1

$X = ai + bj$

$Y = ci + dj$

Scaler çarpım.

$X.Y = ac + bd$

Karterzyen çarpım

$X \times Y = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = adi - bcj$

$f = ai + bj + cK$

$G = di + ej + fK$

$f.G = ad + be + cf$

$f \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

$= i\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$= (bc - ec)i - (af - dc)j + (ae - bd)K$

Örnek:

$f = 3i + 5j$

$G = 8i + 9j$

$f.G = ?$ $\quad f \times G = ?$

$f.G = 3 \times 8 + 5 \times 9 = 24 + 45 = 69$

$f \times G = \begin{vmatrix} i & j \\ 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \times 9i - 5.8j$

$= 27i - 40j$

$f = 2i + 4j + 5K$

$G = 6i + 7j + 8K$

$f.G = 12i + 28j + 40K$

$f \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} k$

$= (32 - 35)i - (16 - 30)j + (14 - 24)K$

$= -3i + 14j - 10K$

$f = ai + bj + cK$

$||f|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

f'nin normu denir

$f = 3i + 4j$

$||f|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$f = 2i + 3j + 4K$

$||f|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = 5.38$

$f \cdot G = 0$ ise f ve G bir birine dikdir denir.

(dik = ortagonal)

$f = 3i + 4j$

$G = 5i - 3.75\,j$

$f \cdot G = 3 \times 5 - 4 \times 3.75 = 0$

f ve G dikdir.

$f = 3i + 4j + 5k$

$G = 6i + 7j - \frac{46}{5}k$

$f \cdot G = 18 + 28 - 46 = 0$

f ve G dikdir.

İkinci mertebeden bir determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

sayısıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.(-2) = 3 + 8 = 11$$

olur. Üçüncü mertebeden bir determinantın açılımı

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ÖRNEK : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (12 + 5) - 2\,(0 - 10) + 3\,(0 - 8) = 13.$

Üçüncü mertebeden determinantlar **Sarrus kuralı** denilen yöntemle de hesaplanabilir. Bunun için birinci ve ikinci kolondaki sayılar determinantın sağına yazılır. Aşağıda belirtilen şekilde hesaplanır.

$$c_1 b_2 a_3 \quad c_2 b_3 a_1 \quad c_3 b_1 a_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$$

$$a_1 b_2 c_3 \quad a_2 b_3 c_1 \quad a_3 b_1 c_2$$

$$\Delta = \left(a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2\right) - \left(c_1 b_2 a_3 + c_2 b_3 a_1 + c_3 b_1 a_2\right).$$

ÖRNEK : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (0 + 4 + 12) - (0 + 1 + 30) = 16 - 31 = -15.$

$$: \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) - j\,(u_1 v_3 - u_3 v_1) + k\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,i + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,k$$

(a) $u = (1, -2, 5)$, $v = (-3, 1, 2)$ vektörleri için $u \times v$ vektörünü bulunuz.

Çözüm :

(a) $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 5)\,i - (2 + 15)\,j + (1 - 6)\,k$

$= -9i - 17j - 5k$

olur.

TEOREM

$u \times v$ vektörü hem u, hem v vektörüne diktir.

Vektörler ve Parametrik denklemler

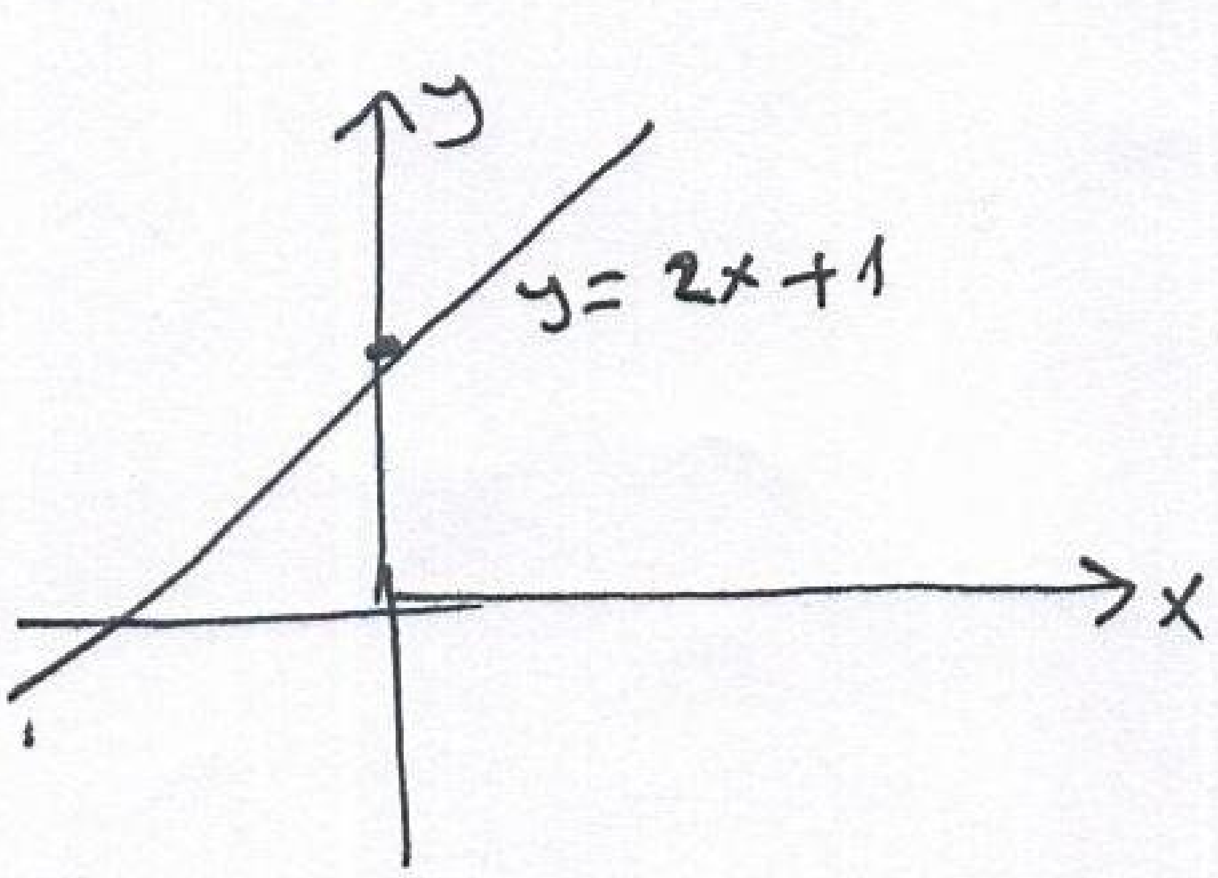
$x = t+1, \quad y = 2t+3$

$\downarrow$

$t = x-1$

$y = 2t+3 = 2(x-1)+3$
$= 2x+1$

$y = 2x+1$



Bu doğru denklemi Parametrik ifadelerle

$r(t) = (t+1)\,i + (2t+3)\,j$

şeklinde ifade edilir.

t	x	y	$r(t)$
0	1	3	$i+3j$
1	2	5	$2i+5j$
5	6	13	$5i+13j$
-1	0	1	$0i+j$
-1.5	-0.5	0	$-0.5i+0j$
100	101	203	$100i+203j$

$r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$

şeklindeki vector genelde düzlemde bir eğri belirler.

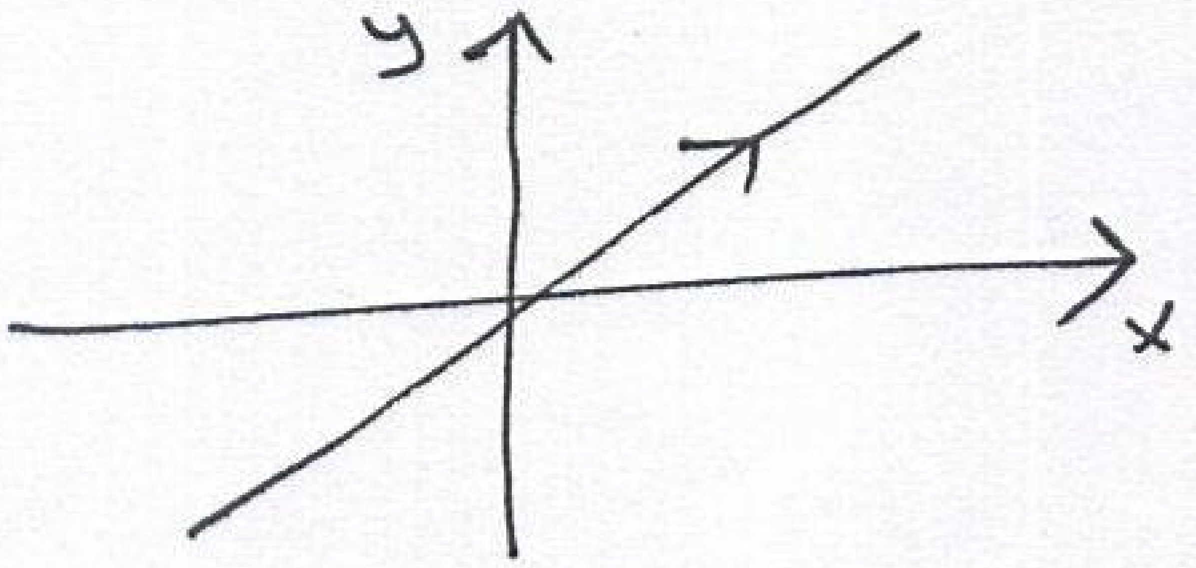
Eğer $x(t)$ ve $y(t)$ sadece t li terimler içeriyorsa bu bir doğru denklemidir

