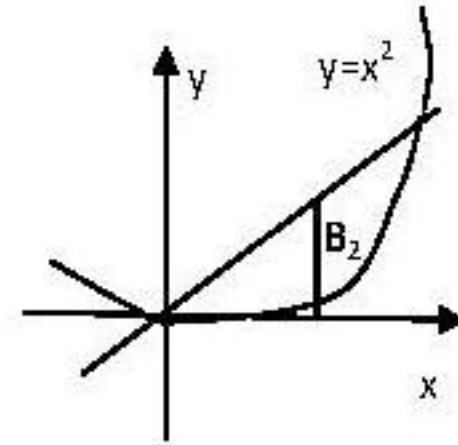
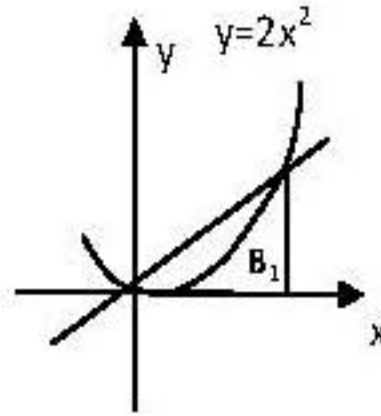
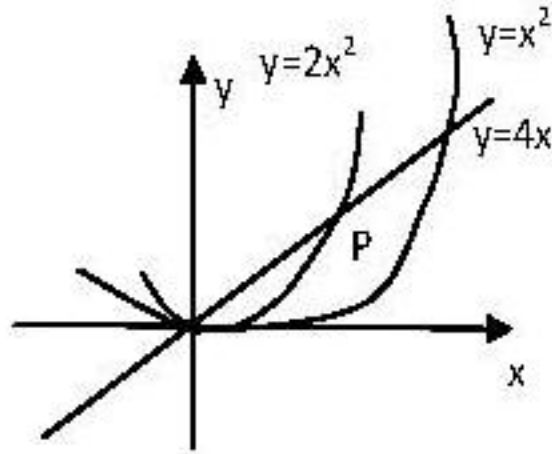


ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Problemin değişik çözümleri mevcuttur.

Çözüm 1)



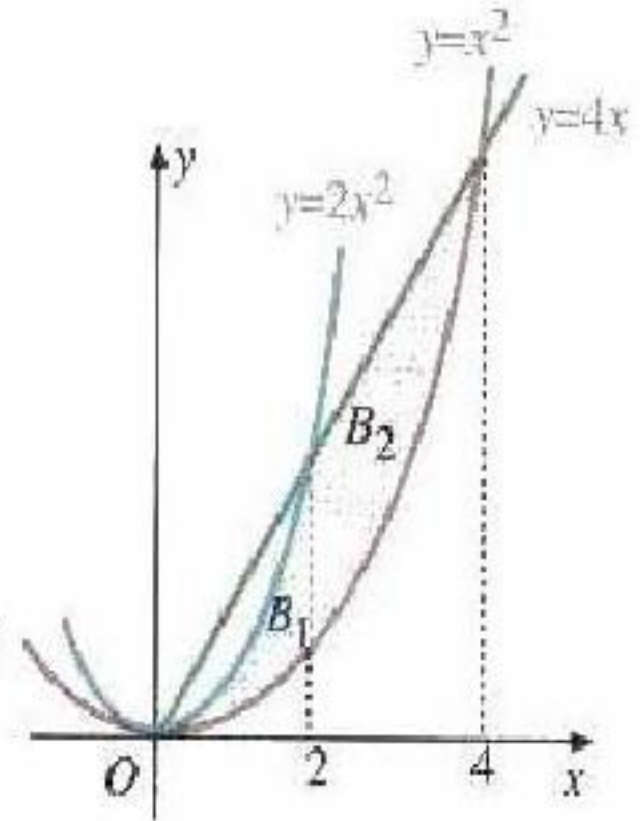
Sorulan integral P alanı üzerindeki integraldir. Bu integral $P = B_1 + B_2$ olduğu açıktır. Dolayısıyla B_1 ve B_2 'yi hesaplar sonra $P = B_1 + B_2$ hesaplarız.

$$I = \iint_{B_1} f(x, y) dA + \iint_{B_2} f(x, y) dA$$

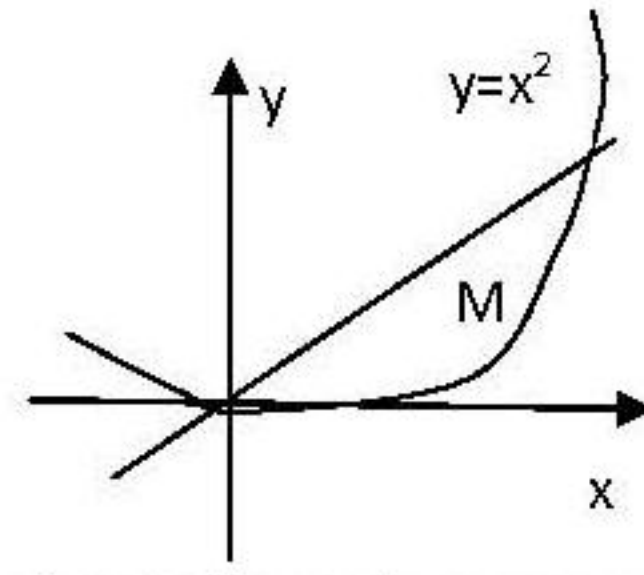
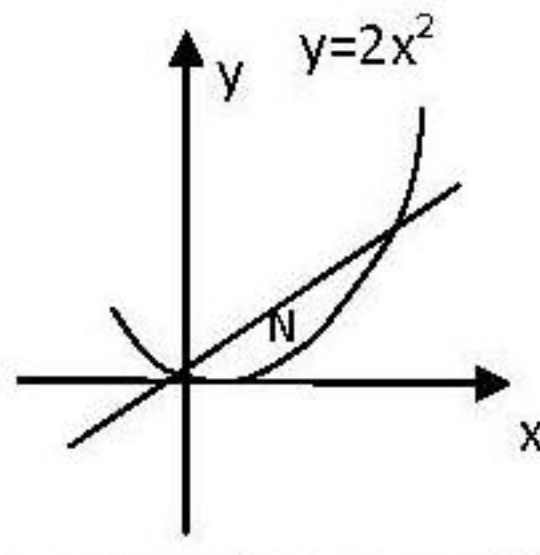
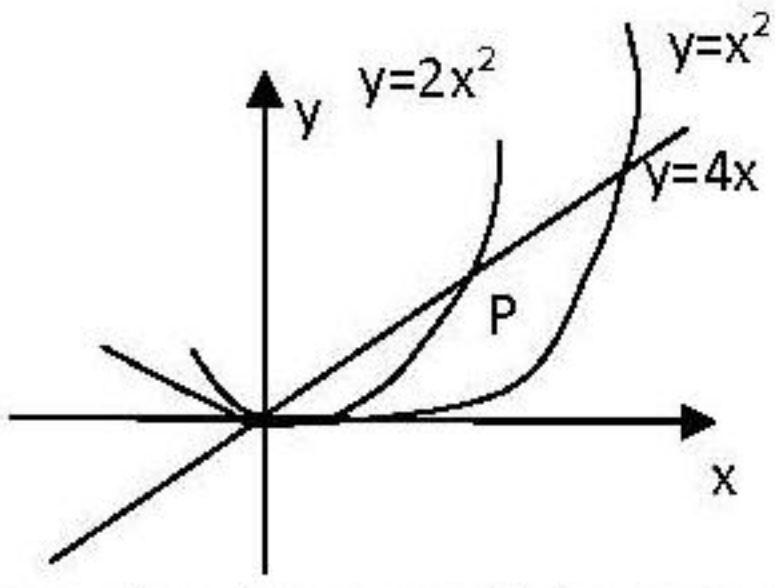
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x + y + 1) dy dx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x + y + 1) dy dx$$

$$= \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 + y \right) \Big|_{x^2}^{4x} dx$$

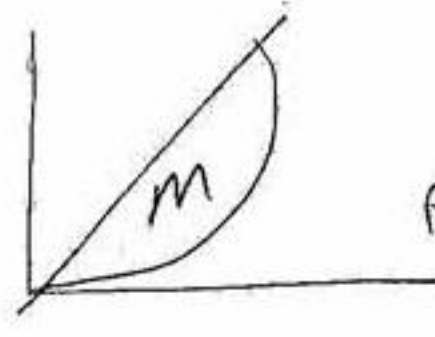
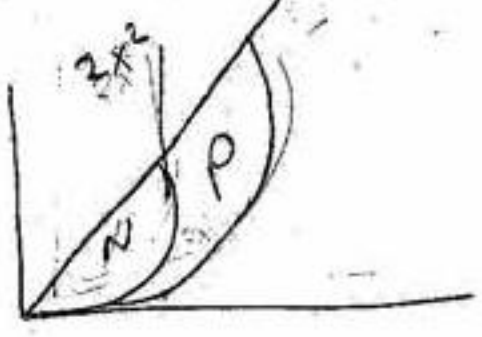
$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5} = 86.4$$



Cozum 2)



Sorulan integral P alanı üzerindeki integraldir. Bu integral $P=M-N$ olduğu açıktır. Dolayısıyla önce N ve M yi hesaplarız sonra $P=M-N$ yi hesaplarız.



$$P=M-N$$

$$N = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=2x^2}^{y=4x} (x+y+1) dy dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{2x^2}^{4x} dx$$

$$N = \int_0^2 \left(x(4x) + \frac{(4x)^2}{2} + 4x \right) - \left(x(2x^2) + \frac{(2x^2)^2}{2} + 2x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^2 (4x^2 + 8x^2 + 4x - \{2x^3 + 2x^4 + 2x^2\}) dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 4x) dx$$

$$= -2 \frac{x^5}{5} - 2 \frac{x^4}{4} + 10 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2$$

$$= -\frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{10}{3} x^3 + 2x^2 \Big|_0^2$$

$$N = 13.8667 - 0 = 13.8667$$

5)

$$M = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=4x} (x+y+1) dy dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{x^2}^{4x} dx$$

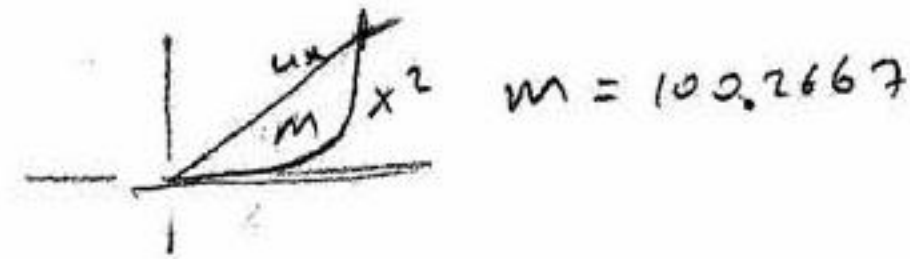
$$= \int_0^2 \left(x(4x) + \frac{(4x)^2}{2} + 4x \right) - \left(x(x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^2 (4x^2 + 8x^2 + 4x - (x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2)) dx$$

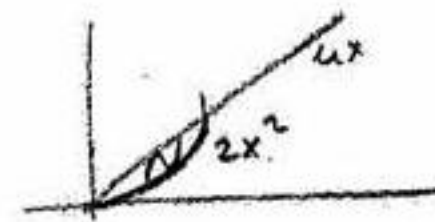
$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 11x^2 + 4x \right) dx$$

$$= -\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{11}{3} x^3 + 2x^2 \Big|_0^2$$

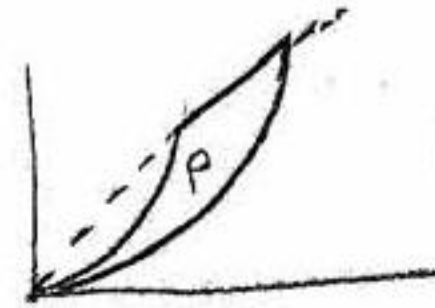
$$= 100.2667 - 0 = 100.2667 =$$



$$M = 100.2667$$



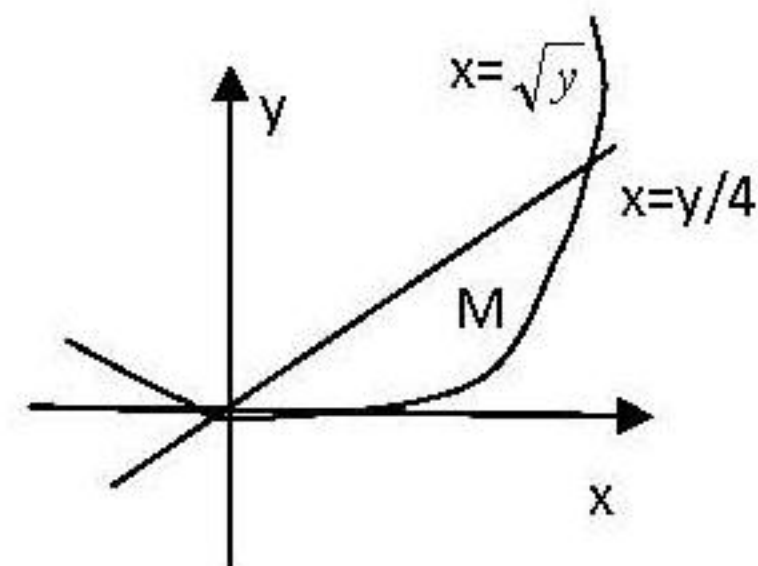
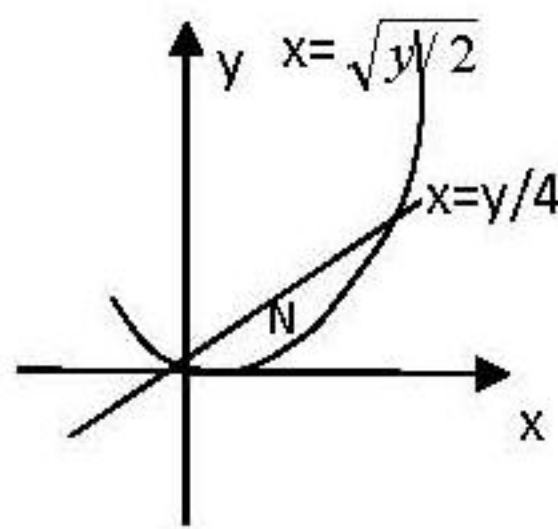
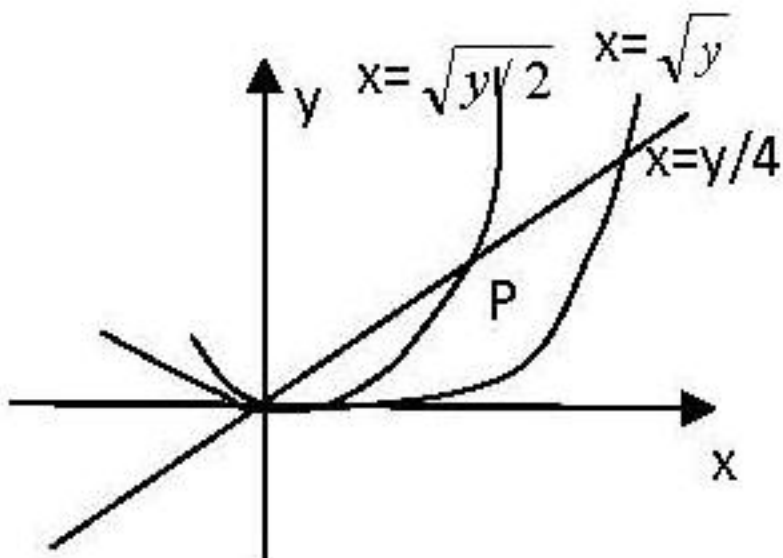
$$N = 13.8667$$



$$P = M - N = 100.26 - 13.86 = 86.4$$

52

Cozum 2.b) Yukarıdaki integralde integral sınırlarını değiştirerek önce x e sonra y ye göre integral alarak da hesaplayabiliriz.

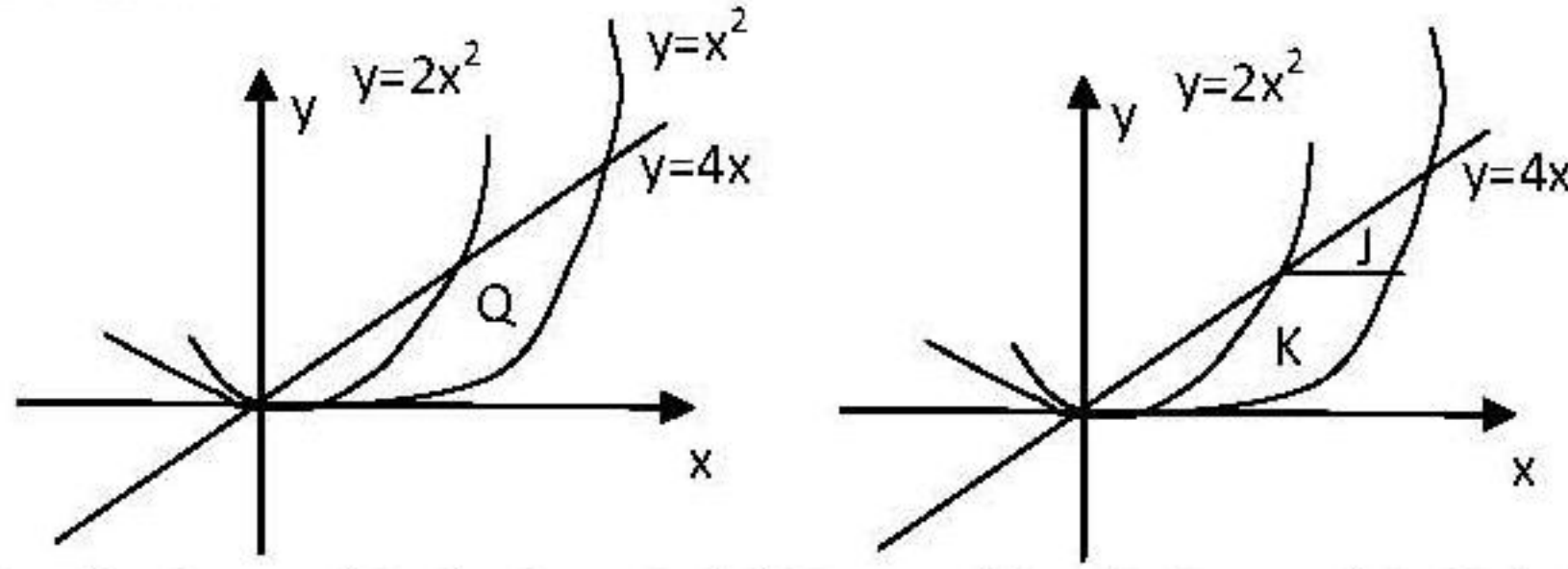


$$N = \int_{y=0}^{y=8} \int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=y/4} (x+y+1) dx dy,$$

$$M = \int_{y=0}^{y=16} \int_{x=\sqrt{y}}^{x=y/4} (x+y+1) dx dy,$$

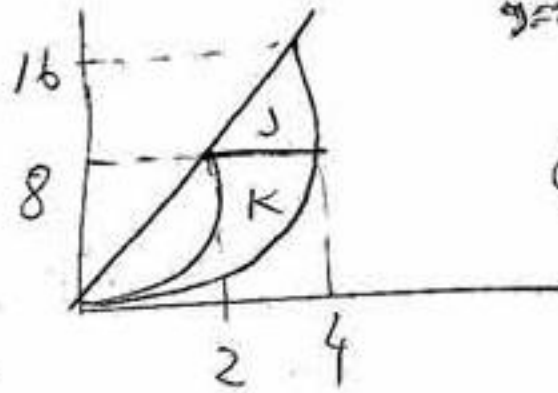
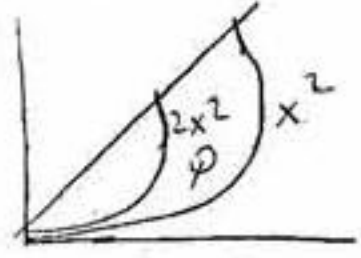
$$N=13.8667, M=100.2667, P=M-N=86.4$$

Cozum 3)



Sorulan integral Q alanı üzerindeki integraldir. Bu integral $P=K+J$ olduğu açıktır. Dolayısıyla K ve J yi hesaplar sonra $P=K+J$ yi hesaplarız.

