc Istene polinom $y= x^2+3x+2$

x=3 icin $y= x^2+3x+2 = 3^2+3\,3+2=20$

x=7 icin $y= x^2+3x+2 = 7^2+3\,7+2=72$

Problem NMD2 a) Tabloda verilen data icin polinom bulun. **b)** Calculate f(6) by using the results of (a)

x_k	2	5	7
$f(x_k)$	100	50	80

Cozum: 3 data var bir parabol yaklasimi yapabiliriz.

$f(x)=ax^2+bx+c$

$100=a\,2^2+b\,2+c$

$50=a\,5^2+b\,5+c$

$80=a\,70^2+b\,7+c$

Writing the equations in matrix form

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 25 & 5 & 1\\ 49 & 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\ 50\\ 80\end{bmatrix}$$

Solving the above equations we get

a=6.333, b=-61, c=196.666

Thus the required polynomial is

$f(x)= 6.33x^2-61x+196.666$

b)$f(6)= 6.33\ \ 6^2-61\ \ 6+196.666=58.66$

Problem NMD3 a) Tabloda verilen data icin polinom buluin **b)** Calculate f(4) by using the results of (a)

x_k	2	5	7	9
$f(x_k)$	100	50	80	-10

Cozum: 3 data var bir kubik egri yaklasimi yapabiliriz.

f(x)= ax^3+bx^2+cx+d

Writing directly the matrix form

$$\begin{bmatrix} 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 5^3 & 5^2 & 5 & 1 \\ 7^3 & 7^2 & 7 & 1 \\ 9^3 & 9^2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Solving the equations we get

a=-3.0476 b=49 c=-240.8 d=410

The required polynomial is

f(x)= $-3.04\,x^3 + 49\,x^2 - 240.8x + 410$

b)f(4)= $-3.04\ 8^3 + 49\ 8^2 - 240.8\ 8 + 410 = 35.71$

--- -------

1)Matris tersi almak pratik olarak zordur. (gecmiste zordu)

2) Matris tersi alinirken islem sayisi coktur, dolayisiyla hatalar da cogalir.

Pratikte dogru ve egri denklemi bulunmadan tablolar yardimiyla bu is yapilmaya calisilir.

Gerek Newton polinomu, gerekse lagrange polinomu ve diger polinomlar ayni sonucu verir. Fark hesaplama teknigindedir.

SONLU FARK TABLOSU VE NEWTON POLINOMLARI

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ & + f[x_0,x_1,x_2;x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f[x_0,x_1,x_2;x_3,\ldots\ldots x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots..(x-x_n) \end{aligned}$$

where

$$f[x_i,x_{i+1},\ldots.,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\ldots.,x_{i+k}] - f[x_i,x_{i+1},\ldots.,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$f[x_0] = f(x_0),\quad f[x_1] = f(x_1),\quad \ldots..\ f[x_n] = f(x_n)$$

x	$f(x)$	1. Fark	2. fark	3. fark	4	5
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$			
		$f[x_2,x_1] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$		F_A	
		$f[x_3,x_2] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$		F_C
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$		F_B	
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$		
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$			
		$f[x_4,x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$				
x_5	$f[x_5]$					

$$F_A = f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$$

$$F_B = f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_2,x_3,x_4,x_5]-f[x_1,x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_1}$$

$$F_C = f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]-f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_0}$$

Newton polinomlari

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

.....

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + \ \ldots\ldots + \ f[x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots.x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots..(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

ProblemNMF1 f(1)=11, f(3)=23, f(6)=71, f(7)=119, icin tabloyu olusturun.
f(2), f(3.5), f(5),f(7). degerlerini hesaplayin

Solution:

x	$f(x)$	1. Fark	2. fark	3. fark
$x_0=1$	11			
		$f[x_0,x_1]=\frac{23-11}{3-1}=6$		
$x_1=3$	23		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{16-6}{6-1}=2$	
		$f[x_2,x_1]=\frac{71-23}{6-3}=16$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{8-2}{7-1}=1$
$x_2=6$	71		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{48-16}{7-3}=8$	
		$f[x_3,x_2]=\frac{119-71}{7-6}=48$		
$x_3=7$	119			

$$P_3(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$P_3(x)=11+6(x-1)+2(x-1)(x-3)+1(x-1)(x-3)(x-6)$$
$$P_3(x)=11+6x-6+2x^2-8x+6+x^3-10x^2+27x-18=x^3-8x^2+25x-7$$

$$P_3(x)=x^3-8x^2+25x-7$$

$$f(2)\cong P_3(2)=2^3-8\quad 2^2+25\quad 2-7=19$$
$$f(3.5)\cong P_3(3.5)=3.5^3-8\quad 3.5^2+25\quad 3.5-7=25.375$$
$$f(5)\cong P_3(5)=5^3-8\quad 5^2+25\quad 5-7=43$$
$$f(7)=P_3(7)=7^3-8\quad 7^2+25\quad 7-7=119$$

Ornek P764

	x	y
$x_1\rightarrow$	1.1	10.6
$x_2\rightarrow$	1.7	15.2
$x_3\rightarrow$	3.0	20.3

x	y		
1.1	10.6		
1.7	15.2	(15.2-10.6)/(1.7-1.1)=7.66	
3	20.3	(20.3-15.2)/(3-1.7)=3.92	(3.92-7.66)/(3-1.1)=-1.96

$P_1(x)= 10.6+7.66(x-1.1)$
$P_2(x)= 10.6+7.66(x-1.1)+ (-1.96)(x-1.1)\ (x-1.7)$
$= -1.96x^2+\ 13.18x\ \ -1.5178$

Ornek P765

x_k	$f[x_k]$					
$x_0=1$	$\underline{-3}$					
$x_1=2$	0	$\underline{3}$				
$x_2=3$	15	15	$\underline{6}$			
$x_3=4$	48	33	9	$\underline{1}$		
$x_4=5$	105	57	12	1	$\underline{0}$	
$x_5=6$	192	87	15	1	0	0

$a_0=-3$, $a_1=3$, $a_2=6$, $a_3=1$, $a_4=0$;
$x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$;

$$P_1(x)=-3+3(x-1)$$
$$P_2(x)=-3+3(x-1)+6(x-1)(x-2)$$
$$P_3(x)=-3+3(x-1)+6(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-3).$$

5.2.6 Lagrange İnterpolasyon Polinomu

Aralıklar eşit değilse
Lagrange interpolasyon polinomu kullanılır.

$$y_p(x)=\sum_{i=1}^{n}L_i(x).y_i$$

$y_p(x)$: Lagrange interpolasyon polinomu
$L_i(x)$: Lagrange polinomu

$$L_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)}$$

Baska bir yazim tarzi ile

$$P_n(x)=f(x_0)L_{n,0}+f(x_1)L_{n,1}+f(x_2)L_{n,2}$$
$$+......+f(x_n)L_{n,n}$$

Pn(x) : Lagrange interpolasyon polinomu
$L_{ni}(x)$: Lagrange polinomu

$$L_{n,k}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})....(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2).....(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})....(x_k-x_n)}$$

Problem NML1: Lagrange polynomilarini hesaplayin.

x_k	1	3	7	8

Solution

4 data var. 4 polinom hesaplayabiliriz. $x_0=1, x_1=3,$
$x_2=7, x_3=8,$

$$L_{3,0}=\frac{(x-3)(x-7)(x-8)}{(1-3)(1-7)(1-8)}=\frac{(x^2-10x+21)(x-8)}{(-2)(-6)(-7)}=$$
$$=\frac{x^3-18x^2+101x-168}{-84}$$
$$=-0.0119\,x^3+0.2143\,x^2-1.2024\,x+2.$$

$$L_{3,1}=\frac{(x-1)(x-7)(x-8)}{(3-1)(3-7)(3-8)}=0.025\,x^3-0.4\,x^2+1.775\,x-1.4$$

$$L_{3,2}=\frac{(x-1)(x-3)(x-8)}{(7-1)(7-3)(7-8)}=-0.0417\,x^3+0.5\,x^2-1.458\,x+1$$

$$L_{3,3}=\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(8-1)(8-3)(8-7)}=0.0286\,x^3-0.314\,x^2+0.885\,x-0.6$$

Problem NML2: lagrange interpolasyon polynomunu hesaplayin,

x_k	1	3	7	8
$f(x_k)$	100	50	20	30

Cozum: Lagrance polinomlari onceki problemde hesaplandi.

$$P_3(x)=f(x_0)L_{3,0}+f(x_1)L_{3,1}+f(x_2)L_{3,2}+f(x_3)L_{3,3}$$

Replacing $x_0=1, x_1=3,\ \ x_2=7, x_3=8,\ x_2=7, x_3=8,$

and

$f(x_0)=f(1)=100,\quad f(x_1)=f(3)=50,$
$f(x_2)=f(7)=20,\quad f(x_3)=f(8)=30,$

$$P_3(x)=100\ (\ -0.0119\,x^3+0.2143\,x^2-1.2024\,x+2.\ )$$
$$+50\ (\ 0.025\,x^3-0.4\,x^2+1.775\,x-1.4\ )$$
$$+20\ (\ -0.0417\,x^3+0.5\,x^2-1.458\,x+1\ )$$
$$+30\ (\ 0.0286\,x^3-0.314\,x^2+0.885\,x-0.6\ )$$
$$=0.084\,x^3+2.001\ x^2-34\,x+132$$

$$P_3(x)=0.084\,x^3+2.001\ x^2-34\,x+132$$

Problem NML3: Lagrange interpolasyon polinomu yardimiyla $f(2), f(2.5)\ f(4), f(5)$ hesaplayin.

x_k	1	3	7	8
$f(x_k)$	100	50	20	30

$P_3(x) = 0.084\,x^3 + 2.001\;x^2 - 34\,x + 132$

Thus

$f(2) \approx P_3(2) = 0.084\;\;2^3 + 2.001\;\;2^2 - 34\;\;2 + 132 = 72.5$

$f(2.5) \approx P_3(2.5) = 0.084\;2.5^3 + 2.\;\;2.5^2 - 34\;\;2.5 + 132$

$= 60.59$

$f(4) \approx P_3(4) = 0.084\;\;4^3 + 2.001\;\;4^2 - 34\;\;4 + 132 = 33$

$f(4) \approx P_3(5) = 0.084\;\;5^3 + 2.001\;\;5^2 - 34\;\;5 + 132 = 22$

OZETLE: Tablo halinde verilen degerlerden

	x	y
$x_1 \rightarrow$	1.1	10.6
$x_2 \rightarrow$	1.7	15.2
$x_3 \rightarrow$	3.0	20.3

$$y_p(x) = \frac{(x-1{,}7)(x-3.0)}{(1{,}1-1{,}7)(1{,}1-3.0)}10{,}6 + \frac{(x-1{,}1)(x-3.0)}{(1{,}7-1.1)(1.7-3.0)}15.2 +$$

$$+\frac{(x-1.1)(x-1.7)}{(3-1.1)(3-1.7)}20.3$$

$= 9.298(x-1.7)(x-3.0) - 19.487(x-1.1)(x-3) + 8.218(x-1.1)(x-1.7)$

$= -1.97\,x^2 + 13.18\,x - 1.518$

Problem NMJH1

x_k	3	5	6
$f(x_k)$	2	-2	-3

We have to calcualte Lagrange Polynomials first. Since there are three data points we can calculate 3 Lagrange polynomials $L_{2,0}, L_{2,1}, L_{2,2}$,

$$L_{2,0} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-5)(x-6)}{(3-5)(3-6)}$$

$= 0.1667\,x^2 - 1.833\,x + 5$

$$L_{2,1} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-3)(x-6)}{(5-3)(5-6)}$$

$= -0.5\,x^2 + 4.5\,x - 9$

$$L_{2,2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(6-3)(6-5)}$$

$= 0.333\,x^2 - 2.667\,x + 5$

$x_0 = 1$ sayısının komşuluğunda olmadığını söyler. Yani, Taylor polinomu, yaklaşık hesaplamalar için her zaman kullanılabilecek bir yöntem değildir. Bu tür yaklaşık hesaplamalar için, kitabın diğer bölümlerinde daha kullanışlı yöntemler verilecektir.

Alıştırmalar

1. $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun, **(a)** $x_0 = 1$ **(b)** $x_0 = 0$ noktalarındaki ikinci dereceden Taylor polinomlarını bulunuz.

2. $f(x) = (1+x)^{-2}$ fonksiyonunun,

(a) $x_0 = 0$ noktasındaki üçüncü dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

(b) Bulduğunuz Taylor polinomunu kullanarak $f(0.05)$ değerini hesaplayınız ve gerçek $f(0.05)$ ile yaklaşık olarak bulduğunuz $f(0.05)$ değerini karşılaştırınız.

3. İkinci alıştırmadaki bulunan Taylor polinomunu kullanarak $\int_0^{0.05} (1+x)^{-2}\,dx$ integralini hesaplayınız. Bulunan sonuç ile bu integralin gerçek değerini karşılaştırınız.

4. $\sin(1)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

5. $f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında dördüncü dereceden Taylor polinomunu bulunuz ve $\ln(1.1)$ değerini hesaplayınız.

4.3. İnterpolasyon ve Lagrange Polinomu

Bu bölümde genel bir fonksiyona özellikleri iyi bilinen daha basit bir fonksiyonlar sınıfı ile yaklaşma problemini ele alacağız. Bunun iki faydası vardır.

Birincisi, daha genel veya daha karmaşık bir fonksiyon yerine türevi, integrali, vs. bilinen daha kolay fonksiyonların alınması.

İkincisi, fonksiyon değerleri bir tablo haline getirilmiş ˙ir fonksiyonun tablolarda bulunmayan değerlerinin hesabı.

İlk olarak basitlik olsun diye, x_0 ve x_1 gibi farklı iki nokta ve f fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri $f(x_0)=y_0$ ve $f(x_1)=y_1$ verilmiş olsun. Amacımız verilen noktalarda f fonksiyonu ile aynı değerleri alan bir polinom bulmaktır. Şimdi,

$$P(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1$$

biçimindeki lineer polinomu göz önüne alalım. Bu polinomda,

$x=x_0$ alınırsa,

$$P(x_0)=\frac{(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x_0-x_0)}{(x_0-x_1)}y_1$$
$$=1\times y_0+0\times y_1=y_0=f(x_0)$$

ve $x=x_1$ alınırsa,

$$P(x_1)=\frac{(x_1-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1$$
$$=0\times y_0+1\times y_1=y_1=f(x_1)$$

elde edilir. Elde edilen lineer $P(x)$ polinomu ile f fonksiyonu verilen noktalarda aynı değerleri almaktadır. Bu şekilde elde edilen $P(x)$ polinomunun elde ediliş yöntemine *İnterpolasyon* yöntemi denir. Biz burada $P(x)$ polinomunu elde ederken,

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \quad \text{ve} \quad L_1(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

bölümlerini kullandık. Burada, $x=x_0$ iken, $L_0(x_0)=1$ ve $L_1(x_0)=0$ olur. Benzer şekilde, $x=x_1$ iken, $L_0(x_1)=0$ ve $L_1(x_1)=1$ olur.

Şimdi yukarıdaki yöntemi daha genel hale getirelim. İlk olarak, her bir $k=0,1,\dots,n$ için, $L_{n,k}(x)$ bölümlerini oluşturalım. Yukarıdaki bölümlerden (oranlardan da) de görüldüğü gibi, $i\neq k$ iken $L_{n,k}(x_i)=0$ ve $i=k$ iken, $L_{n,k}(x_k)=1$ dir. Buna göre $L_{n,k}$ bölümünün payındaki terim,

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n), \tag{4.2}$$

$x_0,x_1,\dots,x_{k-1},\dots,x_n$ noktalarında sıfır ve paydasındaki terim, $x=x_k$ için,

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

dir ve 1'e eşittir. Böylece,

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$
$$=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

yazabiliriz.

$L_{n,k}$ bölümleri kullanılarak İnterpolasyon polinomu aşağıdaki teorem ile tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan İnterpolasyon polinomuna *Lagrange İnterpolasyon polinomu* denir.

2.Teorem. Eğer, $x_0,x_1,\dots,x_n$, $(n+1)$ farklı nokta ve bu noktalarda f fonksiyonunun değerleri verilmiş ise, bu durumda f ile aynı değerleri alan, yani

$$f(x_k)=P(x_k), \qquad k=0,1,\dots,n$$

olan n.dereceden bir ve yalnız bir P polinomu vardır. Bu polinom, $k=0,1,\dots,n$ olmak üzere,

$$P(x)=f(x_0)L_{n,0}(x)+\cdots+f(x_n)L_{n,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_{n,k}(x) \tag{4.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \tag{4.4}$$

$$=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

olarak tanımlanır. Bazen $L_{n,k}(x)$ yerine kolaylık olsun diye, $L_k(x)$ gösterimi de kullanılır.

1.Örnek. $f(x)=1/x$ fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki tablo verilmektedir.

x_k	2	2.5	4
$f(x_k)$	0.5	0.4	0.25

(a) İkinci dereceden İnterpolasyon polinomunu hesaplayınız.

(b) $f(3)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm. (a) İlk olarak, $L_k(x)$ polinomlarını hesaplayalım:

$$L_0(x)=\frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)}=(x-6.5)x+10,$$

$$L_1(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)}=\frac{(-4x+24)x-32}{3},$$

$$L_2(x)=\frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}=\frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

olur. İkinci dereceden İnterpolasyon polinomu,

$$P_2(x)=\sum_{k=0}^{2}f(x_k)L_k(x)$$

$$P_2(x)=0.5((x-6.5)x+10)+0.4\frac{(-4x+24)x-32}{3}+0.25\frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

$$=(0.05x-0.425)x+1.15$$

$$=0.05x^2-0.425x+1.15$$

olarak elde edilir.

(b) $f(3)\approx P_2(3)=0.05(3^2)-0.425(3)+1.15=0.325$ olur.

2.Örnek. $f(x)$ fonksiyonu ile ilgili,

x_k	2	3	-1	4
$f(x_k)$	1	2	3	4

tablosu veriliyor. Üçüncü dereceden İnterpolasyon polinomunu bulunuz.

Çözüm. İlk olarak, $L_k(x)$ polinomlarını hesaplayalım:

$$L_0(x)=\frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(2-3)(2+1)(2-4)}=\frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4),$$

$$L_1(x)=\frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(3-2)(3+1)(3-4)}=-\frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)}=-\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(4-2)(4-3)(4+1)}=\frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

olur. Üçüncü dereceden İnterpolasyon polinomu,

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3} f(x_k)L_k(x)$$

$$P_3(x)=1\times\frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)-2\times\frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)$$

$$-3\times\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)+4\times\frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

$$=0.01666x^3+0.35000x^2-1.06666x+1.60000$$

olarak elde edilir.

Şimdi de, interpolasyon polinomunu hesaplarken yapılan hatayı bulalım. Bu hatanın hesaplanması ile ilgili şu teoremi verebiliriz.

3.Teorem. Eğer, $x_0, x_1, \ldots, x_n$; $[a,b]$ aralığında $(n+1)$ farklı nokta ve $f\in C^{n+1}[a,b]$ ise, Bu durumda, her $x\in[a,b]$ için,

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $\xi(x)\in(a,b)$ vardır. Burada P İnterpolasyon polinomudur.

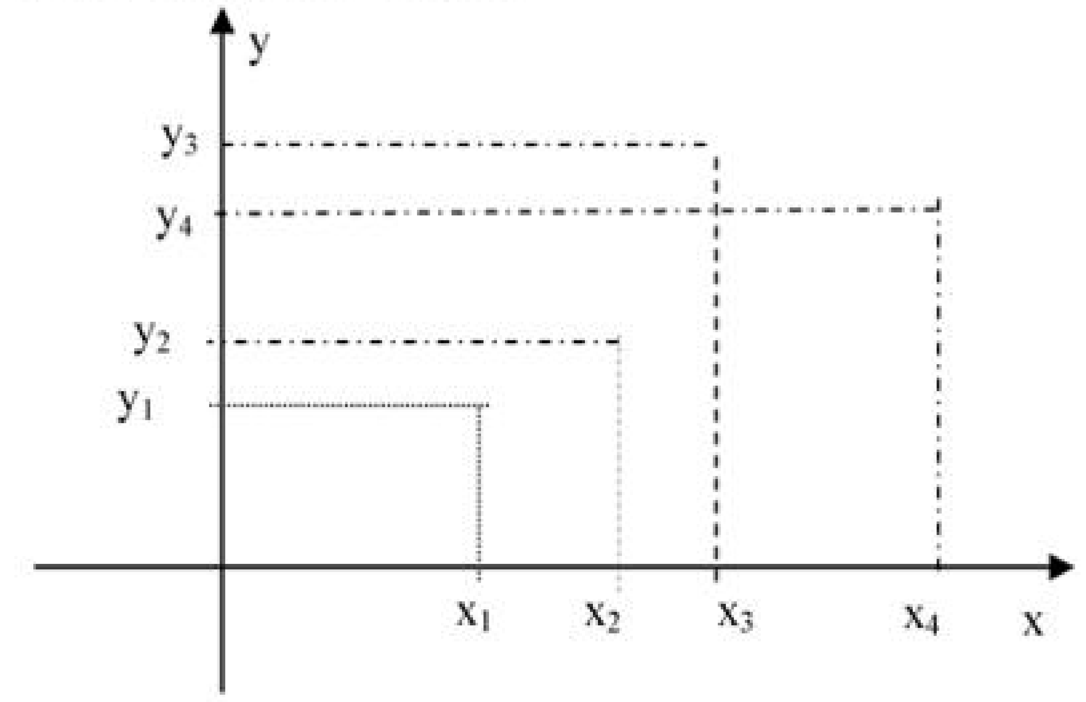
İspat. Bir kere, her $k=0,1,\ldots,n$ için $x=x_k$ ise, $f(x_k)=P(x_k)$ olur ve $\xi(x)$, (4.5) eşitliğini sağlayacak şekilde (a,b) aralığından keyfi olarak seçilebilir. Eğer, $x\neq x_k$ ise, $t\in[a,b]$ olacak şekilde,

$$g(t)=f(t)-P(t)-[f(x)-P(x)]\frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

$$=f(t)-P(t)-[f(x)-P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}$$

EN KUCUK KARELER METODU.
(Least squares Method)
Cok noktadan Gecen Dogru Denklemi

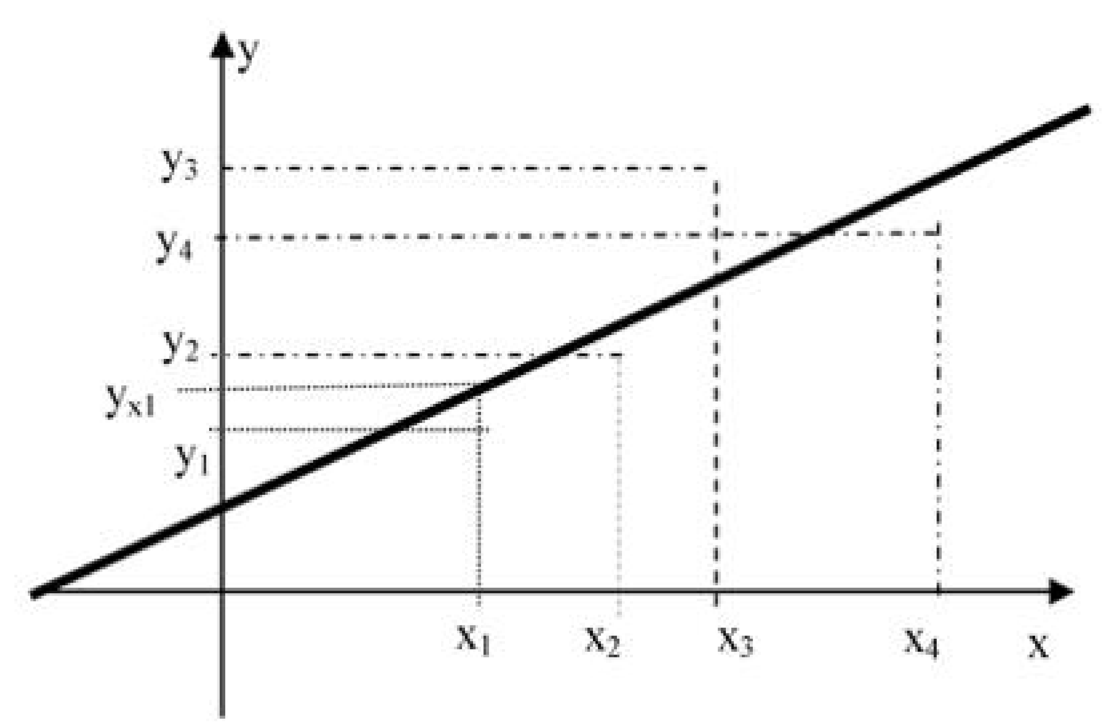
x-y duzleminde ikiden nokta verildiginde bu noktalara en yakin bir yerden gecen dogru denklemi nedir. Mesela dort nokta verilsin.



Rasgele yerlestirilen dort noktanin hepsinden gecen bir dogru olamaz. (Noktalar ozel olarak bir dogru uzerinde olmasi ozel bir durumdur.) Bizden istenen bu noktalarin hepsine yakinligi optimum olan bir dogru denklemi bulmamiz.

En kucuk kareler metodu verilen noktalara olan mesafesinin kareleri toplami minimum olan dogruyu hesaplamak demektir.

dogru denklemi y=ax+b olsun.