$r(t) = (t+8)\,i + (10t+20)\,j$
doğru

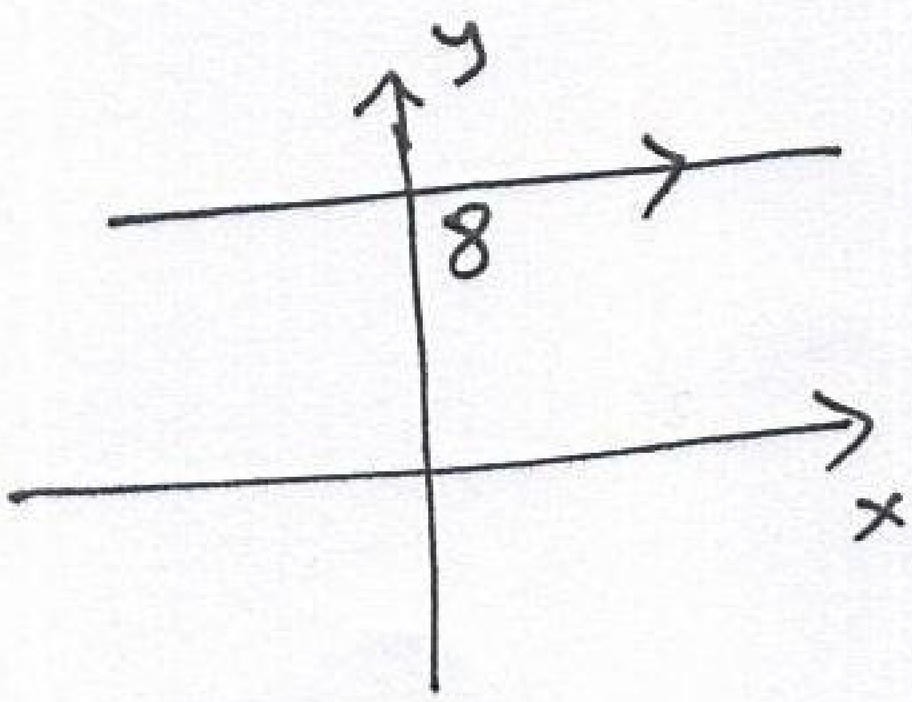
$r(t) = t\,i + t^2 j \rightarrow$ eğri

Örnekler

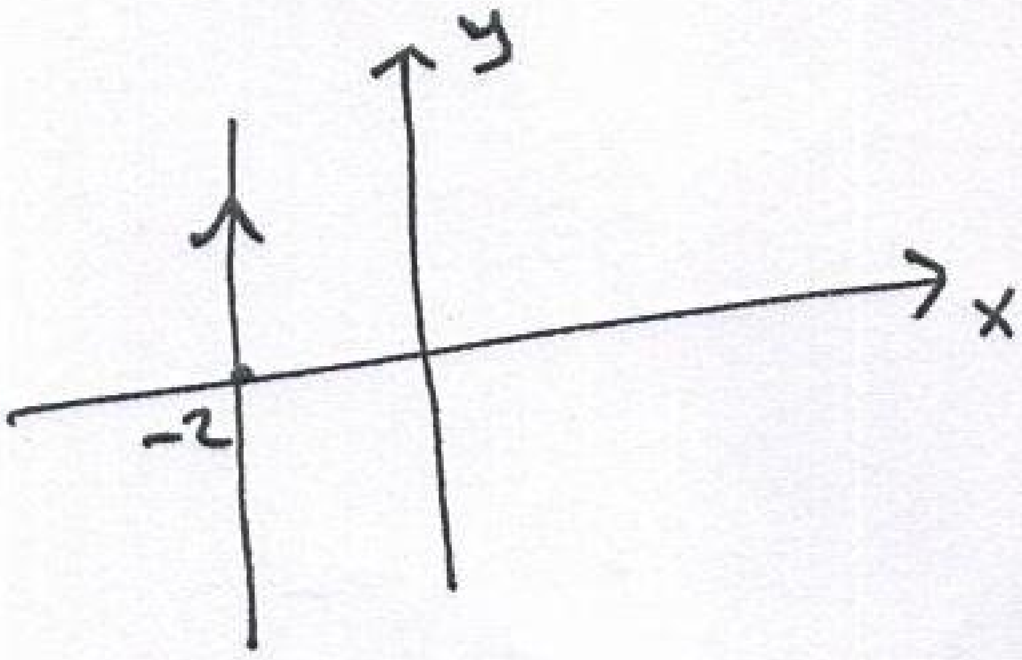
$r(t) = ti + tj$



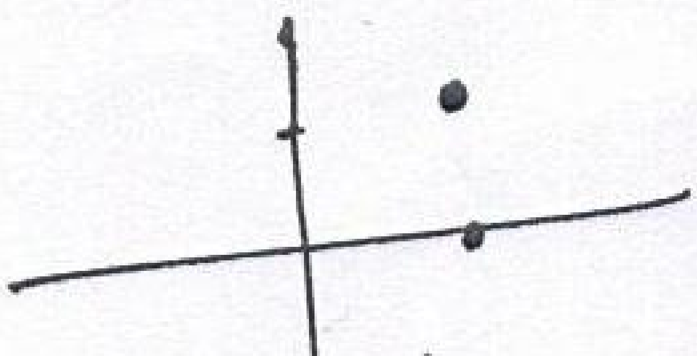
$r(t) = ti + 8j$



$r(t) = -2i + tj$

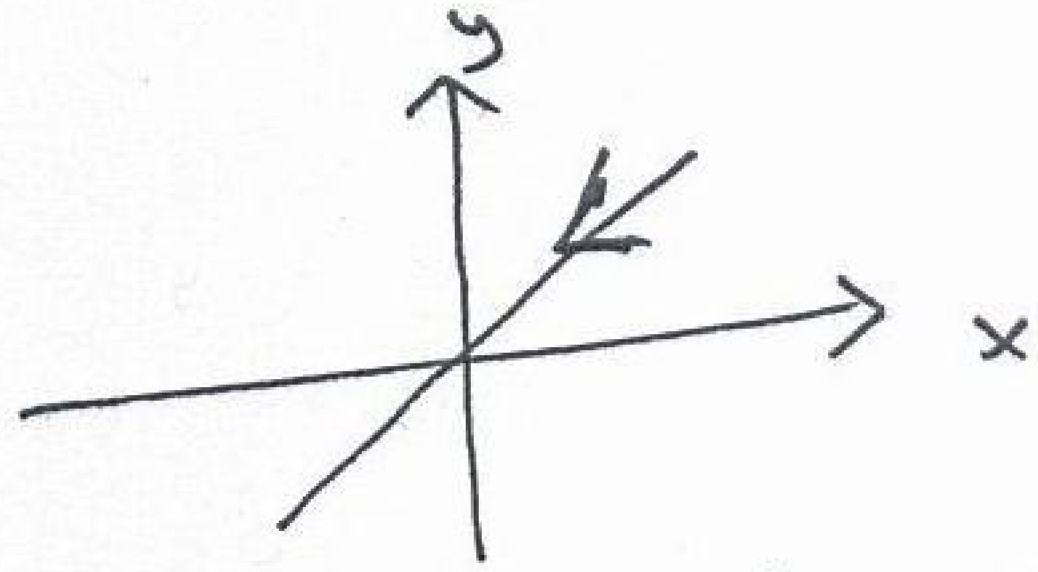


$r(t) = 3i + 4j$



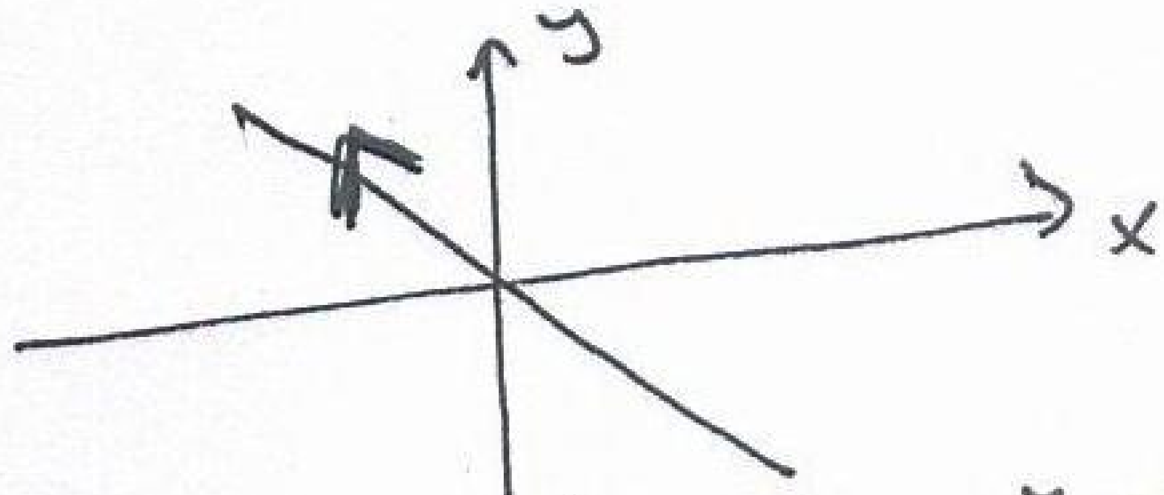
Bir noktadır.