Problemi x eksenine paralel bölerek de çözebiliriz



$$Q = K + J$$

$$K = \int_{y=0}^{y=8} \int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}} (x+y+1) dx dy = \int_{y=0}^{y=8} \left(\frac{x^2}{2} + xy + x \right) \Big|_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^8 \left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y} \right) - \left(\frac{(\sqrt{y/2})^2}{2} + \sqrt{y/2} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y/2} \right) dy$$

$$= \int_0^8 \left(\frac{y}{2} + y^{3/2} + y^{1/2} - \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{1/2} \right) \right) dy$$

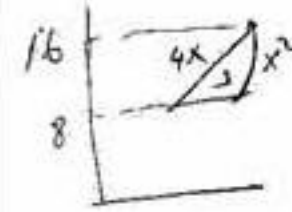
$$= \int_0^8 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) y + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) y^{3/2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) y^{1/2} \right) dy$$

$$= \int_0^8 (Ay + By^{3/2} + Cy^{1/2}) dy$$

$$= A \frac{y^2}{2} + B \frac{1}{5} y^{5/2} + C \frac{1}{3/2} y^{3/2} \Big|_0^8 = \frac{A}{2} y^2 + \frac{2B}{5} y^{5/2} + \frac{2C}{3} y^{3/2} \Big|_0^8$$

$$K = 33.62 - 0 = 33.62$$

53



$$J = \int_{y=8}^{y=16} \int_{x=\frac{y}{4}}^{x=\sqrt{y}} (x+y+1) dx dy = \int_{y=8}^{y=16} \left(\frac{x^2}{2} + xy + x \right) \Big|_{x=y/4}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_8^{16} \left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y} \cdot \frac{y}{4} + \sqrt{y} \right) - \left(\frac{(\frac{y}{4})^2}{2} + \frac{y}{4} \cdot \frac{y}{4} + \frac{y}{4} \right) dy$$

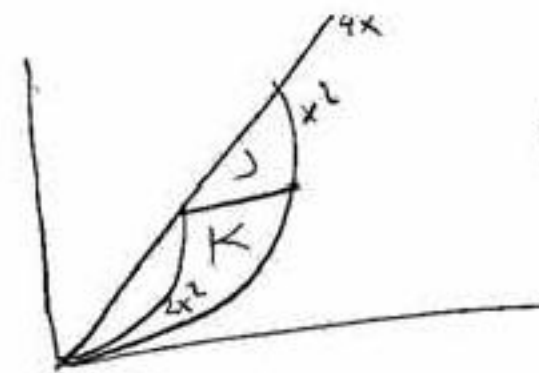
$$= \int_8^{16} \left(\frac{y}{2} + y^{3/2} + y^{1/2} - \left(\frac{1}{32} y^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{y}{4} \right) \right) dy$$

$$= \int_8^{16} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{4} \right) y^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) y + y^{3/2} + y^{1/2} \right) dy$$

$$= \int_8^{16} (Ay^2 + By + y^{3/2} + y^{1/2}) dy$$

$$= \frac{A}{3} y^3 + \frac{B}{2} y^2 + \frac{1}{5/2} y^{5/2} + \frac{2}{3/2} y^{3/2} \Big|_8^{16}$$

$$J = 100.2667 - 47.4924 = 52.77$$

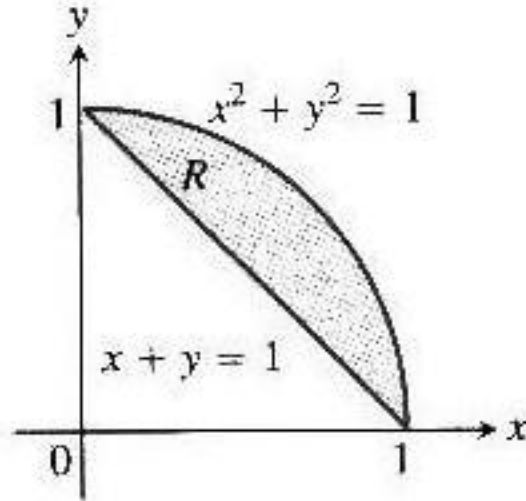


$$K+J = 33.62 + 52.77 = 86.4$$

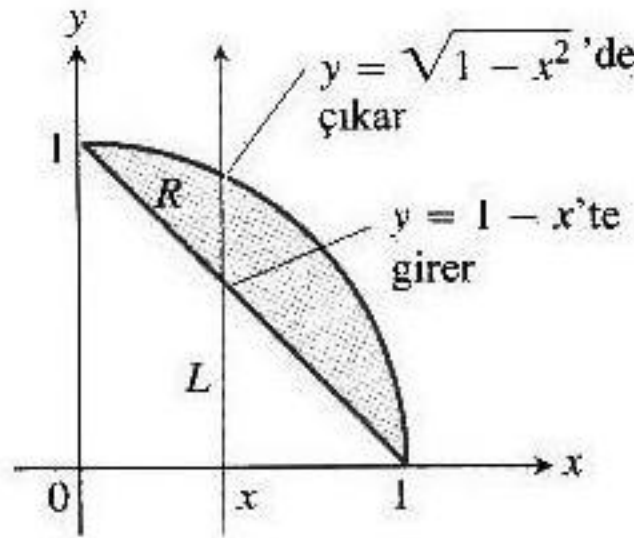
Şimdi, integrasyon sınırlarını bulmak için, düzlemde bir çok bölgeye uygulanabilen bir prosedür veriyoruz. Bu prosedürün işe yaramadığı daha karmaşık bölgeler, çoğunlukla bu prosedür uygulanabilecek şekilde parçalara ayrılır.

$\iint_R f(x, y) dA$ integralini, önce y 'ye sonra da x 'e göre integre ederek hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. **Çizim.** İntegrasyon bölgesini çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. **İntegrasyonun y sınırlarını bulun** Artan y yönünde R 'den geçen dikey bir L doğrusu hayal edin. L 'nin girdiği ve çıktığı y değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun y sınırlarıdır ve genellikle x 'in fonksiyonlarıdır (sabit yerine).

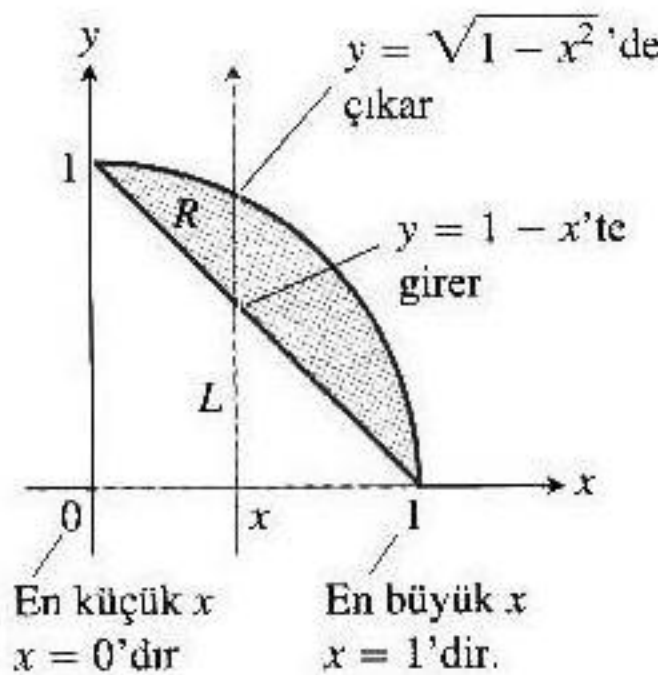


3. **İntegrasyonun x -sınırlarını bulun** R 'den geçen bütün dikey doğruları kapsayan x -sınırlarını seçin. İntegral

$$\iint_R f(x, y) dA =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

olur.

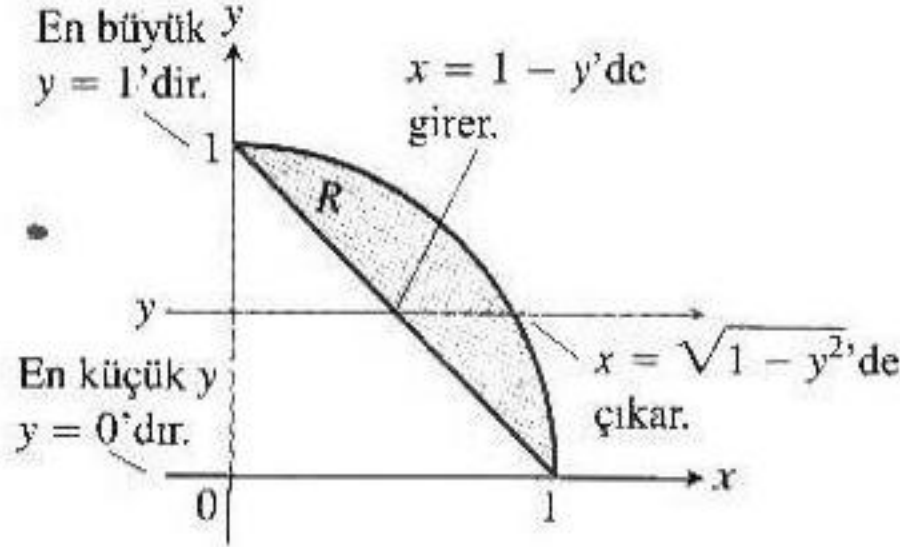


Aynı iki katlı integrali, integrasyon sırası değişmiş tekrarlı integral olarak hesaplamak için, 2. ve 3. adımlarda dikey doğrular yerine yatay doğrular kullanın. İntegral

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

1077

olur.

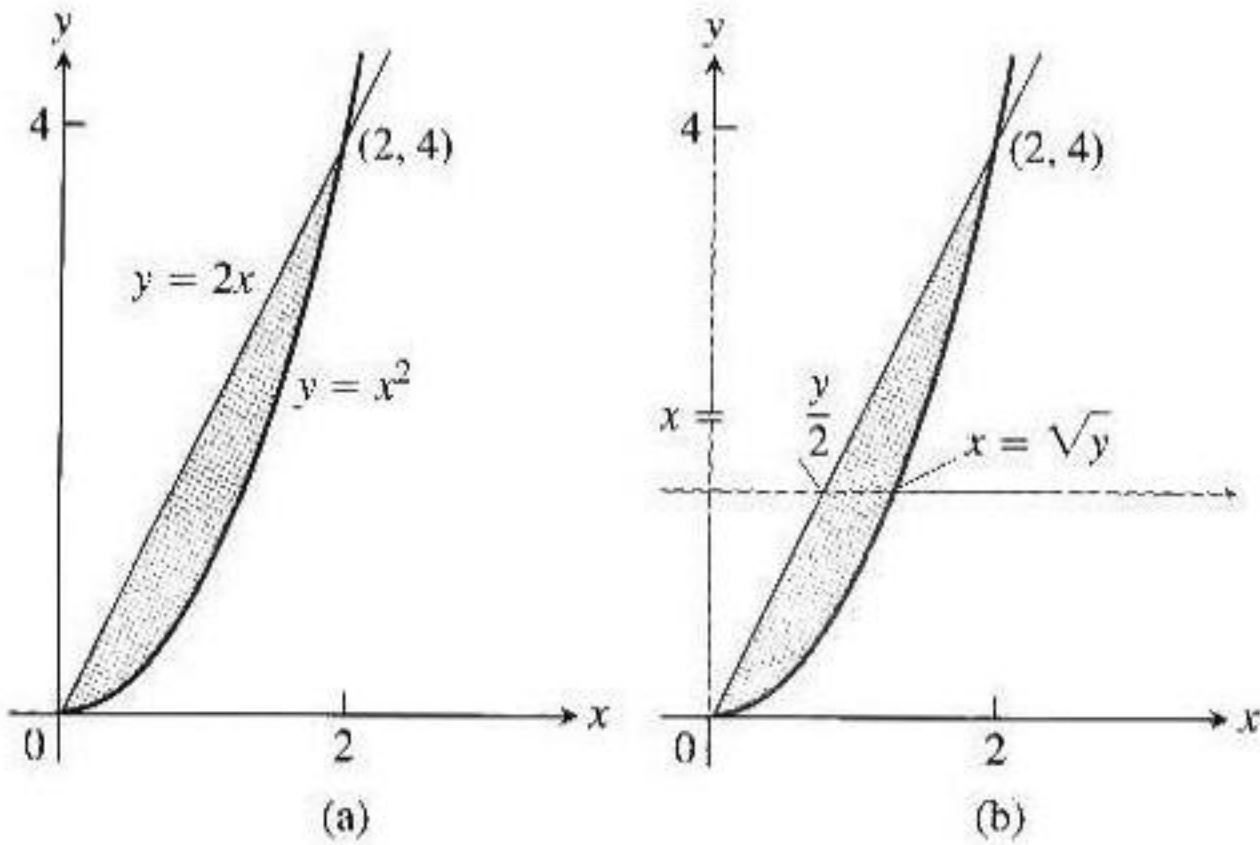


ÖRNEK 4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx$$

integralinin integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş eşdeğer bir integral yazın.

Çözüm İntegrasyon bölgesi, $x^2 \leq y \leq 2x$ ve $0 \leq x \leq 2$ eşitsizlikleriyle verilmektedir. Dolayısıyla, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında $y = x^2$ ile $y = 2x$ eğrilerinin sınırladığı bölgedir (Şekil 15.13a).



ŞEKİL 15.13 Örnek 4'ün integrasyon bölgesi

Değiştirilmiş sırada integrasyonun sınırlarını bulmak için, bölge boyunca soldan giden bir yatay doğru hayal ederiz. $x = y/2$ 'de girer ve $x = \sqrt{y}$ 'de çıkar. Böyle bütün doğruları kapsamak üzere, y 'yi $y = 0$ 'dan $y = 4$ 'e götürürüz (Şekil 15.13b). İntegral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy$$

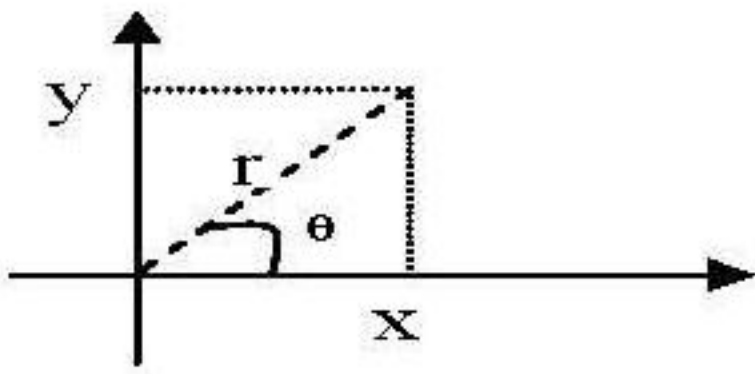
olur. Bu integrallerin ortak değeri 8'dir.

Koordinat Donusumleri

- 1)Duzlemde Kartezyen koordinat sistemi
- 2)Duzlemde kutupsal koordinat sistemi
- 3)Uzayda Kartezyen koordinat sistemi
- 3)Uzayda Silindirik koordinat sistemi
- 3)Uzayda Kuresel koordinat sistemi

Duzlemde Kartezyen ve Kutupsal Koord. Sist.

Duzlemde bir noktanin x,y ile belirtilmesi kartezyen koordinat sistemi, r(genlik,uzunluk.mesafe) ve θ (aci) ile belirtilmesi kutupsal koordinat sistemi olur.



$$x=r \cos \theta$$

$$y=r \sin \theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\tan^{-1} \frac{y}{x}$$

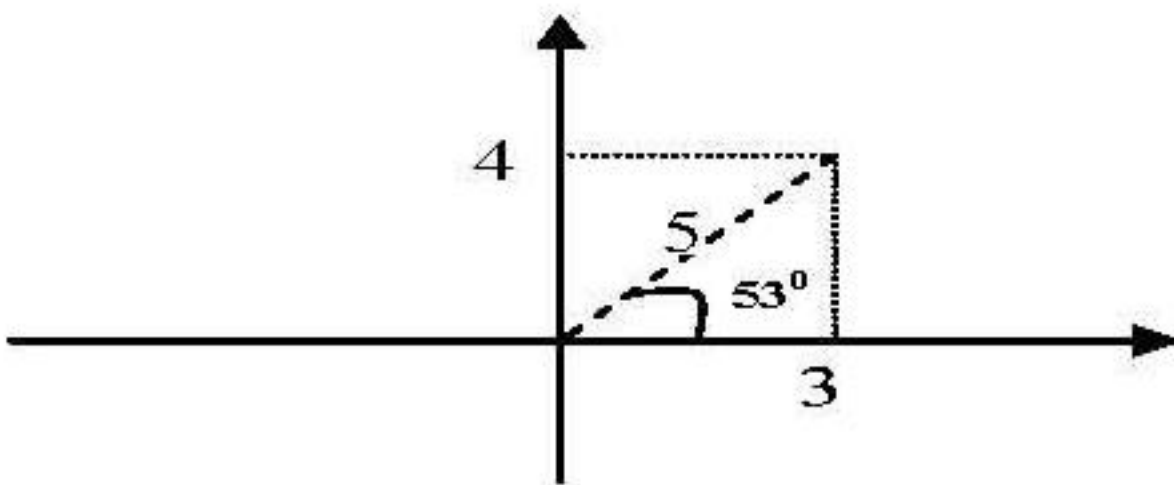
$\tan^{-1}(z)$: arg tan(z) demektir.

Ornek Asagidaki kartezyen koordinat sisteminde verilen noktaları kutupsal koordinat sisteminde belirtin. a)(3,4) b)(-3,4), c)(-3,-4), d)(3,-4)

Cozum:

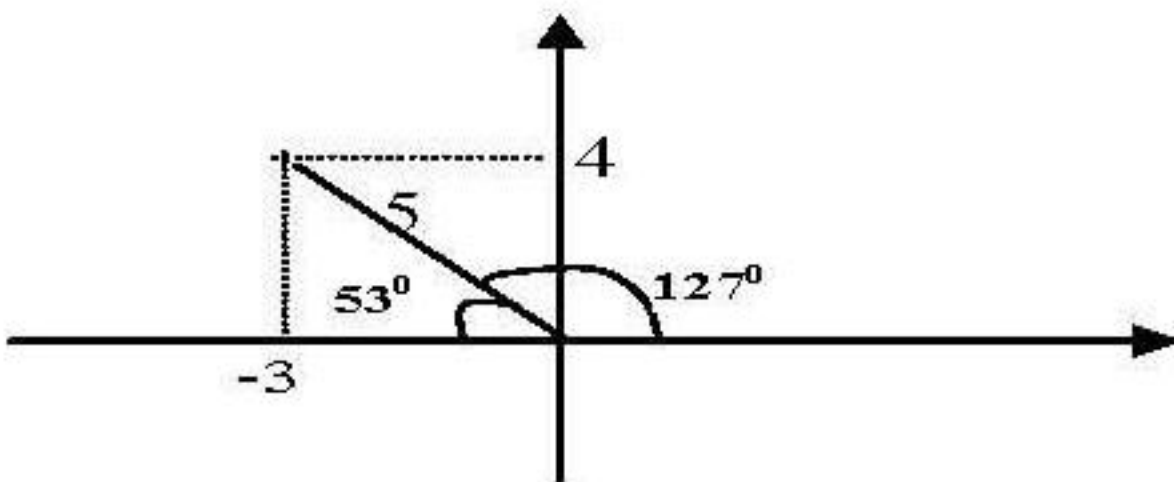
$$a)x=3, y=4, \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

$$\theta=\tan^{-1} \frac{y}{x}=\tan^{-1}(4/3)=53.1^{\circ}$$

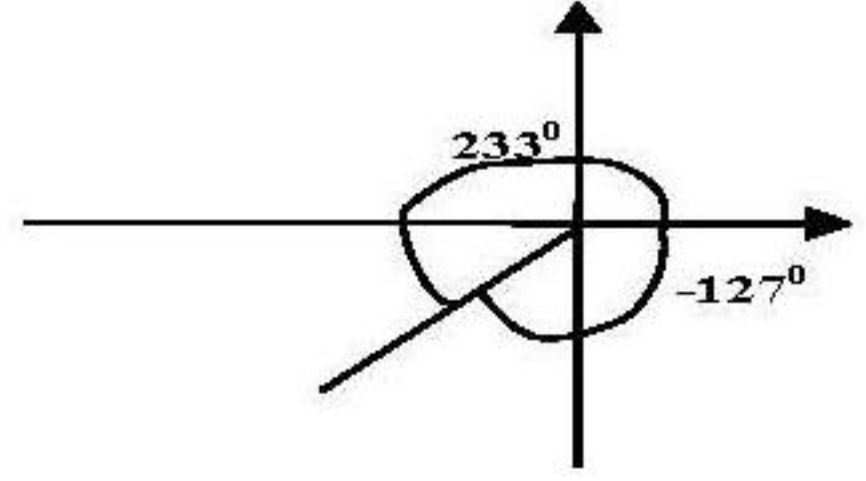
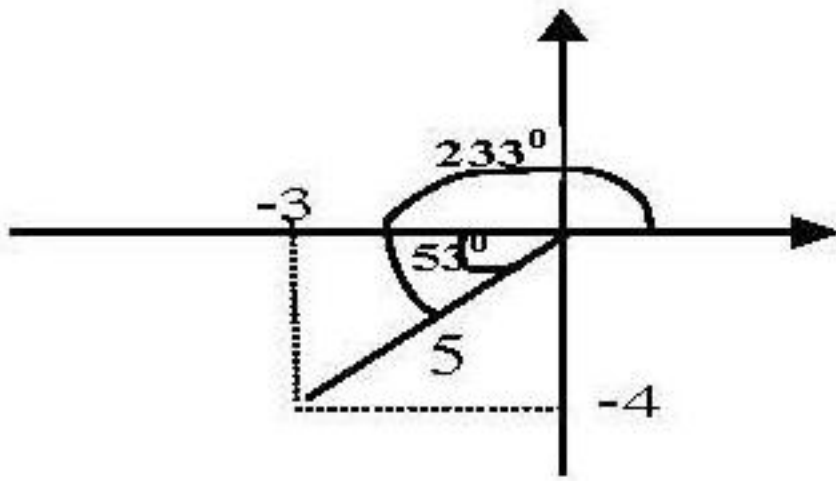


$$b)x=-3, y=4, \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5,$$

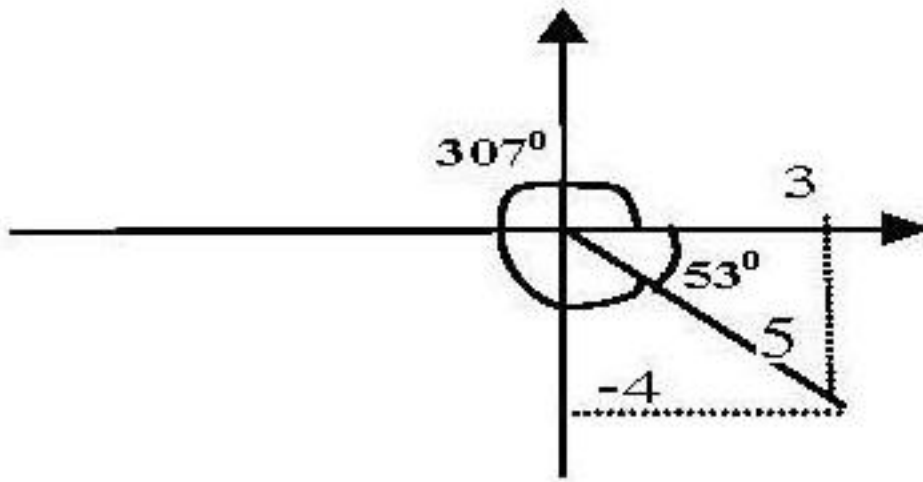
$$\theta=\tan^{-1} \frac{y}{x}=\tan^{-1}(4/(-3))=180-53.1^{\circ}=127^{\circ}$$



c) $x=-3, y=-4, \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=r=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5,$
 $\theta=\tan^{-1} \frac{y}{x}=\tan^{-1}(-4/(-3))=180+53.1^\circ=233^\circ=360-233^\circ=-127^\circ$