$x=x_1$ icin $y_{x1}=ax_1+b$,
$x=x_2$ icin $y_{x2}=ax_2+b$,
$x=x_3$ icin $y_{x3}=ax_3+b$,
$x=x_4$ icin $y_{x4}=ax_4+b$,
x_1, y_1: verilen nokta.
y_{x1}:$x=x_1$ icin $y=ax+b$ dogrusunun degeri.
(x_1,y_1) noktasindaki fark= $y_1-y_{x1}=y_1-(ax_1+b)$,
(x_2,y_2) noktasindaki fark= $y_2-y_{x2}=y_2-(ax_2+b)$,
(x_3,y_3) noktasindaki fark= $y_3-y_{x3}=y_3-(ax_3+b)$,
Bu farklarin kareleri toplami
$[y_1-(ax_1+b)]^2+[y_2-(ax_2+b)]^2+[y_1-(ax_1+b)]^2+\ldots$
Bu farklara hata terimi denir. Cunku verilen dosgru butun noktalardan gecse idi fark sifir olacakti.

$$S=\text{Toplam Hata}=\sum_{n=1}^{\text{nokta sayisi}} y_k-(ax_k+b)$$

a ve b yi otle sec ki toplam hata sifir olsun.
Bu da S nin a ve b ye gore turevinin sifir olmas demektir.

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial b}=0,$$

Bu turev alma islemini yapalim. (toplamin turevi turevlerin ayri ayri toplamina esittir.)

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{k=1}^{N}2(y_k-ax_k-b)(-x_k)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{k=1}^{N}2(y_k-ax_k-b)(-1)=0$$

Ifadeleri calim.

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{k=1}^{N}2(y_k-ax_k-b)(-x_k)=2\sum_{k=1}^{N}y_kx_k+ax_k^2+bx_k$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}-y_kx_k+2\sum_{k=1}^{N}ax_k^2+2\sum_{k=1}^{N}bx_k$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}-y_kx_k+2a\sum_{k=1}^{N}x_k^2+2b\sum_{k=1}^{N}x_k$$

$$=P+a\,Q+b\,R=0$$

$$P=\sum_{k=1}^{N}-y_kx_k,\quad Q=\sum_{k=1}^{N}x_k^2,\quad R=\sum_{k=1}^{N}x_k$$

(2 esitligin tamaminda oldugundan atilmistir)

Benzer sekilde ikinci ifadeyi de acalim.

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{k=1}^{N}2(y_k-ax_k-b)(-1)=2\sum_{k=1}^{N}-y_k+ax_k+b$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}-y_k+2\sum_{k=1}^{N}ax_k+2\sum_{k=1}^{N}b=-2\sum_{k=1}^{N}y_k+2a\sum_{k=1}^{N}x_k+2b\sum_{k=1}^{N}1$$

$$=J+aK+bM$$

(2 esitligin tamaminda oldugundan atilmistir)

$$J=-\sum_{k=1}^{N}y_k,\quad K=\sum_{k=1}^{N}x_k\quad M=\sum_{k=1}^{N}1$$

iki denklem birlestirilirse
P+aQ+bR=0
J+aK+bM=0

$$\begin{bmatrix}Q & R\\ K & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P\\ J\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q & R\\ K & M\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}P\\ J\end{bmatrix}$$

Ornek: PR411 Asagidaki x-y noktalarina en yakin dogruyu hesaplayin.

x	y
1	2
2	3
5	6
7	4

Cozum: dort nokta var. N=4

$$P = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k = \sum_{k=1}^{4} y_k x_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$P = 1_x 2 + 2_x 3 + 5_x 6 + 7_x 4 = 66$

$$Q = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2 = 79$$

$$R = \sum_{k=1}^{N} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2 + 5 + 7 = 15$$

$$J = -\sum_{k=1}^{N} y_k = -(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2 + 3 + 6 + 4 = 15$$

$$K = \sum_{k=1}^{N} x_k = 15$$

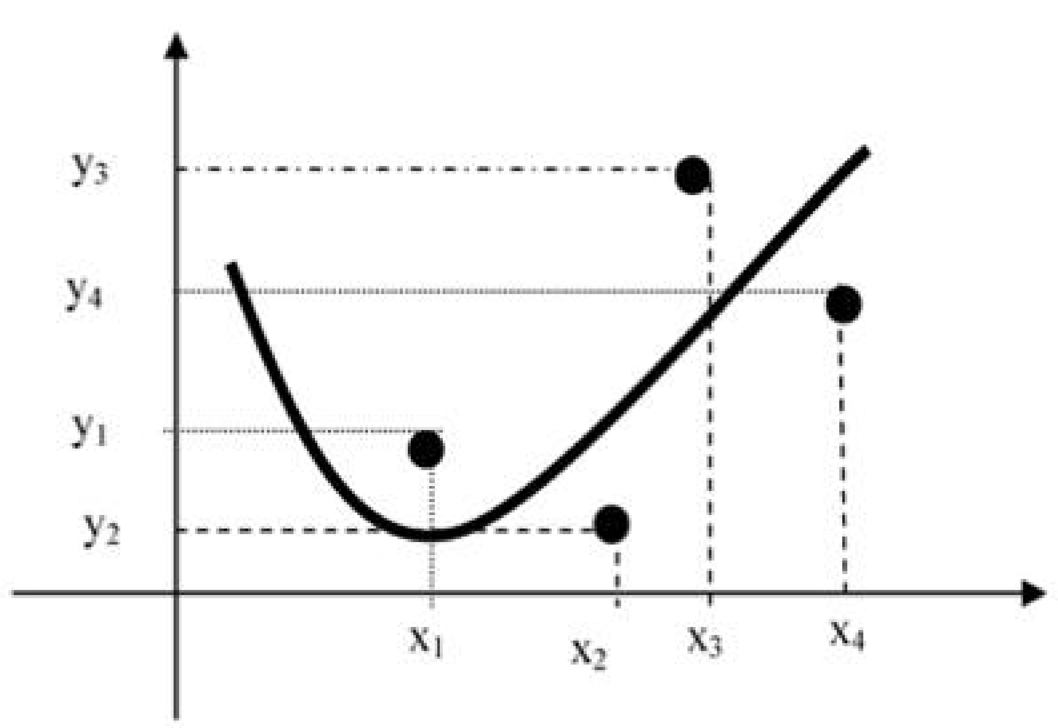
$$M = \sum_{k=1}^{N} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\begin{bmatrix} 79 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Buradan a=0.4286, b=2.1429
dogru denklemi
y=0.4286x+2.1429
olarak bulunur.

Cok noktadan Gecen Parabol Denklemi

Duzlemde verilen uc bagimsiz noktadan bir parabol gecer. Ucden fazla noktadan parabol gecmez (noktalar parabol uzerinde secilmesi bahsimizin haricindedir. En genel halde ucden fazla nokta olursa bu noktalarin hepsinden parabol gecemez. Ancak ucunden gecebilir.). Ucden fazla nokta olursa bu durumda noktlara enyakin olan parabolu bulmak bizim hedefimizdir. Burada da yine verilen noktalara olan uzakligin kareleri toplaminin minimum olmasini saglayan katsayilar hesaplanmak istenmektedir.



$S = [y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)]^2 + [y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)]^2 + [y_3 - (ax_3^2 + bx_3 + c)]^2 + [y_4 - (ax_4^2 + bx_4 + c)]^2 + \ldots$

a,b,c ye gore turev alinir ve sifira esitlenir. a,b,c hesaplanir.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0,$$

NUMERIK TUREV
NICIN NUMERIK TUREV
1)Fonksiyon karmasik olabilir turevi zordur.

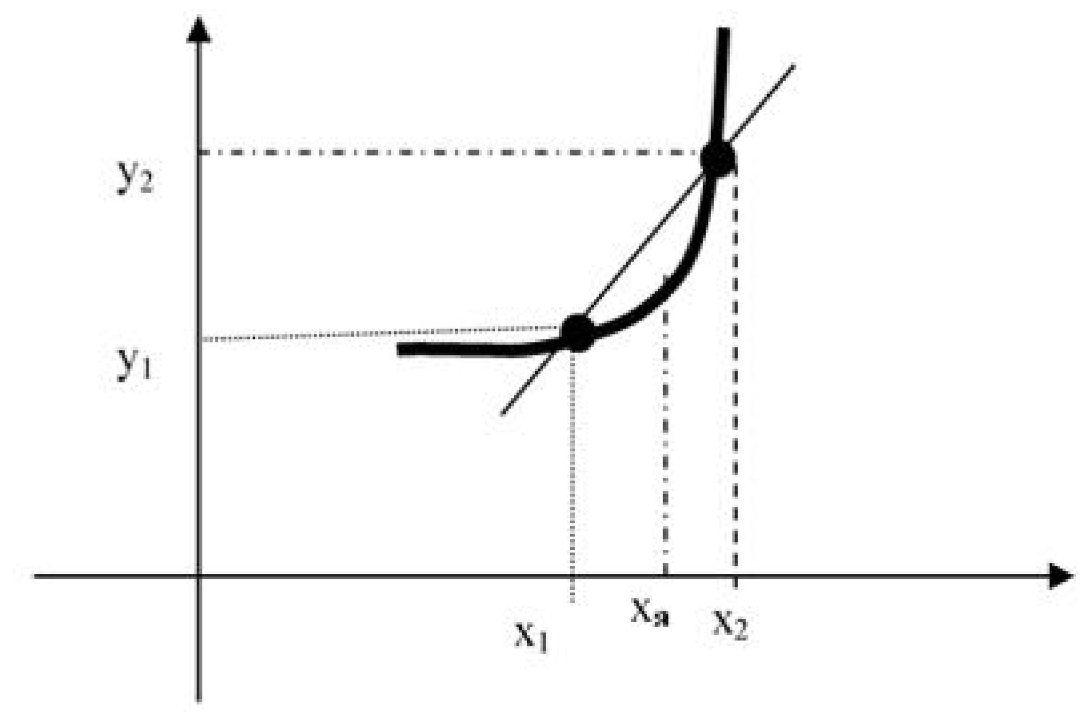
$$f(x) = \frac{x^{\sqrt{\cos(x) + \sin x^3}}}{x^3 + x^{\sqrt{\cos(x) + \sin x^3}}} + \tan^{-1} x^{x^2+1}$$

f '(x)=?

2)x-y fonksiyonu tablo halindedir, Analitik bir fonksiyonu yoktur.

x	y=f(x)
0	2
0.3	-1
0.5	0.8
1	2.5
1.5	7.5

Birinci dereceden turev.
x-y duzleminde iki (veya daha fazla) nokta verildiginde bu noktalardan gecen f(x) fonksiyonunun turevi



$x=x_a$ noktasindaki turev o noktadan cizilen tegetin egimidir. yani

$$m = \text{turev} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bu m degeri turevdir. Bu turev
x_1 noktasindaki turev kabul edilirse ileriye dogru turev
x_2 noktasindaki turev kabul edilirse geriye dogru turev
x_a noktasindaki turev kabul edilirse merkezi turev

PR315 (1,2), (3,4) noktalarindan gecen dogru denklemini bulunuz. x=5, x=10 icin y degerini hesaplayin

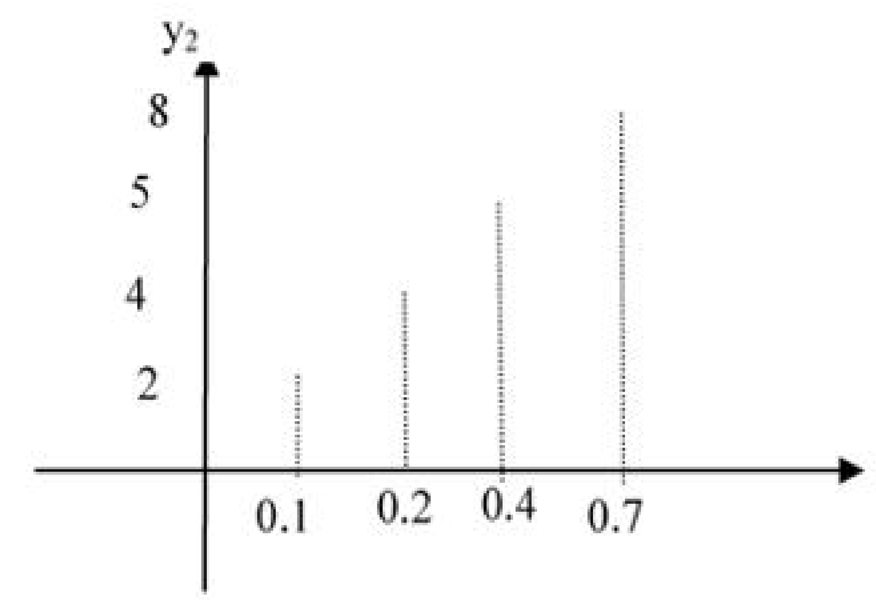
$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y-4}{4-2} = \frac{x-3}{3-1} \qquad y - 4 = 2\frac{x-3}{2} \qquad y = x + 1$$

x=5 icin y=5+1=6
x=10 icin y=10+1=11

Ornek Pr 115. Tablodaki degerleri kullanarak y=f(x) fonksiyonunun A(x=0.2,y=4), B(x=0.4, y=5), C(x=0.7,y=8) noktalarindaki turevlerini hesaplayin.

x	y=f(x)
0.1	2
0.2	4
0.4	5
0.7	8
0.8	11



A(0.2,4) noktasinda geriye dogru turev= $\frac{4-2}{0.2-0.1}$ =20

A(0.2,4) noktasinda ileriye dogru turev= $\frac{5-4}{0.4-0.2}$ =5

A(0.2,4) noktasinda merkezi turev= $\frac{5-2}{0.4-0.1}$ =6.66

B(0.4,5) noktasinda geriye dogru turev= $\frac{5-4}{0.4-0.2}$ =5

B(0.4,5) noktasinda ileriye dogru turev= $\frac{8-5}{0.7-0.4}$ =10

B(0.4,5) noktasinda merkezi turev= $\frac{8-4}{0.7-0.2}$ =8

------------------------------------ -----------

Ornek PR2: $y=f(x)=x^3$ un, x=2.1, x=2.2, x=2,3 noktalarindaki degerlerini kullanarak. Turevlerini hesaplayin.
Cozum:
x=2.1 f(x) = f (2.1)=2.1^3=9.261,
x=2.2, f(x) = f (2.2)=2.2^3 =10.648,
x=2.3, f(x) = f (2.1)=2.3^3=12.167
x=2.2 noktasindaki ileri, geri merkezi turevlerini hesaplayin. Gercek deger $y'=3x^2=3\ 2{,}2^2=14.52$ ile karsilastirin.

Geriye dogru turev= $\frac{10.648 - 9.261}{2.2 - 2.1}$ =13.87

ileriye dogru turev= $\frac{12.167 - 10.648}{2.3 - 2.2}$ =15.19

Merkezi turev= $\frac{12.167 - 9.261}{2.3 - 2.1}$ =14.53

Geriye dogru turevde hata: 14.52-13.87=0.65

ileriye dogru turevde hata : 14.52- 15.19= - 0.67

Merkezi turevde hata 14.52- 14.53= - 0.01

Uc nokta kullanarak turev alma

Burada prensip f(x) fomksiyonu ikinci dereceden bir polinomla temsil edilir.(interpolasyon yapilir)

$f(x)= Ax^2+Bx+C$ fonksiyonu
x=a icin $f(a)= Aa^2+Ba+C$
x=b icin $f(b)= Ab^2+Bb+C$
x=c icin $f(c)= Ac^2+Bc+C$
a,b,c, f(a), f(b), f(c) biliniyor. A,B,C bilinmiyor. 3 bilinmeyenli uc denklemden A,B,C cozulur ve denklemde yerine konulur. Bu ifade karmasik oldugundan pratikte ikinci derece Newton polinomu (newton Gregory polinomu), ikinci derece Lagrange polinomu kullanilarak turev hesaplanir.

Sonra bu ikinci derece polinomun
$f'(x) \approx 2Ax+B$
seklinde turevi alinir.

Dort nokta kullanarak turev alma
f(x) fonksiyonunun x=a, x=b, x=c, x=d noktalarindaki degerleri kullanilarak fonksiyon kubik bir egri ile temsil edilir. kubik fonksiyonun turevi alinir.

Ornek PR23: $y=f(x)=x^3$ un, x=2.1, x=2.2, x=2,3 noktalarindaki degerlerini kullanarak turevlerini hesaplayin.
Cozum:
$x=2.1\ \ f(x) = f(2.1)=2.1^3=9.261,$
$x=2.2,\ f(x) = f(2.2)=2.2^3 =10.648,$
$x=2.3,\ f(x) = f(2.1)=2.3^3=12.167$
$f(x) \approx Ax^2+Bx+C$
$x=2.1,\ f(2.1) = A\ 2.1^2+B\ 2.1+C =9.261,$
$x=2.2\ ,\ f(2.2) = A\ 2.2^2+B\ 2.2+C =10.648$
$x=2.3\ ,\ f(2.3) = A\ 2.3^2+B\ 2.3+C =12.167,$
Uc denklem birlestirilirse
4.41 A + 2.1 B +C =9.261,
4.84 A + 2.2 B +C =10.648
5.29 A + 2.3 B +C ==12.167,

$$\begin{bmatrix} 4.41 & 2.1 & 1 \\ 4.84 & 2.2 & 1 \\ 5.29 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.261 \\ 10.648 \\ 12.167 \end{bmatrix}$$

A=6.6, B= -14.51 C= 10.62
noktalarindan gecen polinomu bul turevini al x=2,2 koy degeri bul.

$f'(x) = 2Ax+B = 2 \times 6.6 \times 2.2 + (-14.51) = 14.52$
Bu sekilde polinom bularak turev alma yerine A B C yi hesaplamadan direk olarak turev formulu turetilebilir. Pratikte x yonundeki adim sabit alinir. bu durumda $x_2-x_1=h$, $x_3-x_2=h$, $x_4-x_3=h$, seklinde olur. h turev adimidir.

x	y=f(x)
x_1	$y_1=f(x_1)$
$x_2=x_1+h$	$y_2=f(x_2)$
$x_3=x_2+h=x_1+2h$	$y_3=f(x_3)$

$Ax_1^2+Bx_1+C =y_1$
$Ax_2^2+Bx_2+C =y_2,\ \ A(x_1+h)^2+B(x_1+h)+C =y_2$
$Ax_3^2+Bx_3+C =y_3\ \ A(x_1+2h)^2+B(x_1+2h)+C =y_2$

Burada x_1,y_1, x_2,y_2,x_3,y_3, biliniyor. A,B,C bilinmiyor. C denklemlerden yok edilirse iki bilinmiyenli iki denklem cikar. Bunlarda cozulurse A, B,C bulunur. Turev $y'=2Ax+B$ olacaktir. Bu islemler yapilirsa

$$y' = 2Ax + B = \frac{-y_3 + 4y_2 - 3y_1}{2h}$$

bagintisi elde edilir.

PR211. $y=f(x)= x^4+5x^3$ denkleminin turevini $x_1=1.1$, $x_2=1.2$, $x_3=1.3$ noktalarindaki degerlerini kullanarak turevi hesaplayin. Gercek turev degerleri ile karsilastirin.
Cozum
$y=Ax^2+Bx+C$
denklem $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, icin yazilirsa
$y_1=Ax_1^2+Bx_1+C$
$x_1=1.1,\ y_1= x_1^4+5x_1^3 = 1.1^4+5\ 1.1^3=8.11$
$x_2=1.2,\ y_2= x_2^4+5x_2^3 = 1.2^4+5\ 1.2^3=10.71$
$x_3=1.3,\ y_3= x_3^4+5x_3^3 = 1.3^4+5\ 1.3^3=13.84$

$$\begin{bmatrix} 1.1^2 & 1.1 & 1 \\ 1.2^2 & 1.2 & 1 \\ 1.3^2 & 1.3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.11 \\ 10.71 \\ 13.84 \end{bmatrix}$$

A=26.65, B=-35.35, C=14.75
y'=2AX+B=2*26.65*1.1-35.35=23.28

$$y' = \frac{-y_3 + 4y_2 - 3y_1}{2h} = \frac{-13.84 + 4 \times 10.71 - 3 \times 8.11}{2 \times 1.1}$$
=23.28

Gercek turev
$y=f(x)= x^4+5x^3$
$y'=4x^3+15x^2 = 4\ 1.1^3+15\ 1.1^2 =23.47$
Hata=23.47-23.28=0.19
Hata nin sebebi, turev adiminin buyuk olmasi ve yuvarlatma hatalaridir. Biz adimi 0.1 aldik 0.01 alsak hata daha da azalirdi. Ayrica yukarida
A=26.65, B=-35.35, C=14.75
kabul edildi. Halbuki
A=26.649, B=-35.349, C=14.7576
degerlei kullanilsa idi hata azalirdi.

YUKSEK MERTEBEDEN TUREVLER
(turevin turevi ikinci turevdir)
(Ikinci turevin turevi ucuncu turev)
IKINCI TUREV

Birinci turev= $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y_{d1}= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\quad y_{d2}= \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\quad y_{d3}= \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

Ikinci turev= $\dfrac{y_{d2} - y_{d1}}{x_2 - x_1}$

$y_{dd1}=\dfrac{y_{d2} - y_{d1}}{x_2 - x_1},\quad y_{dd2}= \dfrac{y_{d3} - y_{d2}}{x_3 - x_2},\quad y_{dd3}= \dfrac{y_{d4} - y_{d3}}{x_4 - x_3}$

Adimlarin esit oldugu varsayilirsa
$h=x_2-x_1$, $h=x_3-x_2$, $h=x_4-x_3$,
B ulunan y_{d1},y_{d2} degerler yerine konulursa.

$$y_{dd1}= \frac{\dfrac{y_3 - y_2}{h} - \dfrac{(y_2 - y_1)}{h}}{h} = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2},$$

$$y_{dd2}= \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2},$$

7

SAYISAL TÜREV

7.1 GİRİŞ

İntegral işlemi gibi türev işlemi de mühendislikte çok fazla kullanılan bir işlemdir. Basit olarak bir fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi olarak tanımlanan türev işlemi esasında bir büyüklüğün değişim hızını verir. Bu bakımdan türev maksimum ve minimum problemlerin çözümünde, hız ve ivme hesaplarında, diferansiyel denklem çözümü ve sınır şartlarının uygulanmasında, akış ve ısı transferi gibi problemlerin çözümünde kullanılan bir işlemdir.

Bir $y=f(x)$ fonksiyonuna ait (x_i,y_i) noktaları verilmiş ise bu değerleri kullanarak fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevini sayısal olarak hesaplamak mümkündür. Fonksiyonun analitik ifadesi verilmiş ise, türev analitik alınabileceği gibi, belirli x_i noktalarına karşı y_i değerleri elde edilerek sayısal olarak ta hesaplanabilir. Sayısal türev için *türev formülleri* kullanılır ve bulunan sonuç genelde bir hata içerir. Türev formüllerini çıkarmak için Taylor serisi veya interpolasyon polinomlarının türevleri kullanılabilir.

7.2 TAYLOR SERİSİ

Bir fonksiyonun x noktasındaki değeri, buna yakın bir $x=x_0$ noktasındaki değerleri cinsinden;

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1'!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2'!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (7.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun geçerli olabilmesi için seri yakınsak olmalı ve $x=x_0$ noktasında türev tanımlı olmalıdır. Sonsuz sayıda terime sahip bu fonksiyonda belli sayıda terim alınması durumunda oluşacak kesme hatasının değeri x'in (x_0) noktasına yakınlığına ve alınan terim sayısına bağlıdır. n. terimden sonrası kesiliyorsa kesme hatası

$$e=\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}\left|\frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{(n+1)}}\right|=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{(n+1)}} \quad (7.2)$$

şeklinde yazılabilir. Oluşan bu hatanın mertebesi h^{n+1} olup hata mertebesi $O(h^{n+1})$ olarak gösterilir. Örnek olarak ilk iki terimden sonrası atılıyorsa hata (h^2) mertebesindedir denir ve fonksiyon

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1'}(x-x_0)+O(h^2) \quad (7.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu açıklamadan sonra verilen bir $y=f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevlerinin sayısal hesabı için Taylor serisinden yararlanmak mümkündür. Fonksiyonun x_0 civarında Taylor açılımı

$$f(x_0+\Delta x)=y_1=y_0+h\left.\frac{dy}{dx}\right|_0+\frac{h^2}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_0+\frac{h^3}{3!}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_0+\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1=y_0+h.y_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\frac{h^3}{3!}y_0'''+\ldots\ldots\ldots \quad (7.4)$$

yazılabilir. Buradan birinci türev çekilirse

$$y_0'=\frac{y_1-y_0}{h}-\frac{h}{2!}y_0''-\frac{h^2}{3!}y_0'''-\ldots\ldots\ldots$$

ve yüksek mertebeden türev terimleri atılırsa,

$$y_0'=\frac{y_1-y_0}{h}+0(h) \quad (7.5a)$$

x_0 noktasındaki birinci türev formülü elde edilir. Burada atılan terimlerden birincisine bakılırsa kesme hatasının O(h) mertebesinde olduğu görülür. İleri sonlu farklar cinsinden birinci türev

$$y'_0 = \frac{\Delta y_0}{h} \tag{7.5b}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu formül y_0 ve y_1 arasında çizilen teğetin eğimi olup *ileri fark türev formülü* olarak da anılır.