$r(t) = -ti - tj$



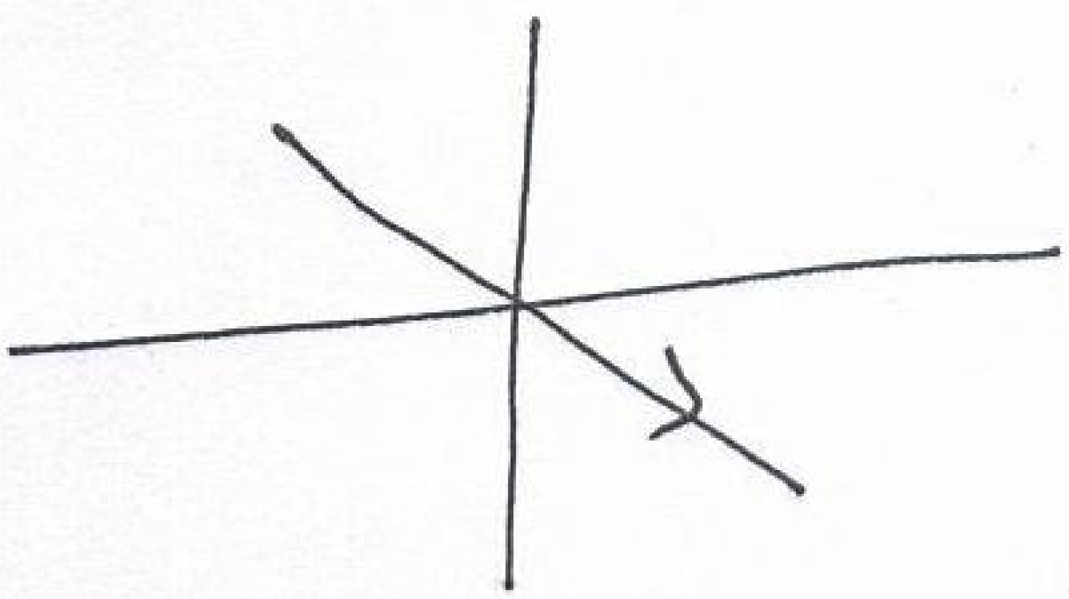
t artarken x azalır y azalır

$r(t) = -ti + tj$



t artarken x azalır y artar

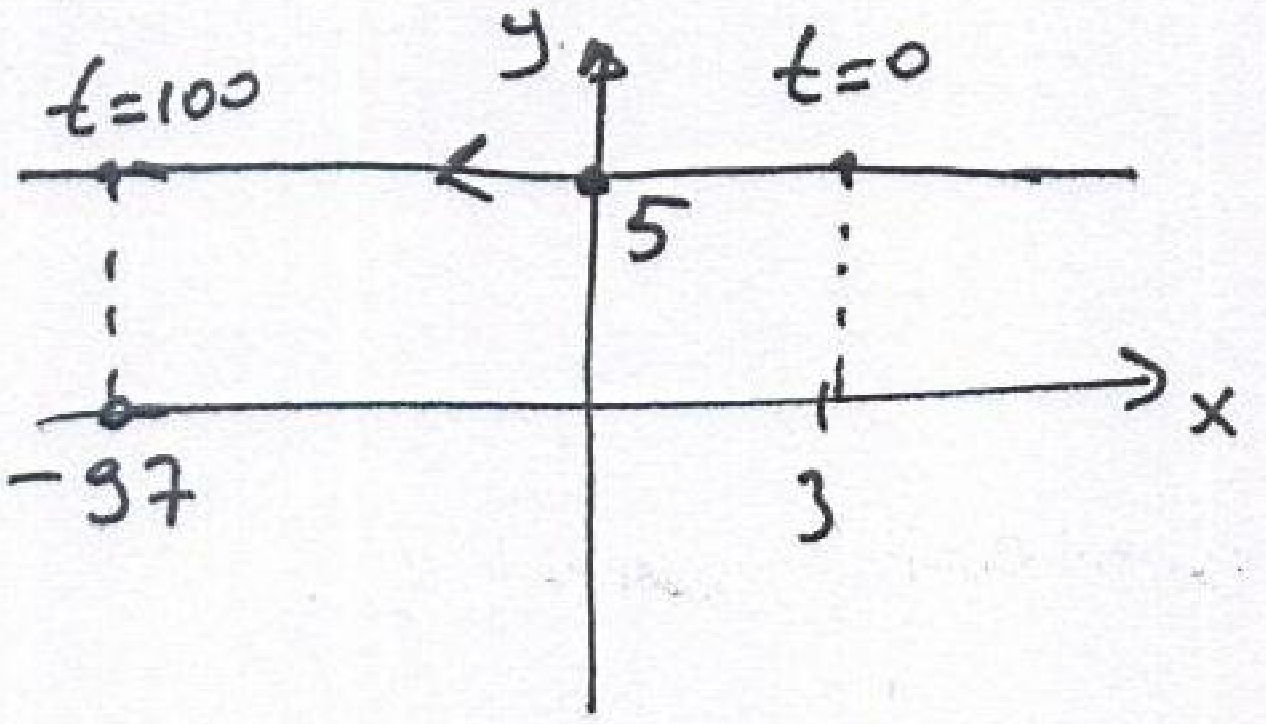
$r(t) = ti - tj$



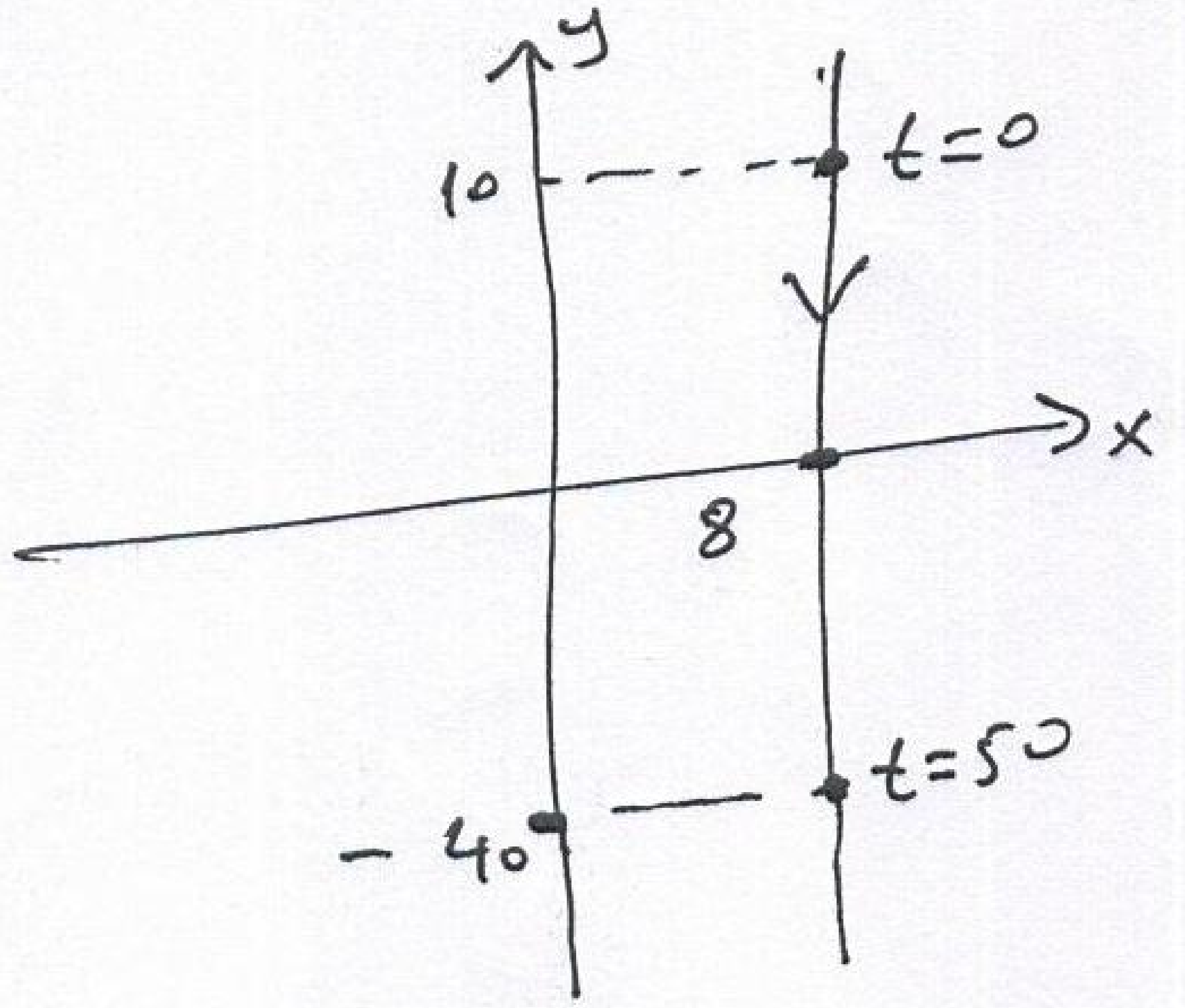
t artarken x artar y azal

t	x	y	r(t)
0	0	0	0
1	1	-1	$i - j$
2	2	-2	$2i - 2j$
3	3	-3	$3i - 3j$

$r(t) = (3-t)\,i + 5\,j$

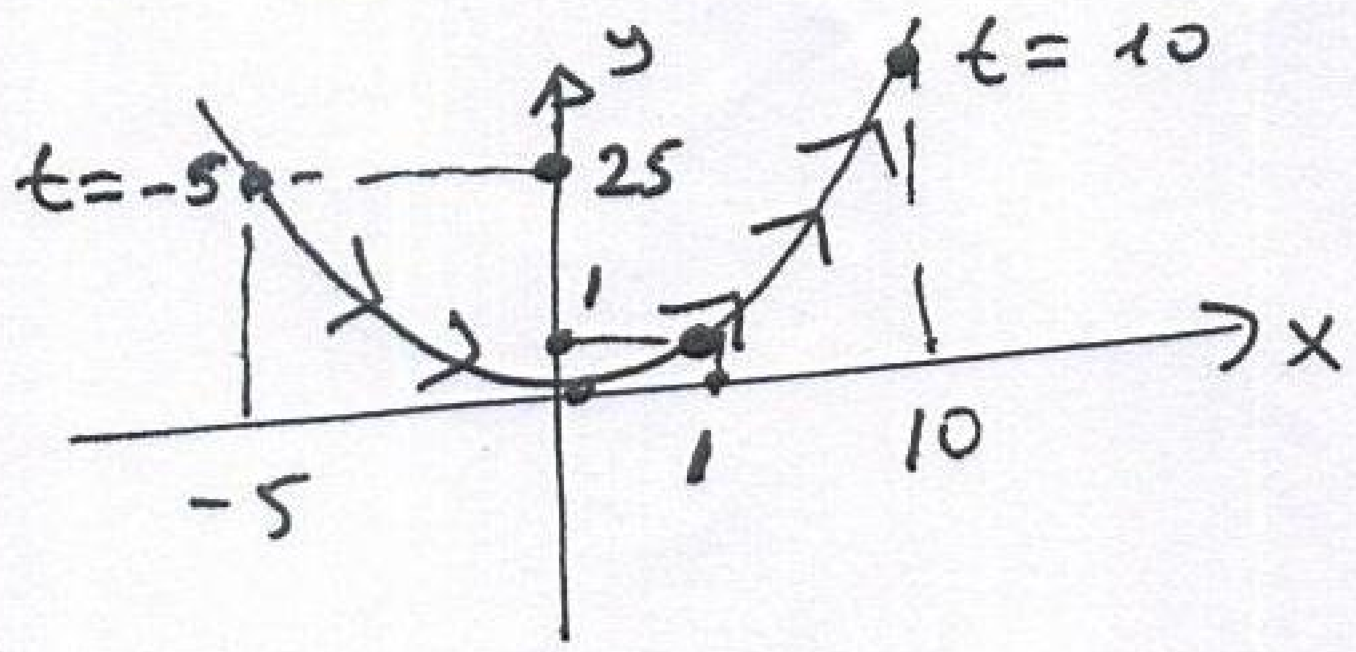


$r(t) = 8\,i + (10-t)\,j$

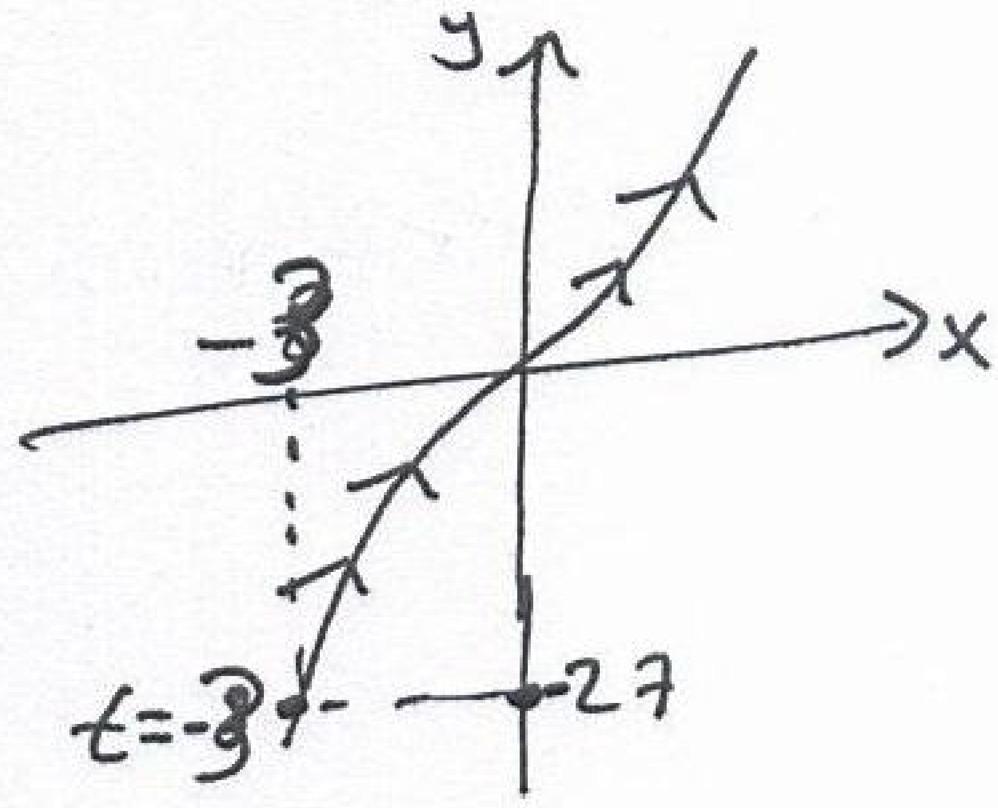


$r(t) = t\,i + t^2\,j$ $\quad (y = x^2)$

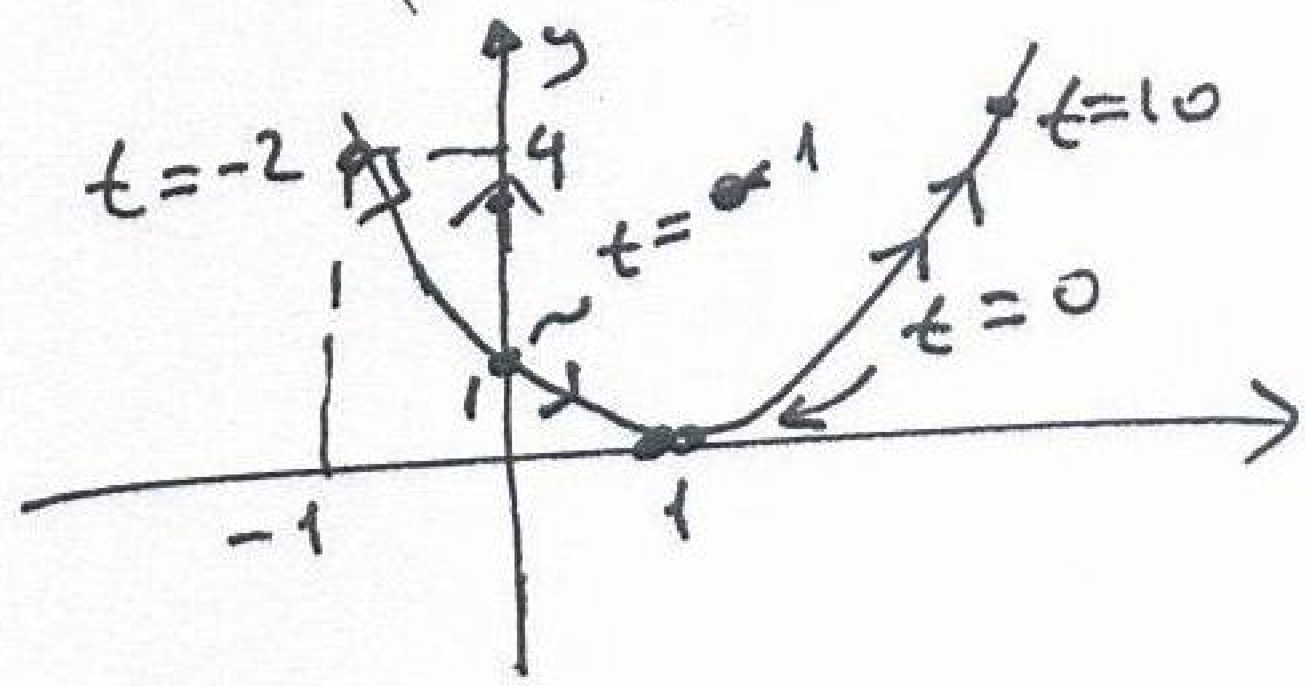
Bir paraboldür



$r(t) = t\,i + t^3\,j$



$r(t) = (t+1)\,i + t^2\,j$



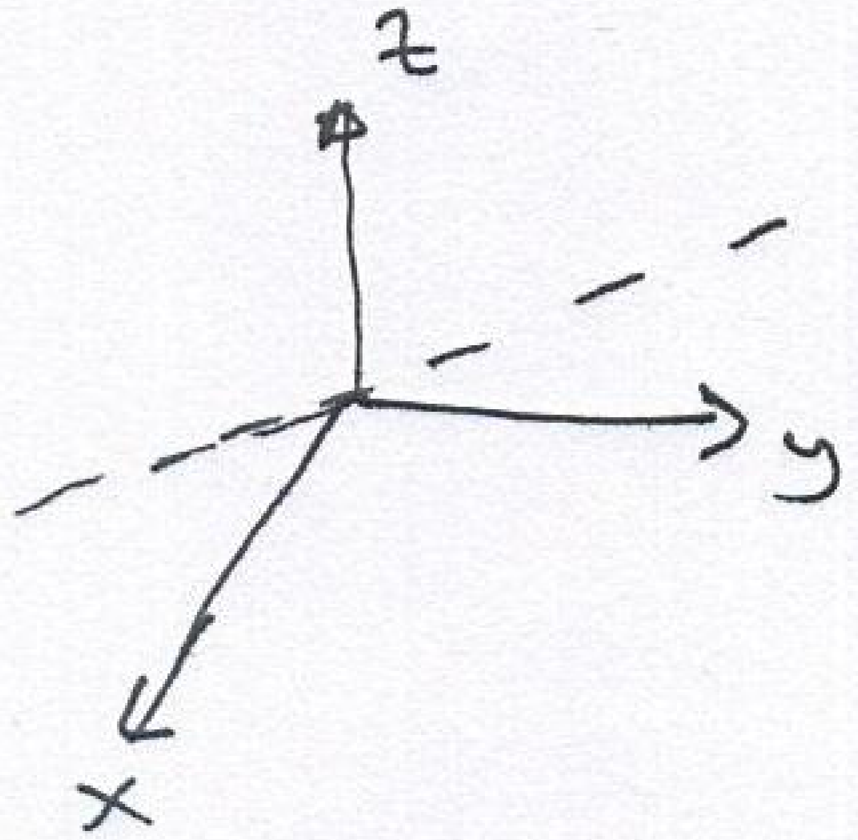
t	x: $t+1$	y: t^2	$r(t)$
-2	-1	4	$-1i+4j$
-1	0	1	$0\cdot i+j$
0	1	0	$i+0$
1	2	1	$2i+j$
5	6	25	$6i+25j$