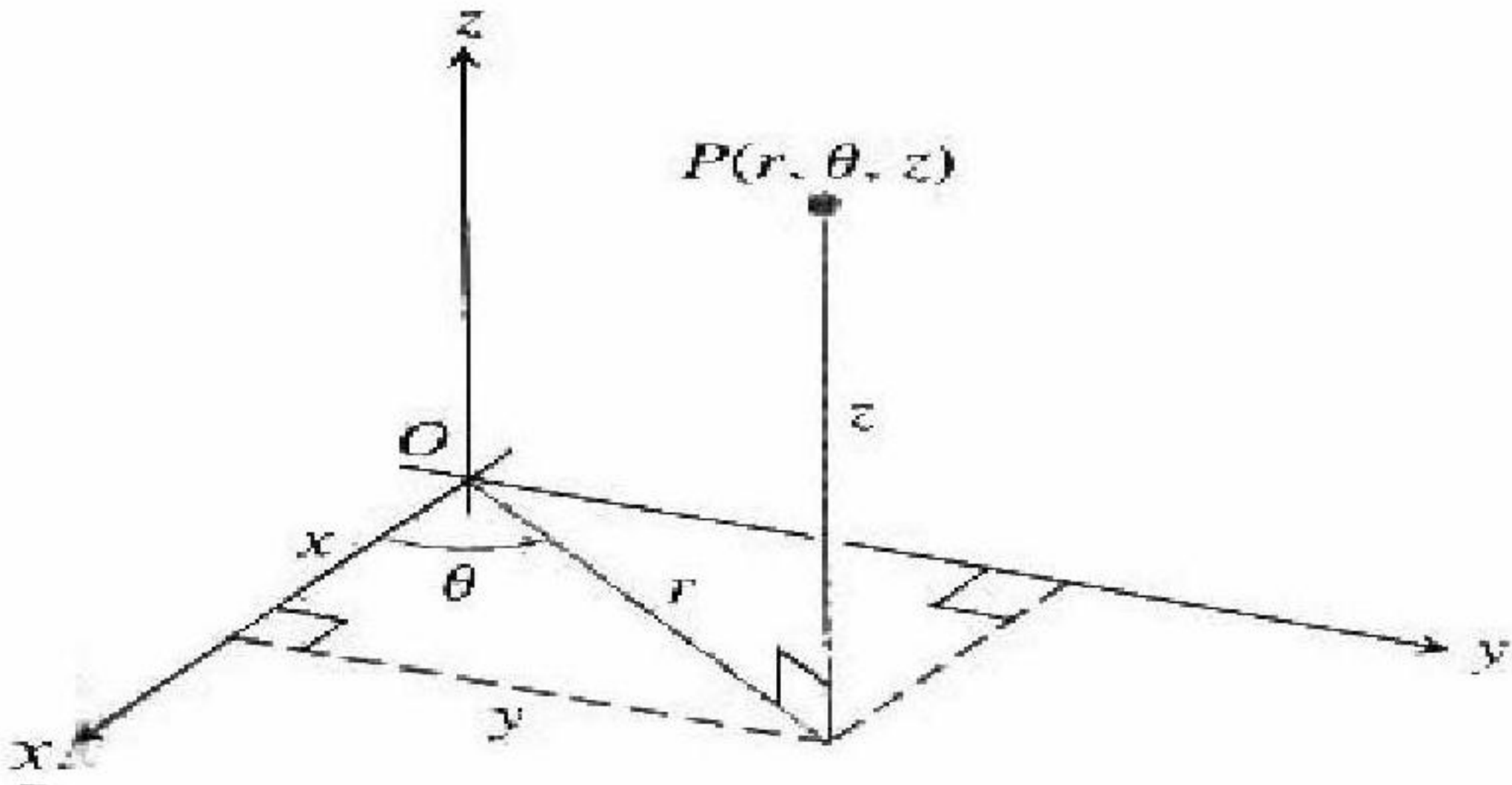
d) $x=3, y=-4, \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,$
 $\theta=\tan^{-1} \frac{y}{x}=\tan^{-1}(-4/3)=-53.1^\circ=360-53=307$



Uzayda Silindirik Koordinat Sistemi

Silindirik koordinatlar (r, θ, z) sıralı üçlüleri ile uzayda bir P noktasını temsil ederler. Burada,

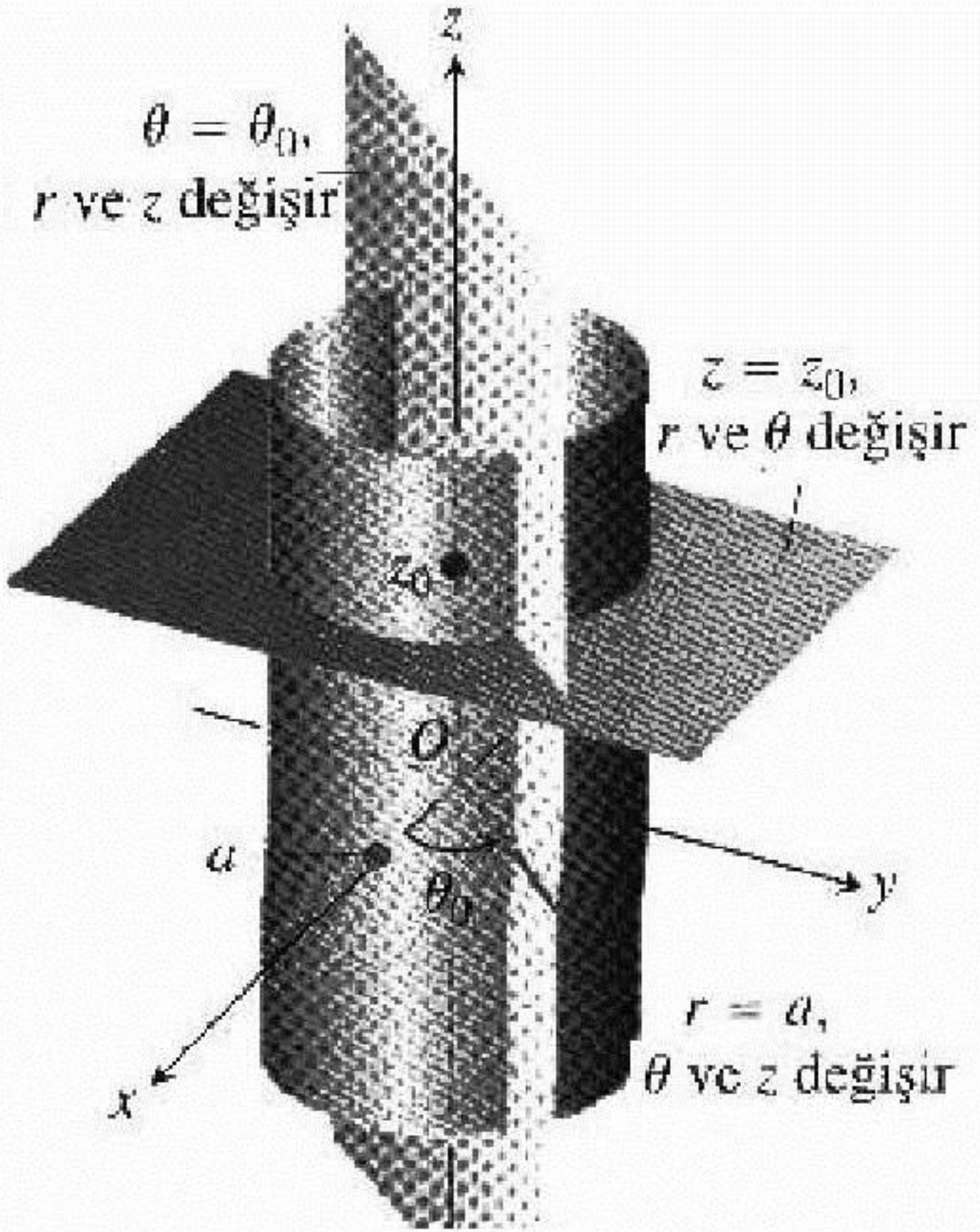
1. r ve θ , P 'nin xy -düzlemine dik izdüşümünün kutupsal koordinatlarıdır.
2. z kartezyen dikey koordinattır.



Kartezven (x, y, z) ve Silindirik (r, θ, z) Koordinatlar Bağlayan Denklemler

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x$$



Uzayda Küresel Koordinat Sistemi

Küresel Koordinatlar uzayda bir P noktasını,

1. ρ , P 'den orijine uzaklık.
2. ϕ , $\overrightarrow{OP}$ 'nin pozitif z -ekseni ile yaptığı açı ($0 \leq \phi \leq \pi$)
3. θ , silindirik koordinatlardaki açı

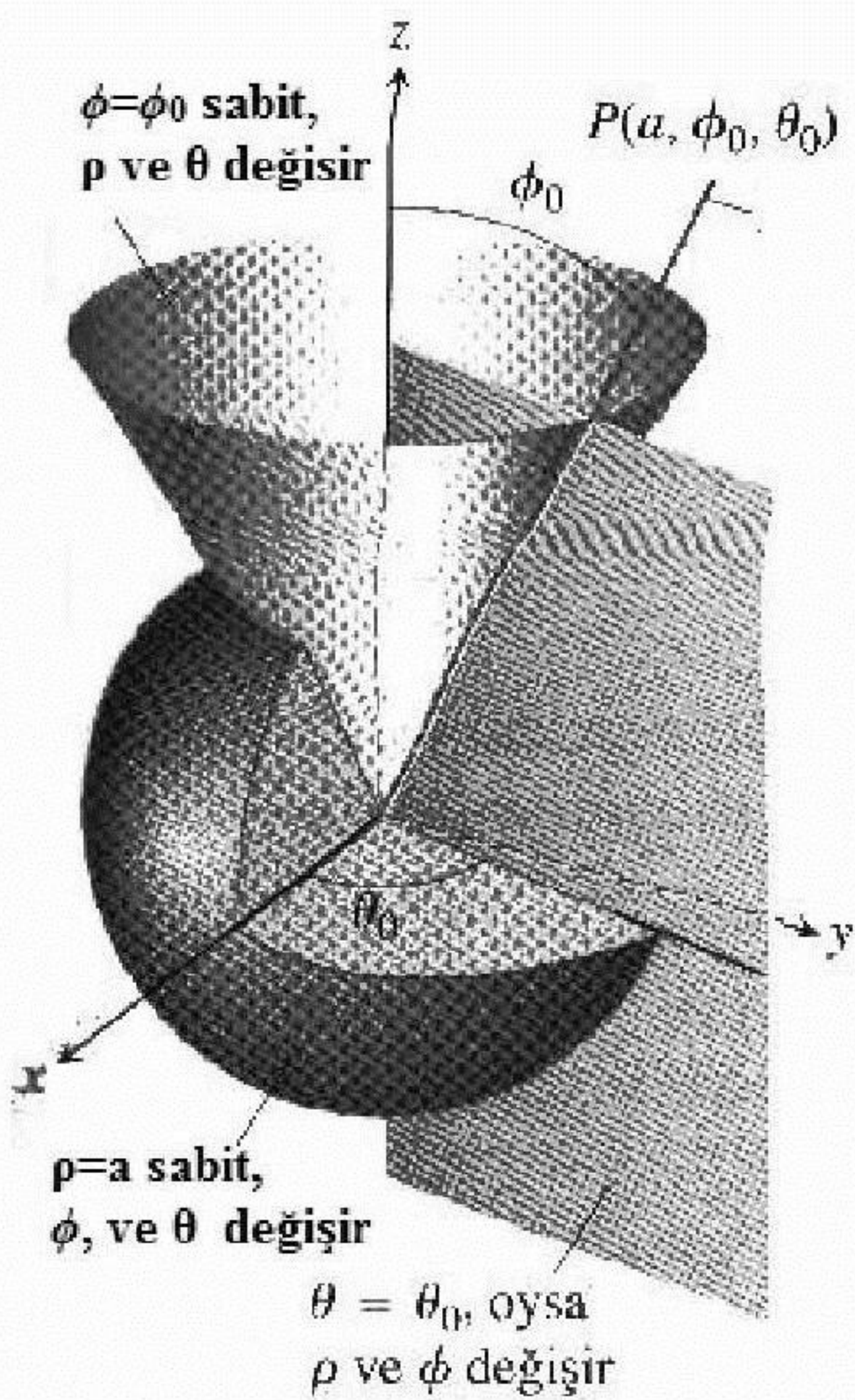
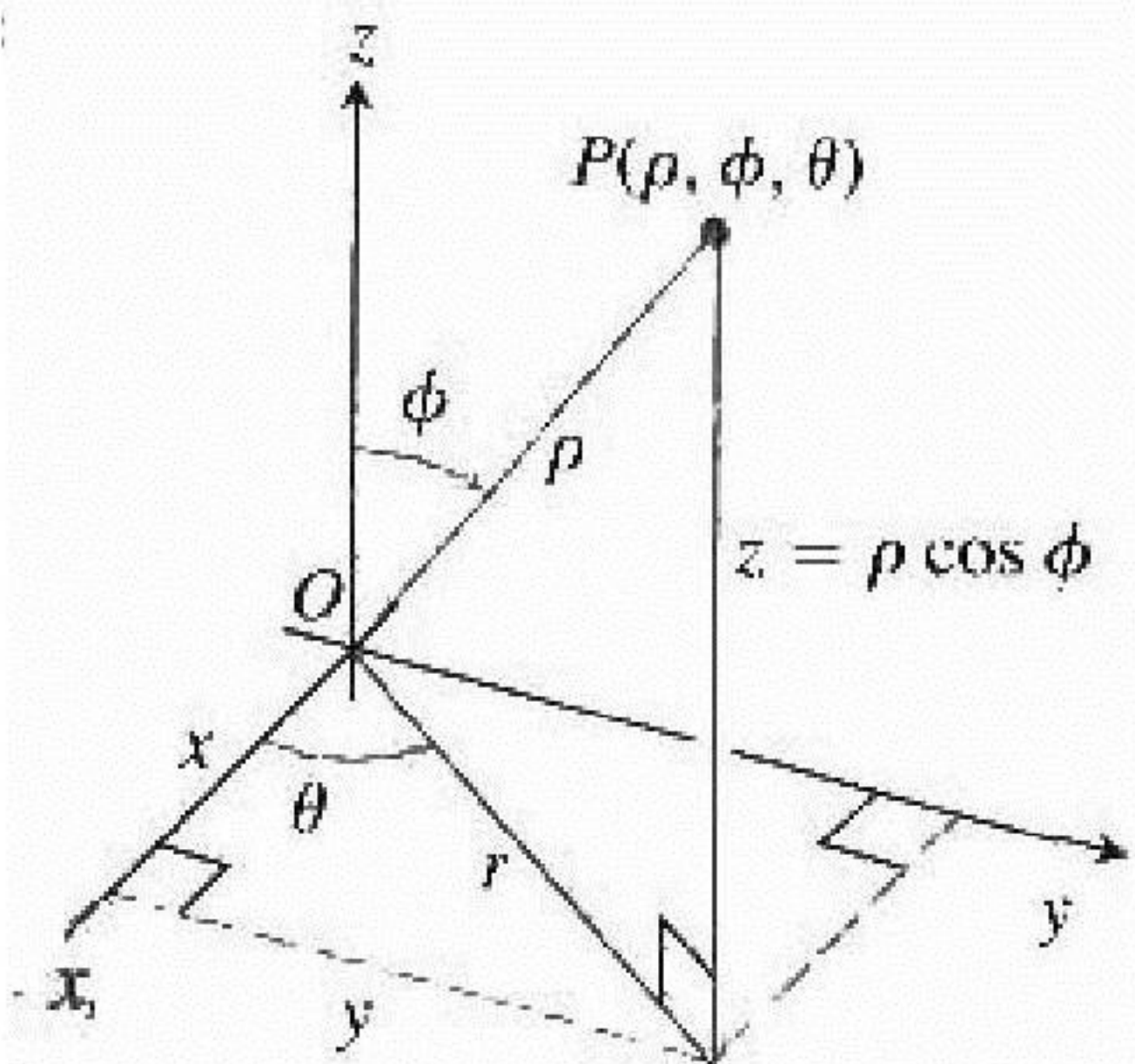
olmak üzere, sıralı (ρ, ϕ, θ) üçlülere ile temsil eder.

Küresel (ρ, ϕ, θ) , **Silindirik** (r, θ, z) , **Kartezyen** (x, y, z) arasındaki bağıntılar.

$$r = \rho \sin \phi, \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta,$$

$$z = \rho \cos \phi, \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$



Koordinat Dönüşüm Formülleri

SİLİNDİRİKTEN
KARTEZYENE

KÜRESELDEN
KARTEZYENE

KÜRESELDEN
SİLİNDİRİĞE

$$x = r \cos \theta$$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$r = \rho \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$z = z$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\theta = \theta$$

HACIM FORMULLERİ

$$dV = dx dy dz$$

$$= dz r dr d\theta$$

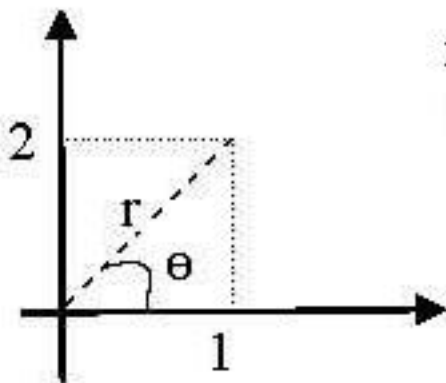
$$= \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

Örnek Problem. Aşağıdaki Kartezyen noktaları silindirik ve küresel koordinatlara çevirin.

a) (1, 2, 3), b) (-1, -2, 3)

Çözüm. a) $x=1$, $y=2$, $z=3$,

Silindirik koordinatlarda $z=z$ yani $z=3$ dur.



$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2.23$$

$$\theta = \tan^{-1}(2/1) = 63^\circ$$

Küresel koordinatlar için

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + r^2} = 3.74$$

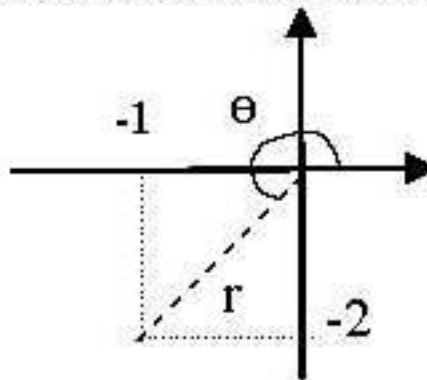
$$z = \rho \cos(\phi) \rightarrow \phi = \arg \cos(z/\rho) =$$

$$\phi = \arg \cos(3/3.74) = 36.66^\circ$$

$\theta = 63^\circ$ (silindirik koordinat ile θ aynıdır)

Çözüm. b) $x=-1$, $y=-2$, $z=3$,

Silindirik koordinatlarda $z=z$ yani $z=3$ dur.



$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = 2.23$$

$$\theta = \tan^{-1}(-2/-1) = 180 + 63$$

$$= 243^\circ = -117^\circ$$

Küresel koordinatlar için

$\theta = 243^\circ$ (silindirik koordinat ile θ aynıdır)

$$\phi = \arg \cos(z/\rho) = \arg \cos(3/3.74) = 36.66^\circ$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + r^2} = 3.74$$

ÖRNEK 3 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ küresi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz.

Çözüm x , y ve z 'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırız:

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

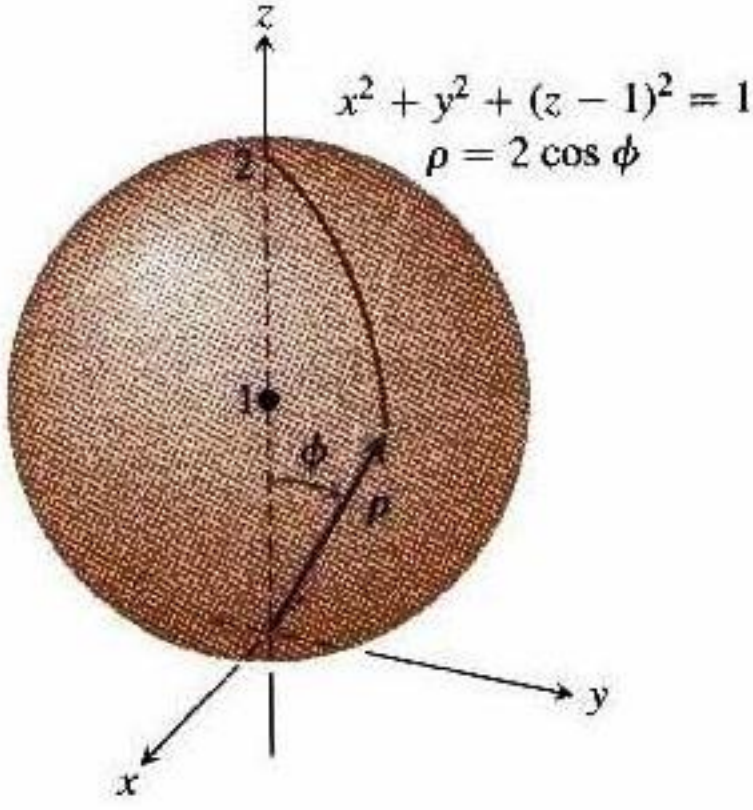
$$\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (\rho \cos \phi - 1)^2 = 1$$

$$\rho^2 \sin^2 \phi (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + \rho^2 \cos^2 \phi - 2\rho \cos \phi + 1 = 1$$

$$\rho^2 (\underbrace{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}_1) = 2\rho \cos \phi$$

$$\rho^2 = 2\rho \cos \phi$$

$$\rho = 2 \cos \phi$$



ŞEKİL 15.43 Örnek 3'teki küre.

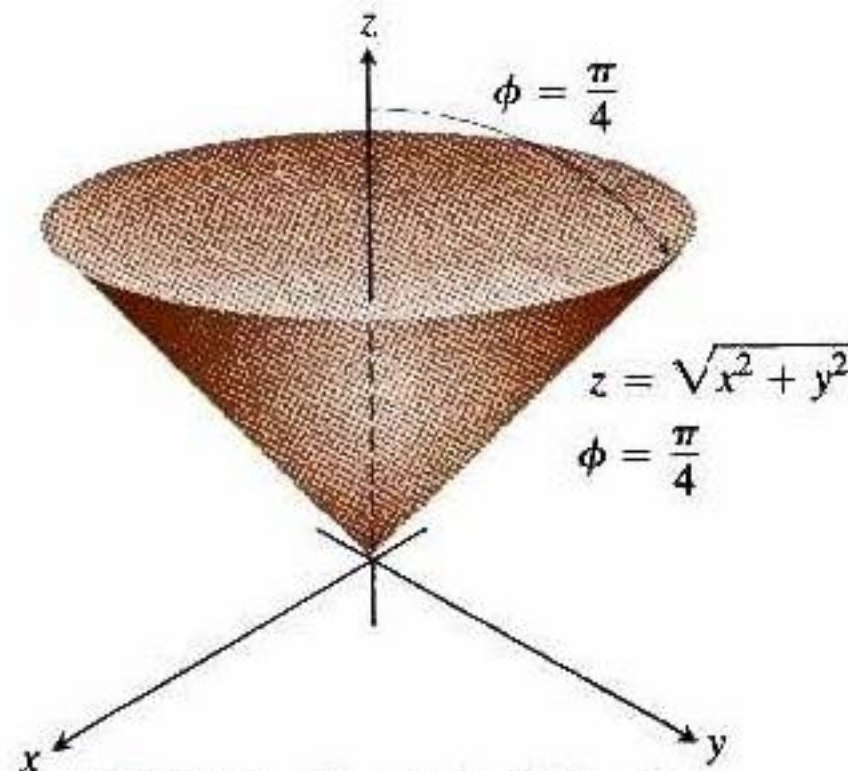
Şekil 15.43'e bakın.

ÖRNEK 4 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz (Şekil 15.44).

Çözüm 1 Geometri kullanın. Koni, z -eksenine göre simetriktir ve yz -düzleminin birinci bölgesini $z = y$ doğrusu boyunca keser. Bu nedenle, koni ile pozitif z -ekseni arasındaki açı $\pi/4$ radyandır. Koni, küresel ϕ koordinatı $\pi/4$ 'e eşit olan noktalardan oluşur dolayısıyla denklemi $\phi = \pi/4$ 'tür.