Birinci türev için bir başka formül Taylor serisinin bir geri noktada yazılması ile elde edilebilir.

$$f(x_0 - \Delta x) = y_{-1} = y_0 - h\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_0 - \frac{h^3}{3!}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{-1} = y_0 - h.y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 - \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7.6}$$

$$y'_0 = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} + \frac{h}{2!}y''_0 - \frac{h^2}{3!}y'''_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Denklemdeki ikinci terim ve daha sonraki terimler atılırsa,

$$y'_0 = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} + 0(h) \tag{7.7a}$$

yazılabilir ki bu da birinci mertebeden kesme hatasına sahiptir. *Geri sonlu fark türev formülü* olan bu ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y'_0 = \frac{\nabla y_0}{h} \tag{7.7b}$$

(7.4) denkleminden (7.6) denklemi taraf tarafa çıkartılırsa,

$$y_1 - y_{-1} = hy'_0 + hy'_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \frac{y^3}{3!}y'''_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

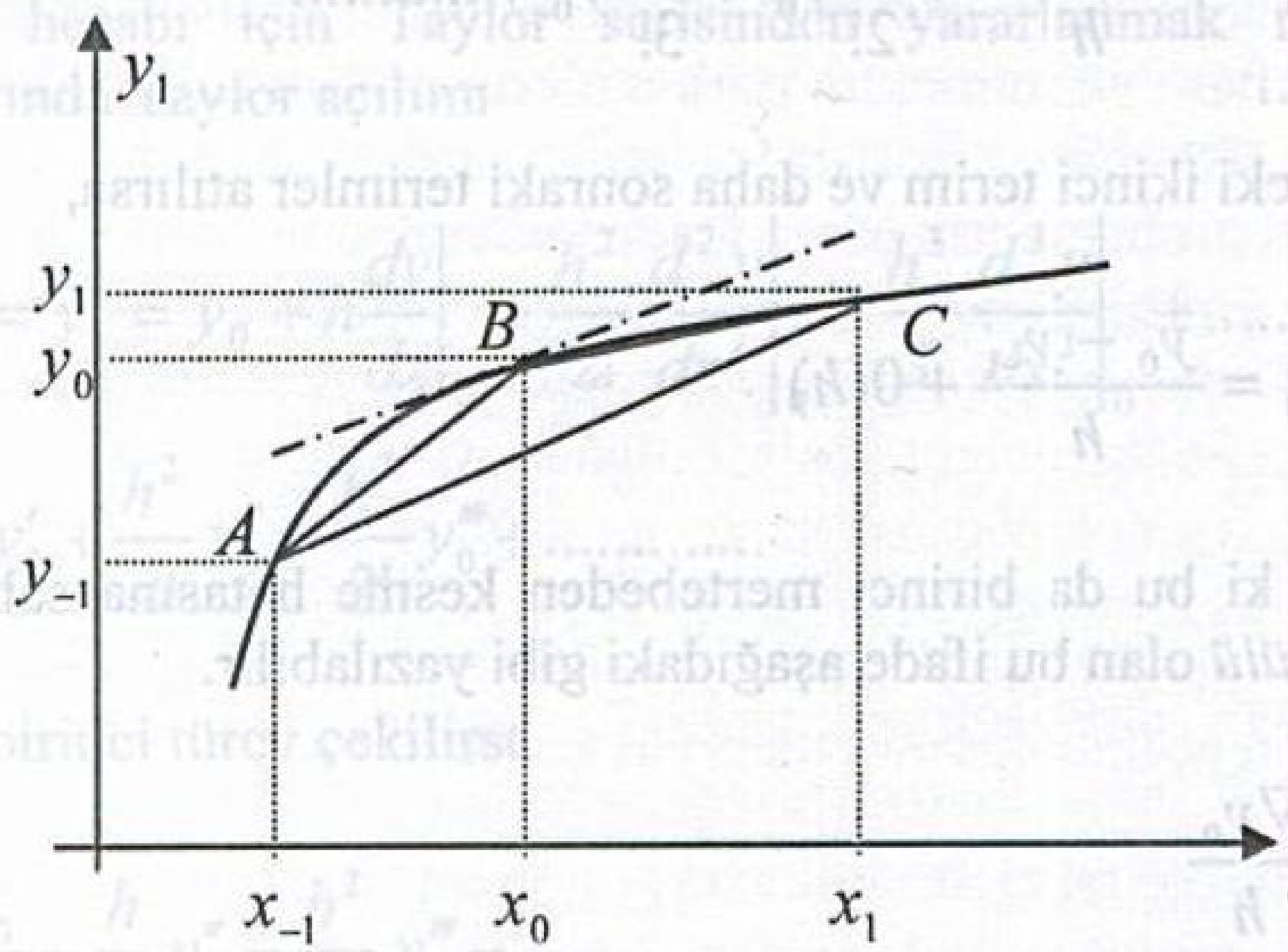
$$y_1 - y_{-1} = 2hy'_0 + 2\frac{h^3}{3!}y'''_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

elde edilir. Bu denklemden birinci türev çekilir ve yüksek mertebeden türev terimler atılırsa,

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + 0(h^2) \tag{7.8}$$

olur. *Merkezi fark türev formülü* denilen bu ifadenin hatası $0(h^2)$ mertebesinde olup diğer formüllere göre daha hassas sonuç vereceği açıktır. Bu ifade geometrik olarak, türev hesaplanacak noktanın bir ileri (y_1) ve bir geri (y_{-1}) noktaları arasında çizilecek kirişin eğimine eşit olduğu anlamına gelir.

Sonlu fark türev formülleri grafik üzerinde gösterilebilir (Şekil 7.1). Görüldüğü gibi ileri fark türev formülü esasında BC kirişinin eğimi, geri fark türev formülü AB kirişinin eğimi ve merkezi fark türev formülü de AC kirişinin eğiminden başka bir şey değildir. Bir x_0 noktasındaki türev, eğrinin o noktadaki teğetinin eğimi olduğuna göre bu eğime en yakın AC kirişinin eğimi olduğu görülmektedir. Yani merkezi fark türev formülü daha doğru sonuç verecektir.



Şekil 7.1 Sonlu fark türev formüllerinin grafik üzerinde gösterimi

Taylor açılımı kullanılarak ikinci ve daha yüksek mertebeden türev formülleri elde edilebilir. Örneğin, yukarıdaki (7.4) nolu denklem ile (7.6) nolu denklem taraf tarafa toplanırsa, ikinci türev için

$$y_1 + y_{-1} = 2y_0 + 2\frac{h^2}{2!}y_0'' + 2\frac{h^4}{4!}y_0^{iv} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_0'' = \frac{y_1 - 2.y_0 + y_{-1}}{h^2} - 2\frac{h^2}{4!}y_0^{iv} - \ldots\ldots\ldots$$

ifadesi elde edilir. Denklemdeki ikinci terim ve daha sonraki terimler atılırsa,

$$y_0'' = \frac{y_1 - 2.y_0 + y_{-1}}{h^2} + 0(h^2) \qquad (7.9a)$$

ikinci türev formülü bulunur. Burada $0(h^2)$, kesmeden dolayı oluşan hata mertebesini göstermektedir. Merkezi sonlu fark türev formülü denilen bu ifade kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_0'' = \frac{\delta^2 y_0}{h^2} \qquad (7.9b)$$

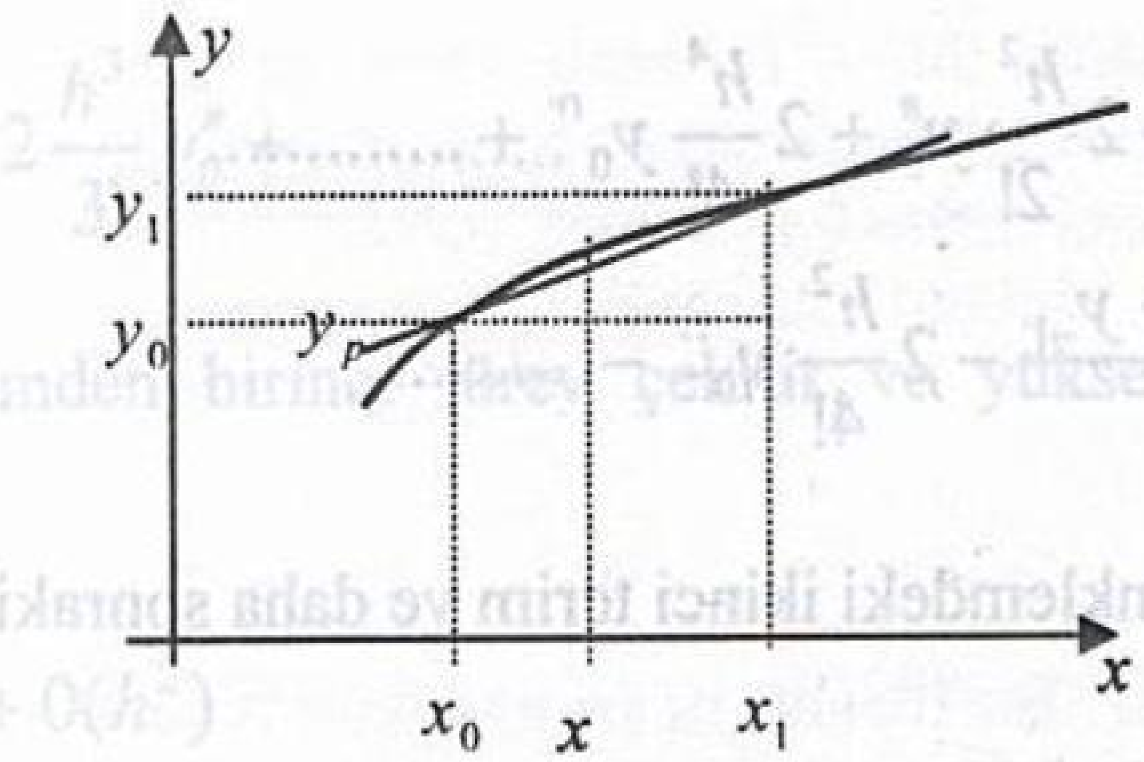
7.3 İNTERPOLASYON POLİNOMLARININ TÜREVLERİ

Türev formüllerinin elde edilmesinde interpolasyon polinomlarından veya regresyon eğrilerinden yararlanmak mümkündür. Elde edilen türev formüllerinin hata ve hata mertebeleri interpolasyon polinomlarının hatalarının türevini alarak bulunabilir.

7.3.1 Lineer İnterpolasyonun Kullanılması

Lineer intepolasyon ifadesi olan $y_p = y_0 + s.\Delta y_0$ denkleminin türevi alınırsa,

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{dy_p}{ds}\frac{ds}{dx} \qquad (7.10)$$



Şekil 7.2 Lineer interpolasyon ve türevi

Burada,

$$s = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{ve} \quad ds = \frac{1}{h}dx$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}$$

kullanılırsa, x noktasındaki türev için

$$y_p' = \frac{dy_p}{dx} = \Delta y_0 \frac{1}{h} \qquad (7.11)$$

ifadesi bulunur. Dikkat edilirse bu türev x_0 noktasındaki ileri fark türev formülüne ve x_1 noktasındaki geri fark türev formülüne eşittir.

7.3.2 İkinci Dereceden (Quadratik) İnterpolasyonun Kullanılması

İkinci dereceden interpolasyon polinomu olan

$$y_p = \left(1 + \frac{s.(s-3)}{2}\right)y_0 + s(2-s\ \ ).y_1 + \frac{s.(s-1)}{2}y_2 \qquad (7.12)$$

denkleminin birinci türevi alınırsa

$$y_p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{ds}\frac{ds}{dx}$$

$(ds/dx) = 1/h$ olduğundan

$$y'_p = \frac{2s-3}{2h}y_0 + \frac{2-2s}{h}y_1 + \frac{2s-1}{2h}y_2 \tag{7.13}$$

elde edilir. $x = x_0$ noktasında $s=0$ olacağından birinci türev için

$$y'_0 = y'_p = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} \tag{7.14}$$

bağıntısı elde edilir. Bu türev ileri farklar cinsinden

$$y'_0 = y'_p = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2}\right) \tag{7.15}$$

şeklinde de yazılabilir.

Quadratik polinomun 2. türevi alınırsa

$$y''_p = \frac{dy'_p}{dx} = \frac{dy'_p}{ds}\frac{ds}{dx} = \left(\frac{y_0}{h} - \frac{2}{h}y_1 + \frac{y_2}{h}\right)\frac{1}{h}$$

$$= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = y''_0$$

$$y''_0 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2} \tag{7.16}$$

ikinci türev için ileri fark türev formülü elde dilir. Bu formül ileri fark 2.türev formülüdür.

7.3.3 Çok Nokta Kullanan Türev Formülleri

Yukarıda bulunan türev formüllerinden daha fazla nokta kullanan veya daha yüksek mertebeden türev formülleri elde etmek üzere n. dereceden interpolasyon polinomları kullanılabilir. Burada interpolasyon polinomu kullanılarak türev formüllerinin elde edilmesine örnekler verilecektir.

a) Newton – Gregory İlerleme Polinomunun Türevi

Fonksiyonun türevi yerine Newton – Gregory İlerleme Polinomunun türevi kullanılırsa,

$$ds = \frac{dx}{h}$$

olduğu dikkate alınarak

$$f'(x) = f'(x_0 + sh) \cong y'_p$$

$$= \frac{dy_p}{dx} = \frac{dy_p}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{dy_p}{ds} \tag{7.17}$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{d}{ds}\left[y_o + \frac{\Delta y_0 s}{1} + \frac{\Delta^2 y_o s(s-1)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots.(s-n+1)}{n!}\Delta^n y_o\right]$$

$$y'_p = \frac{1}{h}\left[0 + \Delta y_o + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}\left[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)\right]\Delta^3 y_o + \ldots.\right] \tag{7.18a}$$

Bu denklem birinci türev için en genel ifadedir. $x = x_0$ noktasında türev alınacaksa $s = 0$ koyarak çok daha basit hale gelir. $x = x_0$'daki türev için $s = 0$ alınırsa,

$$y'_p\Big|_{x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_o}{3} - \frac{\Delta^4 y_o}{4} + \ldots\ldots \pm \frac{\Delta^n y_0}{n}\right] \tag{7.18b}$$

Bu türev formülünün hatası polinomun hata teriminin türevi alınarak elde edilebilir. Yani türev hatası;

$$e_t = \frac{d}{dx}\left[\binom{s}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(x_s)\right]$$

$$= \frac{d}{ds}\left[\binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(x_s)\right]\frac{ds}{dx} \tag{7.19}$$

$$= h^{n+1} f^{(n+1)}(x_s)\left[\frac{d}{ds}\binom{s}{n+1}\right]\frac{1}{h} + \binom{s}{n+1} h^{n+1}\frac{d}{dx}\left[f^{(n+1)}(x_s)\right]\frac{1}{h}$$

Denklemin sağındaki ikinci terim x_s belli olmadığından hesaplanamaz. Fakat s=0 koyarak düğüm noktası alındığında bu terim düşer. Zira çarpan durumundaki

$$\binom{s}{n+1} = \frac{s(s-1)(s-2)......(s-n)}{(n+1)!} \tag{7.20}$$

terimi s= 0 için sıfırdır. Bu durumda sadece 1.terim kalır.

$$\frac{d}{ds}\binom{s}{n+1} = \frac{(s-1)(s-2)..(s-n)+s(s-2)...(s-n)+....+s(s-1)(s-2)..(s-n+1)}{(n+1)!} \tag{7.21}$$

Burada da s= 0 alındığında türev hatası

$$e_t = h^{n+1} f^{(n+1)}(x_s)\left[(-1)^n\frac{1.2.3....n}{(n+1)!}\right]\frac{1}{h} = h^{n+1} f^{(n+1)}(x_s)(-1)^n\frac{n!}{(n+1)!}\frac{1}{h}$$

$$e_t = h^n f^{n+1}(x_s)\frac{(-1)^n}{n+1} \tag{7.22}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi polinom hatası (h^{n+1}) mertebesinde iken türevin hatası $0(h^n)$ mertebesinde olmaktadır.

Yüksek mertebeden türevler Denk.(7.18a) ifadesinin tekrar türevi alınarak elde edilir. Örneğin ikinci türev formülü için tekrar türev alınırsa

$$y''_p = \frac{dy'_p}{dx} = \frac{dy'_p}{ds}.\frac{ds}{dx}$$

$$y''_p = \frac{1}{h}\frac{dy'_p}{ds} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (s-1)\Delta^3 y_0 + ...\right] \tag{7.23a}$$

genel ifadesi bulunur. $x = x_0$'daki türev için s= 0 alınırsa

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + ...\right] \tag{7.23b}$$

elde edilir. Bu türevin hatası için hata teriminin tekrar türevi alınabilir. Ancak her türevde $1/h$ çarpan olarak geldiği için türev mertebesi bir arttığında hata mertebesi bir azalacaktır. Dolayısıyla birinci türevin hatası $0(h^n)$ mertebesinde iken ikinci türevin hata mertebesi $0(h^{n-1})$ olacaktır.

Örnek 7.1: Aşağıda verilen değerlere göre x_0=1.7 için fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerini hesaplayınız.

Çözüm: Temel satır verilen nokta üzerinde seçilerek oluşturulan sonlu fark tablosu aşağıda verilmiştir. Bu tablo değerleri ile çok nokta kullanan türev formülünden

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.3	3.669			
1.5	4.482			
1.7	**5.474**	**1.212**	**0.268**	**0.060**
1.9	6.686			
2.1	8.166			
2.3	9.974			
2.5	12.182			

1 terim kullanılırsa: $y'_p(1.7) = \dfrac{1}{0.2}(1.212) = 6.060$

Bu aynı zamanda ileri fark türev formülü ile elde edilen sonuçtur ve hata mertebesi $O(h)$ dır.

2 terim kullanılırsa: $y'_p(1.7) = \dfrac{1}{0.2}\left(1.212 - \dfrac{0.268}{2}\right) = 5.39 + O(h^2)$

3 terim kullanılırsa: $y'_p(1.7) = \dfrac{1}{0.2}\left(1.212 - \dfrac{0.268}{2} + \dfrac{1}{3}0.060\right) = 5.49 + O(h^3)$

sonuçları elde edilir. Gerçek türev değeri $y' = 5.474$ olup kullanılan terim sayısı arttıkça hatanın azaldığı görülmektedir.

İkinci türev için merkezi fark türev formülü kullanılırsa

$$y''_p(1.7) = \frac{6.686 - 2\times 5.474 + 4.482}{0.2^2} = 5.5 + O(h^2)$$

elde edilir.

b) Newton – Gregory Gerileme Polinomunun Türevi

Önceki bölümde verilen Newton-Gregory gerileme polinomu

$$y_p = y_0 + s\nabla y_0 + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \ldots\ldots$$

türetilir ve benzer şekilde düzenlenirse

$$y' \cong y'_p = \frac{dy_p}{dx} = \frac{dy_p}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy_p}{ds}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\nabla y_0 + \frac{(2s+1)}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{3s^2+6s+2}{6}\nabla^3 y_0 + \ldots\right] \quad (7.24)$$

birinci türev ifadesi bulunur. Bunun tekrar türevi alınırsa ikinci türev için

$$y'' \cong y''_p = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_0 + (s+1)\nabla^3 y_0 + \ldots\right] \quad (7.25)$$

elde edilir. Temel satırda türev için $s = 0$ alarak

$$y'_0 \cong y'_p = \frac{1}{h}\left[\nabla y_0 + \frac{1}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{1}{3}\nabla^3 y_0 + \ldots\right] \quad (7.26a)$$

$$y''_0 \cong y''_p = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_0 + \nabla^3 y_0 + \ldots\right] \quad (7.26b)$$

türev formülleri elde edilir.

c) Stirling İnterpolasyon Polinomunun Türevi

Merkezi fark interpolasyon polinomlarından Stirling polinomu

$$y_p(x) = y_q + \frac{s}{2}\left(\delta y_{q+1/2} + \delta y_{q-1/2}\right) + \frac{s^2}{2!}\delta y_q^2 + \frac{s(s^2-1)}{2.3!}\left(\delta y_{q+1/2}^3 + \delta y_{q-1/2}^3\right) + \ldots.$$

türetilip düzenlenirse

$$y' \cong \frac{dy_p}{dx} = \frac{dy_p}{ds}\frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}\left(\delta y_{q+1/2} + \delta y_{q-1/2}\right) + s\,\delta y_q^2 + \frac{(3s^2-s)}{2.3!}\left(\delta y_{q+1/2}^3 + \delta y_{q-1/2}^3\right) + \ldots.\right] \quad (7.27)$$

birinci türev için genel bir merkezi fark ifadesi elde edilir. Bunun ileri veya geri fark türev formüllerine göre bir mertebe daha hassas olduğu gösterilmişti. Tekrar türev alınarak

$$y'' \cong \frac{dy'_p}{dx} = \frac{dy'_p}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h^2}\left[\delta y_q^2 + \frac{(6s-1)}{2.3!}\left(\delta y_{q+1/2}^3 + \delta y_{q-1/2}^3\right) + \ldots.\right] \quad (7.28)$$

ikinci türev için merkezi fark ifadesi elde edilir.

Yine temel satırda $x = x_0$, yani $s=0$ olacağından merkezi fark türev formülleri

$$y'_0 \cong \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}\left(\delta y_{q+1/2} + \delta y_{q-1/2}\right) + \ldots.\right] = \frac{1}{h}\left(\frac{y_1 - y_{-1}}{2} + \ldots\right) \quad (7.29a)$$

ve

$$y''_0 \cong \frac{1}{h^2}\left[\delta y_q^2 - \frac{1}{2.3!}\left(\delta y_{q+1/2}^3 + \delta y_{q-1/2}^3\right) + \ldots\right] \quad (7.29b)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde daha yüksek mertebeden türev formülleri bulunabilir. Yukarıda bir kısmı verilen bu türev formülleri, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonun x_i

noktasındaki ifadeleri olarak aşağıda toplu olarak verilmiş ve hata mertebeleri belirtilmiştir.

Birinci türev formülleri

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + 0(h) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.30a)$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + 0(h) \qquad \text{(Geri fark)} \qquad (7.30b)$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + 0(h^2) \qquad \text{(Merkezi fark)} \qquad (7.30c)$$

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + 0(h^2) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.30d)$$

$$f_i' = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + 0(h^2) \qquad \text{(Geri fark)} \qquad (7.30e)$$

$$f_i' = \frac{2f_{i+3} - 9f_{i+2} + 18f_{i+1} - 11f_i}{6h} + 0(h^3) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.30f)$$

$$f_i' = \frac{11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}}{6h} + 0(h^3) \qquad \text{(Geri fark)} \qquad (7.30g)$$

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + 0(h^4) \qquad \text{(Merkezi fark)} \qquad (7.30h)$$

İkinci türev formülleri

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + 0(h) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.31a)$$

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + 0(h) \qquad \text{(Geri fark)} \qquad (7.31b)$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + 0(h^2) \qquad \text{(Merkezi fark)} \qquad (7.31c)$$

$$f_i'' = \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^2} + 0(h^2) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.31d)$$

$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} + 0(h^2) \qquad \text{(Geri fark)} \qquad (7.31e)$$

$$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + 0(h^4) \qquad \text{(Merkezi fark)} \qquad (7.31f)$$

Üçüncü türev formülleri

$$f_i''' = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{h^3} + 0(h) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.32a)$$

$$f_i''' = \frac{f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3} + 0(h) \qquad \text{(Geri fark)} \qquad (7.32b)$$

$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + 0(h^2) \qquad \text{(Merkezi fark)} \qquad (7.32c)$$

$$f_i''' = \frac{-3f_{i+4} + 14f_{i+3} - 24f_{i+2} + 18f_{i+1} - 5f_i}{2h^3} + 0(h^2) \qquad \text{(İleri fark)} \qquad (7.32d)$$

$$f_i''' = \frac{5f_i - 18f_{i-1} + 24f_{i-2} - 14f_{i-3} + 3f_{i-4}}{2h^3} + 0(h^2) \qquad \text{(Geri fark)}$$

$$f_i'''=\frac{-f_{i+3}+8f_{i+2}-13f_{i+1}+13f_{i-1}-8f_{i-2}+f_{i-3}}{8h^3}+0(h^4)\quad \text{(Merkezi fark)}$$

(7.32f)

7.4 RICHARDSON EKSTRAPOLASYONU

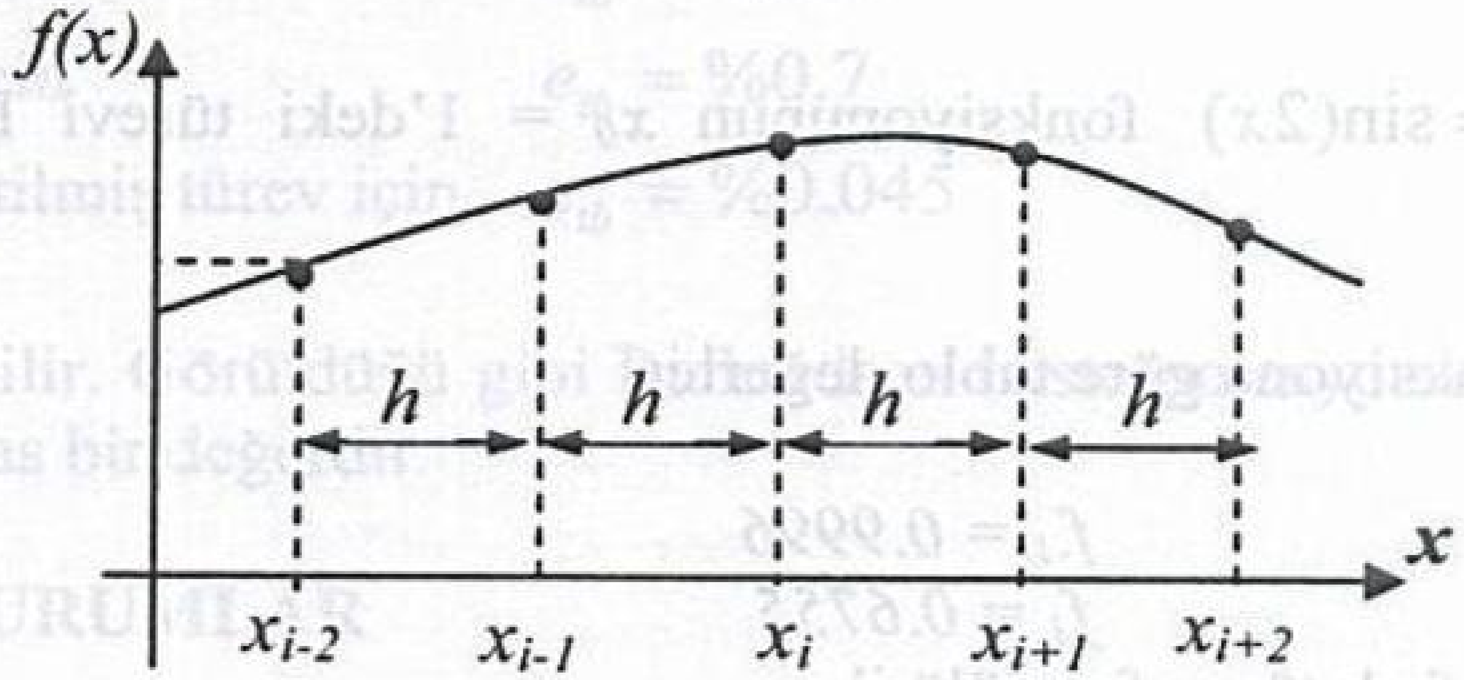
Bir fonksiyonun türevini sayısal olarak hesapladıktan sonra aralığı yarıya bölerek aynı türevi tekrar hesapladığımızı düşünelim. Elde edilen bu iki türevden yararlanarak aranan türev için daha hassas bir sonuç bulunabilir. *Richardson ekstrapolasyonu* olarak anılan bu yöntem esasında Denk.(7.30h) türev işleminden farklı değildir.