$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)K$

Uzayda bir eğridir

$r(t) = ti + tj + tK$

Bir doğrudur



$r(t) = ti + t^2 j + tK$

Bir paraboldür

$|r(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$

olarak tanımlanır.

Örnek

$r(t) = ti + (2t+1)j + 8K$

$|r(t)| = \sqrt{t^2 + (2t+1)^2 + 8^2}$

$\frac{dr}{dt} = r' = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}K$

$r(t) = 8t^2 i + (t+8)j + 12t^2 K$

$r' = 16t\,i + j + 24t\,K$

$|r'| = \sqrt{(16t)^2 + 1^2 + (24t)^2}$

Örnek problem

$r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j$

$r'(t) = ?$ $|r(t)| = ?$ $|r'(t)| = ?$

$r(t)$ yi çizin.

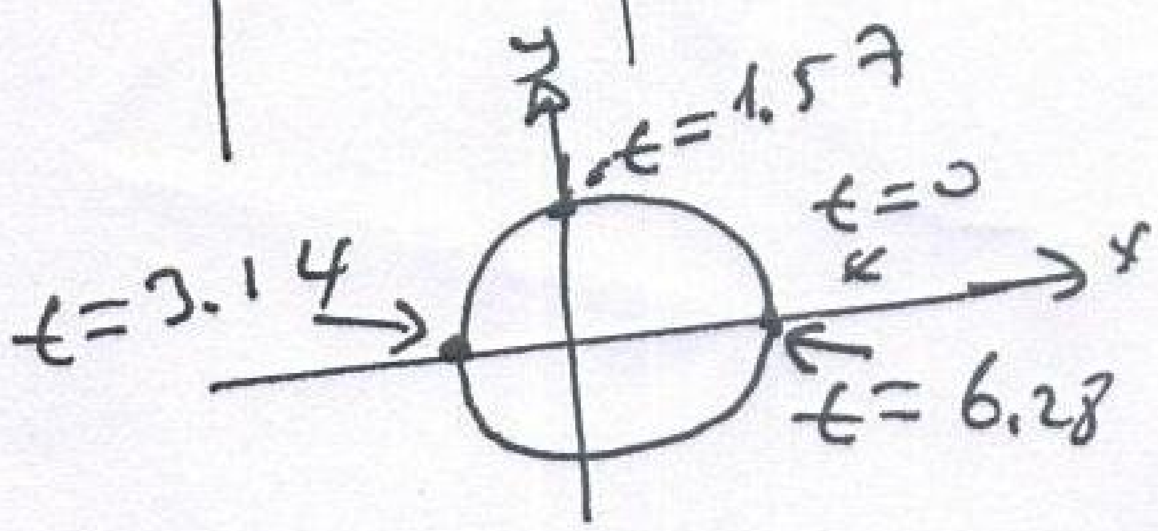
Çözüm

$r'(t) = -\sin t\, i + \cos t\, j$

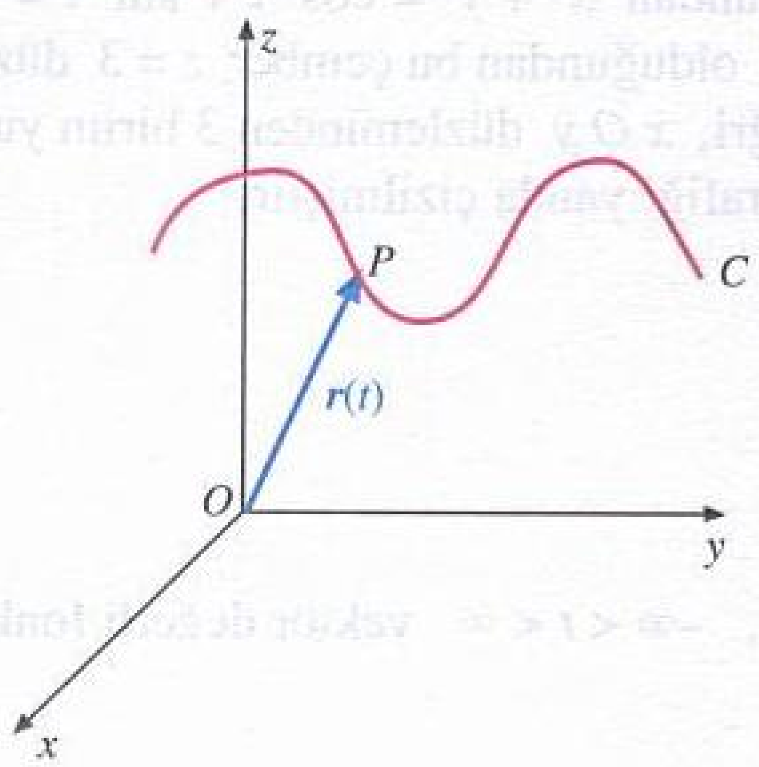
$|r(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