Çözüm 2 Çebir kullanın. x , y ve z 'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırsak aynı sonucu elde ederiz:



ŞEKİL 15.44 Örnek 4'teki koni.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi}$$

$$\rho \cos \phi = \rho \sin \phi$$

$$\cos \phi = \sin \phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

Örnek 3

$$\rho \geq 0, \sin \phi \geq 0$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Küresel koordinatlar, merkezleri orijinde olan küreleri, kenarı z -ekseni olan yarıdüzlemleri ve tepe noktaları orijinde, eksenleri z -ekseninde olan konileri tanımlamakta yararlıdır. Bu gibi yüzeylerin sabit koordinat değerli denklemleri vardır:

$$\rho = 4$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Küre, yarıçap 4, merkez orijinde

Orijinden yukarı açılan koni, pozitif z -ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar

z -ekseni etrafında dönen yarı düzlem, pozitif x -ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar.

14.3 İKİ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

İki katlı integrallerin Fizik, Matematik, İstatistik ve Mühendisliklerde çeşitli uygulamaları vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını vereceğiz.

ALAN HESABI

İki katlı integral tanımlanırken $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_B dx dy$

olduğu verilmişti. Her $(x, y) \in B$ için $f(x, y) \equiv 1$ olarak tanımlanırsa yukardaki eşitlik

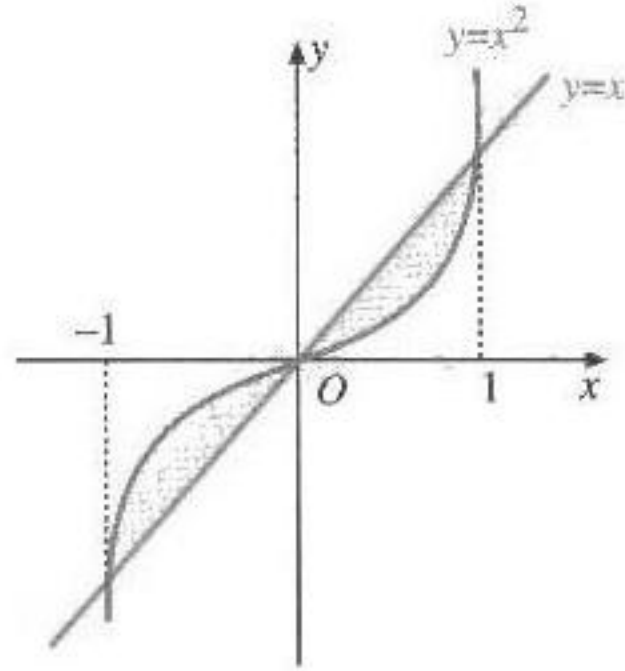
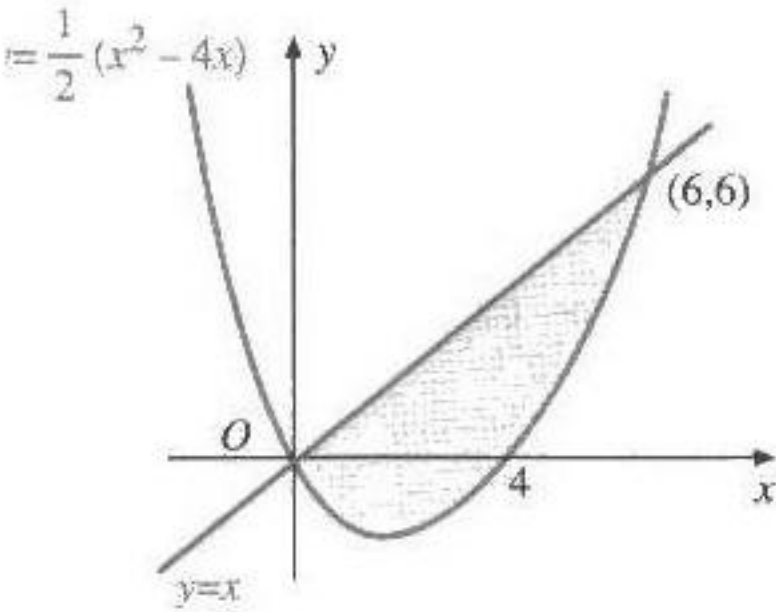
$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \iint_B dx dy$$

şeklini alır. Parçalanma nasıl yapılırsa yapılsın ΔA_k alanlarının toplamı B bölgesinin alanı olacağından

$$\text{Alan}(B) = \iint_B dx dy \quad (14.2)$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından

$$\text{Alan}(B) = \iint_B r dr d\varphi \quad \text{bulunur.} \quad (14.3)$$



ÖRNEK : $2y = x^2 - 4x$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm : Söz konusu bölge yandaki şekilde taralı olarak gösterilmiştir. Bu bölge bir düşey basit bölge olduğundan, integrali önce y , sonra x değişkenine göre almakta yarar vardır. Buna göre A alanı

$$A = \int_0^6 \int_{\frac{1}{2}(x^2-4x)}^x dy dx = \int_0^6 y \Big|_{\frac{1}{2}(x^2-4x)}^x dx = \int_0^6 \left(x - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^6 = 54 - 36 = 18 \quad \text{birimkare olur.}$$

ÖRNEK : $y = x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

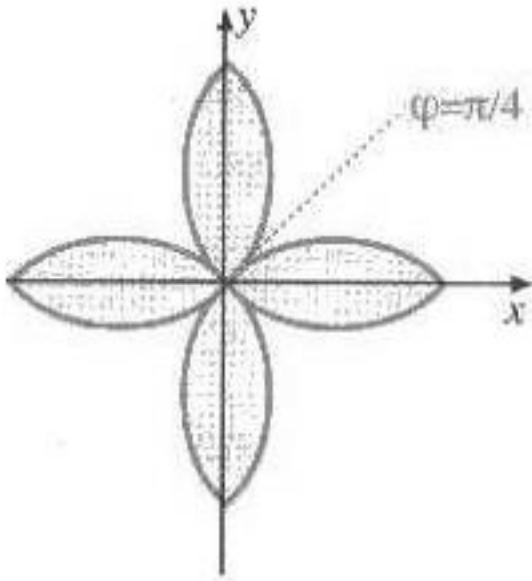
Çözüm : Alanı istenen bölge yanda gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, söz konusu bölge iki basit bölgeden meydana gelmiştir.

Dolayısıyla

$$A = \int_{-1}^0 \int_x^{x^3} dy dx + \int_0^1 \int_{x^3}^x dy dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ÖRNEK : $r = a \cos 2\varphi$ dört yapraklı gül eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm :

$$A = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a \cos 2\varphi} r dr d\varphi = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{a \cos 2\varphi} d\varphi$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi$$

$$= 2a^2 \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \pi a^2$$

birimkare olur.

ÖRNEK : $r = 2$ çemberinin dışında, $r = 2(1 + \cos \varphi)$ kardioidinin içinde kalar bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Alanı istenen bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Bu bölgede alınır herhangi bir (r, φ) noktasının koordinatları

$$2 \leq r \leq 2(1 + \cos \varphi) \text{ ve } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

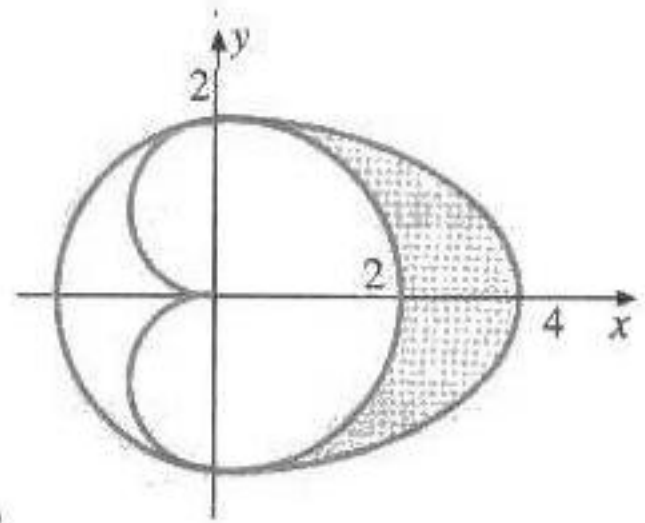
eşitliklerini sağlarlar. Bölgenin kutup eksenine (Ox - eksenine) göre simetrik olduğu da gözönüne alınırsa

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\cos \varphi)} r dr d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\cos \varphi)} r dr d\varphi$$

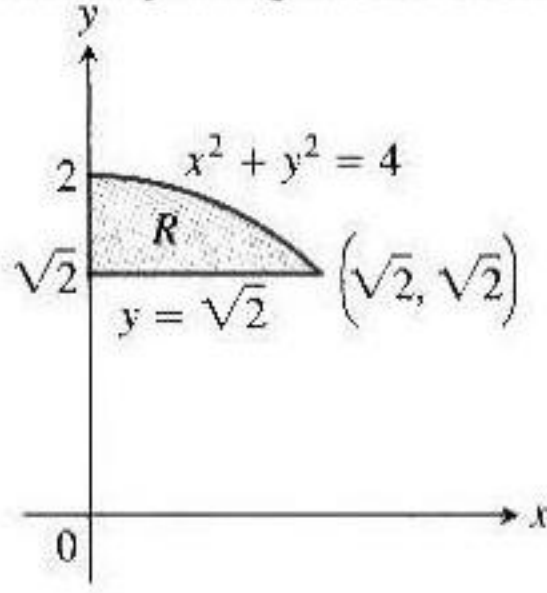
$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_2^{2(1+\cos \varphi)} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = 4 \left(2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

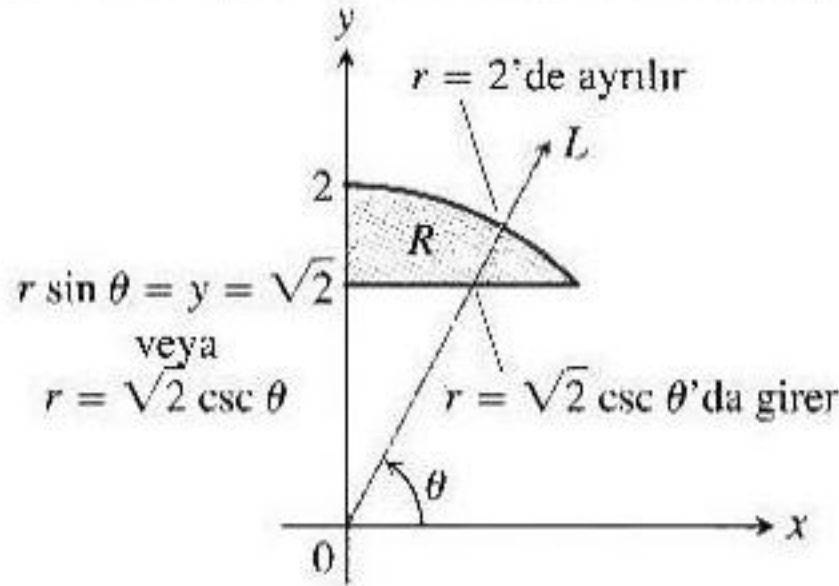
$= \pi + 8$ birimkare olur.



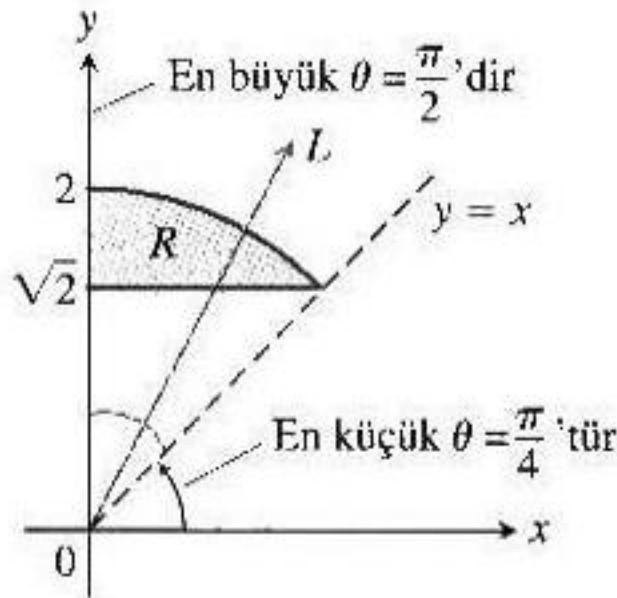
1. *Bir çizim:* Bölgeyi çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun r -sınırlarını bulun:* Orijinden geçen ve R 'yi artan r yönünde kesen bir L ışını düşünün L 'nin R 'ye girdiği ve çıktığı r -değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun r -sınırlarıdır. Genellikle L 'nin pozitif x -ekseniyle yaptığı θ açısına bağlıdır.



3. *İntegrasyonun θ -sınırlarını bulun:* R 'yi sınırlayan en büyük ve en küçük θ -değerlerini bulun. Bunlar integrasyonun θ -sınırlarıdır.



İntegral

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2} \csc \theta}^{r=2} f(r, \theta) r dr d\theta$$

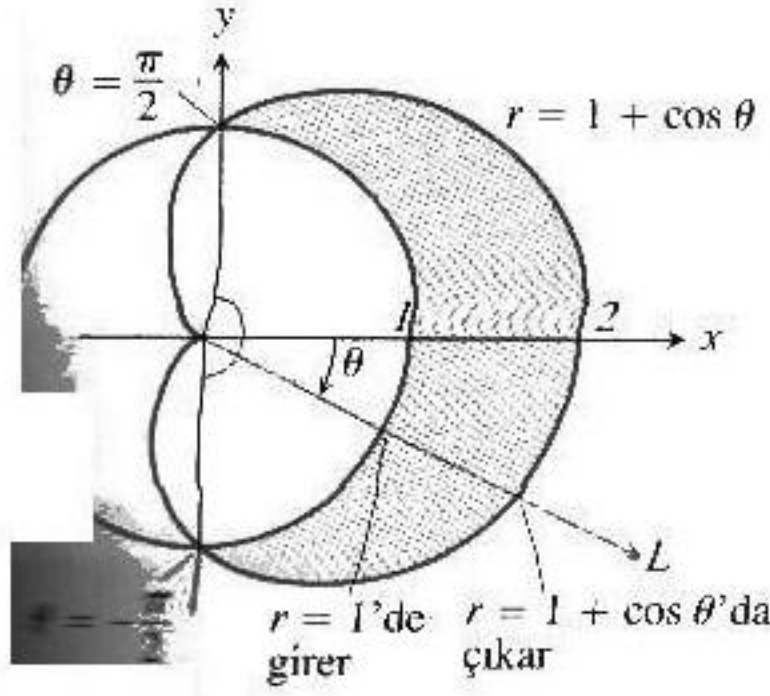
olur.

ÖRNEK 1 İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

$r = 1 + \cos \theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan R bölgesinde $f(r, \theta)$ 'yi integre etmek için integrasyon sınırlarını bulun.

Çözüm

- Önce bölgeyi çizer ve sınırlayıcı eğrileri belirtiriz (Şekil 15.23).
- Sonra *integrasyonun r -sınırlarını* buluruz. Orijinden çıkan tipik bir ışın $r = 1$ 'de R 'ye girer ve $r = 1 + \cos \theta$ 'da çıkar.



ÖRNEK 15.23 Örnek 1'deki bölge için kutupsal koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulmak..

3. Son olarak *integrasyonun θ-sınırlarını* buluruz: Orijinden çıkarak *R*'yi kesen ışınlar $\theta = -\pi/2$ 'den $\theta = \pi/2$ 'ye kadar değişir. İntegral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} f(r, \theta) r dr d\theta$$

olur.

$f(r, \theta)$, değeri 1 olan sabit fonksiyon ise, f 'nin R üzerindeki integrali R 'nin alanıdır.

Kutupsal Koordinatlarda Alan

Kutupsal koordinat düzleminde kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin alanı

$$A = \iint_R r dr d\theta$$

ile bulunur.

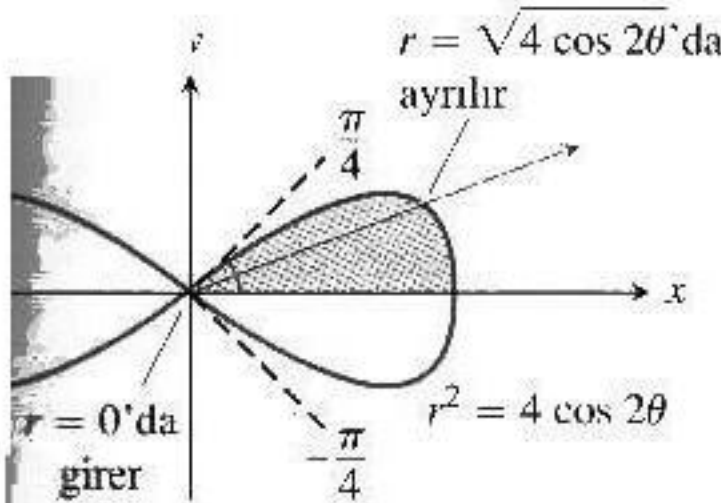
Bu alan formülü, ispatlamayacağımız halde, daha önceki bütün formüllerle uyumludur.

ÖRNEK 2 Kutupsal Koordinatlarda Alan Bulmak

$r^2 = 4 \cos 2\theta$ fiyonguyla çevrelenen bölgenin alanını bulun.

Çözüm İntegrasyon sınırlarını belirlemek için fiyongu çizer (Şekil 15.24) ve simetriden dolayı toplam alanın, birinci dördte bir bölgedeki kısmın 4 katı olduğunu görürüz.

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{4 \cos 2\theta}} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{4 \cos 2\theta}} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta d\theta = 4 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 4 \end{aligned}$$



ÖRNEK 15.24 Renkli bölge üzerinde integral almak için, r 'yi 0'dan $\sqrt{4 \cos 2\theta}$ 'ya ve θ 'yi 0'dan $\pi/4$ 'e götürürüz (Örnek 2).

Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Çevirmek

Kartezyen bir $\iint_R f(x, y) dx dy$ integralini kutupsal bir integrale çevirme prosedürünün iki adımı vardır. Önce $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ yazın ve Kartezyen integraldeki $dx dy$ yerine $r dr d\theta$ koyun. Sonra R 'nin sınırı için kutupsal integrasyon sınırlarını bulun.

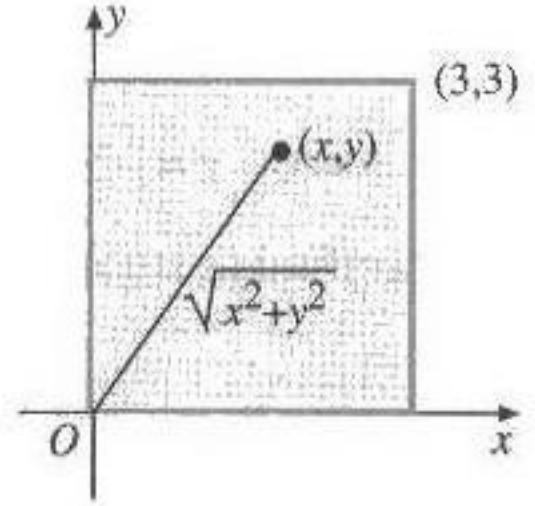
Bu durumda Kartezyen integral, G kutupsal koordinatlardaki integrasyon bölgesini belirtmek üzere,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

halini alır. Bu, Bölüm 5'teki değişken değiştirme yöntemi gibidir. Yalnız bu defa bir yerine değiştirilmesi gereken iki değişken vardır. $dx dy$ yerine, $dr d\theta$ değil, $r dr d\theta$ yazıldığına dikkat edin. Katlı integrallerde değişken dönüşümünün (yerine koyma) daha genel bir incelemesi Bölüm 15.7'de verilmiştir.

$$M = \iint_B \sigma(x, y) dx dy \quad (14.5)$$

bulunur.



ÖRNEK : Bir kenarının uzunluğu 3 birim olan kare şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın karenin bir köşesine olan uzaklığının karesi ile orantılı olarak değişmektedir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

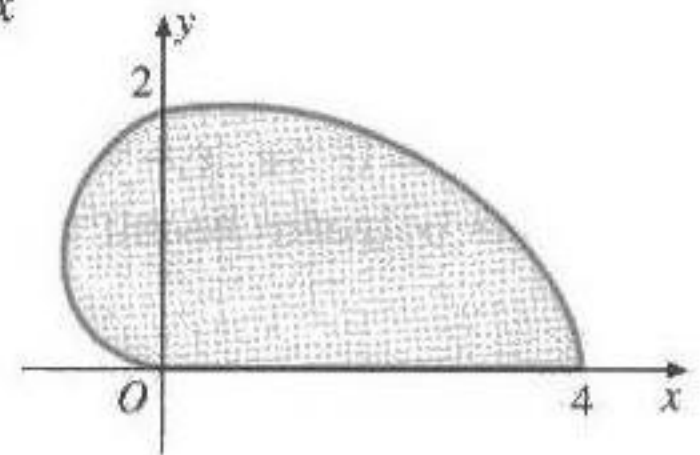
Çözüm : Karenin sözkonusu köşesini orijin, bu köşeden çıkan iki kenarı da koordinat eksenleri olarak alalım. k orantı katsayısı olmak üzere

$\sigma(x, y) = k(x^2 + y^2)$ olacağından

$$M = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^3 k(x^2 + y^2) dy dx = k \int_0^3 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 dx$$

$$= k \int_0^3 (3x^2 + 9) dx = k \left(x^3 + 9x \right) \Big|_0^3 = 54k$$

bulunur.



ÖRNEK : $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardioidinin üst yarısına yerleştirilen ve yoğunluğu, her noktada o noktanın orijine olan uzaklığı ile orantılı olan bir levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm : Verilen levha yandaki şekilde gösterilmiştir. $\sigma = kr$ olacağından

$$M = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos\varphi)} kr \cdot r dr d\varphi = k \int_0^\pi \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{8}{3} k \int_0^{\pi} (1 + 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) d\varphi \\
&= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi} \left[1 + 3 \cos \varphi + 3 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \right] d\varphi \\
&= \frac{8}{3} k \left[\varphi + 3 \sin \varphi + \frac{3}{2} \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi + \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{8}{3} k \left(\frac{5}{2} \pi \right) = \frac{20}{3} k\pi
\end{aligned}$$

olur.

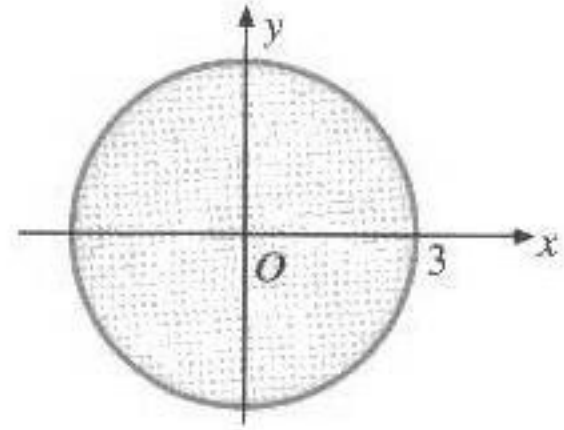
ÖRNEK : 3 cm yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın daire merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde yoğunluk 6 olduğuna göre bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm : (x, y) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x, y) = k \sqrt{x^2 + y^2}$ dir.