Şekil 7.3'te görüldüğü gibi x_i noktasında fonksiyonun türevini hesabı için Denk.(7.30h)'yi ele alalım.

$$f_i'=\frac{-f_{i+2}+8f_{i+1}-8f_{i-1}+f_{i-2}}{12h}$$

Bu formülü değişik formda

$$f_i'=\frac{1}{3}\left(\frac{-f_{i+2}+8f_{i+1}-8f_{i-1}+f_{i-2}}{4h}\right)$$



Şekil 7.3 Aralığın yarıya bölünmesi ile ardışık türev

$$f_i'=\frac{1}{3}\left(\frac{8(f_{i+1}-f_{i-1})}{4h}-\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4(f_{i+1}-f_{i-1})}{2h}-\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{2H}\right)\qquad(7.33a)$$

olarak yazılabilir. Burada $H=2h$ olduğu dikkate alınırsa, parantez içindeki birinci türev merkezi fark türev formülünün 4 katı; ikinci türev ise aralığın ikiye bölünmeden önceki durum için merkezi fark formülü olduğu görülür. O halde bu (7.33a) ifadesi

$$f_i'=\frac{1}{3}\big[4T(h)-T(H)\big]\qquad(7.33b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada aralığın yarıya bölünmesinden sonraki türev değeri

$$T(h)=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}\qquad(7.34a)$$

ve aralığın yarıya bölünmeden önceki türev değeri

$$T(H)=\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{2H}\qquad(7.34b)$$

ile ifade edilmiştir.

Örnek 7.2: $f(x)=\sin(2x)$ fonksiyonunun x_0 = 1'deki türevi H= 0.2 alarak hesaplayınız.

<u>*Çözüm:*</u> Verilen fonksiyona göre tablo değerleri

$x_{-1} = 0.8$ $\quad f_{-1} = 0.9996$
$x_1 = 1.2$ $\quad f_1 = 0.6755$

kullanarak merkezi fark türev formülü ile

$$T(H)=\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{2H}=\frac{0.6755-0.9996}{0.4}=-0.81025$$

değeri bulunur.

Aralığı bu sefer ikiye bölerek (h = *0.1* alarak) fonksiyon değerleri

$x_{-1} = 0.9 \qquad f_{-1} = 0.9738$

$x_1 = 1.1 \qquad f_1 = 0.8085$

bulunur. Bunları kullanarak ikinci olarak Denk.(7.34a)'ya göre

$$T(h) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{0.8085 - 0.9738}{0.2} = -0.82650$$

türev değeri elde edilir. Hesaplanan bu iki türev değeri kullanılarak daha hassas bir değer, Denk.(7.33b) ile

$$f_i' = \frac{1}{3}[4T(h) - T(H)] = \frac{4(-0.8265) - (-0.81025)}{3} = -0.8319167$$

olarak bulunur.

Gerçek türev değeri ise

$$f'(x) = -2\cos(2x) = -0.83229$$

olduğuna göre her üç sayısal türev değerinin bağıl hatası

T(H) için $\quad e_{tb} = \%2.6$

T(h) için $\quad e_{tb} = \%0.7$

Düzeltilmiş türev için $\quad e_{tb} = \%0.045$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi Richardson ekstrapolasyonu ile elde edile değer çok daha hassas bir değerdir.

7.5 ÖZEL DURUMLAR

Sayısal türevin esası yukarıda izah edilmiş ve türev formülleri verilmiştir. Ancak bazı özel durumlarla karşılaşmak mümkündür.

1) Ele alınacak durumlardan birincisi sınır değerler için türevin sayısal hesabıdır. Fonksiyonun analitik ifadesi bilinmeyip $[a,b]$ aralığında tablo değerleri verildiğinde $x = a$ veya $x = b$ için türevin bulunmasında merkezi fark türev formülleri kullanılamayacaktır. Bu durumda verilen noktalardan geçen bir polinom bulup veya regresyon eğrisi elde edip türevi alınabilir. Veya doğrudan sonlu fark

formülleri kullanılabilir. Bu yapılırken açıktır ki $x = a'$ daki türev için ileri, $x = b'$ deki türev için geri fark formülleri kullanılmalıdır.

2) Bir başka özel durum, verilen noktaların eşit aralıklı olmaması halidir. Bu ana kadar verilen sonlu fark formülleri ve Richardson ekstrapolasyonu eşit aralıklı noktalar için geçerlidir. Dolayısıyla verilen noktalar eşit aralıklı olmadığı durumlarda, özellikle ikinci türevin hesabı için bilinen sonlu fark formülleri kullanılamaz. Baş vurulan yol, verilen noktalardan geçen veya verilen noktaları temsil eden bir fonksiyon elde edip türevini alarak herhangi bir noktada istenen değerinin hesaplanmasıdır. Verilen noktalardan geçen interpolasyon polinomu olarak Lagrange polinomu kullanılabilir. Verilen üç noktadan geçen Lagrange polinomu, Denk.(5.32a) kullanılarak

$$y_p(x) = \frac{(x-x_2).(x-x_3)}{(x_1-x_2).(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_1).(x-x_3)}{(x_2-x_1).(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_3-x_1).(x_3-x_2)} y_3 \tag{7.35}$$

yazılabilir. Bu ifadenin birinci türevi,

$$h_1 = x_2 - x_1, \quad h_2 = x_3 - x_2 \quad \text{ve} \quad h = h_1 + h_2 = x_3 - x_1$$

tanımları ile

$$y_p'(x) = \frac{(2x - x_2 - x_3)}{h_1 h} y_1 + \frac{(2x - x_1 - x_3)}{h_1.(-h_2)} y_2 + \frac{(2x - x_1 - x_2)}{h\ .h_2} y_3 \tag{7.36}$$

olarak elde edilir. Merkezi fark formülleriyle aynı hata mertebesine sahip bu ifade ile herhangi bir x değeri için birinci türev değeri elde edilir.

Denk.(7.36) tekrar türetilirse ikinci türev için

$$y_p''(x) = \frac{2}{h_1 h} y_1 - \frac{2}{h_1.h_2} y_2 + \frac{2}{h\ .h_2} y_3 \tag{7.37}$$

ifadesi elde edilir. Eşit aralıklı noktalar halinde ($h_1 = h_2$) bu denklem ikinci türev sonlu fark ifadesine dönüşecektir. Bu ifade x'e bağlı olmadığından üçüncü türev için en azından üçüncü dereceden bir interpolasyon polinomu kullanılmalıdır.

3) Son olarak belirtilmesi gereken bir durum hata içeren veri olması halidir. Eğer verilen değerler hata içeriyorsa hesaplanan türev hatası daha büyük olacaktır. Zira türev işleminde iki sayının farkı alındığından verideki gelişigüzel dağılmış pozitif ve negatif hataların birbirini götürmesi değil toplanması söz konusudur. Zaten Bölüm (7.3.3a)'da türev formülünün hata mertebesi, polinomun hata mertebesine göre düşük olduğu belirtilmişti. Yani türev işlemi hataları büyülten bir işlemdir. Dolayısıyla hata içeren tablo değerleri verildiğinde türev hesabı için en iyi yol, noktaları en iyi temsil edecek bir eğri denkleminin en küçük kareler yöntemi ile bulunması ve sonra da türevinin alınmasıdır.

Örnek 7.3: Aşağıdaki tablo değerleri verildiğine göre x_0 = 1.2'deki fonksiyonun birinci ve ikinci türevini hesaplayınız.

x	0.7	1.0	1.5
f(x)	1.37	4.0	13.5

Çözüm: Verilen noktalar eşit aralıklı olmadığı gibi bir ara değerde türev hesabı istenmektedir. Birinci türev için değişik hesaplamalar yapılabilir. Örneğin son iki nokta kullanılarak birinci türev yaklaşık hesaplanabilir.

$$f'(1.2) \cong \frac{13.5-4.0}{0.5} = 19$$

Veya ilk ve son değerler kullanılarak

$$f'(1.2) \cong \frac{13.5-1.37}{0.8} = 15.1625$$

Daha hassas bir hesap için Denk.(7.36) kullanılabilir:

$$f'(1.2) = \frac{(2.4-1-1.5)}{0.3(0.8)}1.37 + \frac{(2.4-0.7-1.5)}{0.3.(-0.5)}4 + \frac{(2.4-0.7-1)}{0.8.(0.5)}13.5$$

$$= 17.72$$

Gerçek değer ise 17.28 olduğundan, tahmin edileceği gibi, son bulunan değerin daha doğru olduğu görülmektedir.

İkinci türev için merkezi fark ikinci türev formülü yaklaşık bir sonuç verebilir. Ancak en doğrusu Denk.(7.37)'nin kullanılmasıdır. Bulunacak değer

$$f''(1.2) = \frac{2}{0.3(0.8)}1.37 - \frac{2}{0.3(0.5)}4 + \frac{2}{0.8(0.5)}13.5 = 25.58$$

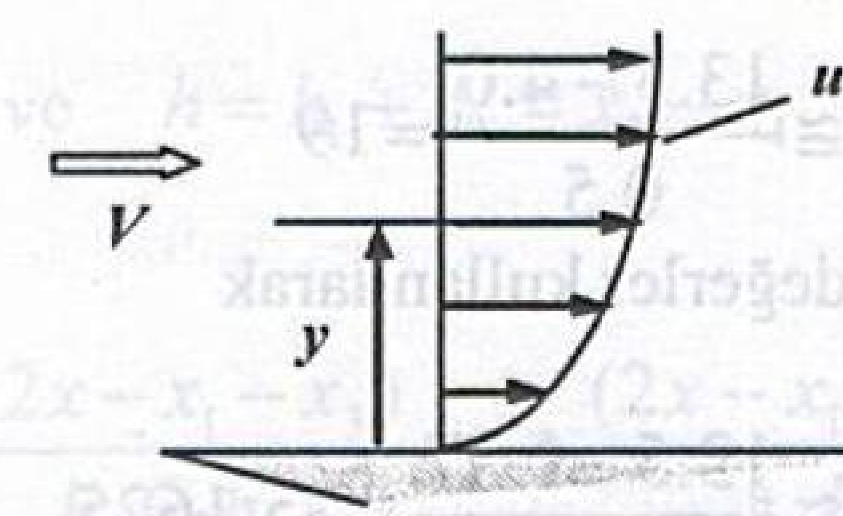
olup gerçek değer 28.8 ile mukayese edildiğinde %11 gibi bir hatanın oluştuğu görülür.

Örnek 7.4: Düz bir yüzey üzerindeki hava akımında, yüzeyden değişik *y* mesafelerinde ölçülen hava hızları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Yüzey üzerindeki kayma gerilmesi

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}\bigg|_{y=0}$$

ifadesiyle hesaplanabilmektedir. Burada havanın viskozitesi $\mu = 1.5\times10^{-5}$ Pa.s olduğuna göre kayma gerilmesini ve 2 m^2 bir yüzeye gelecek sürtünme kuvvetini hesaplayınız.

y (m)	*u(m/s)*
0.0	0
0.002	13.16
0.004	18.57
0.006	20.46
0.010	23.05



Çözüm: Hızın birinci türevi değişik şekillerde hesaplanabilir. *y=0'* da türev istendiğine göre bu hesaplarda ileri fark formülleri kullanılmalıdır.

İki noktalı ileri fark formülü ile:

$$\frac{du}{dy}\bigg|_{y=0} = \frac{u_1-u_0}{h} = \frac{13.16-0}{0.002} = 6580$$

Üç noktalı ileri fark formülü (Denk.7.30d) ile:

$$\frac{du}{dy}\bigg| = \frac{-u_2+4u_1-3u_0}{2h} = \frac{-18.57+4(13.16)-0}{0.004} = 8517$$

Dört noktalı ileri fark formülü (Denk.7.30f) ile:

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{2u_3-9u_2+18u_1-11u_0}{6h}$$

$$=\frac{-2(20.46)-9(18.57)+18(13.16)-0}{6(0.002)}=9222$$

değerleri elde edilir. En son değere göre kayma gerilmesi

$$\tau=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=1.5\times10^{-5}(9222)=0.138\ \text{N/m}^2$$

ve sürtünme kuvveti:

$$F_s=A\tau=0.276\ \text{N}$$

SORULAR

7.1: Dört nokta kullanan Newton-Gregory gerileme plonomundan yararlanarak ikinci türev için bir formül çıkartınız.

7.2: Taylor serisini kullanarak birinci türev için bir sonlu fark formülü elde ediniz. Bu formülün hatasını ve hata mertebesini belirtiniz.

7.3: Eşit aralıklı üç nokta kullanan Lagrange polinomundan yararlanarak birinci türev için bir formül elde ediniz.

7.4: Birinci türev için ileri ve merkezi sonlu fark ifadelerinde y_1, y_0 ve y_{-1} değerlerinde e kadar hata varsa türevlerde oluşabilecek maksimum hatalar ne olur?

7.5: $f(x)=e^x$ fonksiyonunun x= 1'deki türevini ileri ve merkezi farklarla $h=10^{-1}$, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7} için hesaplayarak oluşan hataları inceleyiniz.

7.6: Örnek 7.1'deki fonksiyonun x= 1.8 noktasındaki birinci ve ikinci türevlerini hesaplayınız.

7.7: $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonunun x= 1'deki birinci ve ikinci türevlerini

a) x= 1.0 ve 1.01'deki fonksiyon değerlerini kullanarak,

b) x= 1.0, 1.01 ve 1.02 'deki fonksiyon değerlerini kullanarak,

c) x= 1.0, 1.01, 1.02 ve 1.03'deki fonksiyon değerlerini kullanarak

hesaplayınız, oluşan hataları irdeleyiniz.

7.8: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun x_0=1.0 için birinci ve ikinci türevleri değişik formüller kullanarak hesaplayınız. Her defasında hata mertebesini belirtiniz ve oluşan bağıl hataları bulunuz (h= 0.1)

7.9: $y=\dfrac{x^3}{3}-4x+2$ fonksiyonunun x_0=2.0'de birinci türevi (h= 0.5) alarak Richardson ekstarpolasyonu ile hesaplayınız. Her aşamada hata mertebesini belirtiniz ve oluşan izafi hataları bulunuz

7.10: Aşağıdaki eşit aralıklı olmayan tablo değerleri verildiğine göre x_0=3.2'deki birinci türevi

x	3.0	3.2	5.0	7.0
y	0.7468	0.6522	0.1684	0.03192

a) değişik yöntemlerle hesaplayınız.

b) Verilen fonksiyon değerlerinin son hanelerini yuvarlatarak aynı türevi hesaplayınız.

c) Gerçek fonksiyon $y=5xe^{-x}$ olduğuna göre her defasında oluşan hataları irdeleyiniz.

7.11: Örnek 7.1'i merkezi fark interpolasyon polinomlarının türevlerini kullanarak çözünüz.

MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİ

P7.1: Problem P6.8'de verilen otomobilin ivmesini merkezi fark formülüyle hesaplayarak bulunan değerleri tabloya ilave ediniz. Ortalama ivmeyi ve standart sapmasını hesaplayınız.

P7.2: Yayılı yükle yüklenmiş bir kirişin çeşitli noktalarında elde edilen kesme kuvvetleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	0	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75	0.90
f	80	50	20	-10	-30	-40	-40

x=0.33 `deki yayılı yükü ($q = -df/dx$) ve f'' türevini merkezi farklarla bulunuz.

P7.3: Bir yüzey üzerinde akan bir akışkanın yüzeye uyguladığı kayma gerilmesi

$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$

ifadesiyle verilir. Burada μ viskoziteyi, u yüzeye paralel hız bileşenini ve y yüzeyden olan dik mesafeyi göstermektedir. Yüzeyden değişik uzaklıklarda ölçülen hız değerleri aşağıdaki tabloda verildiğine ve viskozite μ= 0.00025 Ns/m^2 olduğuna göre

a) Yüzeydeki du/dy türevini iki, üç ve dört nokta kullanarak hesaplayınız.

b) Bulduğunuz türev değerleriyle yüzeye etki eden kayma gerilmelerini bulunuz.

c) 10x10 cm^2 alana gelen kayma kuvvetini hesaplayınız.

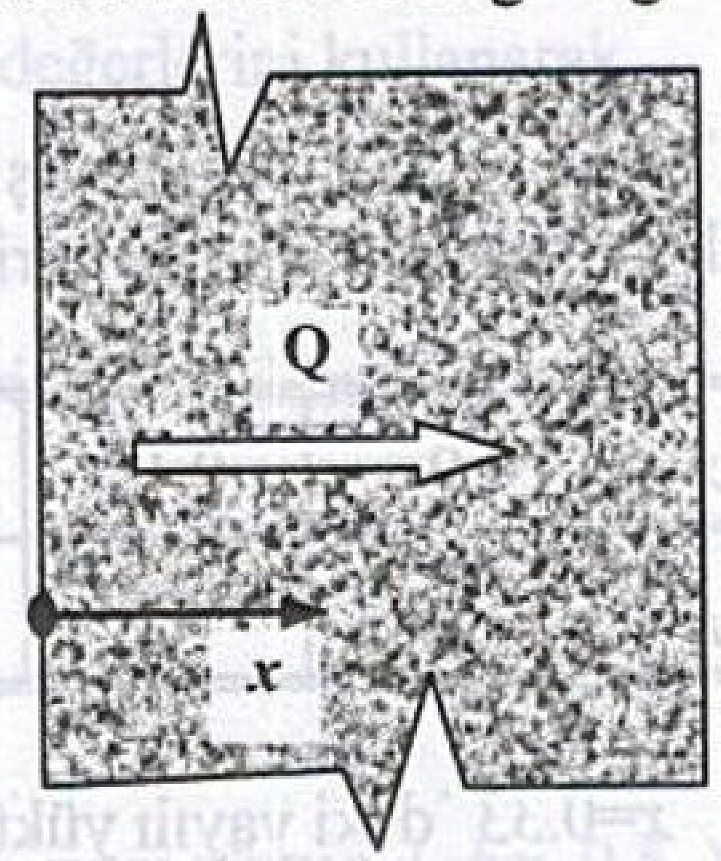
y	u
0.0	0.0
1.0	5.5
2.0	8.9
3.0	10.0

P7.4: Bir malzeme içerisinden iletilen ısı miktarı (Q) için Newton'un ısı iletimi kanunu

$$Q = -kA\frac{dT}{dx}$$

şeklinde yazılabilir. Burada k ısı iletimi katsayısı (W/m°C), A yüzey alanı (m^2), T sıcaklık (°C) ve x ısı akışı yönünde ölçülen uzaklık (m) 'tır. Bir beton duvar içinde değişik derinliklerde ölçülen sıcaklık değerleri aşağıdaki tabloda verildiğine göre;

x (m)	T (°C)
0.0	28
0.05	24
0.10	21
0.15	19



a) x=0.0 `da dT/dx değerini değişik formüllerle hesaplayınız, hata mertebelerini belirtiniz.

b) Birim alandan geçen ısı miktarını bulunuz. (k= 0.1 W/m°C).

c) (2.5x3) m^2 bir duvardan geçen ısı miktarını hesaplayınız.

P7.5: Bir malzemenin ısı iletim katsayısını bulabilmek için yapılan bir dizi deneyde, P7.4'teki aynı noktalarda ölçülen sıcaklık değerleri sırası ile 55, 48, 40 ve 34 °C olarak ölçülmüştür. 1 m^2 alandan olan ısı transferi Q = 75 W olarak bilindiğine göre ısı iletim katsayısı (k)'yı en küçük kareler yöntemi ile hesaplayınız.

P7.6: T sıcaklığındaki küçük bir ısıtılmış cisim T_0 sıcaklığındaki ortamda soğumaya bırakıldığında, cismin sıcaklığındaki değişim hızı (radyasyon ihmal edilirse)

$$\frac{dT}{dt} = -ha(T - T_0)$$

bağıntısından elde edilebilmektedir. Burada h ısı transferi film katsayısı (W/m^2.°C) ve a cismin özelliklerine bağlı bir sabittir. Çelik bir bilye 150 °C'ye kadar ısıtılıp 20 °C'de sabit tutulan suya atılmaktadır. Belli anlarda ölçülen bilye sıcaklıkları aşağıdaki tabloda verildiğine göre (a= 0.001)

t (s)	0	15	30	45	60	75
T(℃)	150	120	93	65	40	22

a) Her ana ait dT/dt türevini hesaplayınız.

b) h film katsayısını en küçük kareler yönteminden yararlanarak elde ediniz.

P7.7: Bir elektrik devresindeki bobinde oluşan gerilim düşümü (V) ile devreden geçen akım i arasındaki ilişki

$$V = L\frac{di}{dt}$$

olup burada L bobinin indüktansıdır. Değişik zamanlarda devrede ölçülen akım değerleri aşağıdaki tabloda verildiğine göre her ana karşılık gerilim düşümü değerlerini hesaplayınız. (L= 10 H).

t (s)	0	1	2	3	5
i (A)	0	0.05	0.1	0.2	0.3

P7.8: Bir uçağın hava alanına inişinden itibaren aldığı yol değerleri (x) aşağıdaki tabloda verilmiştir.

t (s)	0	2	4	6	8	10
x (m)	0	198	392	584	768	950

a) Her ölçüm anında uçağın hızını O(h^2) mertebesinde hatayla,

b) Her ölçüm anında uçağın ivmesini aynı hata mertebesiyle hesaplayınız.