$r'(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

t	x cos t	y sin t	r(t)
0	1	0	i+0
0,5		1	0+j
1,57	0		
⋮			



12.3 EĞRİLER



$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b \tag{12.1}$$

biçiminde sürekli bir vektör değerli fonksiyon verildiğinde, $[a, b]$ aralığındaki her bir t için üç boyutlu uzayda bir $P(x(t), y(t), z(t))$ noktası karşılık gelir. t parametresi $[a, b]$ aralığını taradığında P noktası da bir C eğrisi oluşturur. Bu nedenle (12.1) biçimindeki bir ifadeye C eğrisinin bir **parametrik gösterimi** denir. (12.1) deki gösterim

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \;, \quad a \le t \le b \\ z = z(t) \end{cases}$$

biçiminde de yazılabilir. Bir uzay eğrisi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad a \le x \le b \tag{12.2}$$

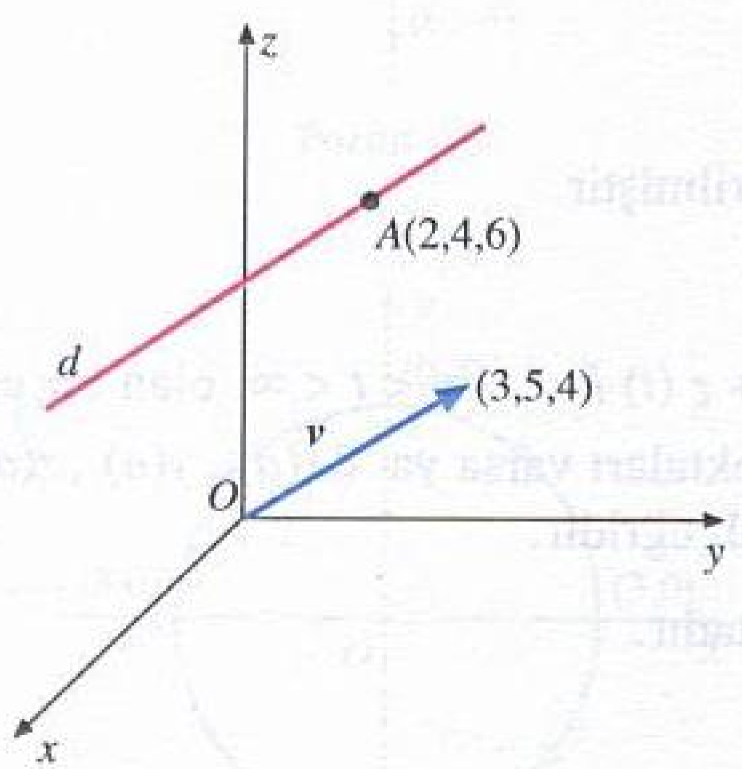
veya

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{12.3}$$

biçiminde de temsil edilebilir. Gerçekten (12.2) de $x = t$ denirse $y = f(t)$ ve $z = g(t)$ olur. Bu gösterim

$$\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + f(t)\,\boldsymbol{j} + g(t)\,\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

biçiminde, yani (12.1) formunda yazılabilir. (12.3) deki herbir denklem bir yüzey gösterir. Sözkonusu eğri bu iki yüzeyin arakesiti olan eğridir.

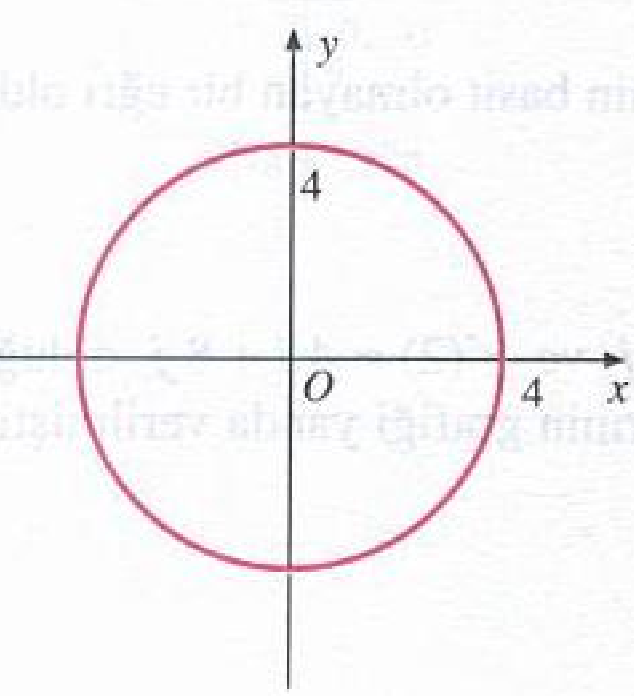


ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = (2 + 3t)\,\boldsymbol{i} + (4 + 5t)\,\boldsymbol{j} + (6 + 4t)\,\boldsymbol{k}$ denklemli eğrisinin cinsini belirtip grafiğini çiziniz.

Çözüm : Verilen denklem

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = t \\ \dfrac{y-4}{5} = t \\ \dfrac{z-6}{4} = t \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{4}$$

biçiminde yazılabileceğinden verilen denklem $A(2, 4, 6)$ noktasından geçen ve $\boldsymbol{v} = (3, 5, 4)$ vektörüne paralel olan bir doğrudur. Bu doğrunun grafiği yanda çizilmiştir.



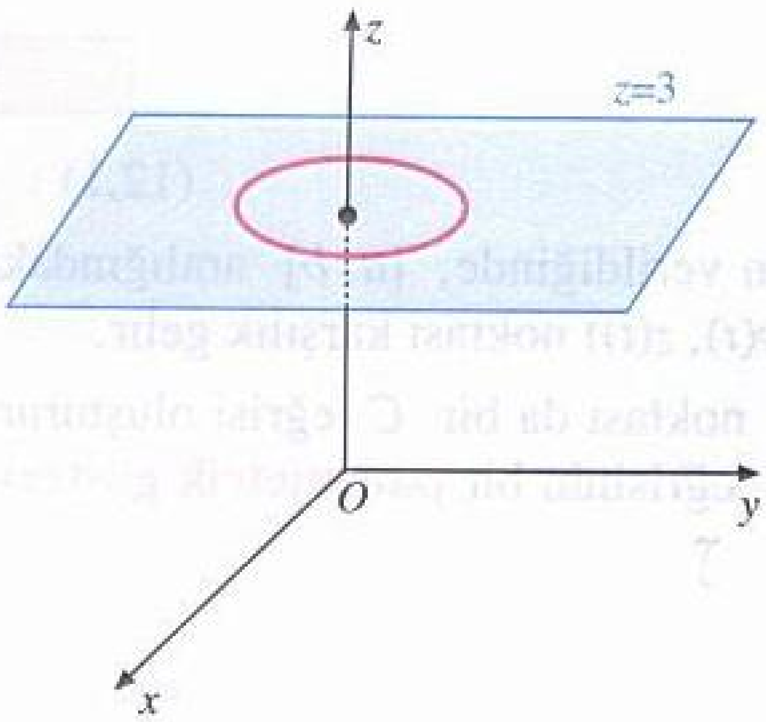
ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\,\boldsymbol{i} + 4\sin t\,\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm : $\boldsymbol{k}$ vektörünün katsayısı sıfır olduğundan, eğri $x\,O\,y$ düzleminde bir eğridir.

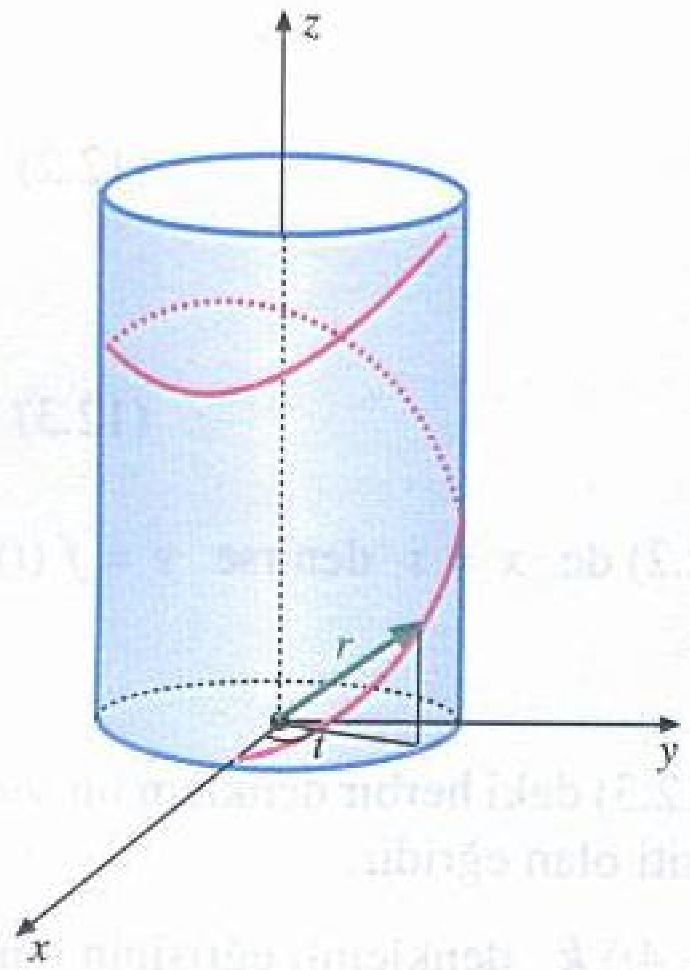
$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

olacağından verilen eğri bir merkezil çemberdir.



ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\, \boldsymbol{i} + \sin t\, \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $0 \le t \le 2\pi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm : $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 3$ olduğundan $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olur. Bu yarıçapı 1 olan bir çemberdir. $z = 3$ olduğundan bu çember $z = 3$ düzlemi üzerindedir. O halde denklemi verilen eğri, $x\,O\,y$ düzleminden 3 birim yukarıda bulunan bir çemberdir. Bu çemberin grafiği yanda çizilmiştir.



ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\, \boldsymbol{i} + 2\sin t\, \boldsymbol{j} + 4t\, \boldsymbol{k}$, $-\infty < t < \infty$ vektör değerli fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

olduğundan eğrinin $x\,O\,y$– düzlemindeki izdüşümü bir çemberdir. $z = 4t$ olduğundan t büyüdükçe z büyür. Bu eğri yandaki şekilde gösterilmiştir. İzdüşüm bir çember olduğundan bu eğriye bir **dairesel helis** adı verilir.

TANIM

Bir eğri kendi kendisini kestiğinde, arakesit noktalarına eğrinin **katlı noktaları** denir. Kendini kesmeyen eğrilere **basit eğriler** denir.

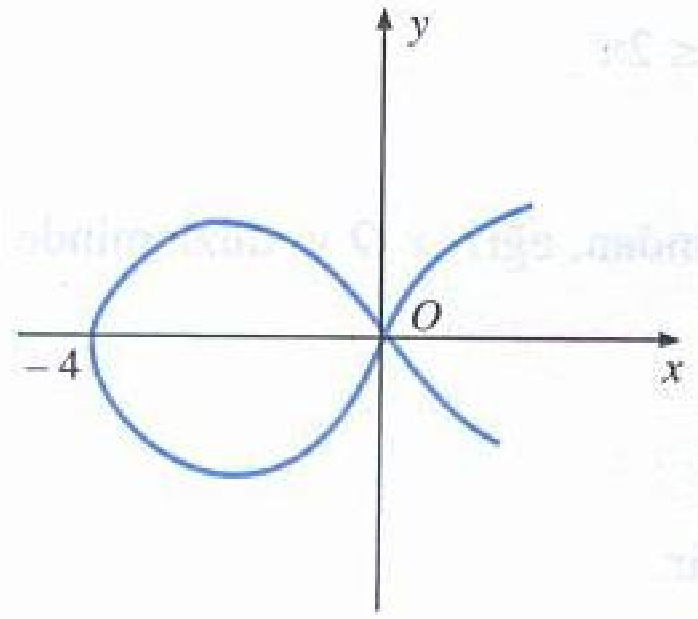
Basit eğriler

Basit olmayan eğriler

Yanda bazı basit ve basit olmayan eğriler verilmiştir.

Parametrik denklemi $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\, \boldsymbol{i} + y(t)\, \boldsymbol{j} + z(t)\, \boldsymbol{k}$, $-\infty < t < \infty$ olan bir eğri için $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$ olacak şekilde a ve b noktaları varsa ya $(\,x(a)\,, y(a)\,, z(a)\,)$ noktası bir katlı noktadır, ya da eğri bir kapalı eğridir.

Ayrıca $\boldsymbol{r}'(a) \ne \boldsymbol{r}'(b)$ ise nokta bir katlı noktadır.



ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 4)\, \boldsymbol{i} + (t^3 - 4t)\, \boldsymbol{j}$ eğrisinin basit olmayan bir eğri olduğunu gösterip katlı noktalarını bulunuz.

Çözüm : $r(-2) = r(2) = 0$, $r'(-2) = -4\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$ ve $r'(2) = 4\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$ olduğundan $O(0,0)$ noktası eğrinin bir katlı noktasıdır. Eğrinin grafiği yanda verilmiştir.

$$F(t) = a(t)\,i + b(t)\,j + c(t)\,K$$

$$f'(t) = \frac{da}{dt} i + \frac{db}{dt} j + \frac{dc}{dt} K$$

$$= a'(t)\,i + b'(t)\,j + c'(t)\,K$$

$$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$ teğet vector

$$= \frac{a'(t)\,i + b'(t)\,j + c'(t\ldots}{\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2 + c'(t\ldots}}$$

$$f = t^2 i + t^3 j + (t+10) K$$

$$T(t) = ?$$

$$f'(t) = 2t\,i + 3t^2 j + K$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 1}$$

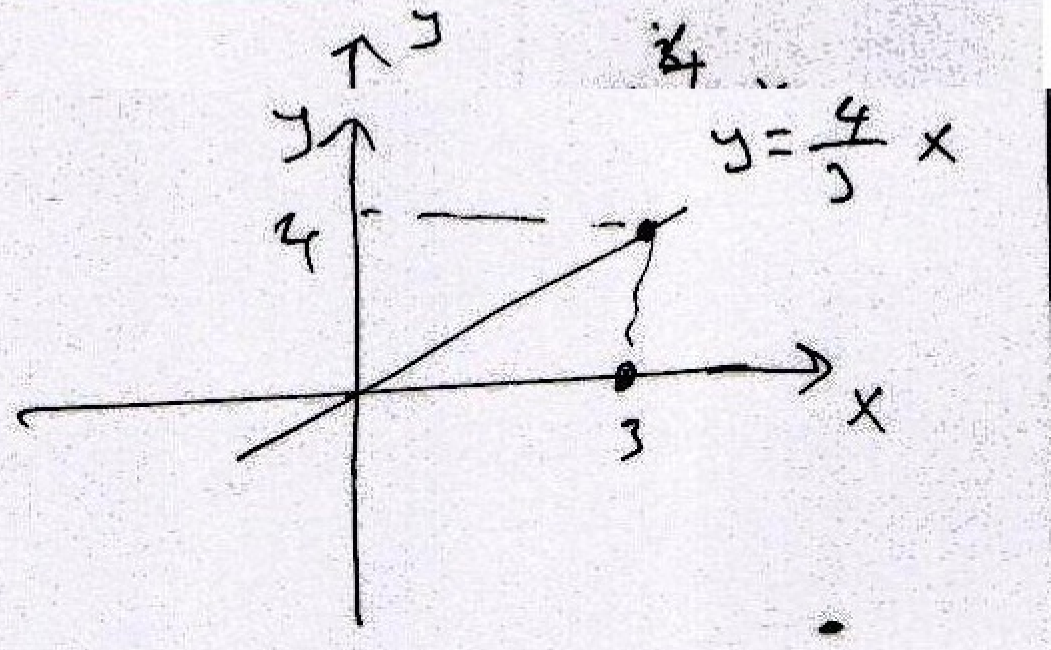
$$T(t) = \frac{2t}{\sqrt{4t^2+9t^4+1}}\, i + \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+9t^4+1}}\, j + \frac{1}{\sqrt{4t^2+9t^4+1}}\, K$$

Eğri Uzunluğu

$$f = a(t)\,i + b(t)\,j + c(t)\,K$$

$$L = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$$

f(t) nin a-dan b-ye kadarki uzunluğunu verir



$$F(t) = t\,i + \frac{4}{3} t\, j$$

x=0 dan x=3 e kadar olan uzunluğu hesaplayın.

$$x = t \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=3 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

t=0 dan t=3 e kadar uzun

$$f(t) = t\,i + \frac{4}{3} t\, j$$

$$f'(t) = i + \frac{4}{3} j$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$L = \int_{t=0}^{t=3} \frac{5}{3}\, dt = \frac{5}{3} t \Big|_0^3 = 5$$

ÖRNEK : $F(t) = (t + t^2)\, i + e^{2t} j + \sin t\, k$ fonksiyonunun $t_o = 0$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

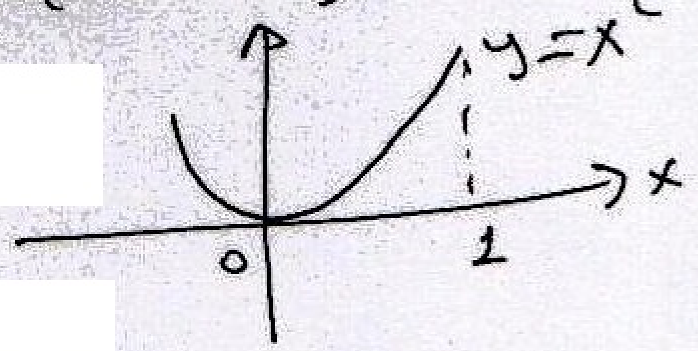
Çözüm : $f(t) = t + t^2 \Rightarrow f'(t) = 1 + 2t \Rightarrow f'(0) = 1,$

$g(t) = e^{2t} \Rightarrow g'(t) = 2e^{2t} \Rightarrow g'(0) = 2.$

$h(t) = \sin t \Rightarrow h'(t) = \cos t \Rightarrow h'(0) = 1$

$$F'(0) = i + 2j + k$$

1. Örnek



x=0 da x=1 e kadar eğrinin uzunluğunu hesaplayın.

$$\mathbf{r}(t) = t\,i + t^2\,j$$

$$x = t \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$r'(t) = i + 2t\,j$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}$$

$$L = \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$\boxed{\int \sqrt{a+cx^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a+cx^2} + \frac{1}{2}a\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{Ln}\left(x\sqrt{c} + \sqrt{a+cx^2}\right)\right]}$$

$$\int \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{4}}\mathrm{Ln}\left(t\sqrt{4} + \sqrt{1+4t^2}\right)\right.$$

$$\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\mathrm{Ln}\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{1} =$$

Bir fonksiyonun Bir Eğri Üzerinde integrali

$f(x,y,z) = 2x^2 y z^3 + e^{xy}$ fonksiyonunun $r(t) = (t^2+5)i + (3t-8)j + (t^3-9)k$ eğrisi üzerinde $t=2$ den $t=10$'a kadar integrasyonunu hesaplayın.

Tanım 1)

$$\boxed{\int_{t=a}^{t=b} f[x(t), y(t), z(t)]\, \|r'(t)\|\, dt}$$

Örnek $f(x,y,z) = 8x + y + 10z$ yi $r(t) = 4t\,i + (2t+1)\,j + (\sqrt{5}\,t+4)\,k$ eğrisi üzerinde $t=0$ dan $t=10$'a kadar integrasyonunu hesaplayın.

$$\int f(x,y,z)\, dl = \int_{t=0}^{t=10} (8x+y+10z)\, \|r'(t)\|\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{10} 8(4t) + (2t+1) + 10(\sqrt{5}\,t+4) \cdot \sqrt{4^2+2^2+\sqrt{5}^2}\, dt$$

Not: $r(t) = 4t\,i + (2t+1)\,j + (\sqrt{5}\,t+4)\,k$

$r'(t) = 4i + 2j + \sqrt{5}\,k$

$$= \int_{t=0}^{10} (32\,t + 18\,t + 9 + 10\sqrt{5}\,t + 10).5.\,dt$$

$|r'\,t|$

$$= 5\int_{0}^{10} [(32 + 18 + \sqrt{5})t + 9 + 10]\,dt$$

$=$

Balcı - 182 - 183

Bu tip integrolleri hesaplamak her zaman kolay olmaz.

mesela $f(x,y,z) = x^2 y z^3$

$r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k$ olsa

$r'(t) = i + 2t\,j + 3t^2 k$

$|r'(t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (3t^2)} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

$$\int x^2 y z^3\, |r'(t)|\,dt = \int t^2 (t^2)(t^3)^3 \sqrt{}\, dt$$

$$= \int t^{13} \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\, dt$$

Kolay bir integral değil.