$x^2 + y^2 = 9$ için $\sigma(x, y) = 6$ olduğundan

$6 = k \sqrt{9} \Rightarrow 6 = 3k \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \sigma(x, y) = 2 \sqrt{x^2 + y^2}$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
M &= \iint_B \sigma(x, y) dx dy = \iint_B 2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r \cdot r dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^3 d\varphi = 18 \int_0^{2\pi} d\varphi = 36\pi
\end{aligned}$$



olur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

(x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y)$ olan ve xOy düzleminde bir B bölge-sine yerleştirilen bir levhayı gözönüne alalım. B bölgesinin bir parçalanması

$P = \{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ ve (x_k^*, y_k^*) da B_k bölgesinde bir nokta olsun. B_k böl-gesinde bulunan levhanın kütlesi, yaklaşık olarak $\sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ kadardır. Burada ΔA_k , B_k bölgesinin alanını göstermektedir. Bu kütleyi (x_k^*, y_k^*) nok-tasına toplanmış gibi düşünebiliriz. Böyle noktalara **kütlesel nokta** adı verilir.

Bilindiği gibi, bir kütlesel nokta sistemin ağırlık merkezinin $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ koordinat-ları

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k \sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k}{\sum_{k=1}^n \sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k}, & \bar{y} &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k \sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k}{\sum_{k=1}^n \sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. $\sigma(x, y)$ sürekli olduğunda, yukarıdaki toplamalar birer

integral toplam olup $\|P\| \rightarrow 0$ için B üzerinde iki katlı integrale yaklaşır. Buna göre,

$$\bar{x} = \frac{\iint_B x \sigma(x, y) dA}{\iint_B \sigma(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_B y \sigma(x, y) dA}{\iint_B \sigma(x, y) dA} \quad (14.6)$$

olur. Paydadaki integraller levhanın kütlesi olduğundan

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_B x \sigma(x, y) dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_B y \sigma(x, y) dA \quad (14.7)$$

yazılabilir.

Eğer levhanın kütlesi sabit σ değerine eşit, yani levha homogen ise, $M = k.A$ ve

$$\iint_B x k dx dy = k \iint_B x dx dy \quad \text{olacağından}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_B x dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_B y dx dy \quad (14.8)$$

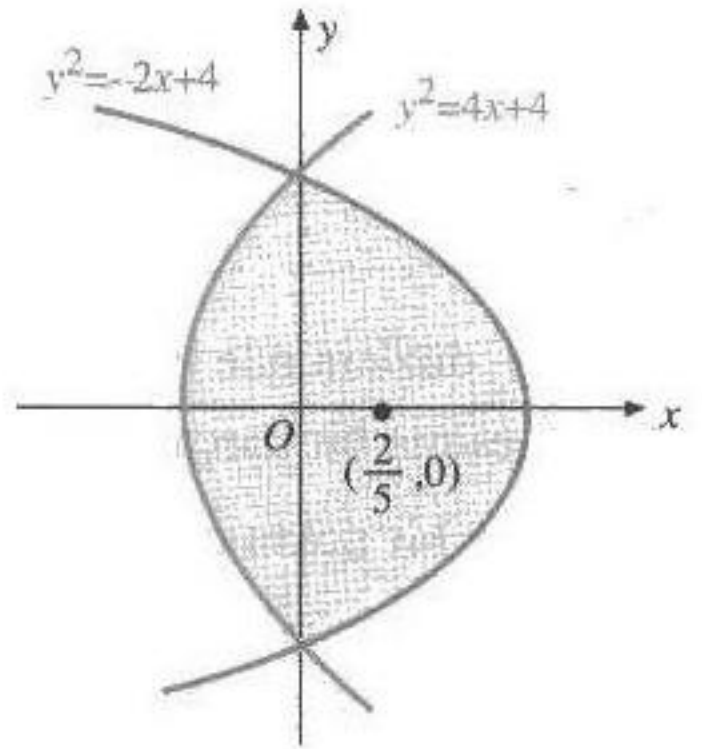
olur. Burada A , levhanın alanını göstermektedir.

ÖRNEK : $y^2 = 4x + 4$ ve $y^2 = -2x + 4$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Cözüm : Önce levhanın alanını bulalım.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx dy = 2 \int_0^2 \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx dy = 2 \int_0^2 x \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dy \\ &= \int_0^2 \left(6 - \frac{3}{2} y^2 \right) dy = 6y - \frac{1}{2} y^3 \Big|_0^2 = 8 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

bulunur.



$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \iint_B x dx dy = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} x dx dy = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dy \\ &= \frac{1}{16} \int_{-2}^2 \left(\frac{3}{16} y^4 - \frac{3}{2} y^2 + 3 \right) dy = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

olur. Bölge Ox - eksenine göre simetrik ve levha homogen olduğundan $\bar{y} = 0$ olacaktır. O halde ağırlık merkezi $M\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ noktasıdır.

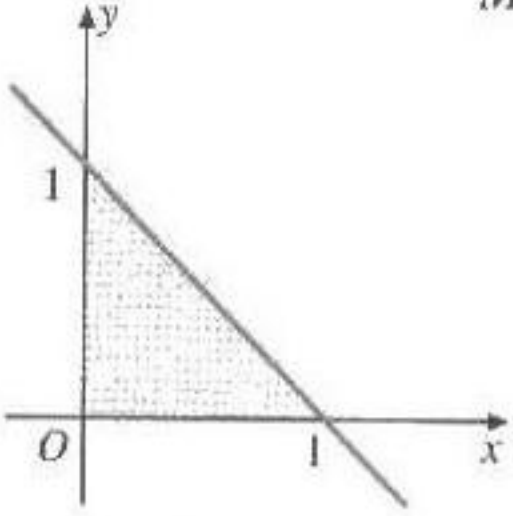
ÖRNEK : $x = 0$, $y = 0$ ve $x + y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan üçgensel bölge içine yerleştirilen bir levhanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu o noktanın koordinatları çarpımına eşittir. Bu levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :

$$M = \iint_B \sigma(x, y) dx dy = \iint_B xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy dy dx$$

$$= \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$



olur. Buna göre

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_B x \sigma(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 \int_0^{1-x} x xy dy dx$$

$$= 24 \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_0^{1-x} dx = 12 \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx$$

$$= 12 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = 12 \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1$$

$$= 12 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

bulunur. Benzer şekilde $\bar{y} = \frac{2}{5}$ olduğu gösterilebilir. Buna göre verilen levhanın ağırlık merkezi $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$ noktasıdır.

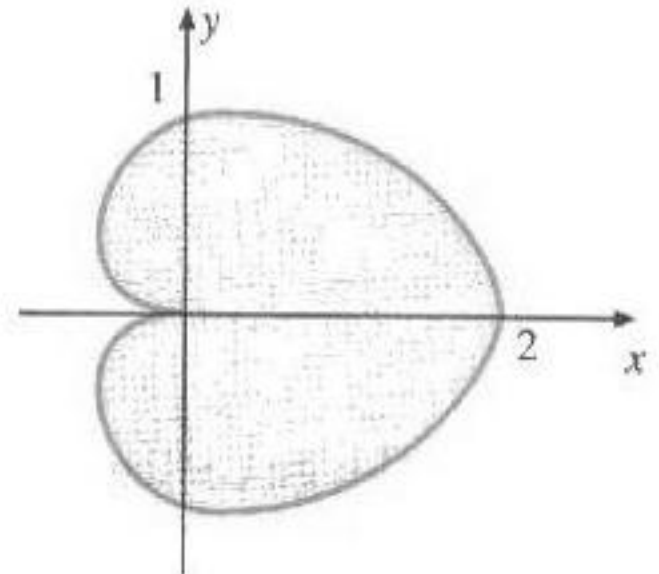
ÖRNEK : $r = 1 + \cos \varphi$ kardioidi tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu, o noktanın orijine (kutba) olan uzaklığıyla ters orantılıdır. Levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm : $\sigma(x, y) = k \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ olacağından, levhanın kütlesi

$$M = \iint_B \sigma(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \varphi} dr d\varphi$$

$$= k \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = k(\varphi + \sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 2k\pi$$

olur. Buna göre



$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_B x \sigma(x, y) dx dy = \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \varphi} r \cos \varphi \frac{k}{r} r dr d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2k\pi} k \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \cos\varphi dr d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 \cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + \cos^3\varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\varphi + (1+\cos 2\varphi) + (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi] d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\sin\varphi + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{M} \iint y \sigma(x,y) dx dy = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \sin\varphi \frac{k}{r} r dr d\varphi \\
&= \frac{k}{2k\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi \\
&= \frac{-1}{4\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0
\end{aligned}$$

olacağından, ağırlık merkezi $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasıdır.

Kütle: $M = \iint_R \delta(x, y) dA$ $\delta(x, y)$, (x, y) 'deki yoğunluktur.

Birinci momentler: $M_x = \iint_R y\delta(x, y) dA$, $M_y = \iint_R x\delta(x, y) dA$

Kütle merkezi: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$

ÖRNEK 4 Değişken Yoğunluklu İnce Bir Plakanın Kütle Merkezini Bulmak

İnce bir plaka, birinci dördte bir bölgede x -ekseni ile $x = 1$ ve $y = 2x$ doğrularının sınırladığı üçgensel bölgeyi kaplamaktadır. (x, y) noktasında plakanın yoğunluğu $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ 'dır. Plakanın kütlelerini ve koordinat eksenleri etrafındaki birinci momentleri ile kütle merkezini bulun.

Çözüm Plakayı çizer ve hesaplamamız gereken integrallerin integrasyon sınırlarını belirleyecek kadar detay ekleriz (Şekil 15.17).

Plakanın kütlesi

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx = \left[8x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = 14 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

x -ekseni etrafındaki birinci moment

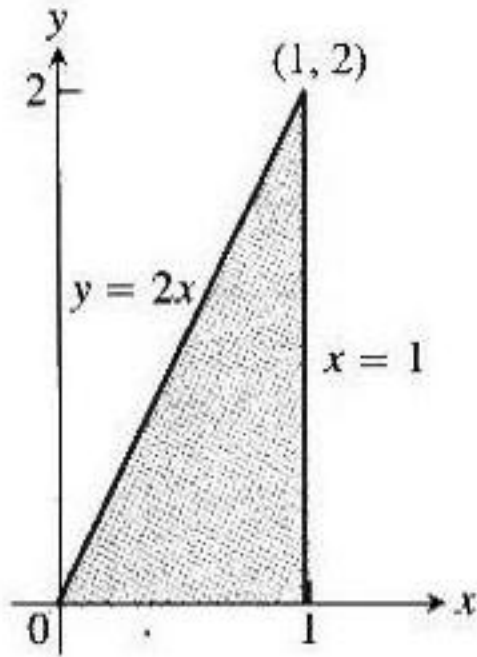
$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2) dx \\ &= \left[7x^4 + 4x^3 \right]_0^1 = 11 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Benzer bir hesaplama, y -ekseni etrafındaki momenti verir:

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x, y) dy dx = 10.$$

Dolayısıyla kütle merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14} \quad \text{olur.}$$



ŞEKİL 15.17

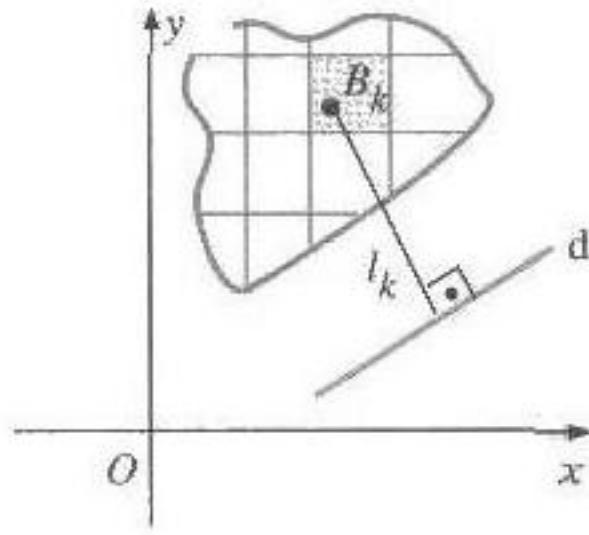
EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

Bir noktasal kütlenin bir eksene göre eylemsizlik momenti, o noktanın kütlesi ile eksene olan uzaklığının karesi çarpımıdır. Bir nokta sisteminin bir eksene göre eylemsizlik momenti de, sistemdeki noktaların eylemsizlik momentlerinin toplamına eşittir.

Bir B bölgesine yerleştirilmiş bir levhanın $\sigma(x, y)$ yoğunluğu sürekli olsun. B bölgesi $B_1, B_2, \dots, B_n$ gibi alt bölgelere ayrıldığında levha da n tane parçaya ayrılmış olur. $P_k(x_k^*, y_k^*)$, B_k bölgesinin herhangi bir noktasını ve ΔA_k , B_k bölgesinin alanını gösterebilir.

$P_k(x_k^*, y_k^*)$ noktasının d eksenine olan uzaklığını l_k ile gösterelim. B_k bölgesindeki levhanın kütlesi, yaklaşık olarak, $m_k = \sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ olacaktır. Dolayısıyla B_k bölgesindeki levha parçasının d eksenine göre eylemsizlik momenti $\sigma(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \cdot l_k^2$ olacaktır. Buna göre tüm levhanın d eksenine göre eylemsizlik momenti, yaklaşık olarak,

$$\sum_{k=1}^n \sigma(x_k^*, y_k^*) l_k^2 \Delta A_k$$



olur. Eğer parçalanma, normu sıfıra gidecek şekilde yapılırsa levhanın I_d eylemsizlik momenti

$$I_d = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sigma(x_k^*, y_k^*) l_k^2 \Delta A_k$$

olacaktır. Sağdaki limit $\iint_B \sigma(x, y) l^2 dx dy$ integrali olduğundan

$$I_d = \iint_B \sigma(x, y) l^2(x, y) dx dy \quad (14.9)$$

bulunur. Bir $P(x, y)$ noktasının Ox - eksenine olan uzaklığı $|y|$, Oy - eksenine olan uzaklığı $|x|$ olduğundan, bir B levhasının Ox ve Oy - eksenlerine göre eylemsizlik momentleri, sırasıyla,

$$I_x = \iint_B \sigma(x, y) y^2 dx dy \quad \text{ve} \quad I_y = \iint_B \sigma(x, y) x^2 dx dy \quad \text{olur.} \quad (14.10)$$

Bir noktaya göre eylemsizlik momenti de benzer şekilde tanımlanabilir. Burada l , $P(x, y)$ noktasının söz konusu noktaya olan uzaklığıdır. Örneğin bir B levhasının $O(0, 0)$ noktasına göre eylemsizlik momenti, $l^2 = x^2 + y^2$ olduğundan,

$$I_0 = \iint_B (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy \quad (14.11)$$

olacaktır. I_x ve I_y ifadeleri gözönüne alındığında

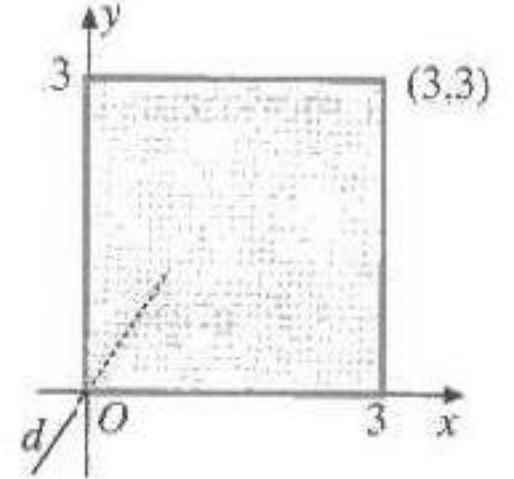
$$I_0 = I_x + I_y \quad \text{yazılabilir.}$$

ÖRNEK : Bir kenarının uzunluğu 3 birim olan kare şeklindeki homogen bir levhanın, karenin bir köşesinden geçen ve levha düzlemine dik olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

Çözüm : Söz konusu köşeyi orijin, bu köşeden geçen kenarları koordinat eksenleri olarak alalım. Kare üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktasının adı geçen doğruya olan uzaklığı, o noktanın $O(0, 0)$ noktasına olan uzaklığından başka birşey değildir. Buna göre;

$$I_d = I_0 = \int_0^3 \int_0^3 (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^3 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^3 dx$$

$$= \int_0^3 (3x^2 + 9) dx = x^3 + 9x \Big|_0^3 = 54$$



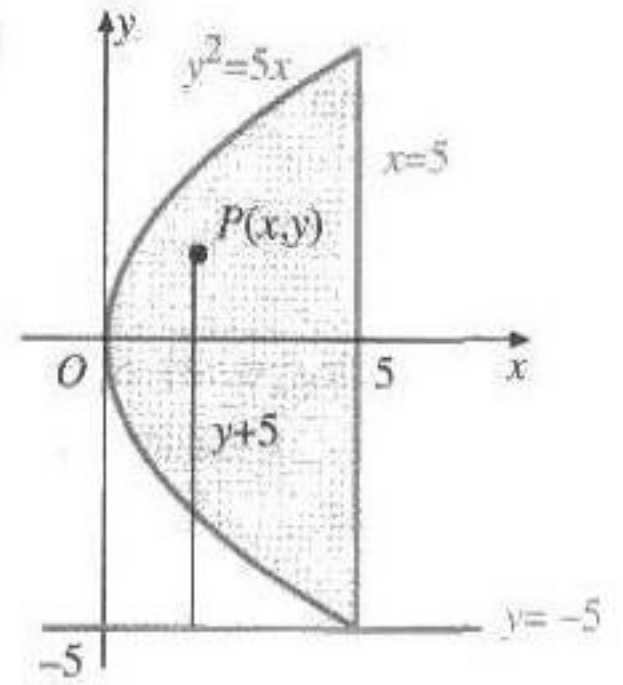
olur. Levha homogen olduğundan $\sigma(x, y)$ sabittir. Bu durumda $\sigma(x, y) \equiv 1$ alınabilir.

ÖRNEK : $y^2 = 5x$ parabolü ile $x = 5$ doğrusu tarafından sınırlanan homogen levhanın $y = -5$ ve $x = 5$ doğrularına göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

Çözüm : Levha üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktasının $y = -5$ doğrusuna olan uzaklığı $l = y + 5$ birimdir. $\sigma(x, y) = k$ olsun. Bu durumda

$$I_1 = k \int_{-5}^5 \int_{y^2/5}^5 (y + 5)^2 dx dy = k \int_{-5}^5 (y + 5)^2 \left(5 - \frac{y^2}{5} \right) dy$$

$$= \frac{1}{5} k \int_{-5}^5 (625 + 250y - 10y^3 - y^4) dy = 1000 k$$



olur.

Şimdi de verilen levhanın $x = 5$ doğrusuna göre eylen
Levha içinde alınan bir noktanın $x = 5$ doğrusuna olan uzaklığı $l = 5 - x$ olacağından

$$I_2 = k \int_0^5 \int_{-\sqrt{5x}}^{\sqrt{5x}} (5 - x)^2 dy dx = 2k \int_0^5 (5 - x)^2 \sqrt{5x} dx$$

$$= 2\sqrt{5} k \int_0^5 (25x^{1/2} - 10x^{3/2} + x^{5/2}) dx$$

$$= 2\sqrt{5} k \left(\frac{50}{3} x^{3/2} - 4x^{5/2} + \frac{2}{7} x^{7/2} \right) \Big|_0^5$$

$$= \frac{4000}{21} k$$

bulunur.

yorsak, üçüncüyü otomatik olarak biliyoruz demektir (I_0 momentine bazen **z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini** temsil eden I_z de denir. Bu durumda, $I_z = I_x + I_y$ bağıntısına **Dik Eksen Teoremi** denir).

Jirasyon yarıçapı R_x

$$I_x = MR_x^2$$

denklemleriyle tanımlanır. Plakanın tüm kütlelerinin aynı I_x 'i verecek şekilde **x-ekseninden** ne kadar uzakta yoğunlaştığını söyler. Jirasyon yarıçapı eylemsizlik momentini bir **kütle** ve bir **uzunluk** cinsinden ifade etmenin uygun bir yolunu verir. R_y ve R_0 yarıçapları aynı şekilde

$$I_y = MR_y^2 \quad \text{ve} \quad I_0 = MR_0^2$$

ile verilir. Eylemsizlik momentleri'nin (ikinci momentler) yanı sıra jirasyon yarıçaplarının formüllerini de veren Tablo 15.2'deki formülleri elde etmek için karekök alırız.

TABLO 15.2 xy -düzleminde ince plakalar için ikinci moment formülleri

Eylemsizlik momentleri (ikinci momentler):

x-ekseni etrafında: $I_x = \iint y^2 \delta(x, y) dA$

y-ekseni etrafında: $I_y = \iint x^2 \delta(x, y) dA$

Bir L doğrusu etrafında: $I_L = \iint r^2(x, y) \delta(x, y) dA$,
 $r(x, y) = (x, y)$ 'den L 'ye olan uzaklık

Orijin etrafında (kutupsal moment): $I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA = I_x + I_y$

Jirasyon yarıçapı:

x-ekseni etrafında:	$R_x = \sqrt{I_x/M}$
y-ekseni etrafında:	$R_y = \sqrt{I_y/M}$
Orijin etrafında:	$R_0 = \sqrt{I_0/M}$

ÖRNEK 5 Eylemsizlik Momentleri ve Jirasyon Yarıçapları Bulmak

Örnek 4'teki ince plaka için (Şekil 15.17), koordinat eksenleri ve orijin etrafındaki **eylemsizlik momentlerini** ve jirasyon yarıçaplarını bulunuz.