P7.9: Bir kondansatörün uçları arasındaki gerilim ölçülerek tabloda verilmiştir. t = 0.21 ms anında,

a) V_C gerilim değerini bulunuz

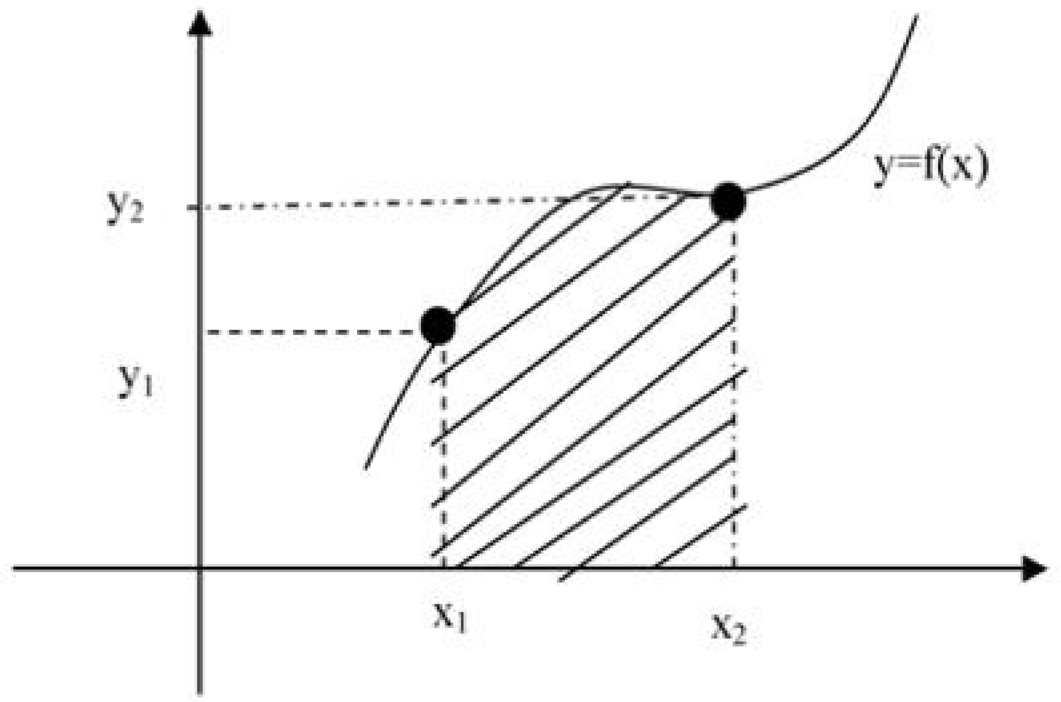
b) Akım değerini

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}i$$

bağıntısına gore hesaplayınız (C = 10 μF)

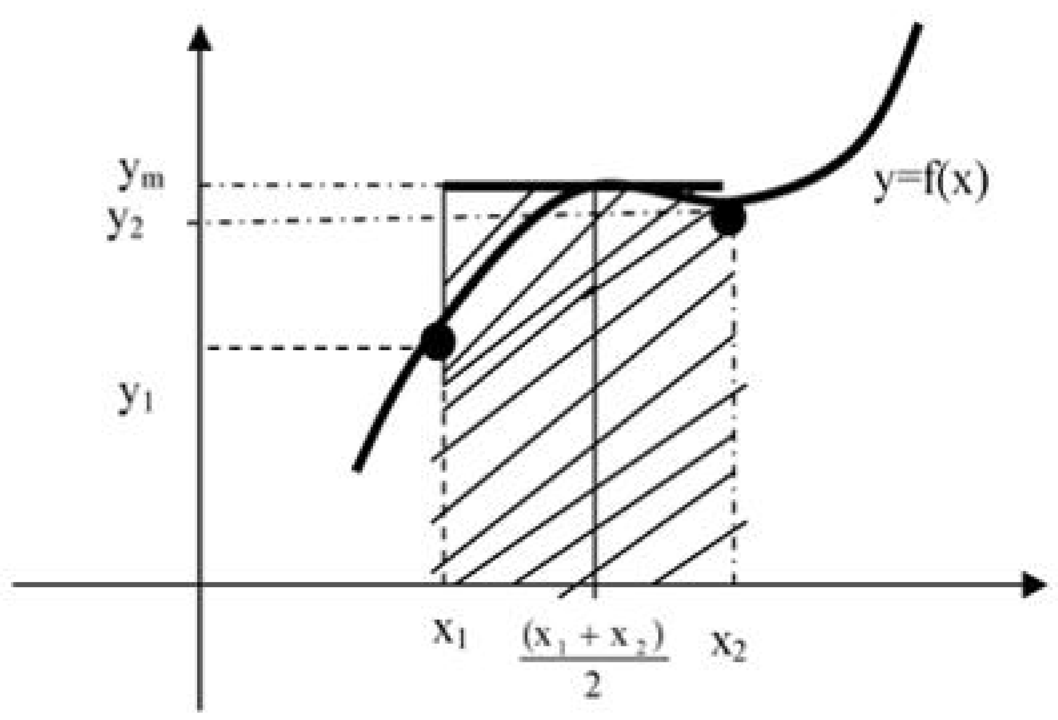
t (ms)	0.10	0.15	0.20	0.30	0.50
V_C (V)	0.952	1.393	1.813	2.592	3.395

NUMERIK INTEGRASYON



y=f(x) egrisinde x= x_1 noktasindan x=x_2 noktasina kadar integrasyonu hesaplamak. Bu da tarali alanin hesaplanmasi demektir.

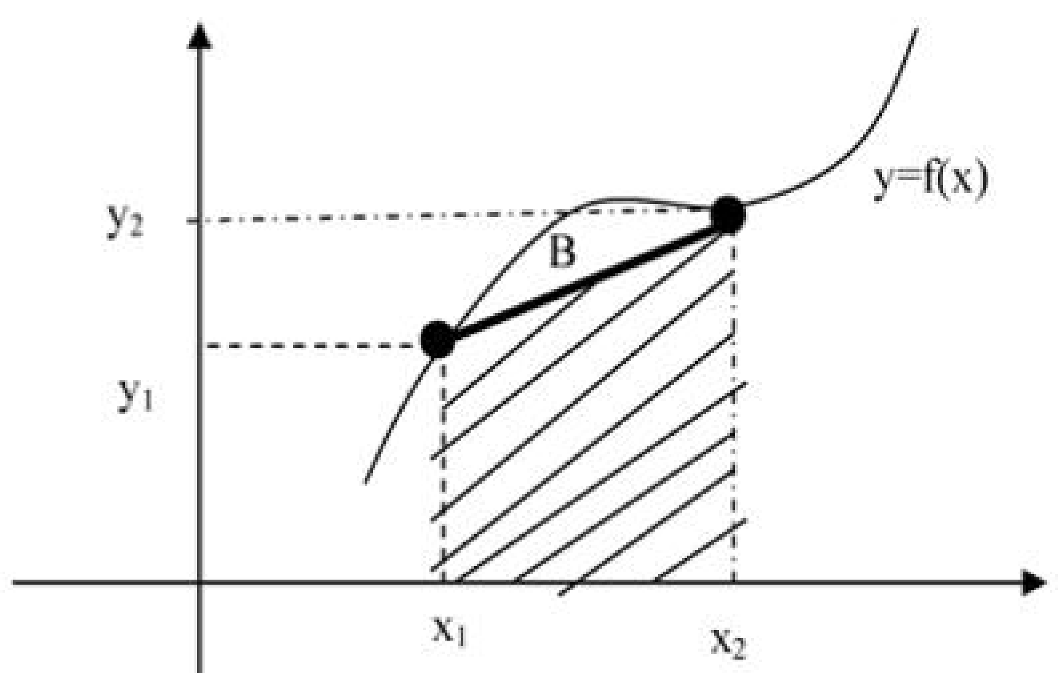
A)En basit yontem orta nokta (mid point) kuralidir.



$x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$ $y_m = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

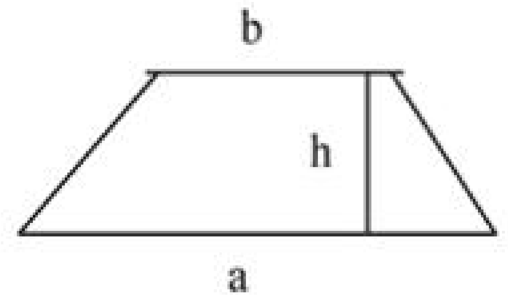
olmak uzere dikdortgenin alani S=(x_2- x_1) y_m =h y_m integrasyon degeri varsayilir. h=x_2- x_1 integrasyon adimi olarak adlandirilir.

B)Ikinci yontem yamuk (Trapezoidal) kuralidir.



Tarali alan bir yamuktur. Tarali kismin alaninin hesaplanmasi gerekir. B ile belirtilen bolge integrasyonda hesaba katilmayan bolgedir ve integrasyon hatasidir. Yani gercekte B bolgesi integrasyona dahil edilmelidir, Fakat bu kural o kismi dahil edemez.

Bir Yamugun alani



$$S=\frac{a+b}{2}h$$

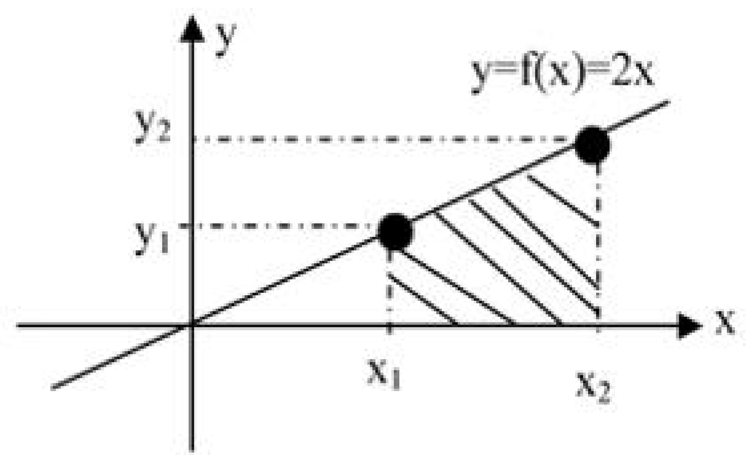
Sekildeki yamugun alani da $S=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)$

h=(x_2-x_1) seklinde adim tanimlanirsa alan

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}h=\frac{f(x_1)+f(x_1+h)}{2}h$$

sekline gelir.

Ornek P542 Sekilde f(x)=2x dogrusunu x_1=3, x_2=5,araliginda integrasyonunu hesaplayin.



a)gercek deger

$$\int_{x=3}^{x=5}2x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_3^5 = 25-9=16$$

b)Orta nokta kurali y_1=6, y_2=10

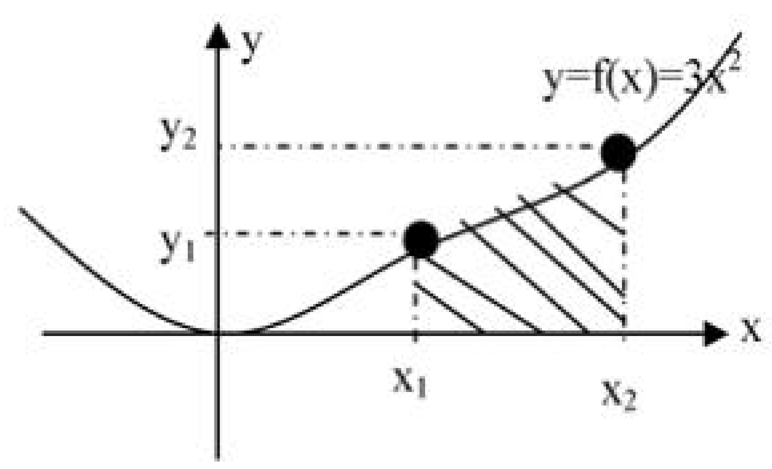
$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = 4$ $y_m = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f(4) = 2x4 = 8$

h=5-3=2, S=2 8=16

b)Yamuk kurali y_1=2x3=6, y_2=10, h=5-3=2

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}h=\frac{f(x_1)+f(x_1+h)}{2}h=\frac{6+10}{2}2=16$$

Ornek P542 Sekilde f(x)= $3x^2$ parabolunun x_1=3, x_2=5,araliginda integrasyonunu hesaplayin.



a)gercek deger

$$\int_{x=3}^{x=5}3x^2dx=3\frac{x^3}{3}\Big|_3^5 = x^3\Big|_3^5 = 125-27=98$$

b)Orta nokta kurali

x_m =(3+5)/2=4,

y_m=3 4^2 =48

h=5-3=2,

S=2 48 =96

b)Yamuk kurali

y_1=3 3^2 =27,

y_2=3 5^2=75,

h=5-3=2

S=2 (y_1 + y_2)/2=102

Problem P554 Sekilde f(x)=2+cos(4x) x_1=0, x_2=5, araliginda integrasyonunu hesaplayin.

MATLAB ile fonksiyon tanimlama.

fqq.m isimli bir MATLAB dosyasi acin icine

```
function [cikis] = aaa(x)
 cikis=x^2+1
```

yazin.

```
>>qq=aaa(4)
  qq=17
>>rr=aaa(10)
 rr=101
```

topla.m isimli bir MATLAB dosyasi acin icine

```
function [cikis] = topla(x,y)
 cikis=x+y

>>yy=topla(4,6)
yy=10

>>yy=topla(1,2)
yy=3
```

hesap1.m isimli bir MATLAB dosyasi acin icine

```
function [cikis] = hesap1(x)
 cikis=2+ cos(4*x);

>>y1=hesap1(0)
  y1=3

>>y1=hesap1(1)
    y1=1.34

>>y1=hesap1(5)
   y1=2.40
```

MATLAB ile numerik integral hesabi

Ornek P551 Sekilde f(x)= $3x^2$ parabolunun x_1=3, x_2=5,araliginda integrasyonunu MATLAB yardimiyla hesaplayin. a)gercek degerini, b)orta nokta kullanarak . c)Yamuk kuralini kullanarak hesaplayin

fff1.m isimli bir MATLAB dosyasi acin icine

```
function [cikis] = fff1(x)
 cikis=3*x^2;
```

Asagidaki satirlari yazin.

```
x1=3; x2=5;
h= x2-x1,
xm= (x2+x1)/2;
fm=fff1(xm);
ortanokta=h*fm
```

Orta nokta kurali ile y=f(x)=$3x^2$ fonksiyonunun x=3 ile x=5 arasindaki degerini hesaplamis olduk.

Asagidaki satirlar y=f(x)=$3x^2$ fonksiyonunun x=3 ile x=5 arasindaki degerini yamuk kurali ile hesaplar.

```
x1=3; x2=5;
h= x2-x1,
f1=fff1(x1);
f2=fff2(x2);
yamuk=(h/2)*(f1+f2)
```

Problem P654 Sekilde f(x)=2+cos(4x) x_1=0, x_2=5, araliginda integrasyonunu MATLAB hesaplayin

DIGER Numerik Integral Kurallari

$$I=\{h\,f_m\}$$ Orta nokta

$$I=\frac{h}{2}\{f(x_0)+f(x_1)\}$$ Yamuk

$$I=\frac{h}{3}\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\}$$ simson 1/3

$$I=\frac{3h}{8}\{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\}$$ simson 3/8

Simson 1/3

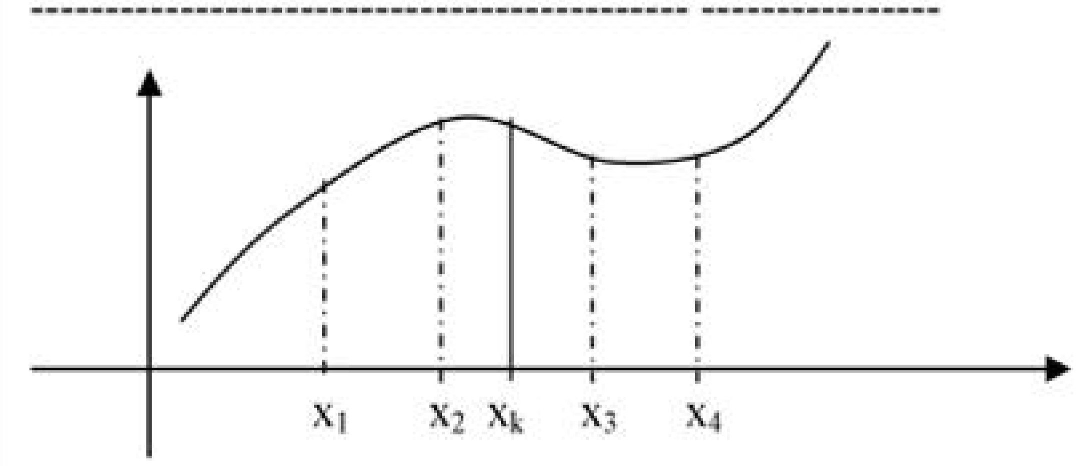
```
x1=3;  x2=3+(5-3)/2;  x3=5;
h= x3-x1,
f1=fff1(x1);
f2=ffff1(x2);
f2=fff1(x2);
f3=fff1(x3);
simpson13=(h/3)*( f1+4*f2+f3);
```

Simson 3/8

```
x1=3;  x2=3+2/3;  x3=3+4/3;  x4=5;
h= x2-x1,
f1=fff1(x1);
f2=fff1(x2);
f2=fff1(x2);
f3=fff1(x3);
f4=ffff1(x4);
simpson38=(3*h/8)*( f1+3*f2 +3*f3 +f4);
```

(1/3)Simpson kuralinda f(x) fonksiyonu x=a, x=b, x=c noktalarindaki degerler bilindigi varsayilir.

(3/8)Simpson kuralinda f(x) fonksiyonu x=a, x=b, x=c, x=d noktalarindaki degerler bilindigi varsayilir.



Orta nokta ve yamuk kurali icin iki nokta (x_1,x_4)

(1/3)Simpson kurali icin uc nokta (x_1,x_k,x_4)

(3/8)Simpson kurali icin dort nokta (x_1,x_2,x_3,x_4)

ve bu noktalardaki fonksiyonlarin degerlerinin bilinmesi lazimdir.

Ornek PR631 **f(x)= e^{2x}** fonksiyonunun x=1, x=1.3 arasini yukarida verilen metodlarla hesaplayin.

orta nokta:

$x_1=1$, $x_4=1.3$,
h=1.3–1=0.3
$x_m=(1+1.3)/2=1.15$,
$f(x_m)= f(1.15)= e^{2 x 1.15} = e^{2.3}=9.97418$
$I=h\ f(x_m)= 0.3\ \ 9.97418=2.992254$

Yamuk:

$x_1=1$, $x_4=1.3$,
h=1.3–1=0.3
$f(x_1)= f(1)= e^{2 x 1} = e^2=7.389056$
$f(x_4)= f(1.3)= e^{2 x 1.3} = e^{2.6}=13.463738$
$I=(h/2)(\ f(x_1) + f(x_4)\ )= (0.3/2)(\ f(x_1) + f(x_4)\ )=3.127919$

1/3 simpson

Burada x=1 den x=1.3 e kadar olan aralik esit olarak ikiye bolunecektir. Bu da her araligin (1.3-1)/2=0.15 olacagi anlamina gelir.

$x_1=1$, $x_k=1.15$, $x_4=1.3$,
h=1.15–1=0.15
$f(x_1)= f(1)= e^{2 x 1} = e^2=7.389056$
$f(x_k)= f(1.15)= e^{2 x 1.15} = e^{2.3}=9.97418$
$f(x_4)= f(1.3)= e^{2 x 1.3} = e^{2.6}=13.463738$
I=(h/3){ f(1)+ 4 f(1.15) + f(1.3) }
I=(0.15/3)*(7.389056+ 4 * 9.97418 + 13.463738)= 3.037476

3/8 simpson

Burada x=1 den x=3 e kadar olan aralik esit olarak uce bolunecektir. Bu da her araligin (1.3-1)/3=0.1 olacagi anlamina gelir.

$x_1=1$, $x_2=1.1$, $x_3=1.2$,$x_4=1.3$,
h=1.1–1=0.1
$f(x_1)= f(1)= e^{2 x 1} = e^2=7.389056$
$f(x_2)= f(1.1)= e^{2 x 1.1} = e^{2.2}=9.0250134$
$f(x_3)= f(1.2)= e^{2 x 1.2} = e^{2.4}=11.0231763$
$f(x_4)= f(1.3)= e^{2 x 1.3} = e^{2.6}=13.463738$
I=(3*h/8){ f(1) + 3 f(1.1) + 3 f(1.2)+ f(1.3) }
I=(3*0.1/8)*(7.389056+ 3 * 9.0250134
+ 3*11.0231763 + 13.463738)= 3.0374011

	Integral Degeri	Hata
Orta nok	2.99225473644	-0.045086231
Yamuk	3.12791912008	0.0905781520
simpson(1/3)	3.03747619765	0.0001352296
simpson(3/8)	3.03740114153	0.0000601734
Gercek	3.03734096803	0

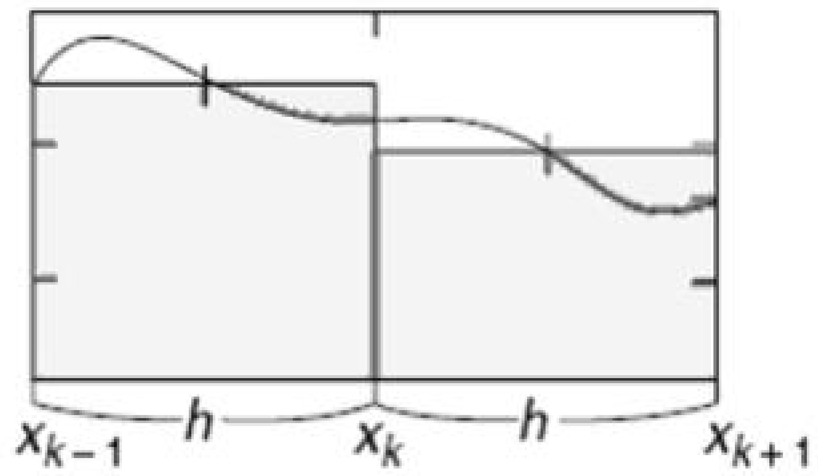
Note: **Orta nokta** ve yamuk kuralinda x=1 den x=1,3 e kadar tek bir bolge gibi varsaydik. Bu araligi iki parca veya uc parca gibi dusunup integral hesabinda olusacak hatalari azaltabiliriz.

Orta nokta:

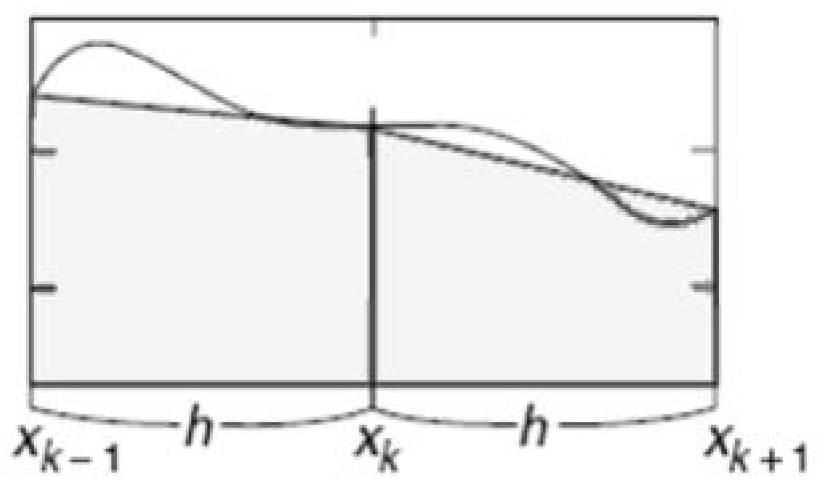
x=1 den x=1.1 re kadar $I_1=0.816616991$
x=1.1 den x=1.2 re kadar $I_2=0.997418245$
x=1.2 den x=1.3 re kadar $I_3=1.218249396$
Toplam Integral x=1 den x=1.3 kadar
$I_1 + I_2 + I_3=3.032284632$
Hata=3.037340968-3.032284632=0.0050563

Yamuk

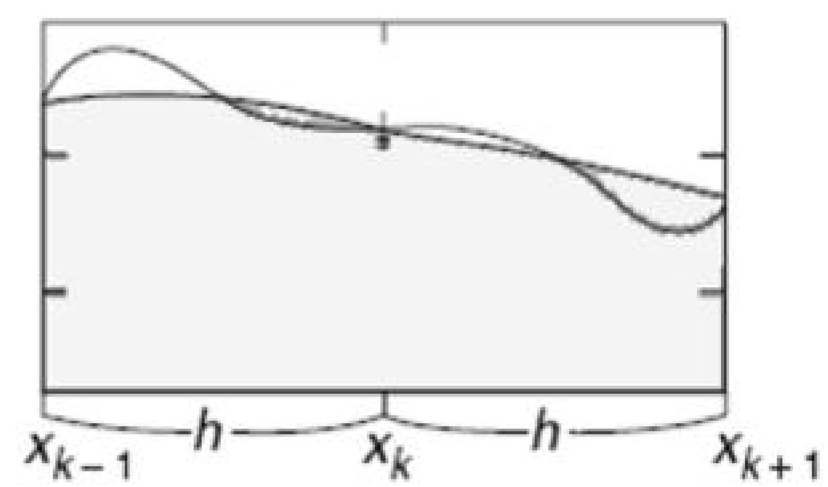
x=1 den x=1.1 re kadar $I_1=0.820703479$
x=1.1 den x=1.2 re kadar $I_2=1.00240949$
x=1.2 den x=1.3 re kadar $I_3=1.22434572$
Toplam Integral x=1 den x=1.3 kadar
$I_1 + I_2 + I_3=3.04745869$
Hata=3.04745869-3.032284632=-0.01011772



Orta Nokta



Yamuk



Simpson(1/3)

Integral araligi buyukse kucuk araliklara bolunerek integral hesaplanir.

Ornek PR641 **f(x)= e^{2x}** fonksiyonunun x=1, x=2.2 arasini uygun sekilde bolerek integrali hesaplayin.