182 - 83 - 84 - 85 - 86

Tanım 12.

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

Örnek $f(x,y) = x+y^2$ fonksiyonu $y = 2x+1$ doğrusu boyunca $x=1$ den $x=2$ ye kadar integrasyonun hesaplayın.

$$\int_{x=1}^{x=2} (x+y^2)\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad \text{Not } \begin{array}{l} y = 2x+1 \\ y' = 2 \end{array}$$

$$= \int_{x=1}^{2} (x+y^2)\sqrt{1+2^2}\,dx = \int_{1}^{2} \{x+(2x+1)^2\}\sqrt{5}\,dx$$

$$= \sqrt{5}\int_{1}^{2} (x+4x^2+4x+1)\,dx = \sqrt{5}\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+x\right)\Big|_{1}^{2} = 39.87$$

Bu integrali parametrik integrale çevirerekde hesaplayabiliriz.

$f(x,y) = x+y^2 \qquad r(t) = ti + (2t+1)j$

$r' = i+2j \qquad |r'| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$$\int_{t=1}^{t=2} (x+y^2)|r'|\,dt = \int_{t=1}^{2} [t+(2t+1)^2]\,dt\,\sqrt{5} = \sqrt{5}\int_{t=1}^{2} (t+4t^2+4t+1)\,dt$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{4}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2+t\right)\Big|_{1}^{2} = 39.87$$

Ayrı integrali değişik parametrikler denklemler kullanarak da hesaplayabiliriz.

$f(x,y,z) = x + y^2$ $\quad x = t+1 \quad y = 2x+1$

$= 2(t+1)+1$

$= 2t+3$

$r(t) = (t+1)\,i + (2t+3)\,j$

$r' = i + 2j \qquad |r'| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$$\int_{x=1,\ t=0}^{x=2,\ t=1} (x+y^2)\,|r'|\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \left[(t+1) + (2t+3)^2\right] \sqrt{5}\,dt.$$

$$= \sqrt{5}\int_{t=0}^{1} (t+1+4t^2+12t+9)\,dt = \sqrt{5}\int_{t=0}^{1} (4t^2+13t+10)\,dt$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{4}{3}t^3 + 13\frac{t^2}{2} + 10t\right)\Big|_0^1 = 39.87.$$

Bolcı - 184 alt

Tanım 13: Kutupsal Koordinatlarda. integral bölgesi kutupsal koordinatlarda verilmişse: $r(\theta)$ belli ise

$$\boxed{\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} f(x,y)\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta}$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

Balcı. 184. üst

M noktasının koordinatları olan x, y, z birbirinden bağımsız değillerdir. (x, y, z), C eğrisi üzerinde bulunduğundan $a \leq t \leq b$ olmak üzere,

$$x = x(t)\ ,\ \ y = y(t)\ ,\ \ z = z(t)$$

olacaktır.

$$dl = \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\ dt$$

olacağından, yukarıdaki integral

$$\int_C f(x,y,z)\, dl = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt$$

biçiminde yazılabilir.

ÖRNEK : $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun, parametrik denklemi

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{2}{3}t\,\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 1$$

olan C eğrisi üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\boldsymbol{r}'(t) = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + 2t\,\boldsymbol{j} + 3\,t^2\,\boldsymbol{k}$ olduğundan

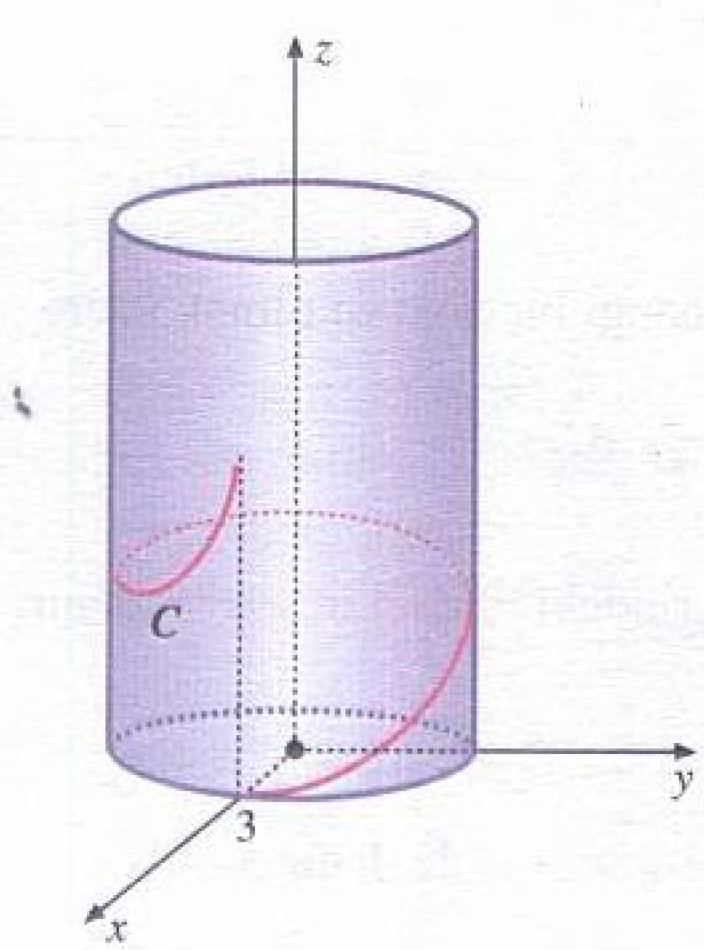
$$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{4}{9} + 4t^2 + 9t^4} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + 3t^2\right)^2} = \frac{2}{3} + 3t^2$$

olur. Buna göre

$$\int_C xyz\, dl = \int_0^1 \frac{2}{3}t.t^2.t^3\left(\frac{2}{3} + 3t^2\right) dt = \frac{2}{3}\int_0^1\left(\frac{2}{3}t^6 + 3t^8\right) dt$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{21}t^7 + \frac{3}{9}t^9\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{21} + \frac{1}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7}\ \ \text{olur.}$$

ÖRNEK : $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun
$C \ldots \boldsymbol{r}(t) = 3\cos t\,\boldsymbol{i} + 3\sin t\,\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi$
eğrisi üzerinde integralini hesaplayınız.



Çözüm : $\boldsymbol{r}'(t) = -3\sin t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}$
olduğundan

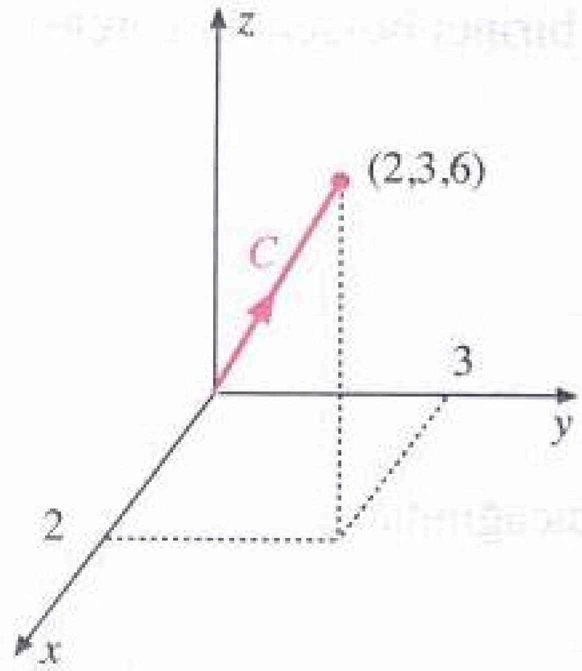
$$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5$$

olur. Buna göre

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\ dl\ = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}\ 5\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 15\, dt = 15t\ \Big|_0^{2\pi} = 30\pi$$

bulunur.



ÖRNEK : C eğrisi $O(0,0,0)$ noktasını $A(2,3,6)$ noktasına birleştiren doğru parçası olduğuna göre

$$I = \int_C (x+3y+3z)\, dl$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : C eğrisinin bir parametrik gösterimi

$$\boldsymbol{r}(t) = 2\,t\,\boldsymbol{i} + 3\,t\,\boldsymbol{j} + 6\,t\,\boldsymbol{k}\,, \quad 0 \le t \le 1$$

dir. $\boldsymbol{r}'(t) = 2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ olacağından

$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$ dir. Buna göre

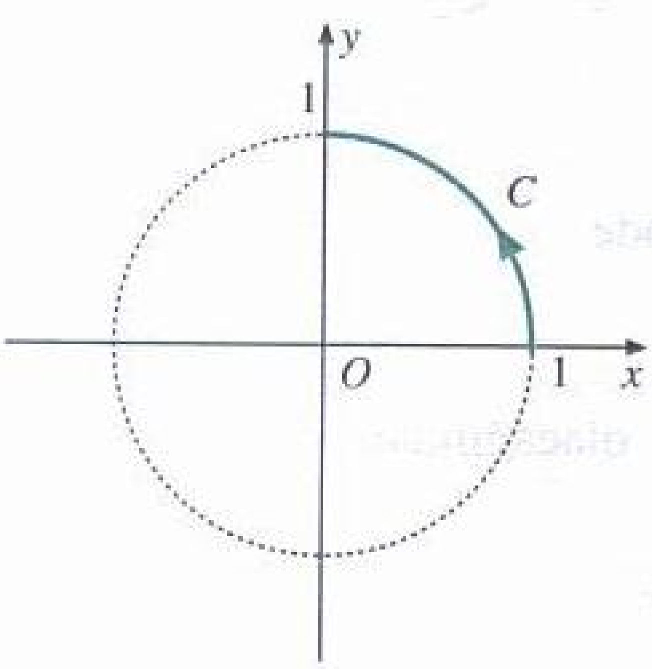
$$I = \int_C (x+3y+2z)\, dl = \int_0^1 (2\,t + 9\,t + 12\,t)\; 7\,dt = 161 \int_0^1 t\,dt = \frac{161}{2}$$

olur.

Eğrilerin bir düzlem eğrisi olması halinde, üçüncü bileşen sıfır olur. Dolayısıyla

$$\int_C f(x,y)\, dl = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\; dt$$

olacaktır.



ÖRNEK : C eğrisi $r(t) = \cos t\, \boldsymbol{i} + \sin t\, \boldsymbol{j}\,,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ çeyrek çemberi olduğuna göre

$$I = \int_C (x+y)\, dl$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\boldsymbol{r}'(t) = -\sin t\, \boldsymbol{i} + \cos t\, \boldsymbol{j} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}'(t)\| = 1$ olacağından

$$I = \int_C (x+y)\, dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)\, dt$$

$$= (\sin t - \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (1-0) - (0-1) = 2$$

bulunur.