Çözüm Örnek 4'te verilen $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ yoğunluk fonksiyonunu kullanarak **x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini**

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx \\ &= [8x^5 + 4x^4]_0^1 = 12 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

G , xyz koordinat sisteminde bir bölge ve f de bu bölge üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $P = \{ G_1, G_2, \dots, G_n \}$, G bölgesinin bir parçalanması, (x_k^*, y_k^*, z_k^*) da G_k alt bölgesinin herhangi bir noktası olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

ifadesine bir integral toplamı veya Riemann toplamı denir. Burada ΔV_k , G_k bölgesinin hacmini göstermektedir. $\|P\|$ sayısı $G_1, G_2, \dots, G_n$ alt bölgelerinin çaplarının en büyüğü olsun. Analiz ve İleri Matematik kitaplarında, f sürekli olduğunda $\|P\| \rightarrow 0$ için Riemann toplamının bir limitinin varolduğu bilinmektedir. Bu limite f nin G üzerindeki üç katlı integrali denir, $\iiint_G f(x, y, z) dV$ ile

gösterilir. Buna göre

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k = \iiint_G f(x, y, z) dV$$

olur. Eğer G bölgesinin parçalanması, koordinat eksenlerine paralel düzlemlerle yapılırsa, ΔV_k hacmi $\Delta x_k \cdot \Delta y_k \cdot \Delta z_k$ olacağından, yukarıdaki integral

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz \text{ biçiminde de yazılabilir.}$$

Σ toplam sembolünün ve limitin özelliklerinden yararlanarak, üç katlı integralerin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca gösterilebilir.

$$1) \iiint_G k f(x, y, z) dV = k \iiint_G f(x, y, z) dV$$

$$2) \iiint_G [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV + \iiint_G g(x, y, z) dV$$

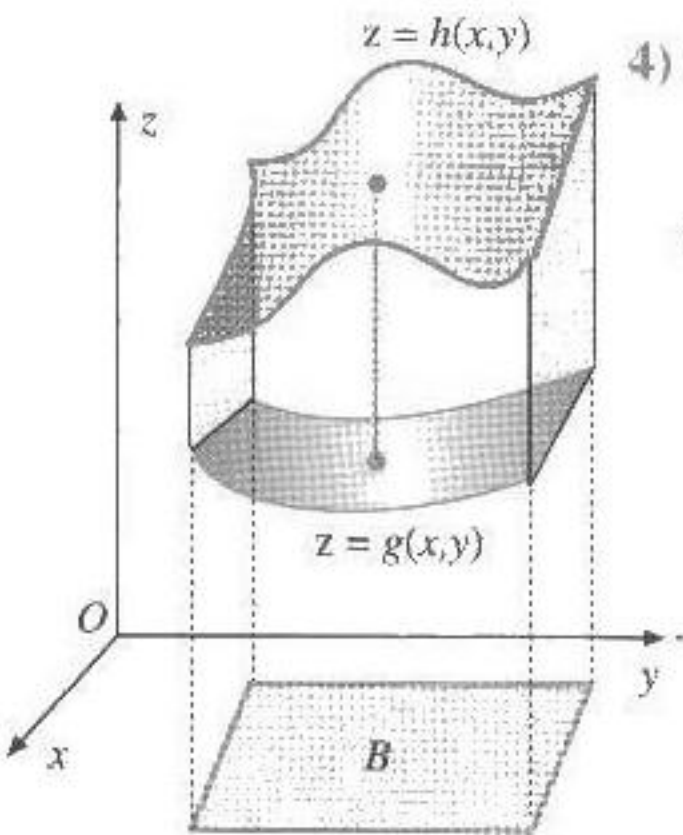
$$3) G \text{ üzerinde } f(x, y, z) \geq 0 \text{ ise } \iiint_G f(x, y, z) dV \geq 0$$

$$z = h(x, y)$$

$$z = g(x, y)$$

4) G_1 ve G_2 iç bölgeleri ayrık iki bölge ise

$$\iiint_{G_1 \cup G_2} f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV$$



Şimdi kabul edelim ki, G bölgesi alttan $z = g(x, y)$, üstten $z = h(x, y)$ yüzeyleri, yandan da bir silindirik yüzey ile sınırlanmış olsun. Bu bölgenin xOy düzlemi üzerindeki dik izdüşümü B ise

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left[\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \quad \text{dir. 161}$$

ÖRNEK : G bölgesi, $x = 0$, $x = 4$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 1$ ve $z = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G (x + yz) dx dy dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : G bölgesi üstten $z = 3$, alttan $z = 1$ düzlemleri tarafından kapatılmıştır. G nin xOy düzlemi üzerindeki izdüşümü

$B = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \}$ dikdörtgensel bölgesi olduğundan

$$\begin{aligned} I &= \iint_B \left[\int_{z=1}^{z=3} (x + yz) dz \right] dx dy = \iint_B \left(zx + \frac{y}{2} z^2 \right) \Big|_1^3 dx dy = \iint_B (3x + 4y) dx dy \\ &= \int_0^4 \int_1^2 (3x + 4y) dy dx = \int_0^4 (3xy + 2y^2) \Big|_1^2 dx \\ &= \int_0^4 (3x + 6) dx = \frac{3}{2} x^2 + 6x \Big|_0^4 = 48 \end{aligned}$$

ÖRNEK : G bölgesi alttan $z = x^2 + y^2$, üstten $z = 8 - x^2 - y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G xy dx dy dz \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

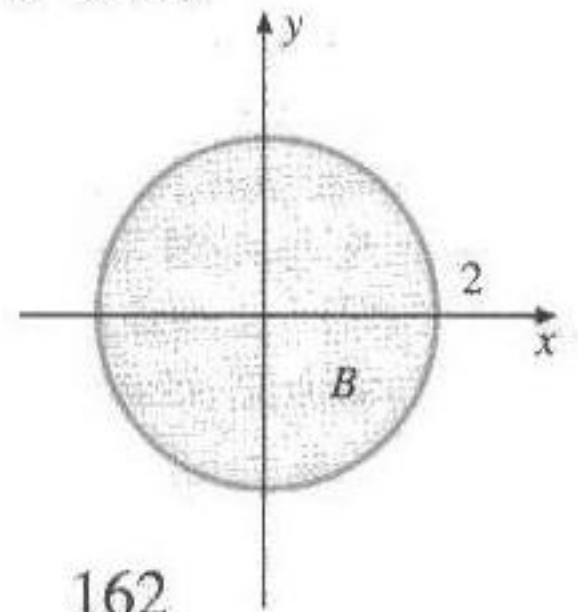
Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda çizilmiştir. Bu bölgenin izdüşümünü bulalım.

$z = x^2 + y^2$ ve $z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ bulunur. $x^2 + y^2 = 4$ için $z = 4$ olur. O halde iki paraboloidin arakesit eğrisi $z = 4$ düzlemi üzerinde $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Bunun xOy düzlemindeki izdüşümü de $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Dolayısıyla B izdüşüm bölgesi $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesidir.

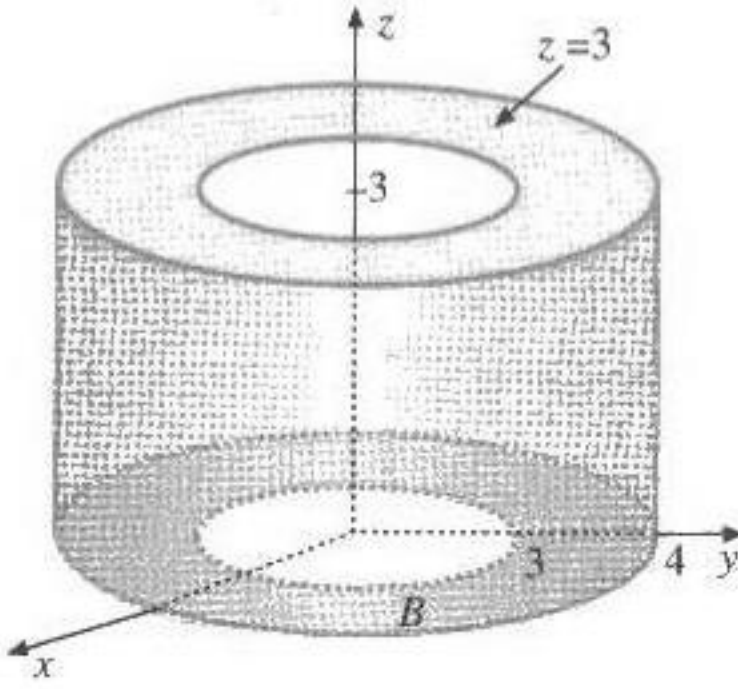
$$I = \iint_B \left[\int_{z=x^2+y^2}^{z=8-x^2-y^2} xy dz \right] dx dy = \iint_B xy(8 - 2x^2 - 2y^2) dx dy$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cos \varphi r \sin \varphi (8 - 2r^2) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sin \varphi \cos \varphi (8r^3 - 2r^5) dr d\varphi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \left(2r^4 - \frac{1}{3} r^6 \right) \Big|_0^2 d\varphi \\
&= \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{32}{3} \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$



ÖRNEK : G bölgesi, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$ silindirleri ile $z = 0$ ve $z = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

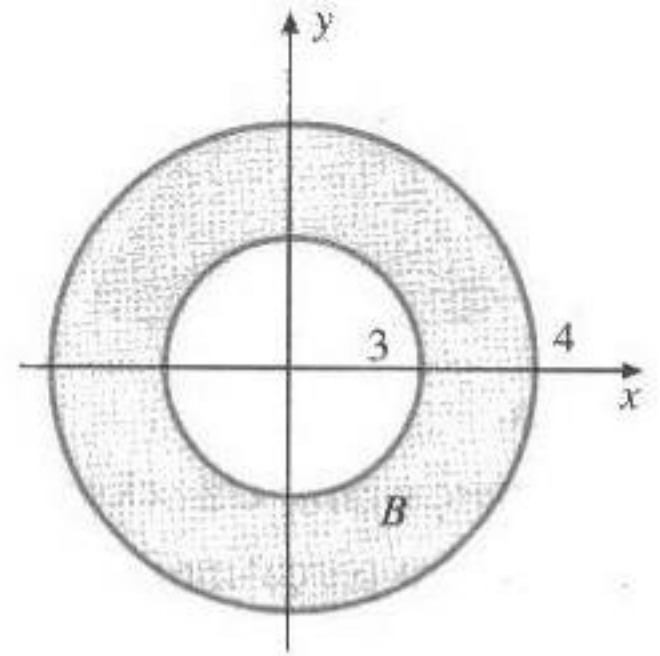
$$I = \iiint_G x^2 dx dy dz \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda verilmiştir. Bu bölgenin xOy düzlemi üzerindeki dik izdüşümü B halkasıdır. Buna göre

$$I = \iint_B \left[\int_0^3 x^2 dz \right] dx dy = \iint_B x^2 z \Big|_0^3 dx dy = \iint_B 3x^2 dx dy$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned}
I &= 3 \int_0^{2\pi} \int_3^4 r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} r^4 \Big|_3^4 \cos^2 \varphi d\varphi \\
&= \frac{525}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\
&= \frac{525}{4} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{525}{4} \pi
\end{aligned}$$



bulunur.

14.6 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

Üç katlı integrallerin Matematik, Fizik ve Mühendislikte çeşitli uygulamaları vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını vereceğiz.

HACİM HESABI

Üç katlı integrali tanımlarken, sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

olduğunu görmüştük. Eğer her $(x, y, z) \in G$ için $f(x, y, z) = 1$ ise, yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \iiint_G dx dy dz$$

şeklini alır. Sol taraf, parçalanmadan bağımsız olarak, G bölgesinin hacmi olacağından, yukarıdaki eşitlik

$$G \text{ nin hacmi} = \iiint_G dx dy dz$$

biçiminde yazılabilir. G nin hacmi V ise

$$V = \iiint_G dx dy dz \quad \text{olur.}$$

Eğer, hacim küresel koordinatlarda hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\phi \quad \text{olacaktır.}$$

Eğer silindirik koordinatlar kullanılarak hacim

$$\text{hesaplanacaksa} \quad V = \iiint_G r dz dr d\phi$$

bağıntısını kullanmak gerekir.

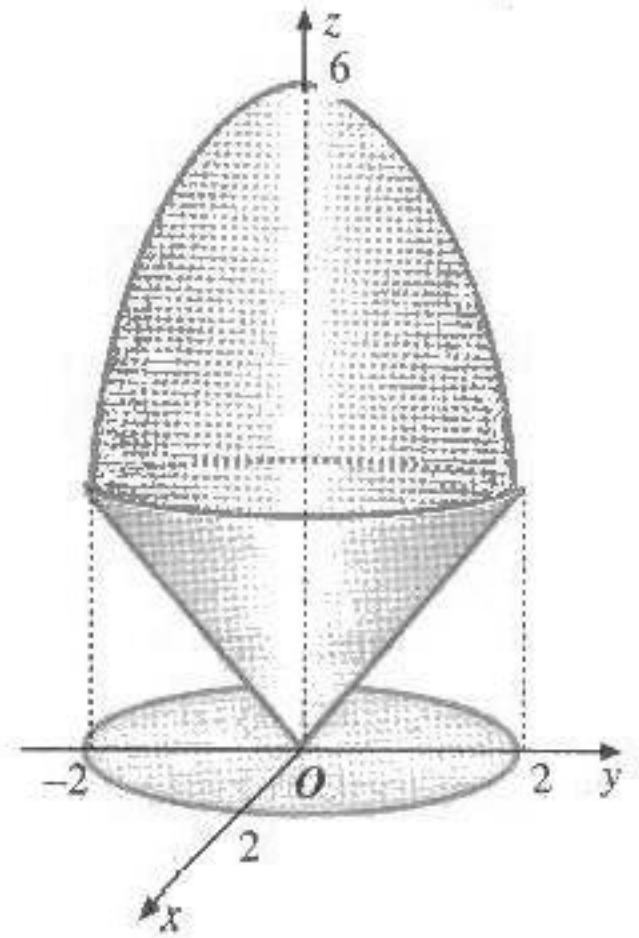
ÖRNEK : Alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, üstten $z = 6 - x^2 - y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm : Paraboloid ile koninin arakesitini bulalım :

$$z = 6 - z^2 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow (z - 2)(z + 3) = 0 \Rightarrow z = 2 \text{ veya } z = -3 \text{ olur.}$$

$z > 0$ olacağından $z = 2$ dir.

$z = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ olur. O halde arakesit eğrisi, $z = 2$ düzleminde $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Hacmi istenen bölgenin xOy düzlemindeki dik izdüşümü $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesidir.



$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 dy dz dx = \frac{1}{6}.$$

Gördüğümüz gibi, bazen (ama her zaman değil) iki katlı integralleri hesaplamak için ardışık tek katlı integraller iki farklı sırada alınabilir. dx , dy ve dz altı farklı şekilde sıralanabildiğinden, üç katlı integraller için bu sayı altı olabilir. Her sıralama, uzaydaki integrasyon bölgesinin farklı bir tanımlamasını ve farklı integrasyon sınırları verir.

ÖRNEK 4 Farklı İntegrasyon Sıralarını Kullanmak

Aşağıdaki integrallerden her biri Şekil 15.30'da gösterilen katı cismin hacmini verir.

$$(a) \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx dy dz$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx dz dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy dx dz$$

$$(d) \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy dz dx$$

$$(e) \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz dx dy$$

$$(f) \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz dy dx$$

aplıyoruz.

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx dz dy$$

(b)'deki integral

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2 dz dy$$

$$= \int_0^1 \left[2z \right]_{z=0}^{z=1-y} dy$$

$$= \int_0^1 2(1-y) dy$$

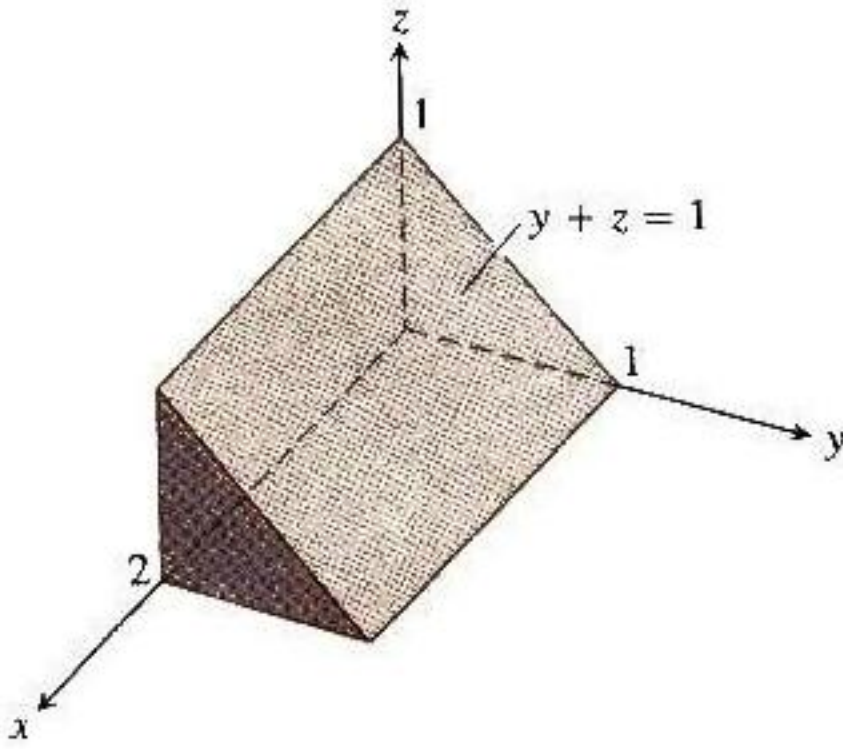
$$= 1.$$

$$V = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy dx dz$$

(c)'deki integral

$$= \int_0^1 \int_0^2 (1-z) dx dz$$

$$= \int_0^1 \left[x - zx \right]_{x=0}^{x=2} dz = \int_0^1 (2 - 2z) dz = 1$$



ŞEKİL 15.30 Örnek 4, bu prizmanın için altı farklı ardışık üç katlı integraller verir.

(a), (d), (e) ve (f)'deki integraller de $V = 1$ 'i verir.

14.6 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

Üç katlı integrallerin Matematik, Fizik ve Mühendislikte çeşitli uygulamaları vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını vereceğiz.

HACIM HESABI

Üç katlı integrali tanımlarken, sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

olduğunu görmüştük. Eğer her $(x, y, z) \in G$ için $f(x, y, z) = 1$ ise, yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \iiint_G dx dy dz$$

şeklini alır. Sol taraf, parçalanmadan bağımsız olarak, G bölgesinin hacmi olduğundan, yukarıdaki eşitlik

$$G \text{ nin hacmi} = \iiint_G dx dy dz$$

biçiminde yazılabilir. G nin hacmi V ise

$$V = \iiint_G dx dy dz \quad \text{olur.}$$

Eğer, hacim küresel koordinatlarda hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\varphi \quad \text{olacaktır.}$$

Eğer silindirik koordinatlar kullanılarak hacim hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G r dz dr d\varphi$$

bağıntısını kullanmak gerekir.

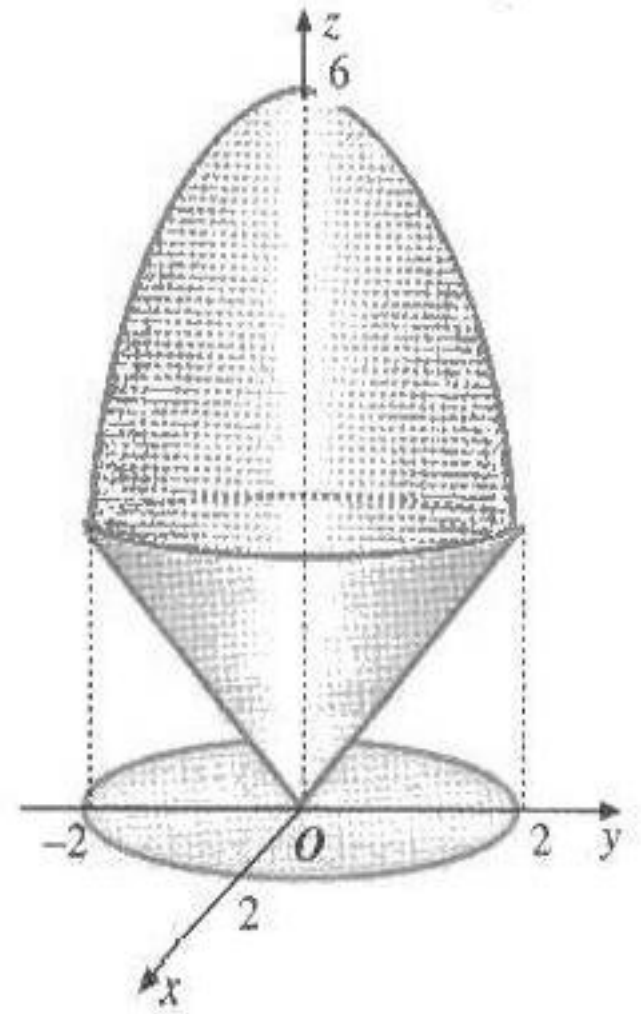
ÖRNEK : Alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, üstten $z = 6 - x^2 - y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm : Paraboloid ile koninin arakesitini bulalım :

$$z = 6 - z^2 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow (z - 2)(z + 3) = 0 \Rightarrow z = 2 \text{ veya } z = -3 \text{ olur.}$$

$z > 0$ olduğundan $z = 2$ dir.

$z = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ olur. O halde arakesit eğrisi, $z = 2$ düzleminde $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Hacmi istenen bölgenin xOy düzlemindeki dik izdüşümü $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesidir.



Buna göre

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}) dy dx$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6-r^2-r) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 d\varphi$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{3} \cdot 2\pi = \frac{32}{3} \pi$$

bulunur.

ÖRNEK : $z = y^2$ silindiri, $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$ ve $y = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : Hacmi istenen bölge yanda gösterilmiştir. Bu bölgenin xOy düzlemi üzerindeki dik izdüşümü $B = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \}$ dikdörtgensel bölgedir. Buna göre

$$V = \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} dz dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 dy dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^1 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 dx = \frac{2}{3}$$

birimküp olur.

ÖRNEK : Birinci bölgede $\rho = a$ küresi $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ düzlemleri ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : Hacmi istenen bölge yanda verilmiştir. Bu bölgenin hacmi

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^a \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{9} a^3$$

$\frac{\pi}{9} a^3$ olur.

KÜTLE HESABI

Bilindiği gibi, bir cismin kütlesi onun hacmi ile yoğunluğunun çarpımıdır. Eğer yoğunluk sabit değilse, G cismi $G_1, G_2, \dots, G_n$ gibi parçalara ayrılır. $k = 1, 2, \dots, n$ için, (x_k^*, y_k^*, z_k^*) , G_k nin bir noktası olmak üzere toplam kütle, yaklaşık olarak, $\sum_{k=1}^n \sigma(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$ olacaktır. Burada ΔV_k , G_k alt bölgesinin hacmi-

ni göstermektedir. Parçalanma ne kadar ince yapılırsa, yaklaşım o kadar iyi olur. Buna göre

$$M = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sigma(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

olacaktır. Eğer $\sigma(x, y, z)$ integrallenebilir, örneğin sürekli ise, sağ taraf $\sigma(x, y, z)$ nin G üzerindeki integrali olacağından

$$M = \iiint_G \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

olur.