Orta nokta:

x_1	x_2	h	f_m	I	Gercek	Hata
1	1.1	0.1	8.16617	0.816617	0.817979	-0.00136171
1.1	1.2	0.1	9.97418	0.997418	0.999081	-0.0016632
1.2	1.3	0.1	12.1825	1.21825	1.22028	-0.00203143
1.3	1.4	0.1	14.8797	1.48797	1.49045	-0.0024812
1.4	1.5	0.1	18.1741	1.81741	1.82045	-0.00303054
1.5	1.6	0.1	22.198	2.2198	2.2235	-0.00370151
1.6	1.7	0.1	27.1126	2.71126	2.71578	-0.00452103
1.7	1.8	0.1	33.1155	3.31155	3.31707	-0.005522
1.8	1.9	0.1	40.4473	4.04473	4.05148	-0.00674459
1.9	2	0.1	49.4024	4.94024	4.94848	-0.00823786
2	2.1	0.1	60.3403	6.03403	6.04409	-0.0100617
2.1	2.2	0.1	73.6998	7.36998	7.38227	-0.0122894
				36.9693	37.0309	-0.0616462

Yamuk:

x_1	x_2	h	f_1	f_2	I	Gercek	Hata
1	1.1	0.1	7.38906	9.02501	0.820703	0.817979	0.00272478
1.1	1.2	0.1	9.02501	11.0232	1.00241	0.999081	0.00332805
1.2	1.3	0.1	11.0232	13.4637	1.22435	1.22028	0.00406489
1.3	1.4	0.1	13.4637	16.4446	1.49542	1.49045	0.00496487
1.4	1.5	0.1	16.4446	20.0855	1.82651	1.82045	0.00606411
1.5	1.6	0.1	20.0855	24.5325	2.2309	2.2235	0.00740672
1.6	1.7	0.1	24.5325	29.9641	2.72483	2.71578	0.00904659
1.7	1.8	0.1	29.9641	36.5982	3.32812	3.31707	0.0110495
1.8	1.9	0.1	36.5982	44.7012	4.06497	4.05148	0.0134959
1.9	2	0.1	44.7012	54.5982	4.96497	4.94848	0.016484
2	2.1	0.1	54.5982	66.6863	6.06422	6.04409	0.0201335
2.1	2.2	0.1	66.6863	81.4509	7.40686	7.38227	0.0245912
					37.1543	37.0309	0.123354

Simson(1/3)

x_1	x_k	x_3	h	f_1	f_2	f_3	I	Gercek	Hata
1	1.1	1.2	0.1	7.389	9.025	11.02	1.817	1.817	0.00001
1.2	1.3	1.4	0.1	11.02	13.46	16.44	2.711	2.711	0.00002
1.4	1.5	1.6	0.1	16.44	20.09	24.53	4.044	4.044	0.00003
1.6	1.7	1.8	0.1	24.53	29.96	36.6	6.033	6.033	0.00005
1.8	1.9	2	0.1	36.6	44.7	54.6	9.00003	8.999	0.00008
2	2.1	2.2	0.1	54.6	66.69	81.45	13.43	13.43	0.00011
							37.03	37.03	0.00032

Simson(3/8)

x_1	x_2	x_3	x_4	h	f_1	f_2	f_3	f_4	I	Gercek	Hata
1	1.1	1.2	1.3	0.1	7.389	9.025	11.02	13.46	3.037	3.037	0.00006
1.3	1.4	1.5	1.6	0.1	13.46	16.44	20.09	24.53	5.535	5.534	0.0001
1.6	1.7	1.8	1.9	0.1	24.53	29.96	36.6	44.7	10.08	10.08	0.0001
1.9	2	2.1	2.2	0.1	44.7	54.6	66.69	81.45	18.38	18.37	0.0003
									37.03	37.03	0.0007

FORMULLERIN TURETILMESI

Formullerin turetilmesinde temel ana fikir, bir fonksiyonun a-b araliginda,

sabit bir degerde oldugunun kabulu **(orta nokta kurali)**

bir dogru ile temsil edilmesi kabulu **(yamuk kurali)**,

bir parabol ile temsil edilmesi kabulu **(1/3 simpson kurali)**,

bir kubik ile temsil edilmesi kabulu **(3/8 simpson kurali)**,

Burada yamuk kuralinin turetilisi gosterilecektir.

f(x) fonksiyonu x=a ve x=b noktalarindaki degerleri bilinsin. Yani a,b, f(a), f(b) bilinsin. bu durumda iki noktadan gecen dogru denklemi yazilabilir.

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}, \quad \frac{f(x)-f(a)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-a}{a-b}$$

$$f(x)-f(a)=\frac{x-a}{a-b}[f(a)-f(b)]$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a) \quad \text{veya}$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Her iki tarafin integrali alinirsa

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\left\{f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right\}dx$$

ara islemlerden sonra.

$$I=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{elde edilir.}$$

---------------------------------- ----------------------------

(1/3)Simpson kuralinda f(x) fonksiyonu x=a, x=b, x=c noktalarindaki degerler bilindigi varsayilir.

En basit ifade ile

$f(x)= Px^2+Qx+R$ fonksiyonu

x=a icin $f(a)= Pa^2+Qa+R$

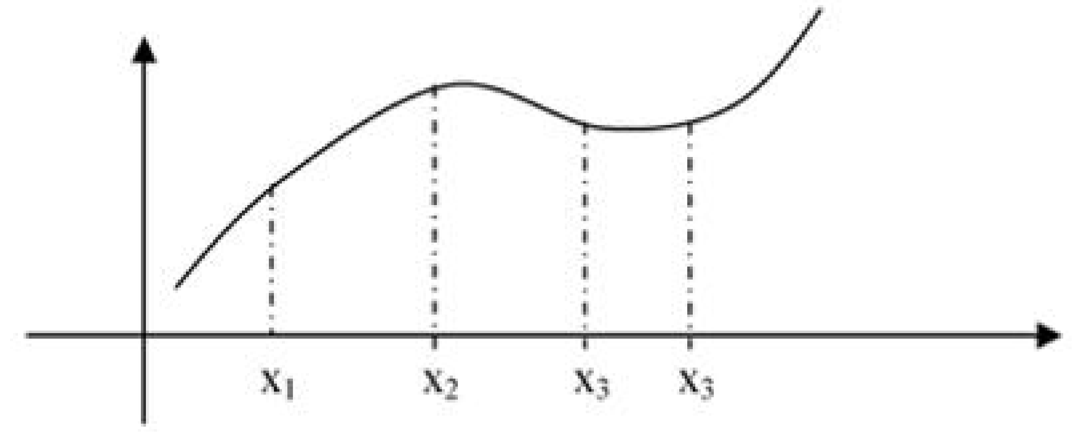
x=b icin $f(b)= Pb^2+Qb+R$

x=c icin $f(c)= Pc^2+Qc+R$

a,b,c, f(a), f(b), f(c) biliniyor. P,Q,R bilinmiyor. 3 bilinmeyenli uc denklemden P,Q,R cozulur ve denklemde yerine konulur. Bu ifade karmasik oldugundan pratikte ikinci derece Newton polinomu (newton Gregory polinomu), ikinci derece Lagrange polinomu kullanilarak integral hesaplanir.

(3/8)Simpson kuralinda f(x) fonksiyonu x=a, x=b, x=c, x=d noktalarindaki degerler bilindigi varsayilir. Fonksiyon kubik bir egri ile temsil edilir. kubik fonksiyonun integrali alinir.

--- ---------------



OZET

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \cong h f_{mk} \qquad (5.5.2)$$

with $h=x_{k+1}-x_k$, $f_{mk}=f(x_{mk})$, $x_{mk}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}(f_k+f_{k+1}) \qquad (5.5.3)$$

with $h=x_{k+1}-x_k$, $f_k=f(x_k)$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}(f_{k-1}+4f_k+f_{k+1}) \qquad (5.5.4)$$

with $h=\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{2}$

YAMUK KURALININ TURETILMESI

THE TRAPEZOIDAL RULE

The *trapezoidal rule* is the first of the Newton-Cotes closed sponds to the case where the polynomial in Eq. (21.1) is firs

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_1(x)\,dx$$

Recall from Chap. 18 that a straight line can be represented

$$f_1(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (21.2)$$

The area under this straight line is an estimate of the integr and b:

$$I=\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx$$

The result of the integration (see Box 21.1 for details) is

$$I=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (21.3)$$

which is called the *trapezoidal rule.*

Before integration, Eq. (21.2) can be expressed as

$$f_1(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+f(a)-\frac{af(b)-af(a)}{b-a}$$

Grouping the last two terms gives

$$f_1(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\frac{bf(a)-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a}$$

or

$$f_1(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

which can be integrated between $x=a$ and $x=b$ to yield

$$I=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}x\Big|_a^b$$

This result can be evaluated to give

$$I=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b^2-a^2)}{2}+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}(b-a)$$

Now, since $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$,

$$I=[f(b)-f(a)]\frac{b+a}{2}+bf(a)-af(b)$$

Multiplying and collecting terms yields

$$I=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

which is the formula for the trapezoidal rule.

SIMPSON KURALININ TURETILMESI

to $t=\{-h,0,+h\}$. Then, in order to find the coefficients of the second-degree polynomial

$$p_2(t)=c_1t^2+c_2t+c_3 \qquad (5.5.5)$$

matching the points $(-h,f_{k-1})$, $(0,f_k)$, $(+h,f_{k+1})$, we should solve the following set of equations:

$$p_2(-h)=c_1(-h)^2+c_2(-h)+c_3=f_{k-1}$$
$$p_2(0)=c_10^2+c_20+c_3=f_k$$
$$p_2(+h)=c_1(+h)^2+c_2(+h)+c_3=f_{k+1}$$

to determine the coefficients c_1, c_2, and c_3 as

$$c_3=f_k, \quad c_2=\frac{f_{k+1}-f_{k-1}}{2h}, \quad c_1=\frac{1}{h^2}\left(\frac{f_{k+1}+f_{k-1}}{2}-f_k\right)$$

Integrating the second-degree polynomial (5.5.5) with these coefficients $t=-h$ to $t=h$ yields

$$\int_{-h}^{h}p_2(t)\,dt=\frac{1}{3}c_1t^3+\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t\Big|_{-h}^{h}=\frac{2}{3}c_1h^3+2c_3h$$
$$=\frac{2h}{3}\left(\frac{f_{k+1}+f_{k-1}}{2}-f_k+3f_k\right)=\frac{h}{3}(f_{k-1}+4f_k+f_{k+1})$$

8.

SAYISAL İNTEGRASYON

8.1 GİRİŞ

Mühendislikte sık karşılaşılan matematiksel işlemlerden biri integral işlemidir. Bilindiği gibi integral bir büyüklüğün toplam değerinin bulunması işlemidir. Dolayısıyla bir fonksiyonun belli sınırlar arasında integrali, fonksiyon eğrisinin altında ve sınır değerler arasında kalan toplam alanı vermektedir. Bu bakımdan integrasyon işlemi mühendislikte düzenli veya düzensiz şekillerin alanlarının veya hacimlerinin hesaplanmasında, ortalama değerlerin bulunmasında, alan ve eylemsizlik momentlerinin elde edilmesinde, toplam kütlenin bulunmasında, hız ve alınan yolların hesaplanmasında, transfer edilen toplam ısı miktarının hesabında vb. yaygın olarak kullanılır.

Her fonksiyonun integrali analitik olarak alınamayacağı gibi bazı durumlarda da fonksiyonun analitik ifadesi yerine belli bir aralıkta fonksiyonun aldığı sayısal değerler tablo halinde verilebilir. Her durumda, analitik veya tablo halinde verilen bir *f(x)* fonksiyonunun belirli integralini sayısal yöntemler kullanılarak hesaplamak mümkündür. Sayısal integrasyon yöntemlerinin temelini eğri altındaki alanı dilimlere bölmek veya fonksiyon yerine verilen aralıktaki noktalardan geçen interpolasyon polinomlarını kullanmak oluşturur. Yani *f(x)* fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında belirli integrali için

$$\int_a^b f(x).dx \cong \int_a^b y_p(x).dx \qquad (8.1)$$

yaklaşımı yapılabilir. Sayısal olarak alınan bu belirli integrale literatürde *quadrature* de denmektedir. Bu terim şekli karelere bölerek alan ve hacim hesaplama anlamına gelmektedir.

Denk.(8.1)'de kullanılacak interpolasyon polinomuna göre değişik sayısal *integrasyon formülleri* elde edilebilir. Yapılan yaklaşım nedeniyle bu formüller belli bir hata içerecektir. Bu integrasyon hatası aynı prensipten hareketle

bulunabilir. Örneğin, Newton – Gregory ilerleme polinomu kullanıldığında elde edilecek formülün hatası

$$e_i = \int_a^b \binom{s}{n+1} h^{n+1} y^{(n+1)}(x_s)dx \qquad (8.2)$$

ifadesinden bulunabilir. Bu kısımda yaygın olarak kullanılan üç integrasyon formülünün, Newton-Gregory ilerleme polinomunun üç ayrı hali kullanılarak nasıl elde edildiği açıklanacaktır.

8.2 YAMUK (TRAPEZ) KURALI

İnterpolasyon polinomu olarak, Newton – Gregory ilerleme polinomunun n=1 hali yani lineer interpolasyon kullanılması ile elde edilen intrgrasyon formülüdür. Lineer interpolasyon

$$y_p = y_0 + s.\Delta y_0$$

alınırsa ve

$$s = \frac{x - x_0}{h} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{1}{h}dx$$

diferansiyeli kullanılırsa fonksiyonun belirli integrali, integral sınırlarına da dikkat ederek

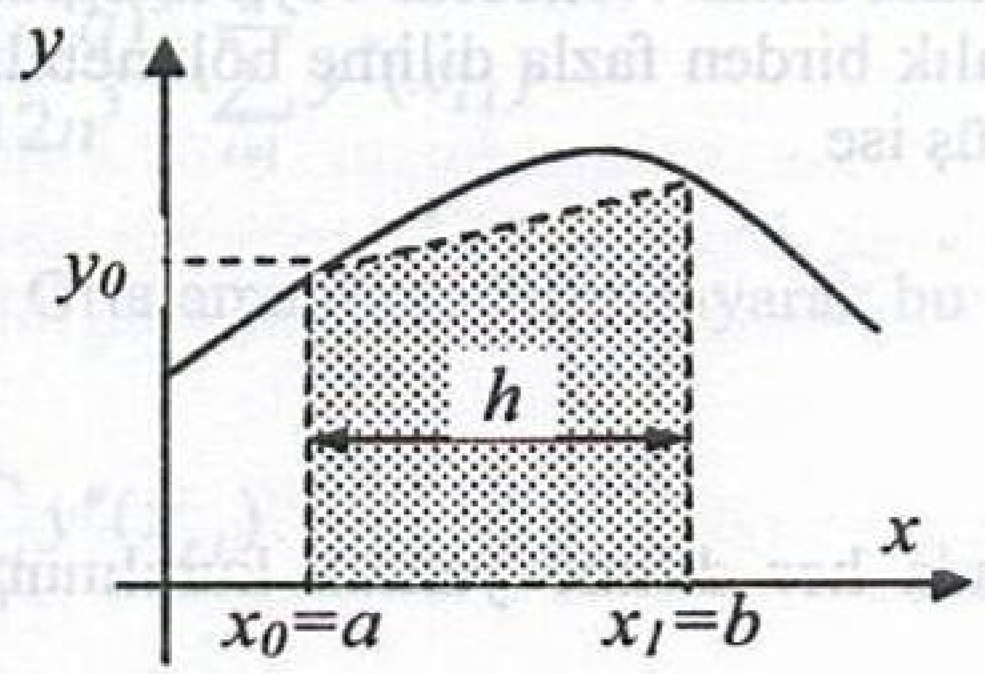
$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x).dx \cong \int_{x_0}^{x_1} y_p(x).dx = \int_{s=0}^{s=1} y_p.h.ds = \int_0^1 (y_0 + s.\Delta y_0).h.ds$$

yazılabilir. Bu integral kolayca alınarak

$$A \cong h.\left[y_0.s + \Delta y_0 \frac{s^2}{2} \right]_0^1$$

$$A \cong h.\left(y_0 + \frac{\Delta y_0}{2} \right) = h.\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right)$$

veya



Şekil 8.1 Eğri altındaki alanın yamuk kuralı ile yaklaşık hesabı

$$A \cong \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \qquad (8.3)$$

sonucu bulunur. Bu bilindiği gibi yamuk alanı olup eğri altındaki alan yamuk gibi düşünülerek yaklaşık olarak bulunmuş olur (Şekil 8.1). Bu yüzden yukarıdaki formül yamuk veya trapez kuralı olarak adlandırılır.

Yamuk kuralının hatası, n=1 alınarak Denk.8.2'den hesaplanabilir.

$$e_i = \int_{x_0}^{x_1} h^2 \frac{s.(s-1)}{2}.y^{(n+1)}(x_s).dx = \int_0^1 \frac{s.(s-1)}{2}.h.h^2.y''(x_s).ds$$

Burada $y''(x_s)$ türevinin bu aralıkta yaklaşık olarak sabit kaldığı kabul edilirse

$$e_i = \frac{1}{2}h.h^2.y''(x_s).\int_0^1 (s^2 - s).ds = \frac{1}{2}h^3.y''(x_s).\left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right]_0^1$$

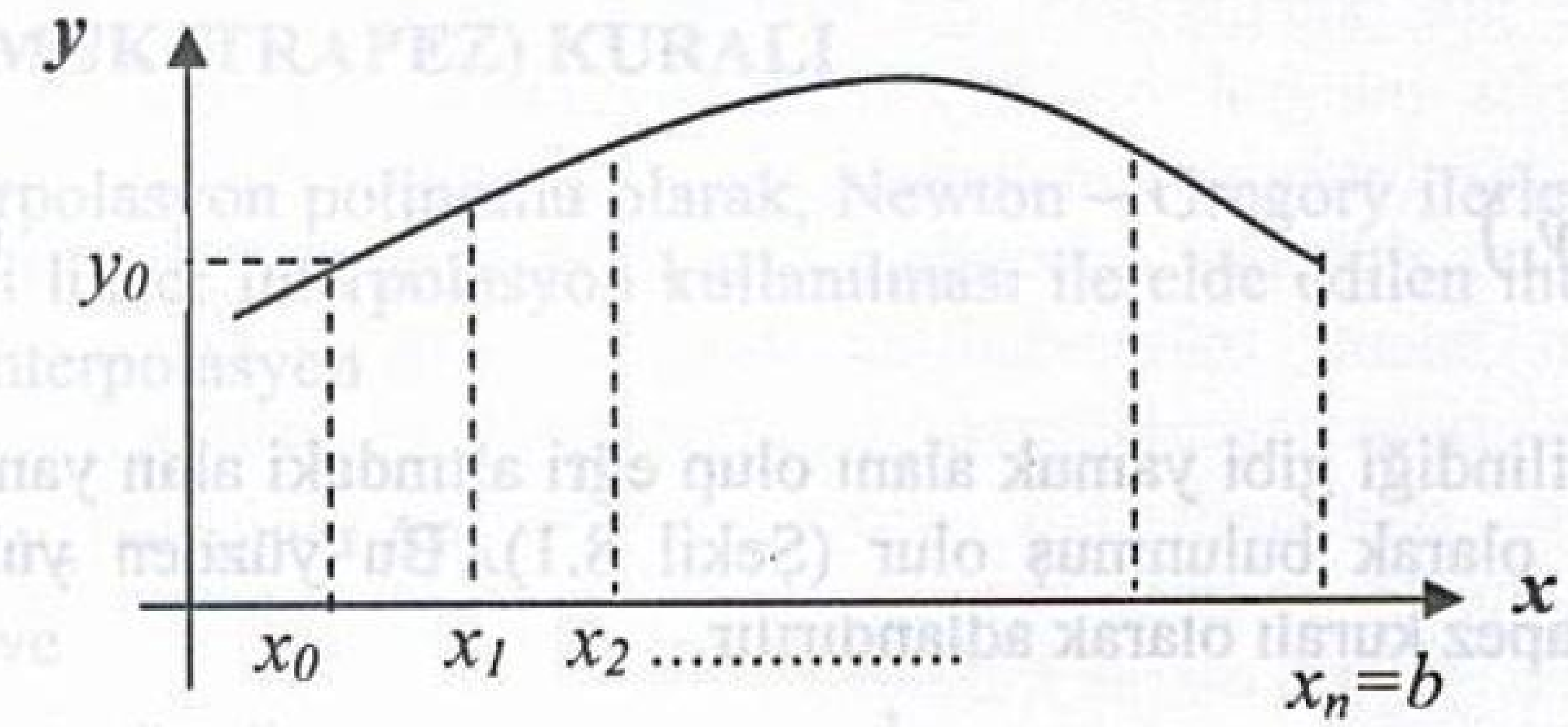
$$e_i = -\frac{h^3}{12}.y''(x_s) \qquad (x_0 \le x_s \le x_1) \qquad (8.4)$$

bulunur. Burada hatanın h^3 ile orantılı olduğu görülmektedir. Dilim kalınlığı $\Delta x = h$'nın küçük olması hatanın da kübik olarak azalacağı anlamına gelir. Ayrıca fonksiyonun lineer olması halinde ikinci türevi sıfır olacağından hata sıfır olacak yani tam sonuç bulunmuş olacaktır.

Bazı durumlarda birden fazla dilim verilebilir veya integral aralığı geniş ise hatayı azaltmak üzere verilen aralık birden fazla dilime bölünebilir. $[a,b]$ aralığı n tane eşit kalınlıklı dilime bölünmüş ise

$$h = \frac{b-a}{n}$$

olacaktır (Şekil 8.2). Bu durumda her dilime yamuk kuralının uygulanmasıyla genel bir ifade bulunabilir.



Şekil 8.2 Yamuk kuralının n dilime uygulanması

$$A = \int_{x_0}^{x_n} f(x).dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$A \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2.y_{n-1} + y_n\right] \qquad (8.5)$$

Elde edilen bu genel yamuk formülünün hatası her dilimde oluşan hataların toplamından elde edilebilir. Toplam integrasyon hatası

$$e_{it} = -\frac{h^3}{12}.y''(x_{s1}) - \frac{h^3}{12}.y''(x_{s2}) - \frac{h^3}{12}.y''(x_{s3}) - \ldots \qquad (8.6a)$$

$$= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} y''(x_{s\,i})$$

veya

$$e_{it} = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}.\sum_{i=1}^{n} y''(x_{s\,i}) \qquad (8.6b)$$

olarak elde edilir. Ortalama türev tanımlayarak bu hatayı daha basit olarak yazmak mümkündür:

$$\bar{y}'' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y''(x_{s\,i}) \qquad (8.6c)$$

ile toplam hata

$$e_{it} \cong -\frac{(b-a)^3}{12n^2}.\bar{y}'' = -\frac{h^2}{12}(b-a).\bar{y}'' \qquad (8.6d)$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi lokal hata mertebesi $O(h^3)$ olmasına rağmen hataların birikmesi nedeniyle bu ifadede toplam hata mertebesi bir azalarak $O(h^2)$ olmuştur.

Örnek 8.1:

x	*f(x)*	*x*	*f(x)*
0	*3*	*0.3*	*3*
0.1	*8*	*0.4*	*6*
0.2	*4*	*0.5*	*8*

değerleri verildiğine göre $A = \int_0^{0.5} f(x)dx$ integralini hesaplayınız, hata mertebesini belirtiniz.

Çözüm: Genel yamuk kuralı ifadesi kullanılarak

$$A \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2.y_{n-1} + y_n\right]$$

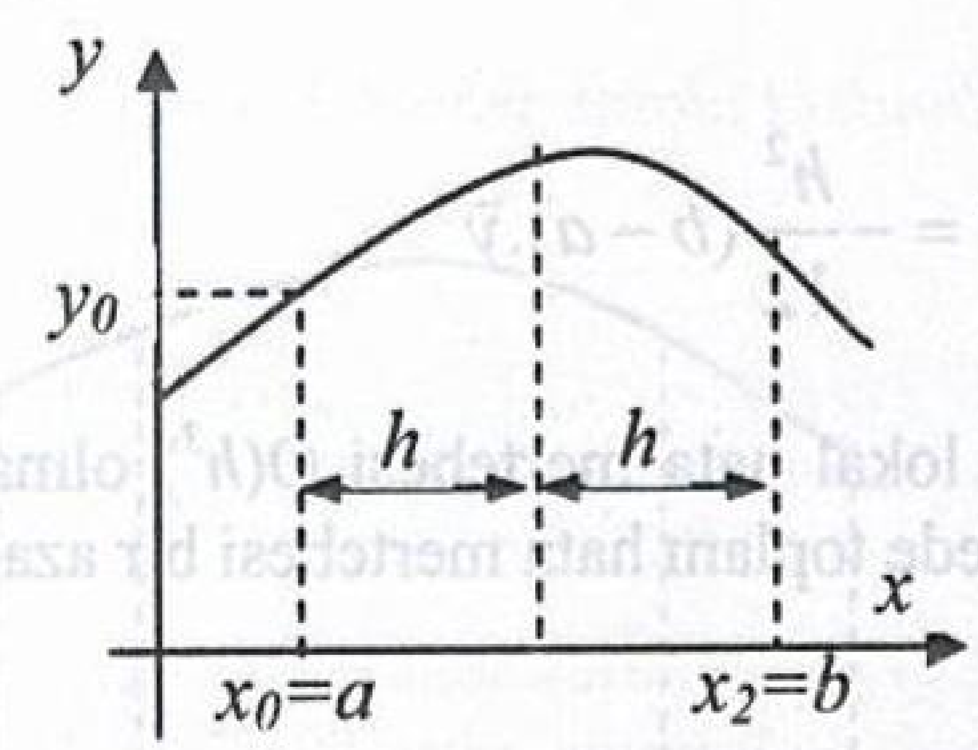
$$= \frac{0.1}{2}\left[3 + 2(8) + 2(4) + 2(3) + 2(6) + 8\right]$$

$$= 2.65$$

sonucu elde edilir. Burada yamuk kuralı birden fazla dilime ardışık uygulandığı için oluşan toplam hatanın mertebesi $O(h^2) = 0.01$ 'dir. Hatanın tam olarak hesaplanabilmesi için fonksiyonun kendisi bilinmeli ve türevleri alınabilmelidir.