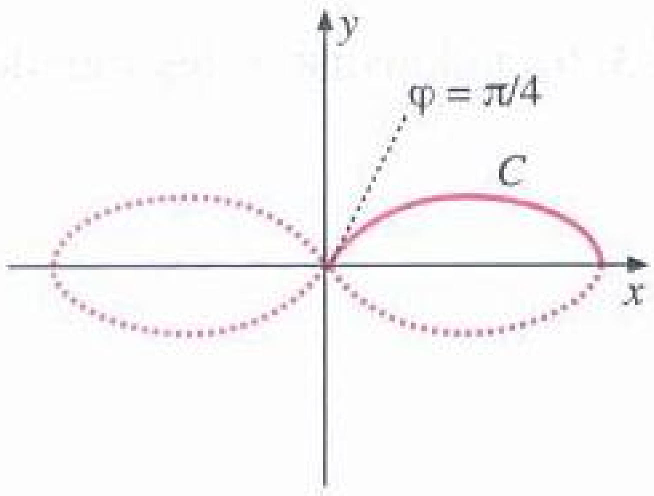
C eğrisinin denklemi, kutupsal koordinatlar sisteminde

$$r = r(\varphi)\,, \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

biçiminde verildiğinde $dl = \sqrt{\boldsymbol{r}^2 + (\boldsymbol{r}')^2}\, d\varphi$ olacağından,

$$\int_C f(x,y)\, dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi) \sqrt{r^2 + (r')^2}\; d\varphi$$

olacaktır.



ÖRNEK : C eğrisi $r^2 = 4\cos 2\varphi$ lemniskatının birinci bölgedeki parçası olduğuna göre

$$I = \int_C xy\, dl$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ ve $r' = -2\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ olacağından

$$r^2 + (r')^2 = 4\cos 2\varphi + 4\,\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{4}{\cos 2\varphi}\,(\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi) = \frac{4}{\cos 2\varphi}$$

olur. Buna göre

$$\int_C xy\, dl = \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi . \sin 2\varphi \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{4}{3}$$

bulunur.

Eğrinin denklemi, kartezyen koordinat sisteminde

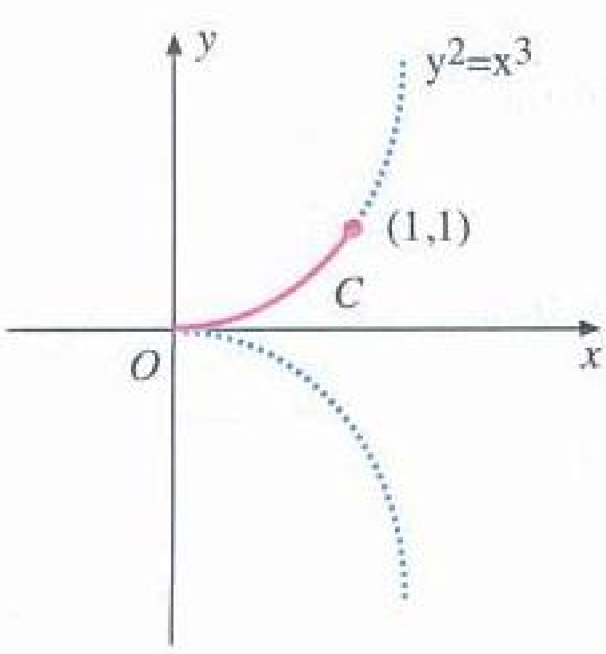
$$y = g(x)\ ,\ a \le x \le b$$

biçiminde verildiğinde, $dl = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx$ olacağından

$$\int_C f(x,y)\, dl = \int_a^b f\left(x, g(x)\right)\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx$$

bulunur.

ÖRNEK : C eğrisi $y^2 = x^3$ eğrisinin $(0, 0)$ noktasını $(1, 1)$ noktasına birleştiren parçası olduğuna göre



$$I = \int_C y\sqrt{4 + 9x}\, dl$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2} \Rightarrow$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x = \frac{4 + 9x}{4} \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}$$

olacağından

$$I=\int_C y\sqrt{4+9x}\,dl=\int_0^1 x^{3/2}\sqrt{4+9x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4+9x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{3/2}(4+9x)\,dx=\left(\frac{4}{5}\cdot x^{5/2}+\frac{9}{7}x^{7/2}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{5}+\frac{9}{7}=\frac{73}{35}$$

bulunur.

Birinci çeşit eğrisel integralin tanımından yararlanarak aşağıdaki özeliklerin varlığı kolayca gösterilebilir. Burada f ve g integrallenebilir fonksiyonlar olup k bir sabittir.

(1) $\int_C \lambda\, f(x,y,z)\,dl=\lambda\int_C f(x,y,z)\,dl$

(2) $\int_C [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dl=\int_C f(x,y,z)\,dl+\int_C g(x,y,z)\,dl$

(3) C_1 ile C_2 iki bitişik eğri (birinin bitim noktası diğerinin başlangıç noktası olan eğriler) ise

$$\int_{C_1\cup C_2} f(x,y,z)\,dl=\int_{C_1} f(x,y,z)\,dl+\int_{C_2} f(x,y,z)\,dl$$

Bitişik eğriler

(4) $\left|\int_C f(x,y,z)\,dl\right|\le\int_C |f(x,y,z)|\,dl$

(5) f, C eğrisi üzerinde sürekli ve C nin uzunluğu L ise bu eğri üzerinde

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{L}\int_C f(x,y,z)\,dl$$

olacak şekilde bir (x_0, y_0, z_0) noktası vardır (**Eğrisel integraller için ortalama değer teoremi**)

ÖRNEK : C eğrisi $(0,0,0)$ noktasını $(1,1,0)$ noktasına birleştiren

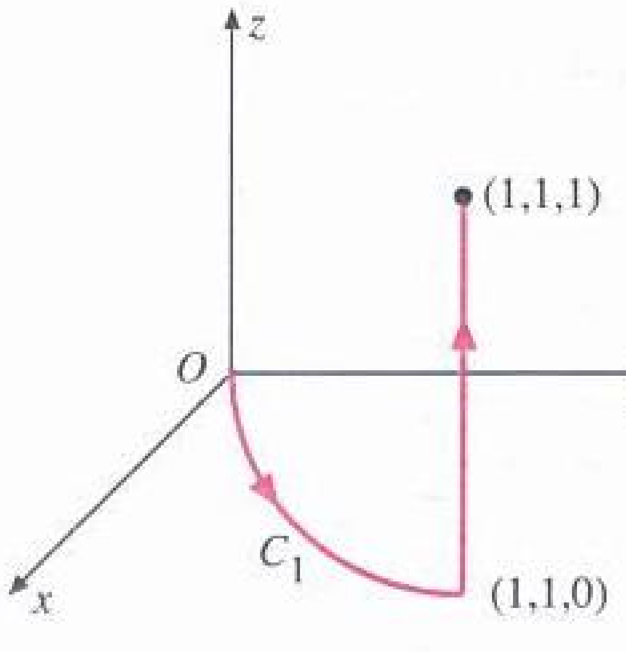
$$C_1 \dots \boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j},\quad 0\le t\le 1$$

eğrisiyle $(1,1,0)$ noktasını $(1,1,1)$ noktasına birleştiren

$$C_2 \dots \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le 1$$

eğrisinin birleşimi olduğuna göre

$$I=\int_C (x+z)y\,dl$$



integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = \int_C (x+z)y\,dl = \int_{C_1} (x+z)y\,dl + \int_{C_2} (x+z)y\,dl$$

$$= \int_0^1 (t+0)t^2\sqrt{1+4t^2+0}\;dt + \int_0^1 (1+t).1\sqrt{1}\;dt$$

$$= \int_0^1 t^3\left(1+4t^2\right)^{1/2} dt + \int_0^1 (1+t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 t^2\left(1+4t^2\right)^{1/2} 8t\,dt + \left(t+\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{32}\int_1^5 (u-1)u^{1/2}du + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^5 + \frac{3}{2} = \frac{1}{120}\left(25\sqrt{5}+181\right)$$

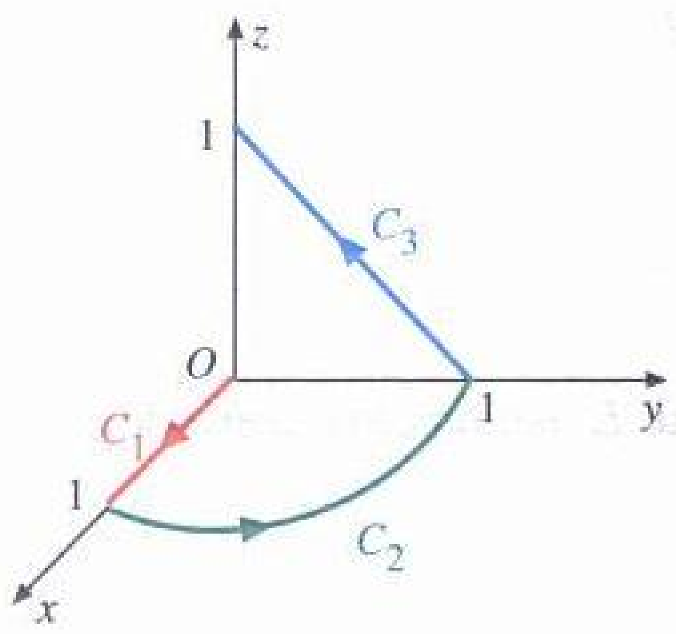
$1 + 4t^2 = u$

$8t\,dt = du$

$t = 0$ için $u = 1$

$t = 1$ için $u = 5$

olur.



ÖRNEK : C eğrisi grafiği yanda verilen C_1, C_2, C_3 eğrilerinin birleşimi olduğuna göre, $\int_C (x+y+z)\,d\ell$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : C_1, C_2, C_3 eğrilerinin birer parametrik denklemi

$C_1 \ldots\; r_1(t) = t\,\boldsymbol{i}$, $\quad 0 \le t \le 1$

$C_2 \ldots\; r_2(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j}$, $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$C_3 \ldots\; r_3(t) = t\,\boldsymbol{j} + (1-t)\,\boldsymbol{k}$, $\quad 1 \le t \le 0$

olur. Buna göre,

$$\int_C (x+y+z)\,d\ell = \int_{C_1} (x+y+z)\,d\ell + \int_{C_2} (x+y+z)\,d\ell + \int_{C_1} (x+y+z)\,d\ell$$

$$= \int_0^1 t\,\mathrm{dt} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)\mathrm{dt} + \int_1^0 1.\sqrt{2}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2} + (1+1) - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

olur.