ÖRNEK : a yarıçaplı küre şeklindeki bir cismin her noktadaki yoğunluğu, o noktanın kürenin merkezine olan uzaklığının karesi ile ters orantılıdır. Küre yüzeyi üzerindeki noktalarda yoğunluk, kürenin yarıçapına eşit olacağına göre cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm : Kürenin merkezi $O(0, 0, 0)$ olsun. $A(x, y, z)$ noktasının küre merkezine olan uzaklığı $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olduğundan, bu noktadaki yoğunluk

$$\sigma(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$$

olur. Küre yüzeyi üzerindeki noktaların merkeze olan uzaklığı a olduğundan

$$\sigma = \frac{k}{a^2} \Rightarrow a = \frac{k}{\sigma} \Rightarrow k = \sigma a^3$$

olur. Şu halde

$$\sigma(x, y, z) = \frac{a^3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

dır. Buna göre

$$M = \iiint_G \sigma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G \frac{a^3}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

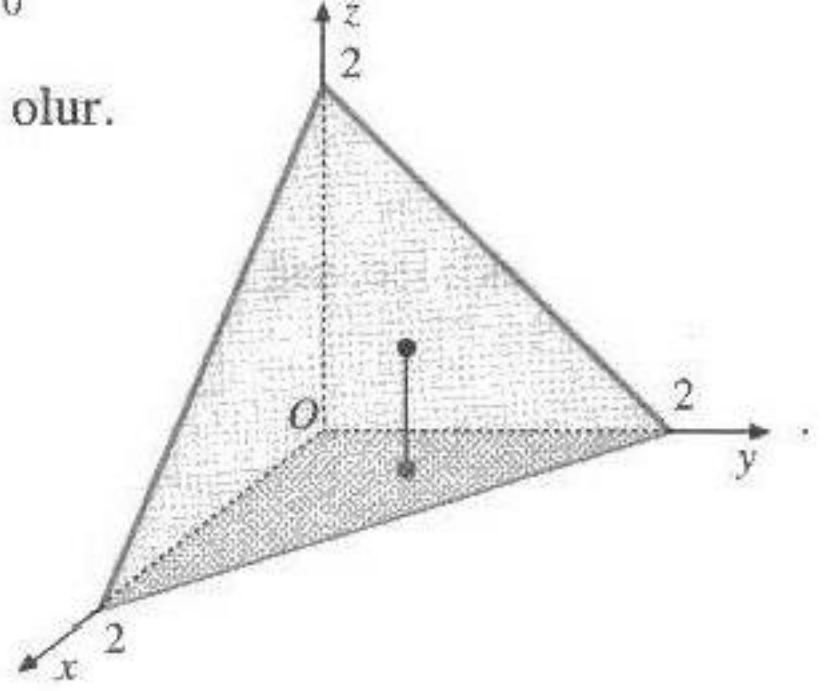
olur. Küresel koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \frac{a^3}{\rho^2} \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\varphi \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho \Big|_0^a \sin \theta d\theta d\varphi = a^4 \int_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} d\varphi \\ &= 2a^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^4 \end{aligned}$$

ÖRNEK : $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ düzlemleri tarafından sınırlanan dört yüzlü içine yerleştirilen bir cismin her noktadaki yoğunluğu, o noktanın xOy düzlemine olan uzaklığına eşittir. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm : $\sigma(x, y, z) = z$ olacağından

$$\begin{aligned} M &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^2 (2-x-y)^3 \Big|_0^{2-x} \, dx = \frac{1}{6} \int_0^2 (2-x)^3 \, dx \\ &= -\frac{1}{24} (2-x)^4 \Big|_0^2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$



AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

G bölgesine yerleştirilmiş bir cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ olsun. İki katlı integrallerdeki düşünceyle, ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_G x \sigma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_G y \sigma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_G z \sigma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

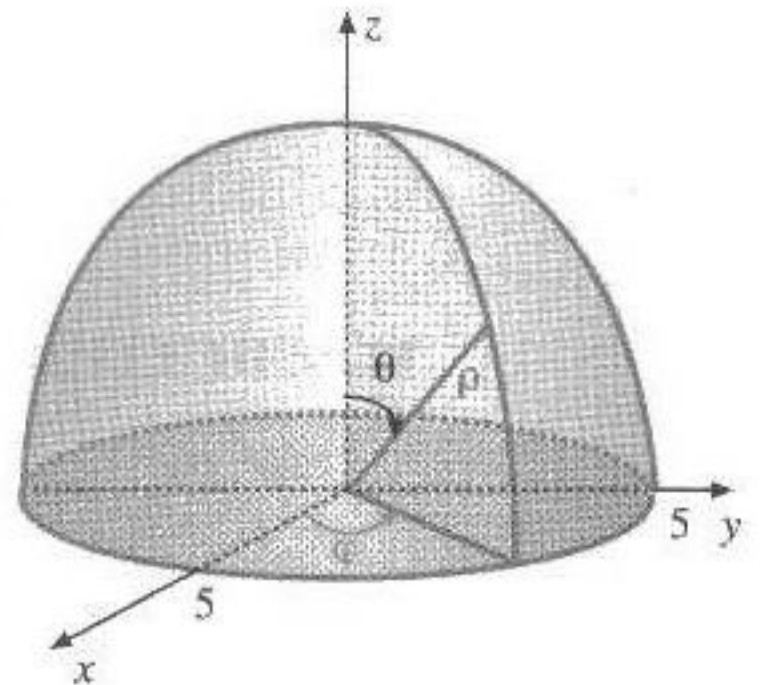
olurlar. Eğer cisim homogen, yani $\sigma(x, y, z)$ sabitse yukarıdaki ifadeler

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_G x \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_G y \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_G z \, dx \, dy \, dz \quad \text{şeklini alırlar.}$$

ÖRNEK : $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ yarı küresiyle $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu, her noktada o noktanın küre merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Bu yarı kürenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} M &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 k \rho \cdot \rho^2 |\sin \theta| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$



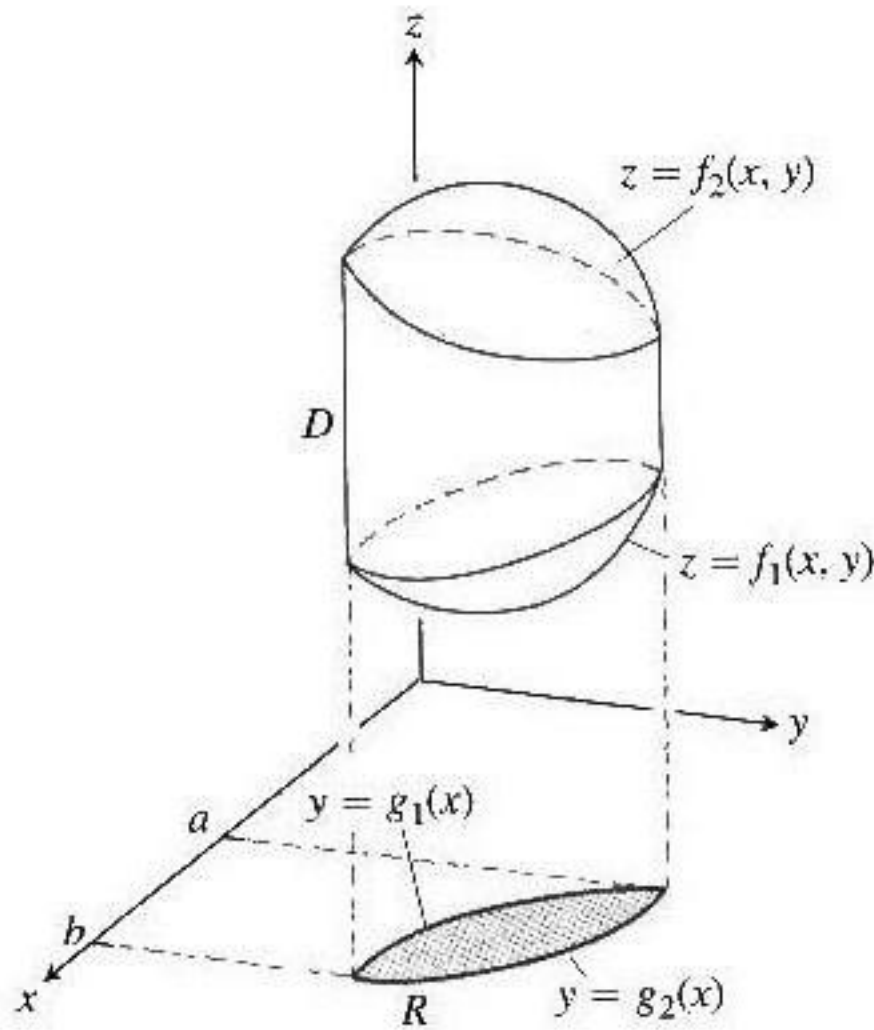
Üç katlı bir integrali, Fubini Teoreminin (Bölüm 15.1) üç-boyutlu bir versiyonunu uygulayarak, ardışık üç integrasyonla hesaplarız. İki katlı integrallerde olduğu gibi, bu ardışık integrallerin integrasyon sınırlarını bulmak için geometrik bir prosedür vardır.

Bir D bölgesi üzerinde

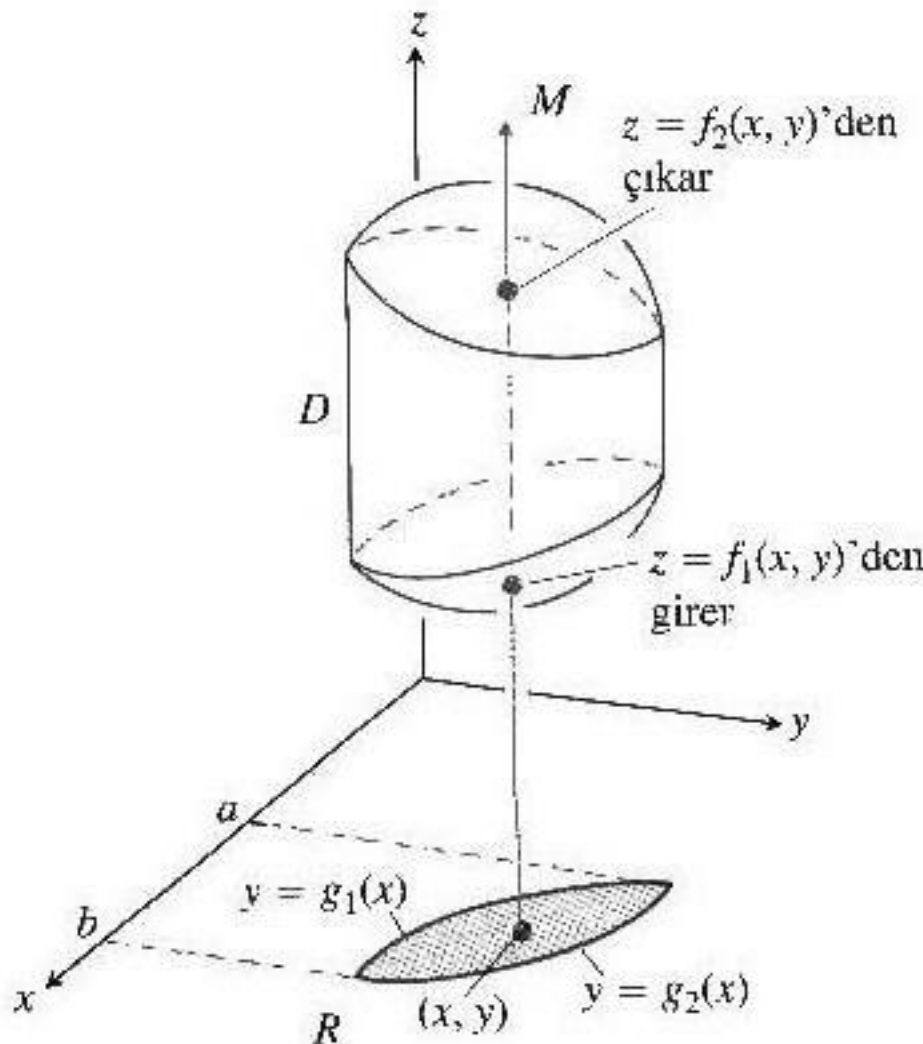
$$\iiint_D F(x, y, z) dV$$

integralini hesaplamak için, önce z 'ye sonra y 'ye ve en sonunda x 'e göre integral alın.

1. *Bir çizim:* D bölgesini xy -düzlemindeki "gölgesi" R (dik iz düşüm) ile birlikte çizin. D 'nin alt ve üst sınır yüzeyleri ile R 'nin alt ve üst sınır eğrilerini adlandırın.

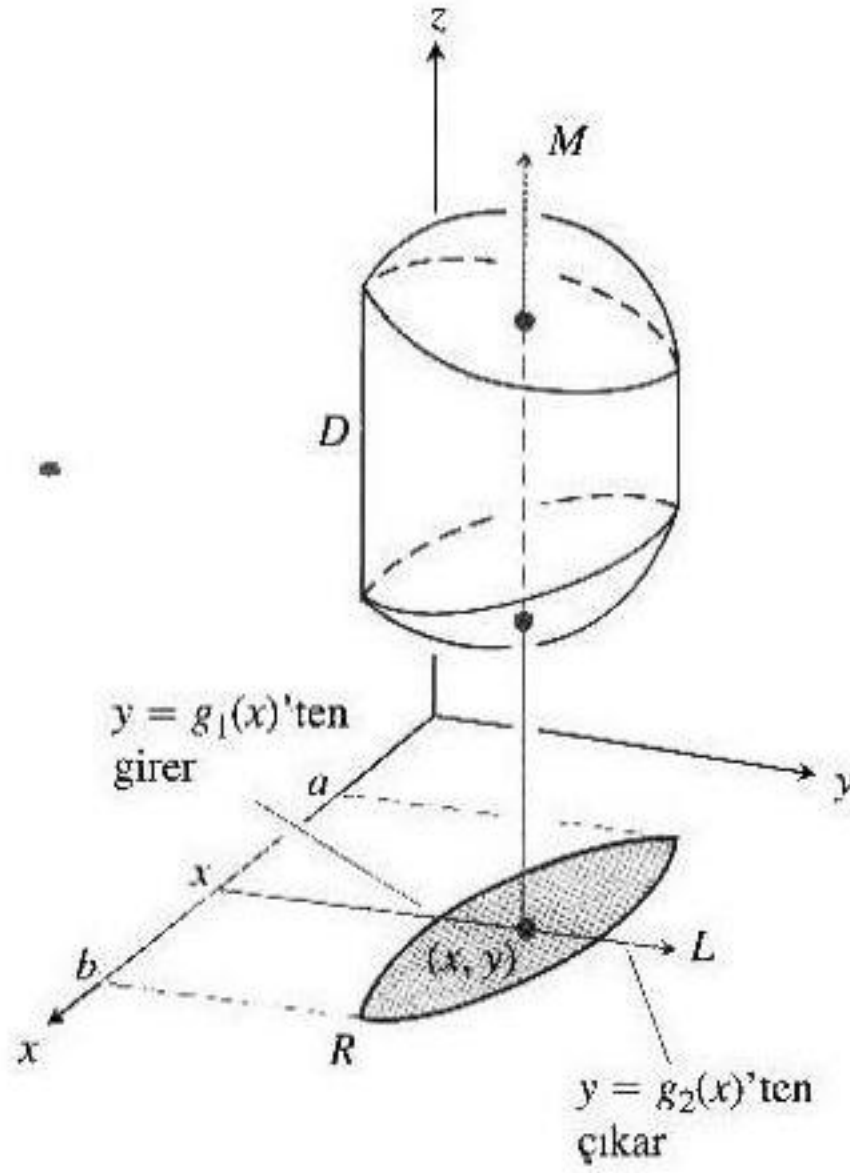


2. *İntegrasyonun z-sınırlarını bulun:* R 'deki tipik bir (x, y) noktasından geçen, z -eksenine paralel bir M doğrusu çizin. z arttıkça, M , D 'ye $z = f1(x, y)$ 'den girer ve $z = f2(x, y)$ 'den çıkar. Bunlar integrasyonun z -sınırlarıdır.



3. *İntegrasyonun y-sınırlarını bulun :* (x, y) 'den geçen, y -eksenine paralel bir L doğrusu çizin. y arttıkça, L , R 'ye $y = g_1(x)$ den girer ve $y = g_2(x)$ 'den çıkar. Bunlar integrasyonun y -sınırlarıdır.

1101



4. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun:* R 'den geçen, y -eksenine paralel bütün doğruları içeren x -sınırları seçin (yukarıdaki şekilde $x = a$ ve $x = b$). Bunlar integrasyonun x -sınırlarıdır. İntegral

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

olur. İntegrasyon sırasını değiştirirseniz, benzer prosedürler izleyin. D 'nin "gölgesi" ardışık integrasyonun gerçekleştiği son iki değişkenin düzleminde bulunur.

Yukarıdaki prosedür, D bölgesi, üstten ve alttan bir yüzeyle, "gölge" R bölgesi de alt ve üst eğrilerle sınırlı olduğu her durumda uygulanır. Bu prosedür, bazı hallerde bölgeyi basit bölgelere ayırarak prosedürü uygulamak mümkün olsa bile, içinde karmaşık delikler içeren bölgelere uygulanamaz.

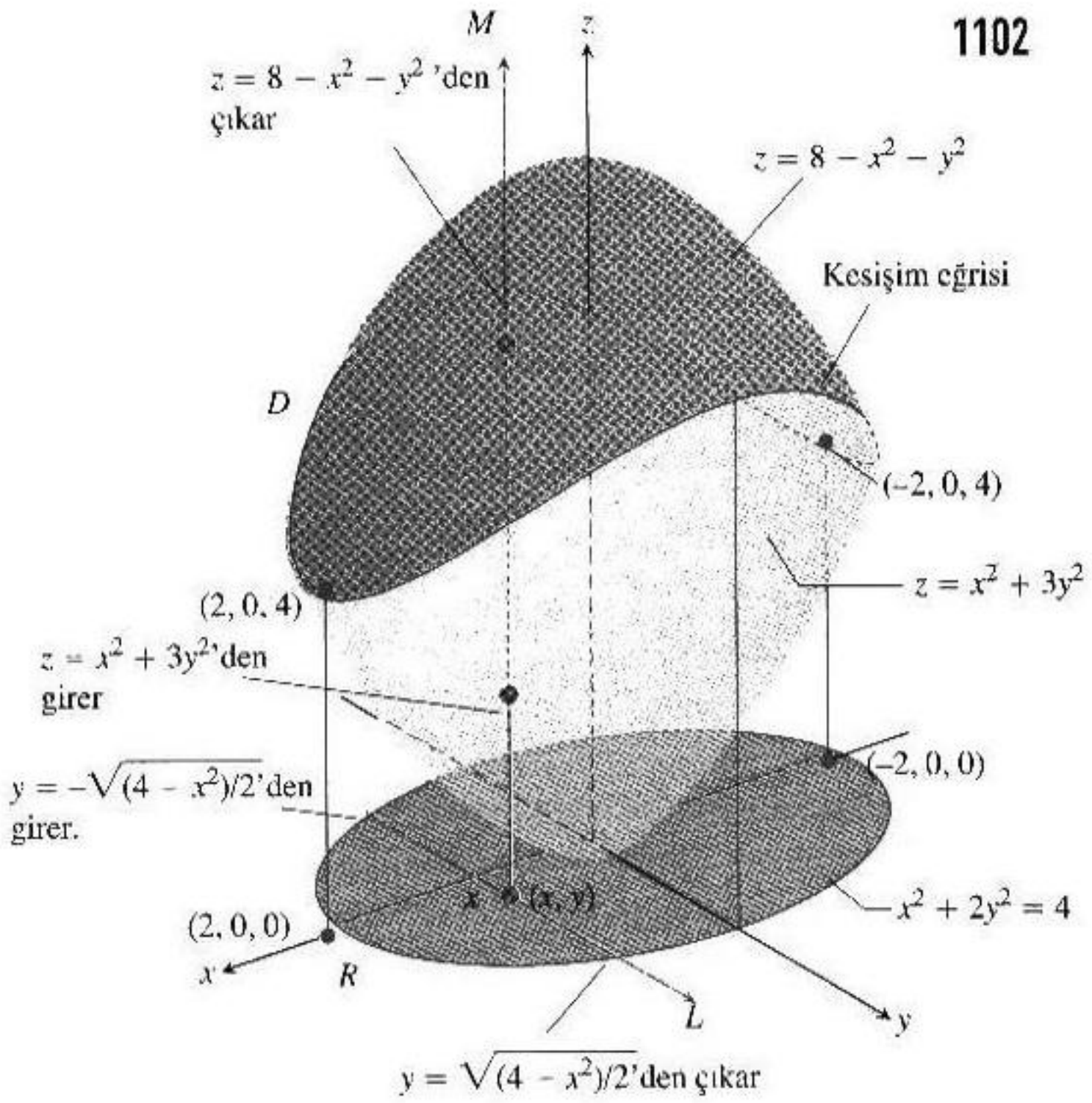
ÖRNEK 1 Bir Hacim Bulmak

$z = x^2 + 3y^2$ ve $z = 8 - x^2 - y^2$ yüzeyleriyle çevrelenen D bölgesinin hacmini bulun.

Çözüm Hacim, $F(x, y, z) = 1$ 'in D üzerindeki

$$V = \iiint_D dz dy dx$$

integralidir. İntegrali hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak üzere önce bölgeyi çizeriz. Yüzeyler (Şekil 15.28) $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ veya $x^2 + 2y^2 = 4$, $z > 0$ eliptik silindiri üzerinde kesişirler. D 'nin xy -düzlemine izdüşümü olan R bölgesinin sınırı, denklemini aynı olan bir elipstir: $x^2 + 2y^2 = 4$. R 'nin "üst" sınırı $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir. Alt sınır ise $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir.



ŞEKİL 15.28 İki paraboloid tarafından çevrelenen bu bölgenin hacmi Örnek 1’de hesaplanmaktadır.

İntegrasyonun z -sınırlarını bulalım. R ’nin tipik bir (x, y) noktasından, z -eksenine paralel olarak geçen M doğrusu D ’ye $z = x^2 + 3y^2$ ’den girer ve $z = 8 - x^2 - y^2$ ’den çıkar.

Şimdi de integrasyonun y -sınırlarını bulalım. (x, y) ’den, y -eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R ’ye $y = -\sqrt{(4 - x^2)}/2$ ’den girer ve $y = \sqrt{(4 - x^2)}/2$ ’den çıkar.

Son olarak integrasyonun x -sınırlarını buluruz. L , R ’yi tararken, x ’in değeri $(-2, 0, 0)$ ’da $x = -2$ ’den $(2, 0, 0)$ ’da $x = 2$ ’ye kadar değişir. D ’nin hacmi

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{\sqrt{(4-x^2)}/2} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{\sqrt{(4-x^2)}/2} (8 - 2x^2 - 4y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{y=\sqrt{(4-x^2)}/2} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right) dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[8 \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx \\
 &= 8\pi\sqrt{2}. \quad x = 2 \sin u \text{ dönüşümü ile integrasyondan sonra}
 \end{aligned}$$

Sıradaki örnekte, farklı bir integrasyon sırasının nasıl kullanıldığını göstermek için D 'yi xy -düzlemi yerine xz -düzlemine iz düşürüyoruz.

ÖRNEK 2 Integrasyon Sınırlarını $dy dz dx$ Sırasında Bulmak

Köşeleri $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ ve $(0, 1, 1)$ 'de olan dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde bir $F(x, y, z)$ fonksiyonunun üç katlı integrali için integrasyon sınırlarını belirleyin.