8.3 SİMPSON 1/3 KURALI:

Newton – Gregory ilerleme polinomunun n=2 hali olan quadratik interpolasyon polinomu kullanılarak farklı bir integrasyon formülü bulunabilir. Ancak bunun için üç nokta yani iki dilim gerektiğinden integral sınırları x_0 ve x_2 olacaktır (Şek.8.3).



Şekil 8.3 Simpson 1/3 kuralının uygulanması

$$A = \int_a^b f(x).dx \cong \int_{x_0}^{x_2} y_p(x).dx$$

$$= \int_0^2 \left(y_0 + s.\Delta y_0 + \frac{s.(s-1)}{2}\Delta^2 y_0\right)hds$$

$$= h.\left[2.y_0 + 2.\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right]$$

veya

$$A \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4.y_1 + y_2\right] \qquad (8.7)$$

Simpson 1/3 kuralı denilen integrasyon formülü elde dilir.

Hata mertebesini bulmak üzere n=2 için Eşt.8.2 ile verilen hata integrali alınırsa sonucun sıfır olduğu görülür. Bu ise hatanın sıfır olduğunu değil atılan terimlerden ilkinin sıfır olduğu anlamına gelir. Bu durumda atılan terimlerden ikincisi, yani n=3 hali alınarak hata terimi elde edilebilir. n=3 için hata teriminin integrali

$$e_i = \int_{x_0}^{x_2} h^4 \frac{s.(s-1)(s-2)(s-3)}{24}.y^{(iv)}(x_s).dx$$

$$= \frac{1}{24}h.h^4.y^{(iv)}(x_s).\int_0^2 (s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s).ds =$$

$$e_i = -\frac{h^5}{90}.y^{(iv)}(x_s) \qquad (x_0 \le x_s \le x_2) \qquad (8.8)$$

bulunur. Burada hatanın h^5 ile orantılı olduğu görülmektedir. İntegrali alınan fonksiyonun kübik bir polinom olması halinde hatanın sıfır olacağı yani tam sonuç elde edileceği de görülmektedir. Çünkü kübik polinomun dördüncü türevi sıfır olacaktır.

İntegralin alınacağı $[a,b]$ aralığı eşit kalınlıklı n adet dilime bölünmüş ise yani

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ise, her çift dilime Simpson 1/3 kuralını uygulayarak genel bir ifade bulunabilir.

$$A = \int_{x_0}^{x_n} f(x).dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x).dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x).dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x).dx$$

$$\cong \frac{h}{3}(y_0 + 4.y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4.y_3 + y_4) + ...$$

$$+ \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4.y_{n-1} + y_n)$$

$$A \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4.y_1 + 2.y_2 + 4.y_3 + 2.y_4 + ... + 2.y_{n-2} + 4.y_{n-1} + y_n\right] \qquad (8.9)$$

Burada şunu belirtmek gerekir ki kural her çift dilime uygulandığından, dilim sayısı (n) çift olmalıdır. Aksi halde bu yöntem doğrudan uygulanamaz.

Çok sayıda dilim olması halinde integralin toplam hatası, ayrı ayrı hataların toplamına eşit olacaktır. Yani toplam integrasyon hatası

$$e_{it} = -\frac{h^5}{90}.y^{(iv)}(x_{s1}) - \frac{h^5}{90}.y^{(iv)}(x_{s2}) - \frac{h^5}{90}.y^{(iv)}(x_{s3}) - ... \qquad (8.10a)$$

$$= -\frac{h^5}{90}.\sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{s\,i})$$

veya

$$e_{it} = -\frac{(b-a)^5}{90n^5}.\sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{s\,i}) \qquad (8.10b)$$

olarak elde edilir. Ortalama türev tanımlayarak bu hatayı daha basit olarak yazmak mümkündür. İntegrasyon formülü her iki dilime bir kez uygulandığına göre ortalama türev

$$\overline{y}^{(iv)} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{s\,i}) \qquad (8.10c)$$

ile toplam hata

$$e_{it} \cong -\frac{(b-a)^5}{180n^4}.\overline{y}^{(iv)} = -\frac{h^4}{180}(b-a).\overline{y}^{(iv)} \qquad (8.10d)$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi lokal hata mertebesi O(h^5) iken, hataların birikmesi nedeniyle bu ifadede toplam hata mertebesi bir azalarak O(h^4) olmuştur.

Örnek 8.2:

x	*f(x)*	*x*	*f(x)*
0.	*3*	*0.4*	*6*
0.1	*8*	*0.5*	*8*
0.2	*4*	*0.6*	*5*
0.3	*3*		

değerleri verildiğine göre $A = \int_0^{0.6} f(x)dx$ integralini hesaplayınız, hata mertebesini

Çözüm: Verilen soruda dilim sayısı çift olduğundan (6 dilim, 7 nokta) genel Simpson1/3 kuralı ifadesi doğrudan kullanılabilir:

$$A \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4.y_1 + 2.y_2 + 4.y_3 + 2.y_4 + \ldots\ldots + 2.y_{n-2} + 4.y_{n-1} + y_n\right]$$

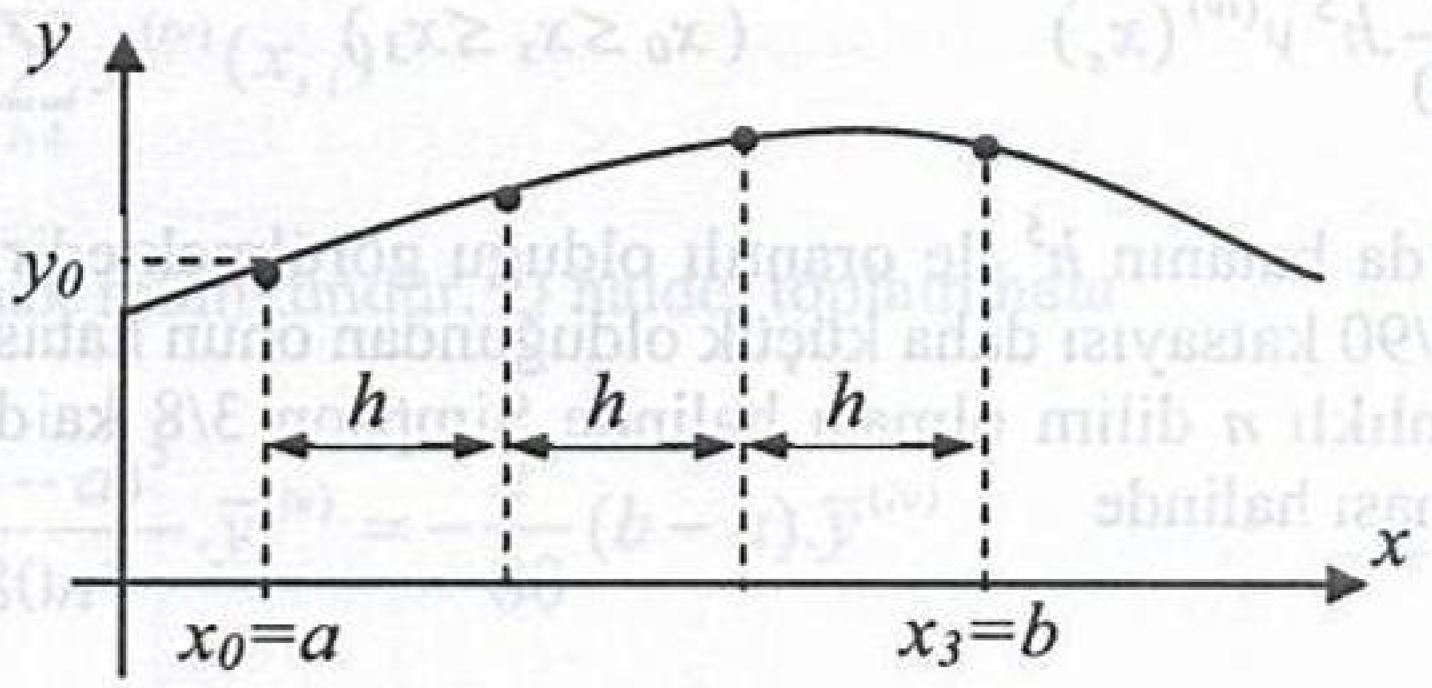
$$= \frac{0.1}{3}\left[3 + 4.(8) + 2.(4) + 4.(3) + 2.(6) + 4.(8) + 5\right]$$

$$= 3.467$$

değeri bulunur. Hata mertebesi ise $O(h^4)=1\text{x}10^{-4}$ olacaktır.

8.4 SİMPSON 3/8 KURALI

Yaygın olarak kullanılan bir başka integrasyon formülü, Newton – Gregory ilerleme polinomunun ilk dört teriminin alınması ile, yani kübik bir interpolasyon polinomu (n=3) hali kullanılarak elde edilir. Ancak bu polinom dört nokta kullandığından eşit aralıklı üç dilim üzerinden integrasyon alınması gerekir (Şek.8.4).



Şekil 8.4 Simpson 3/8 kuralının uygulanması

$$A = \int_a^b f(x).dx \cong \int_{x_o}^{x_3} y_p(x).dx$$

$$= \int_0^3 (y_0 + s.\Delta y_0 + \frac{s.(s-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{s.(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0)hds$$

$$= h.\left[3.y_0 + \frac{9}{2}.\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right]$$

veya

$$A \cong \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] \qquad (8.11)$$

Simpson 3/8 kuralı olarak bilinen formül elde edilir. Bunun hatası benzer şekilde bulunabilir. Yani, n=3 hali alınarak hata terimi elde edilebilir. n=3 için hata teriminin integrali

$$e_i = \int_{x_0}^{x_3} h^4 \frac{s.(s-1)(s-2)(s-3)}{24}.y^{(iv)}(x_s).dx$$

$$= \frac{1}{24}h.h^4.y^{(iv)}(x_s).\int_0^3 (s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s).ds$$

$$e_i = -\frac{3}{80}.h^5 y^{(iv)}(x_s) \qquad (x_0 \le x_s \le x_3) \qquad (8.12)$$

bulunur. Burada da hatanın h^5 ile orantılı olduğu görülmektedir. Ancak Simpson 1/3 kuralındaki 1/90 katsayısı daha küçük olduğundan onun hatası daha küçüktür.

Eşit kalınlıklı n dilim olması halinde Simpson 3/8 kaidesi, her üç dilime kuralın uygulanması halinde

$$A = \int_{x_0}^{x_3} f(x).dx$$

$$\cong \frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3)+\frac{3h}{8}(y_3+3y_4+3y_5+y_6)$$

$$+\ldots\ldots+\frac{3h}{8}(y_{n-3}+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n)$$

$$A \cong \frac{3h}{8}\left[y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+\ldots\ldots+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n\right] \qquad (8.13)$$

genel ifadesi elde edilir.

İntegralin alınacağı $[a,b]$ aralığı eşit kalınlıklı n adet dilime bölünmüş ise yani

$$h=\frac{b-a}{n}$$

ise, oluşacak toplam hata benzer şekilde hesaplanabilir:

$$e_{it}=-\frac{3(b-a)^5}{80n^5}.\sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{s\,i}) \qquad (8.14a)$$

Ortalama türev tanımlayarak bu hatayı daha basit olarak yazmak mümkündür. Her üç dilime bir kez uygulandığı düşünülürse ortalama hatayı

$$\overline{y}^{(iv)}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{s\,i}) \qquad (8.14b)$$

şeklinde hesaplamak mümkündür. O halde toplam hata

$$e_{it}\cong-\frac{(b-a)^5}{80n^4}.\overline{y}^{(iv)}=-\frac{h^4}{80}(b-a).\overline{y}^{(iv)} \qquad (8.14c)$$

olacaktır. Görüldüğü gibi lokal hata mertebesi $O(h^5)$ iken, hataların birikmesi nedeniyle bu ifadede toplam hata mertebesi bir azalarak $O(h^4)$ olmuştur. Simpson 1/3 yöntemine göre hata terimi daha büyüktür. Ancak dilim sayısı üç ve üçün katları olması halinde Simpson 3/8 kuralı doğrudan uygulanabilmektedir. Dolayısıyla dilim sayısının çift olması halinde Simpson 1/3 kuralı tercih edilmelidir.

Yukarıda elde edilen integrasyon formülleri Newton – Cotes integrasyon formülleri olarak da adlandırılır.

Örnek 8.3: Örnek 8.2'de verilen problemi Simpson 3/8 kuralı ile çözünüz.

<u>*Çözüm:*</u> Verilen soruda dilim sayısı 6 olduğundan genel Simpson 3/8 kuralı da doğrudan kullanılabilir:

$$A \cong \frac{3h}{8}\left[y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+\ldots\ldots+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n\right]$$

$$=\frac{3(0.1)}{8}\left[3+3.(8)+3.(4)+2.(3)+3.(6)+3.(8)+5\right]$$

$$=3.45$$

değeri bulunur. Hata mertebesi yine $O(h^4)$=1x10^{-4} ancak hata miktarı Simpson 1/3'ten büyük olacaktır.

Örnek 8.4:

x	*f(x)*	*x*	*f(x)*
1.6	4.953	2.6	13.464
1.8	6.050	2.8	16.445
2.0	7.389	3.0	20.086
2.2	9.025	3.2	24.533
2.4	11.023	3.4	29.964

Yukarıda tablo halinde verilen fonksiyonu x= 1.6'dan x= 3.4' e kadar integre ediniz.

<u>*Çözüm:*</u> a) Yamuk kuralı ile:

$$n=\frac{3{,}4-1{,}6}{0{,}2}=9$$

$$\int_{1{,}6}^{3{,}4} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$$

$$=\frac{0.2}{2}(4.953+2\times6.050+2\times7.389+2\times9.025+2\times11.023+$$

$$2\times13.464+2\times16.445+2\times20.086+2\times24.533+29.964)$$

$$=25.0947$$

b) Simpson 1/3 kuralı ile:

Dilim sayısı (n) çift olmadığından bu kural doğrudan uygulanamaz.

c) Simpson 3/8 kuralı ile:

$$\int_{1,6}^{3,4} f(x)dx = \frac{3\times 0.2}{8}(4.953 + 3\cdot(6.050) + 3\cdot(7.389) + 2\cdot(9.025) + 3\cdot(11.023)$$
$$+3\cdot(13.464) + 2\cdot(16.445) + 3\cdot(20.086) + 3\cdot(24.533) + 29.964\,)$$
$$= 25.0119$$

d) x= 1.6'den x= 1.8' e kadar yamuk, diğer kısım için Simpson 1/3 kuralı ile:

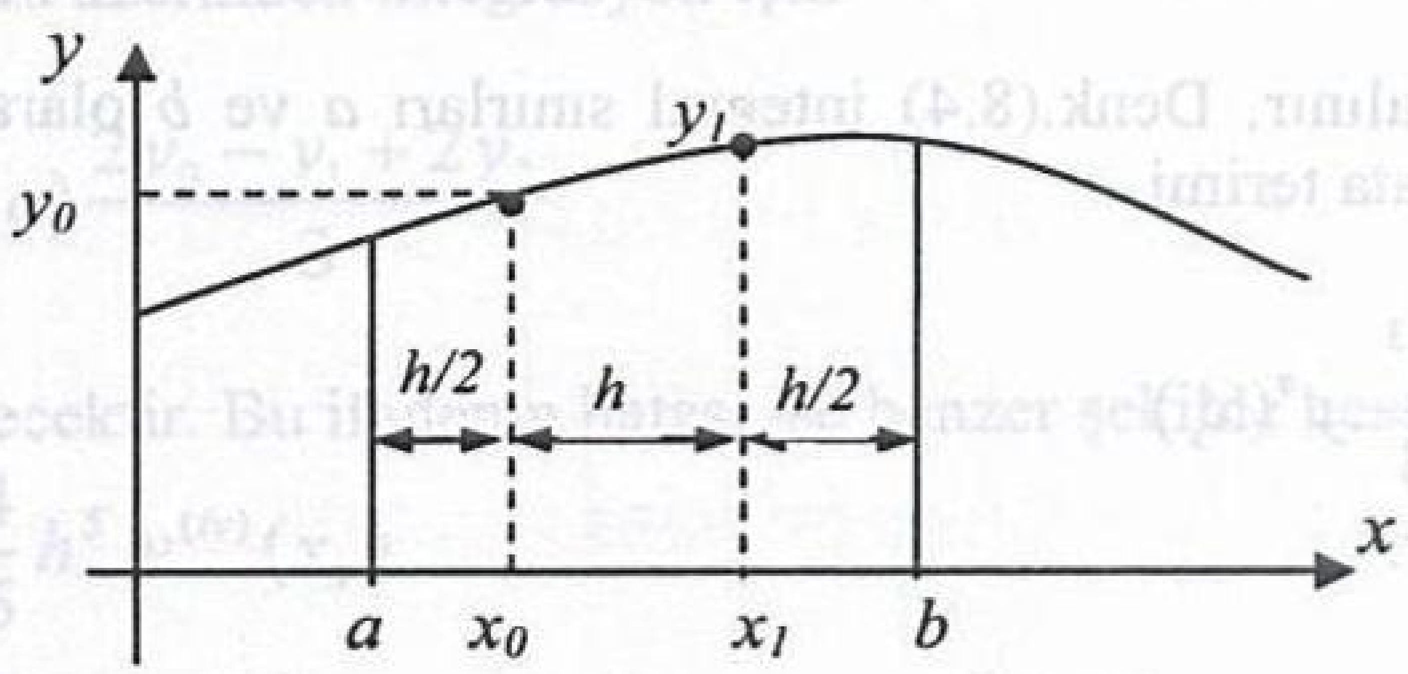
$$\int_{1,6}^{3,4} f(x)dx = \int_{1,6}^{1,8} f(x)dx + \int_{1,8}^{3,4} f(x)dx$$
$$= \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + 4f_6 + 2f_7 + 4f_8 + f_9)$$
$$= 25.0152$$

Not: gerçek değer A=25.011 olup en küçük hata (c) 'de oluşmuştur.

8.5 ÜNİFORM OLMAYAN NOKTALAR VE AÇIK INTEGRASYON

Uygulamada her zaman eşit kalınlıklı dilim olmaz. Dilim kalınlığının farklı olması hallerinde Simpson kuralları doğrudan uygulanamaz. Böyle durumlarda yapılacak en basit iş yamuk kuralını her dilime uygulanarak çözüme ulaşmaktır.

Uygulamada karşılaşılan bir başka durum integrasyon sınırlarının verilen noktaların dışına taşması durumudur (Şekil 8.5). Böyle bir durumda



Şekil 8.5 İntegral sınırlarının veri aralığını aşması

kullanılabilecek integrasyon formülleri benzer şekilde elde edilebilir. Bu formüllere *açık integrasyon formülleri* de denir. Bu formüllerin esası integrasyon aralığı ile ortalama kalınlığın çarpımıdır. Yani

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\bar{y} \qquad (8.15)$$

Burada hesaplanacak alanın ortalama kalınlığı verilen noktalardan elde edilebilir.

a) Tek nokta olması hali:

Integrasyon aralığında tek bir nokta (x_0, y_0) verilmiş olsun. Bu nokta ile $[a,b]$ aralığı h kalınlığında iki dilime bölünmüş ise ortalama yükseklik

$$\bar{y} = y_0$$

olacaktır. Bu durumda aranan alan

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong (b-a)y_0 \qquad (8.16)$$

olacaktır. Bu hesapta oluşan hata yamuk kuralına benzetilerek bulunabilir. Aralığın uç noktalarının ortalaması

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = y_0$$

olduğu dikkate alınır, Denk.(8.4) integral sınırları a ve b olarak (s =0'dan 2'ye kadar) alınırsa hata terimi

$$e_i = -\frac{h^3}{3}.y''(x_s) \qquad (8.17)$$

olarak elde edilir.

b) İki nokta olması hali:

İntegrasyon aralığında iki nokta verilmiş olsun (Şekil 8.5). Verilen bu noktalardan geçen bir doğru denklemi elde edip $[a,b]$ aralığı boyunca integre edilerek aranan alan yaklaşık bulunabilir.

Verilen (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen doğru denklemi, interpolasyon polinomlarından biri kullanılarak

$$y_p = y_0 + \frac{x - x_0}{h}(y_1 - y_0)$$

yazılabilir. Bu denklem integrasyonda kullanılırsa

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b y_p dx = \int_a^b \left[y_0 + \frac{x - x_0}{h}(y_1 - y_0) \right] dx \qquad (8.18a)$$

$$\cong (b-a)\left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}\left(\frac{a+b}{2} - x_0\right) \right]$$

elde edilir. $[a, x_0]$ ve $[x_1, b]$ aralıkları eşit ve h veya Şekil 8.5'deki gibi $h/2$ ise yukarıdaki ifade daha basit bir hale

$$A \cong (b-a)\frac{y_0 + y_1}{2} \qquad (8.18b)$$

gelecektir.

c) Çok nokta olması hali:

İntegrasyon aralığında çok nokta varsa benzer şekilde hareket edilir. Yani noktalardan geçen bir interpolasyon polinomu elde ederek istenen sınırlar arasında integrasyon gerçekleştirilir ve bir integrasyon formülü elde edilir.

Örneğin $[a, b]$ aralığında üç nokta varsa bu noktaların oluşturduğu eşit h kalınlıklı dört dilim üzerinden integrasyon için

$$A \cong (b-a)\frac{2y_0 - y_1 + 2y_2}{3} \qquad (8.19)$$

formülü elde edilecektir. Bu ifadenin hatası ise benzer şekilde hesaplanırsa

$$e_i = -\frac{14}{45}h^5.y^{(iv)}(x_s) \qquad (8.20)$$

sonucu elde edilir.

Daha fazla nokta verilmesi halinde izlenecek yöntem aynıdır.

Örnek 8.5:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.1	*8*	*0.4*	*6*
0.2	*4*	*0.5*	*8*

Yukarıdaki tablo değerlerine göre $f(x)$ fonksiyonunun integralini [0, 0.6] aralığında hesaplayınız.

Çözüm: Verilen noktaları dikkate alarak verilen integrali iki kısım halinde alabiliriz.

$$A = \int_0^{0.6} f(x)dx = \int_0^{0.3} f(x)dx + \int_{0.3}^{0.6} f(x)dx$$

$$\cong (0.3-0)\frac{8+4}{2} + (0.6-0.3)\frac{8+6}{2}$$

$$= 3.9$$

8.6 ÇOK KATLI İNTEGRALLER

Tek katlı integral için elde edilen integrasyon formülleri çok katlı integrasyona genişletilebilir. Bunun için dikkat edilmesi gereken nokta integrasyonun hangi konumda ve hangi yönde yapıldığının ortaya konmasıdır. Burada örnek olarak $f(x,y)=0$ fonksiyonunun iki katlı integralinin alınışı izah edilecektir. x yönündeki dilim kalınlığı h ve adım sayacı i, y yönündeki dilim kalınlığı k ve adım sayacı j olsun. Her iki yönde de yamuk kuralı uygulanırsa

$$A = \iint f(x,y)dx\,dy$$

$$= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \right] dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[\frac{h}{2}\big(f(x,y) + f(x+h,y)\big) \right] dy$$

$$A = \frac{h}{2}\left\{ \frac{k}{2}\left[f(x,y) + f(x,y+k) + f(x+h,y) + f(x+h,y+k) \right] \right\}$$

$$A = \frac{hk}{4}\left[f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} \right] \qquad (8.21)$$

ifadesi elde edilir.

SORULAR

8.1: $y = f(x) = c\cos 3x + x$ fonksiyonu veriliyor.

a) Bu fonksiyonun 0'dan 0.9'a kadar integralinin gerçek değerini analitik olarak hesaplayınız.

b) $0 \le x \le 0.9$ aralığını üç dilime bölerek elde edilecek y değerlerini kullanıp aynı integrali yamuk kuralıyla bulunuz. Bu durumda hata mertebesini ve izafi hatayı hesaplayınız.

8.2: İlerleme polinomunda ilk üç terim alınarak oluşturulacak integral formülünün hatası için bir ifade çıkarınız.

8.3: $y(1.1)= 0.769$, $y(1.2)= 0.472$, $y(1.4)= -0.344$, $y(1.5)= -0.875$

ve $y'(1.3)= -3.69$ verildiğine göre;

a) Bu noktalardan geçen bir interpolasyon polinomu elde ediniz.

b) $y(1.25)$ değerini hesaplayınız.

c) $\int_{1.1}^{1.5} y(x)dx$ integralini hesaplayınız, meydana gelen maksimum hatayı yaklaşık bulunuz.

d) Bulduğunuz polinomun x eksenini kestiği noktayı Newton Raphson metoduyla hesaplayınız.

8.4: Soru 7.10'da verilen data için ortalama y değerini $\overline{y} = \frac{1}{4}\int_3^7 y dx$ integrali ile hesaplayınız.

8.5: π sayısının yaklaşık değeri

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

integrali ile bulunabilir.

a) Yamuk ve Simpson kurallarıyla 2, 4, 8, 16, 32, 64 dilim kullanarak veriniz. Dilim sayısı ikiye katlanınca hata aynı şekilde azalıyor mu? Sonuçları yorumlayınız.

b) Aynı noktalardan geçen kübik spline eğrilerinin integralini bularak aynı soruları cevaplandırınız.

8.6: $A = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$ integrali yamuk kuralı ile hesaplanırsa (h = 0.1) oluşacak hata mertebesini belirtiniz, hatayı hesaplayınız.

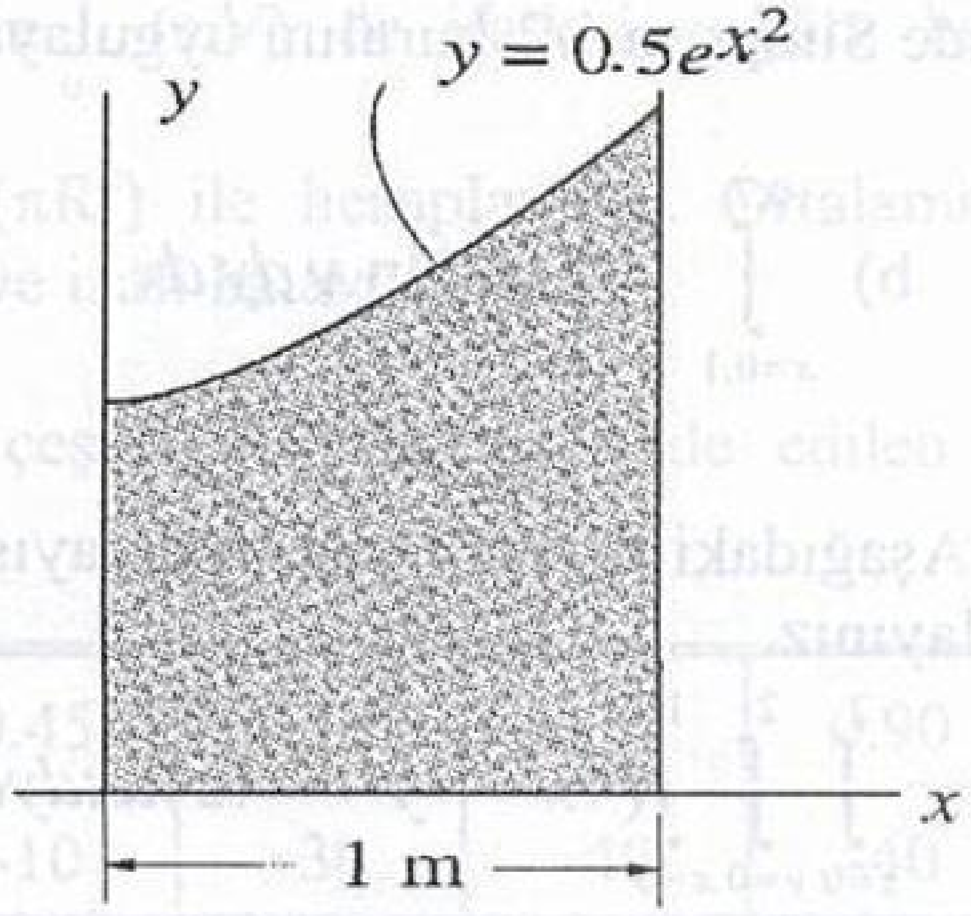
8.7: $x = -\ln t$ dönüşümünü kullanarak

$$\int_0^\infty \cos^2 x e^{-x} dx$$

integralini yamuk kuralı ile hesaplayınız. Dönüşüm yapmadan integral yamuk kuralı ile hesaplanmak istenirse üst sınır olarak hangi değer alınsın ki integral sonucu %10'dan az değişecek şekilde bulunsun (h değeri kabul edilmelidir)?

8.8: İki noktalı Lagrange polinomunu kullanarak bir integrasyon formülü elde ediniz.

8.9: Simpson Kuralını kullanarak şekildeki taralı alanın



a) ağırlık merkezinin koordinatlarını

$$\overline{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \qquad \overline{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

ifadelerinden;

b) eksenlere göre alan atalet momentlerini

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

bağıntılarından ve

c) çarpım atalet momentini

$$I_{xy} = \int xy dA$$

ifadesinden hesaplayınız.

8.10: $\int_0^{\pi} (5+\sin x)dx$ integralini

a) Analitik olarak hesaplayınız.

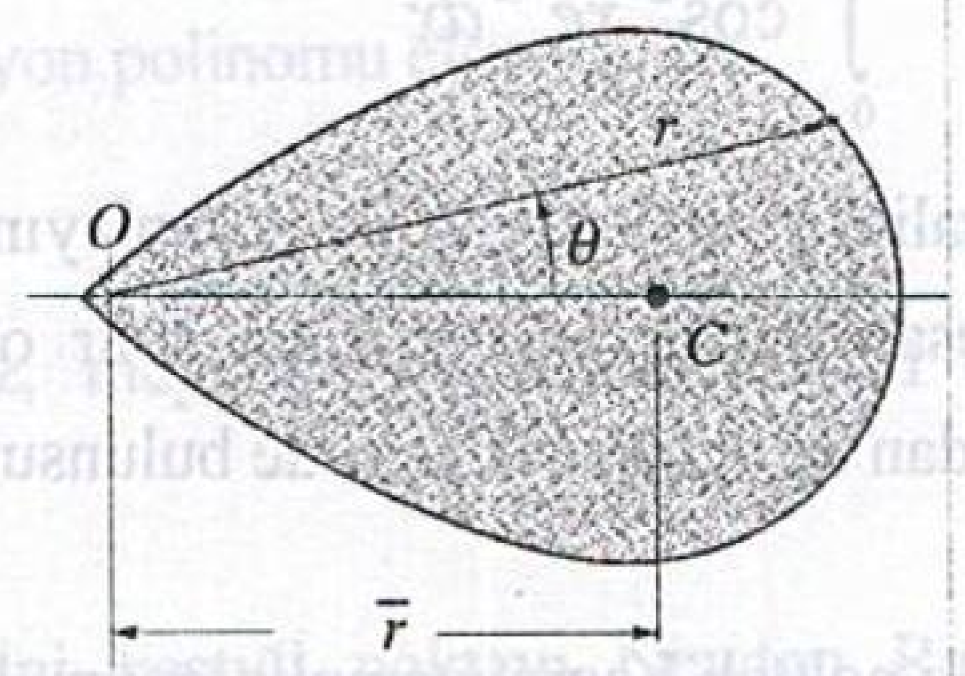
b) Aralığı 2, 4 ve 8 dilime bölerek Simpson kuralıyla hesaplayınız.

Mutlak ve izafi hataları bulunuz.

8.11: Şekildeki lemniskat eğrisinin oluşturduğu taralı alanın ağırlık merkezini hesaplayınız.

($a = 1$, $\theta = 45°$)

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$



8.12:

a) $\iint f(x,y)dx\,dy$ çift katlı integrali için x- yönünde yamuk, y-yönünde Simpson 1/3 kuralını uygulayarak bir integrasyon formülü bulunuz.

b) $\int_{x=0.1}^{0.7} \int_{y=-0.2}^{0.6} e^x \sin y\, dy\, dx$ integralini ve bağıl hatayı hesaplayınız

8.13: Aşağıdaki üç katlı integrali sayısal bir yöntemle alarak oluşan mutlak hatayı hesaplayınız.

$$\int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}(4x^2+y^2-4z)dxdydz$$

8.14: Aşağıdaki integrali açık integrasyon formülü kullanarak hesaplayınız. Oluşan mutlak ve izafi hataları belirtiniz.

$$\int_0^{\pi/2} \tan(\theta/2)d\theta$$

8.15: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{4}$

olduğuna göre verilen integrali sayısal bir yöntemle alarak hata mertebesini, mutlak ve izafi hataları hesaplayınız.

8.16: $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

olduğuna göre verilen integrali sayısal bir yöntemle alarak hata mertebesini, mutlak ve izafi hataları hesaplayınız.

MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİ

P8.1: Beşinci bölümde verilen P5.1 problemindeki tablo değerlerini kullanarak,

a) Borudan geçen debiyi Q= 2 π $\int_0^R$ (r.V) dr ifadesine göre bulunuz.

b) Borudaki ortalama hızı V_0= Q/(πR^2) ile hesaplayınız. Ortalama hızın gerçek değeri 3.956 m/s ise yapılan mutlak ve izafi hatayı bulunuz.

P8.2: Yayılı yükle yüklenmiş bir kirişin çeşitli noktalarında elde edilen kesme kuvvetleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	0	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75	0.90
f	80	50	20	-10	-30	-40	-40

a) *x*=0.3 `deki yayılı yükü (-*df/dx*) ve *f''* türevini merkezi farklarla bulunuz.

b) x=0.75 'deki eğilme momentini bulmak için kesme kuvvetinin 0'dan 0.75'e kadar integralini alınız.

P8.3: Problem P5.5'te verilen tablo değerleriyle (∫CdT) integralini 1000-1600 arasında sayısal bir yöntemle hesaplayınız. Aynı integrali Problem P5.5'te bulunan polinomun integrasyonu ile bulunuz. Sonuçlardan hangisinin daha hassas olduğunu irdeleyiniz.

P8.4: Problem P5.4'te verilen güneş kollektörünün yüzey alanı A= 150 000 cm^2 ise kollektörün 14 saat boyunca η=0.45 verimle toplayacağı ısı miktarını (Q= ∫ η q.A.dt) integrali ile Simpson metotlarından birini kullanarak hesaplayınız.

P8.5: Aşağıdaki tabloda su buharı yoğunluğunun (y, kg/m^3) basınç (P, bar) ve sıcaklığa (T,°C) bağlı olarak aldığı değerler verilmiştir.

P (bar)	T=200	T=300	T=400
1	0.46	0.38	0.32
3	1.39	1.14	0.99
5	2.35	1.91	1.62
7	3.33	2.69	2.27

a) P= 3 bar ve T= 300 °C için $\frac{\partial y}{\partial T}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$ ve $\frac{\partial^2 y}{\partial T^2}$ türevlerini sonlu fark formülleri ile hesaplayınız.

b) T= 300 °C için $\int_1^7 \frac{dP}{y}$ integralini Simpson kurallarından biri ile hesaplayınız.

P8.6: Problem P5.8'de verilen binaya gelen rüzgar yükü için;

a) Bileşke kuvveti $R = \int_0^{30} F dy$ ifadesine göre yamuk kuralıyla bulunuz.

b) Bileşke kuvvetin uygulama noktasını $\bar{y} = (\int_0^{30} y.F\,dy)/R$ ifadesine göre Simpson kurallarından biriyle hesaplayınız.

P8.7: Hata fonksiyonu

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

olarak bilindiğine göre *erf(1)* değerini yamuk ve Simpson 1/3 kuralı ile hesaplayınız, hata mertebelerini belirtiniz.

P8.8: Örnek 6.10'da açıklanan problem için

a) $\int^{12} T(x)dx$ integralini analitik olarak hesaplayınız.

b) Yukarıdaki integrali sayısal olarak hesaplayıp aradaki farkı yorumlayınız.

P8.9: İzotermal bir proseste elde edilebilir enerji f gerçek gazlar için

$$\ln \frac{f}{p} = \int_0^p \frac{Z-1}{p} dp.$$

ile verilebilir. Burada Z sıkıştırılabilme faktörü p ise basınçtır. Metan gazı için

p	Z	p	Z
1	0.9940	80	0.3429
10	0.9370	120	0.4259
20	0.8683	160	0.5252
40	0.7043	250	0.7468
60	0.4515	400	1.0980

değerleri ölçüldüğüne göre p ve Z değerlerini tablodan okuyup her basınca karşılık f değerini hesaplayan bir bilgisayar programı yazınız. Programı çalıştırarak basınca bağlı f değerlerini tablo halinde veriniz.

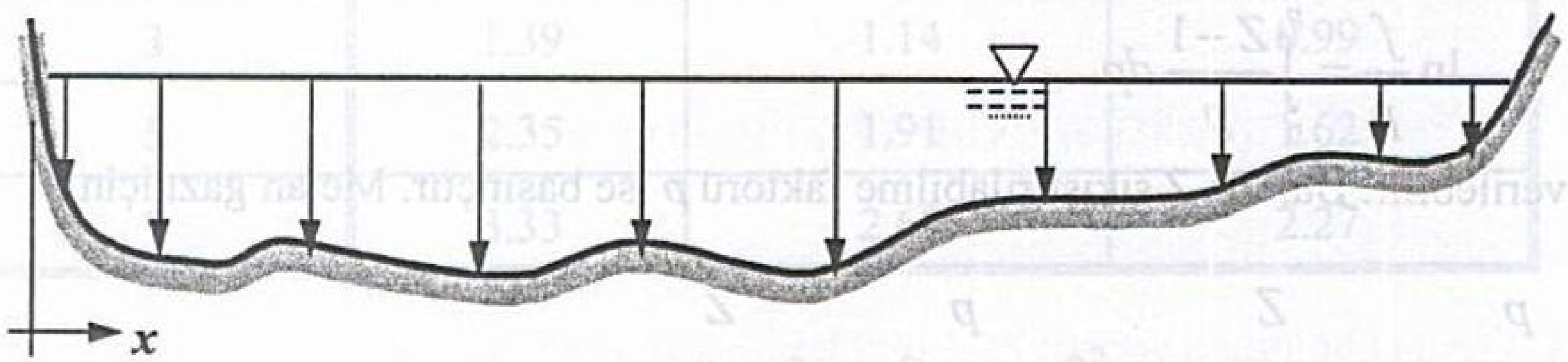
P8.10: Yarıçapı R = 50 cm olan bir boruda doğalgaz akmaktadır. Boru merkezinden değişik r uzaklıklarında ölçülen gaz hızları aşağıda tablo halinde verilmiştir.

r (m)	V (m/s)	r (m)	V (m/s)
0	50.0	0.30	43.0
0.05	49.5	0.35	40.5
0.10	49.0	0.40	37.5
0.15	48.0	0.45	34.0
0.20	46.5	0.475	25.0
0.25	45.0	0.50	0

a) Borudan geçen debiyi $Q = 2\pi\int_0^R (r.V)\,dr$ ifadesine göre bulunuz.

b)Borudaki ortalama hızı $V_0 = Q/(\pi R^2)$ ile hesaplayınız.

P8.11: Geniş bir nehrin debisi ölçülmek istenmektedir. Bu amaçla nehrin belli bir dik kesitine ait değişik konumlarda nehir yatağındaki su derinlikleri ve bu ölçüm konumlarında ortalama su hızları (derinliğin % 60'ına tekabül eden bir noktadaki hız yaklaşık ortalama hız olarak alınabilmektedir) ölçülmüş ve ölçüm sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

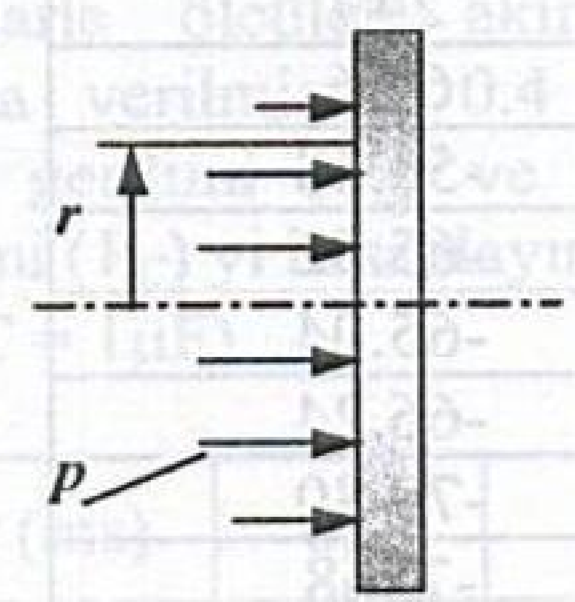


x (m)	2.0	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32	34
h (m)	1.0	2.5	2.3	3.0	2.4	2.6	1.8	1.5	1.3	0.8
V (m/s)	1.28	1.54	1.68	1.79	1.91	1.85	1.7	1.65	1.56	1.1

a) Nehir akış kesit alanını hesaplayınız.

b) Nehir ortalama debisini bulunuz.

P8.12: Hava akımına karşı tutulan 0.5 m çaplı dairesel bir disk üzerinde oluşan basınç dağılımı aşağıdaki tabloda verildiğine göre diske etkiyen direnç kuvvetini, hata mertebesi (h^4)' ten az olmayacak şekilde hesaplayınız.

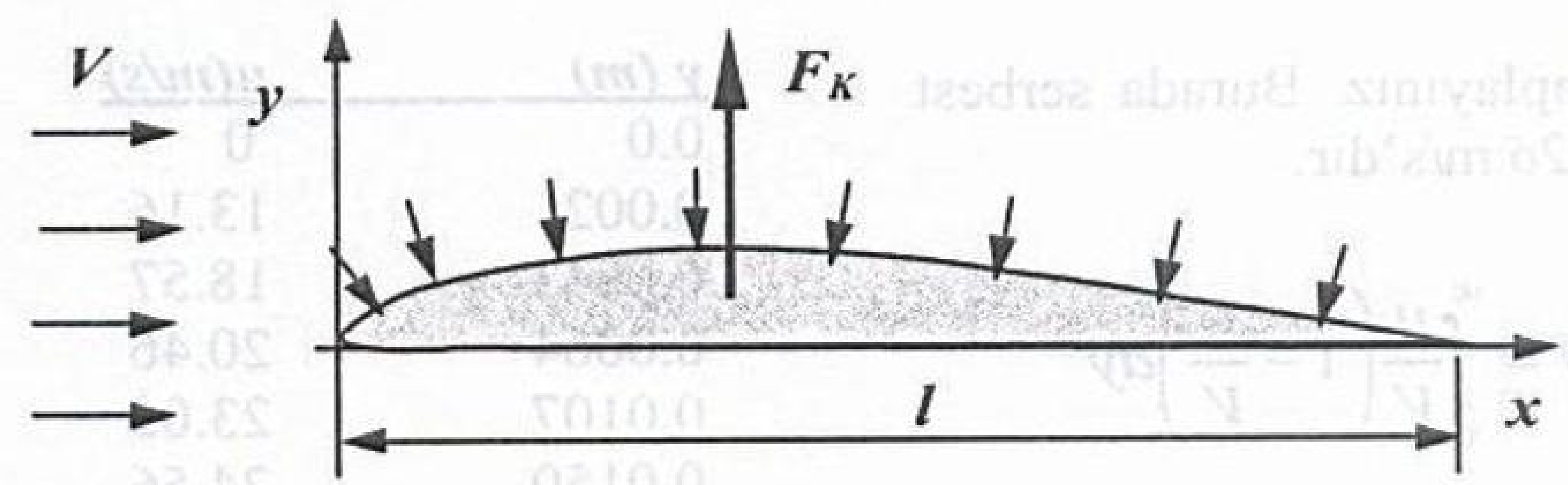


r (m)	$p(kN/m^2)$
0.0	6.34
0.05	6.28
0.10	6.06
0.15	5.72
0.20	5.10
0.25	4.78
0.30	4.37
0.35	3.89
0.40	3.41
0.45	2.74
0.50	0.78

P8.13: Alt yüzeyi düz olan şekildeki kanat profili üzerinde değişik noktalardan basınç ölçümleri yapılmıştır. Alt yüzeyde atmosfer basıncı olduğunu, kayma gerilmesi etkisinin ihmal edilebileceğini kabul ederek kanat üzerine gelen toplam kaldırma kuvvetini, birim derinlik başına

$$F_K = \int_{x=0}^{l} p\,dA$$

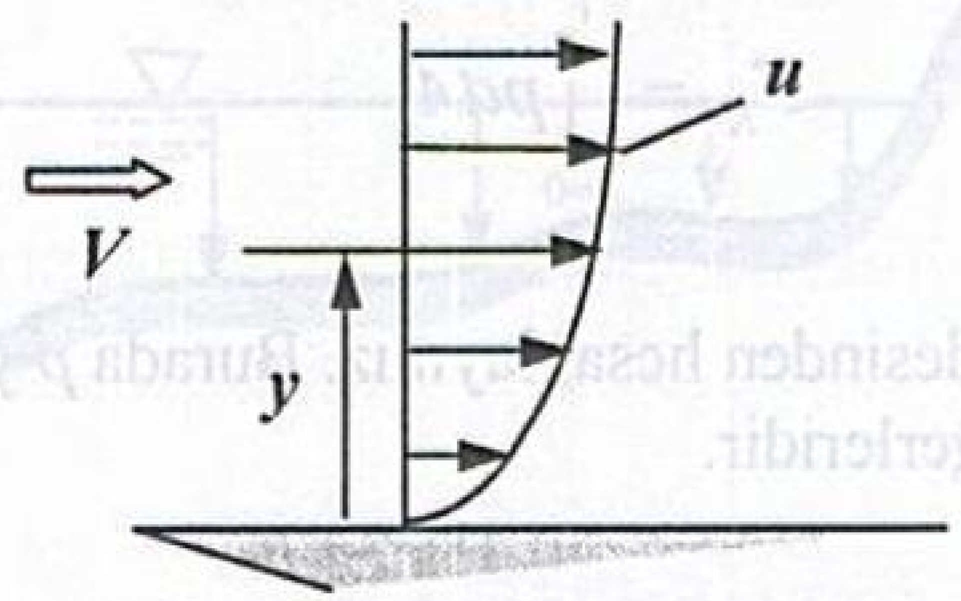
ifadesinden hesaplayınız. Burada p yüzeye dik olan ve atmosfere göre ölçülen basınç değerleridir.



x (%l)	y (%l)	p (N/m²)
0	0	240
2.5	3.72	6.96
5.0	5.30	-55.68
7.5	6.48	-65.52
10	7.43	-65.04
20	9.92	-66.24
30	11.14	-70.80
40	11.49	-7368
50	10.45	-7392
60	9.11	-46.80
70	6.46	-15.60
80	3.62	13.20
90	1.26	34.56
100	0	46.32

P8.14: Düz bir yüzey üzerindeki hava akımında, yüzeyden değişik y mesafelerinde ölçülen hava hızları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu değerleri kullanarak;

a) Sınır tabaka yer değiştirme kalınlığı olarak tanımlanan



$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy$$

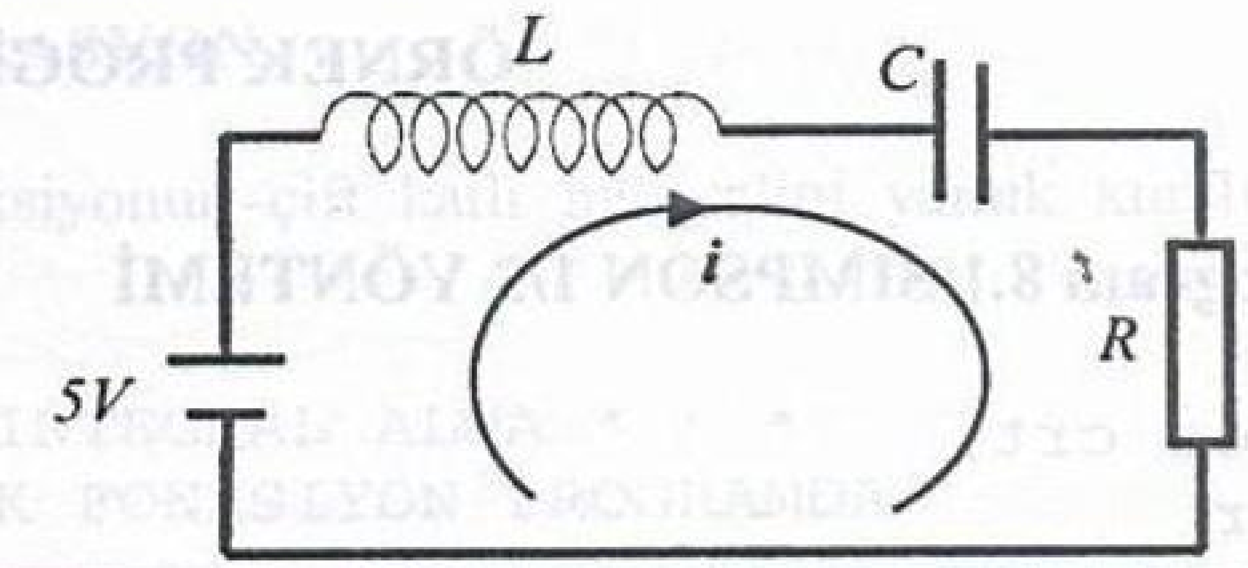
değerini hesaplayınız. Burada serbest akış hızı $V = 26$ m/s'dir.

b) $$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{V}\left(1 - \frac{u}{V}\right) dy$$

ifadesiyle tanımlanan momentum kalınlığını bulunuz.

y (m)	u(m/s)
0.0	0
0.0021	13.16
0.0043	18.57
0.0064	20.46
0.0107	23.05
0.0150	24.56
0.0193	25.38
0.0236	25.73
0.0268	25.90
0.0293	25.96

P8.15: Şekildeki devrede 0.1 ms aralıklarla ölçülen akım değerleri tabloda verilmiştir. 0.4 ms anında bobin gerilimi (V_L) ve kondansatör gerilimi (V_C) yi hesaplayınız. (L = 100 mH, C = 1μF)



t (ms)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.04	0.5	0.6
i (mA)	0	1.44	2.96	4.48	5.86	7.28	8.72

P8.16: Eşit aralıklı olmayan n tane nokta için yamuk kuralı ile integrasyon yapan bir program yazınız.

P8.17: Program 8.1'i Simpson 3/8 yöntemine dönüştürünüz.

P8.18: Program 8.2, verilen bir fonksiyonun çift katlı integralini almaktadır. Programı, tablo halinde verilen değerleri okuyup integrasyon işlemini yapan bir program haline dönüştürünüz.