Çözüm D 'yi xz -düzlemindeki "gölgesi" R ile birlikte çizeriz (Şekil 15.29). D 'nin üst (sağ taraftaki) sınır yüzeyi $y = 1$ düzleminde, Alt (sol taraftaki) sınır yüzeyi $y = x + z$ düzleminde, R 'nin üst sınırı $z = 1 - x$ doğrusudur. Alt sınır $z = 0$ doğrusudur.

Önce integrasyonun y -sınırlarını buluruz. R 'nin tipik bir (x, z) noktasından y -eksenine paralel olarak geçen doğru D 'ye $y = x + z$ 'den girer ve $y = 1$ 'den çıkar.

Sonra integrasyonun z -sınırlarını buluruz. (x, z) 'den z -eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R 'ye $z = 0$ 'dan girer ve $z = 1 - x$ 'ten çıkar.

Son olarak integrasyonun x -sınırlarını buluruz. L , R 'yi tararken, x 'in değerleri $x = 0$ 'dan $x = 1$ 'e değişir. İntegral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x, y, z) dy dz dx$$

olur.

ÖRNEK 3 Örnek 2'yi $dz dy dx$ Sırası ile Tekrarlamak

$F(x, y, z)$ 'yi dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde $dz dy dx$ sırası ile integre etmek için adımları aşağıdaki gibi düzenleriz.

Önce integrasyonun z -sınırlarını buluruz. xy -düzlemindeki "gölge" nin tipik bir (x, y) noktasından z -eksenine paralel olarak geçen bir doğru D 'ye $z = 0$ 'dan girer ve denklemi $z = y - x$ olan üst yüzeyinden çıkar (Şekil 15.29).

Sonra integrasyonun y -sınırlarını buluruz. xy -düzleminde, $z = 0$, dört yüzlünün eğik yüzeyi düzlemi $y = x$ doğrusu boyunca keser. (x, y) 'den y -eksenine paralel olarak geçen bir doğru xy -düzlemindeki gölge'ye $y = x$ 'ten girer ve $y = 1$ 'den çıkar.

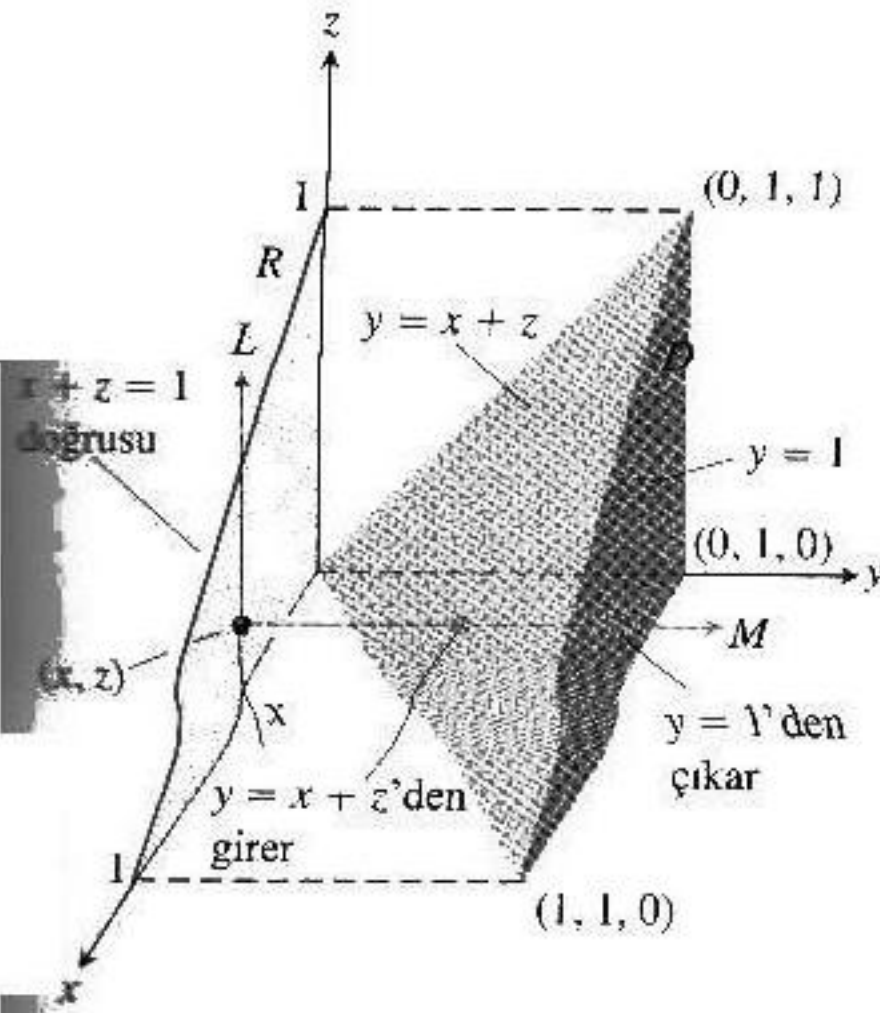
Son olarak integrasyonun x -sınırlarını buluruz. Önceki adımdaki y -eksenine paralel doğru gölgeyi tararken, x 'in değerleri $x = 0$ 'dan $(1, 1, 0)$ 'da $x = 1$ 'e değişir. İntegral

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x, y, z) dz dy dx$$

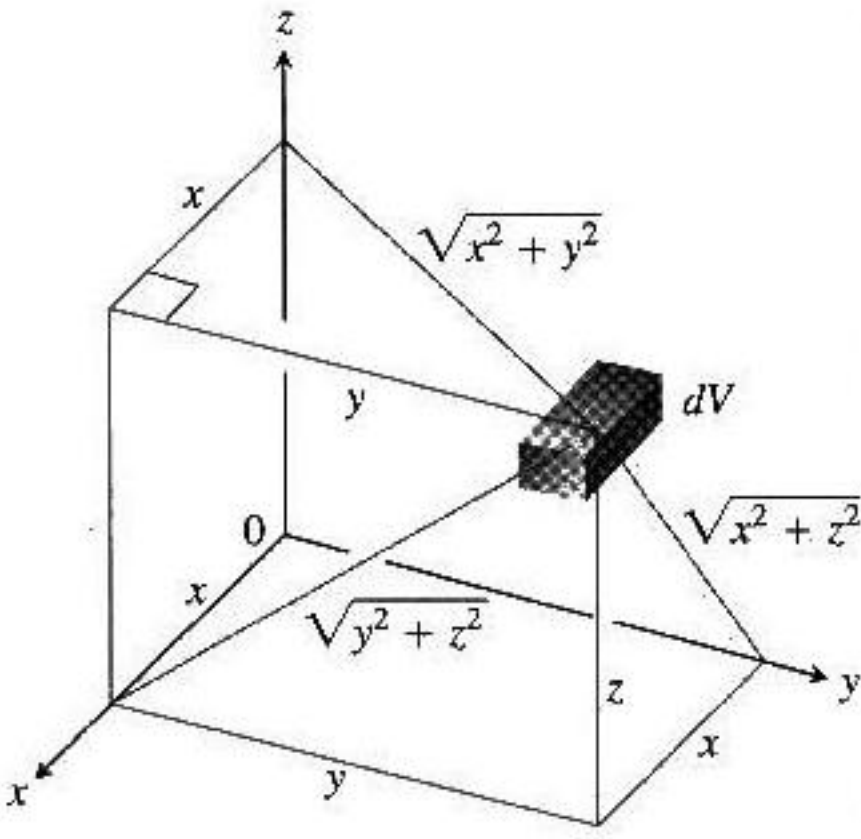
olur. Örneğin, $F(x, y, z) = 1$ ise

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 - xy \right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

bulunur.



ŞEKİL 15.29 Dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde tanımlı bir fonksiyonun üç katlı integralini hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak (Örnek 2).



ŞEKİL 15.33 dV 'den koordinat düzlem ve eksenlerine uzaklıklar.

Aynı şekilde L , y -ekseni veya z -ekseni ise

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta \, dV \quad \text{ve} \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dV.$$

buluruz. Aynı şekilde, **koordinat düzlemlerine göre birinci momentleri** de elde edebiliriz. Örneğin,

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta(x, y, z) \, dV$$

integrali yz -düzlemine göre birinci momenti verir.

Bölüm 15.2'de düzlemsel bölgeler için incelenen kütle ve moment formüllerine benzer formüller Tablo 15.3'te özetlenmiştir.

TABLO 15.3 Uzayda, katı cisimler için kütle ve moment formülleri.

Kütle: $M = \iiint_D \delta \, dV$ ($\delta = \delta(x, y, z) =$ yoğunluk)

Koordinat düzlemleri etrafında birinci momentler:

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta \, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \delta \, dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z \delta \, dV$$

Ağırlık merkezi:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Koordinat eksenleri etrafında eylemsizlik momentleri (ikinci momentler):

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta \, dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta \, dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dV$$

Bir L doğrusu etrafında eylemsizlik momenti:

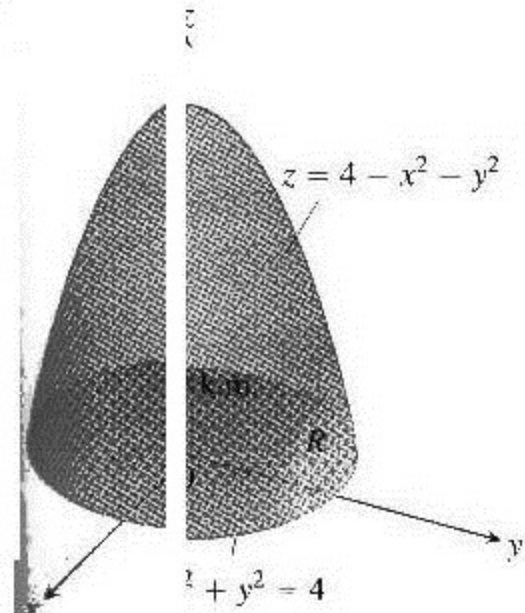
$$I_L = \iiint_D r^2 \delta \, dV \quad (r(x, y, z) = (x, y, z) \text{ noktalarından } L \text{ doğrusuna olan uzaklık})$$

Bir L doğrusu etrafında jirasyon yarıçapı:

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

ÖRNEK 1 Uzayda Bir Cismin Kütle Merkezini Bulmak

Alttan, $z = 0$ düzleminde $R: x^2 + y^2 \leq 4$ dairesi ve üstten $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidiyle sınırlı, sabit δ yoğunluklu cismin kütle merkezini bulun (Şekil 15.34).



ŞEKİL 15.34 Bir cismin kütle merkezini bulmak (Örnek 1).

Çözüm Simetriden dolayı, $\bar{x} = \bar{y} = 0$ 'dır. $\bar{z}$ 'yi bulmak için, önce M_{xy} 'yi hesaplarız:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta \, dz \, dy \, dx = \iint_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta \quad \text{Kutupsal koordinatlar} \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6} (4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}. \end{aligned}$$

Benzer bir hesaplama

$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz \, dy \, dx = 8\pi\delta.$$

verir. Dolayısıyla, $\bar{z} = (M_{xy}/M) = 4/3$ olur ve kütle merkezi $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ bulunur. ■

Katı bir cismin yoğunluğu sabitken (Örnek 1'deki gibi), kütle merkezine (Bölüm 15.2'deki iki boyutlu cisimlerde olduğu gibi) cismin **merkezi** denir.

ÖRNEK 2 Koordinat Eksenleri Etrafındaki Eylemsizlik Momentini Bulmak

Şekil 15.35'de gösterilen, sabit δ yoğunluklu dikdörtgen şekilli cisim için I_x , I_y ve I_z 'yi bulun.

Çözüm Yukarıda verilen I_x formülü

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz.$$

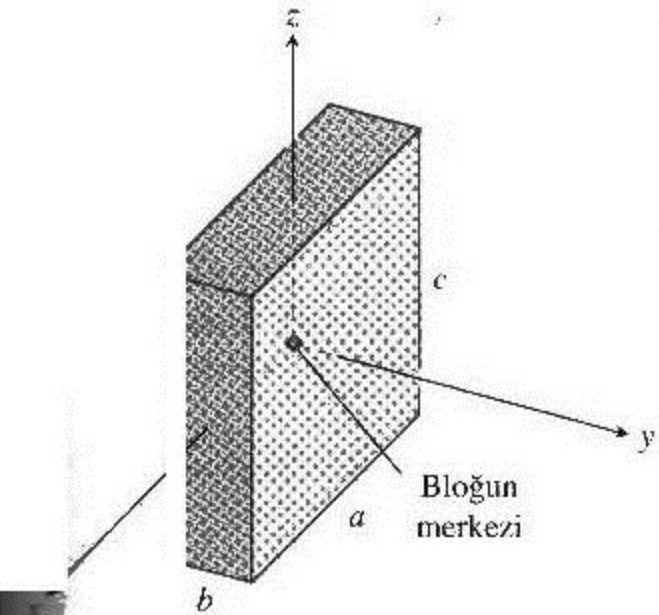
verir. $(y^2 + z^2)\delta$ 'nin x , y ve z 'nin bir çift fonksiyonu olduğunu gözlemlersek, integrasyon işinin birazından kurtulabiliriz. Dikdörtgen şekilli cisim, her biri bir bölgede olmak üzere, sekiz simetrik parçadan oluşur. Integrali bu parçalardan biri üzerinde hesaplayabilir ve toplam değeri bulmak için 8 ile çarpabiliriz:

$$\begin{aligned} I_x &= 8 \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz = 4a\delta \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} (y^2 + z^2) \, dy \, dz \\ &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=0}^{y=b/2} dz \\ &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz \\ &= 4a\delta \left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48} \right) = \frac{abc\delta}{12} (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$I_y = \frac{M}{12} (a^2 + c^2) \quad \text{ve} \quad I_z = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

olur.



ŞEKİL 15.35 Buradaki blok için I_x , I_y ve I_z 'yi bulun (Örnek 2). Orijin bloğun merkezindedir.

14.5 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

xyz koordinat sistemindeki bir G bölgesi

$$\begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases}$$

bölge dönüşümü ile bir D bölgesine dönüştürüldüğünde, xyz sistemindeki $\Delta V_{(xyz)}$ hacim elemanı ile uvw sistemindeki $\Delta V_{(uvw)}$ hacim elemanı arasında

$$\Delta V_{(xyz)} \cong |J| \Delta_{(uvw)}$$

bağıntısı vardır. Burada

$$J = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}$$

olup dönüşümün jakobiyenidir. Buna göre

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D F(u, v, w) |J| du dv dw$$

olur. Burada $F(u, v, w)$, $f(x, y, z)$ ifadesinde x, y, z yerine u, v, w cinsinden değerleri yazıldığında elde edilen ifadedir.

Üç boyutlu uzayda iki tane önemli bölge dönüşümü vardır. Şimdi bunları verelim.

KÜRESEL KOORDİNATLAR

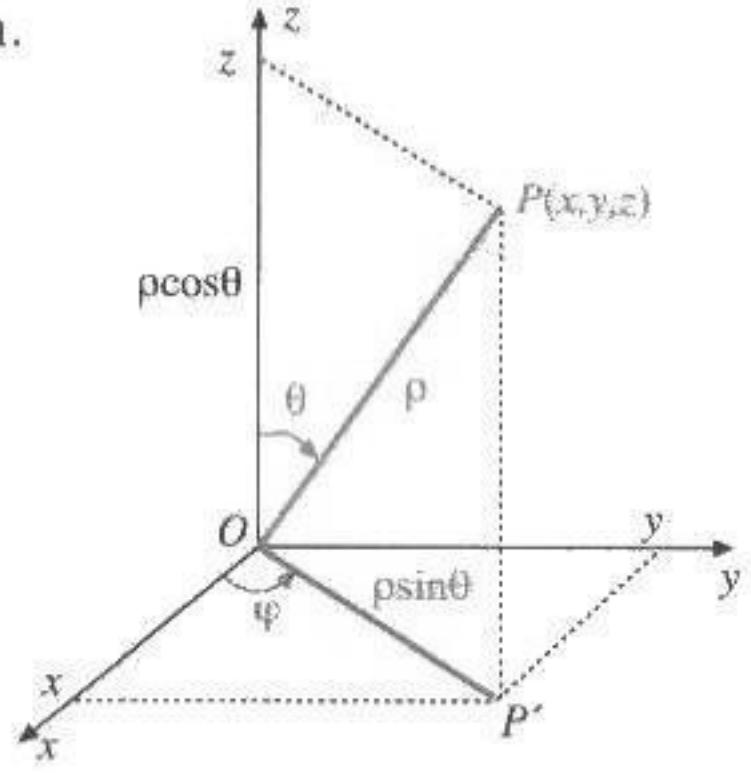
xyz uzayında bir $P(x, y, z)$ noktası verilmiş olsun.

P noktasının orijine olan uzaklığı ρ , OP doğru parçasının Oz - eksenini ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü θ olsun. $[OP]$ doğru parçasının xOy düzlemindeki dik izdüşümü $[OP']$, ve $[OP']$ doğru parçasının Ox - eksenini ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ olsun.

$$|OP'| = \rho \sin \theta$$

olduğundan

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$



olur. Böylece xyz - koordinat sisteminden $\rho \theta \varphi$ - koordinat sistemine bir bölge dönüşümü elde edilmiş olur. Bu durumda P noktasının $\rho \theta \varphi$ - sistemindeki koordinatları (ρ, θ, φ) olur. Bu sayılara P noktasının küresel koordinatları adı verilir. Şu halde küresel koordinatlar bir uzunluk ile iki açı ölçüsünden oluşmaktadır

ÖRNEK : Kartezyen koordinatları $P(3, \sqrt{3}, 2)$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta \\ &= \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta \\ &= \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \rho^2 \end{aligned}$$

olacağından $9 + 3 + 4 = \rho^2 \Rightarrow \rho = 4$ olur.

$$z = \rho \cos \theta \Rightarrow 2 = 4 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

bulunur. Buna göre P noktasının küresel koordinatları $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ olacaktır.

ÖRNEK : Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $z^2 = x^2 + y^2$ olan koninin küresel koordinatlar sistemindeki denklemini bulunuz.

Çözüm : x, y, z koordinatlarının küresel koordinat sistemindeki değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \theta &= \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \theta \Rightarrow |\cos \theta| = |\sin \theta| \\ \Rightarrow \theta &= \frac{\pi}{4} \text{ veya } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ olur. } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ koninin üst yarısının, } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ koninin alt yarısının denklemdir (yandaki şekil).} \end{aligned}$$

Genel olarak, $\theta = \alpha$ denklemi, ana doğrusu z -ekseniyle α kadar açı yapan koninin denklemdir.

ÖRNEK : Küresel koordinatlar sistemindeki denklemi $\rho = 3$ olan yüzeyin kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

$$\text{Çözüm : } \rho = 3 \Rightarrow \rho^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

olur. Şu halde $\rho = 3$, yarıçapı 3 olan merkezil kürenin denklemdir. $\square$

İntegrasyon bölgesi a yarıçaplı merkezil bir küre olduğunda ρ nun sınırları 0 dan a ya kadar değişir. θ , 0 dan π ye kadar değiştiğinde bir yarı daire oluşur. Bu yarı dairenin Oz -ekseni etrafında 2π kadar döndürülmesiyle tam küre meydana gelir. O halde φ nin 0'dan 2π ye kadar değişmesi gerekir. Bu durumda a yarıçaplı bir merkezil küre için küresel koordinatlar

$$0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{olacaktır.}$$

Kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara geçildiğinde dönüşümün Jakobiyeni

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant açılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$J = \rho^2 \sin \theta$$

bulunur. Buna göre

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D F(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\varphi$$

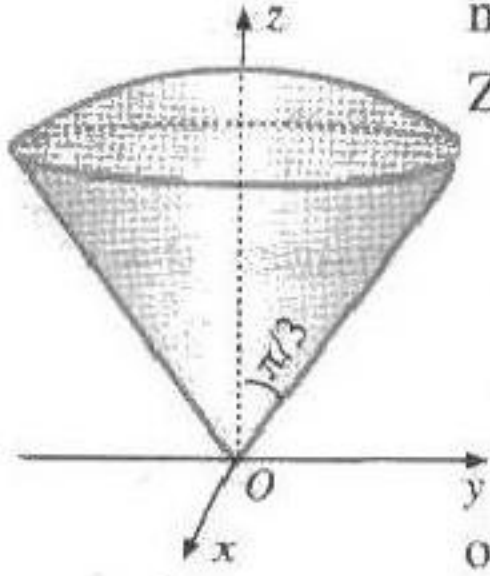
yazılabilir. Burada $F(\rho, \theta, \varphi)$, $f(x, y, z)$ ifadesinde x, y, z yerine ρ, θ, φ cinsinden değerleri yazıldığında elde edilen ifadedir.

ÖRNEK : G integrasyon bölgesi, üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi, alttan $z = \sqrt{(x^2 + y^2)/3}$ konisi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G dx dy dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda gösterilmiştir. Söz konusu bölge içindeki bir noktanın orijine olan uzaklığı 0 ile 1 arasında değişir. Dolayısıyla $0 \leq \rho \leq 1$ dir. Zira kürenin küresel koordinatlardaki denklemi $\rho = 1$ dir.



$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)/3} \Rightarrow 3z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$3\rho^2 \cos^2 \theta = (\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \Rightarrow$$

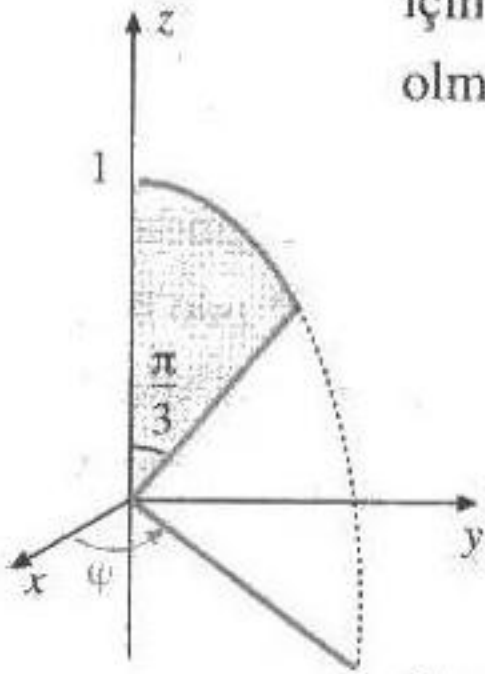
$$3\rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \theta \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

olur. (İntegrasyon bölgesinde $z \geq 0$ dolayısıyla $\cos \theta \geq 0$ olacağına dikkat ediniz). O halde koninin küresel koordinatlardaki denklemi $\theta = \frac{\pi}{3}$ dir.

Buna göre θ nın sınırları $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ olacaktır.

$\left\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ bölgesinin integrasyon bölgesini oluşturması

için Oz - eksenini etrafında 2π kadar dönmesi gerekir. O halde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olmalıdır. Buna göre



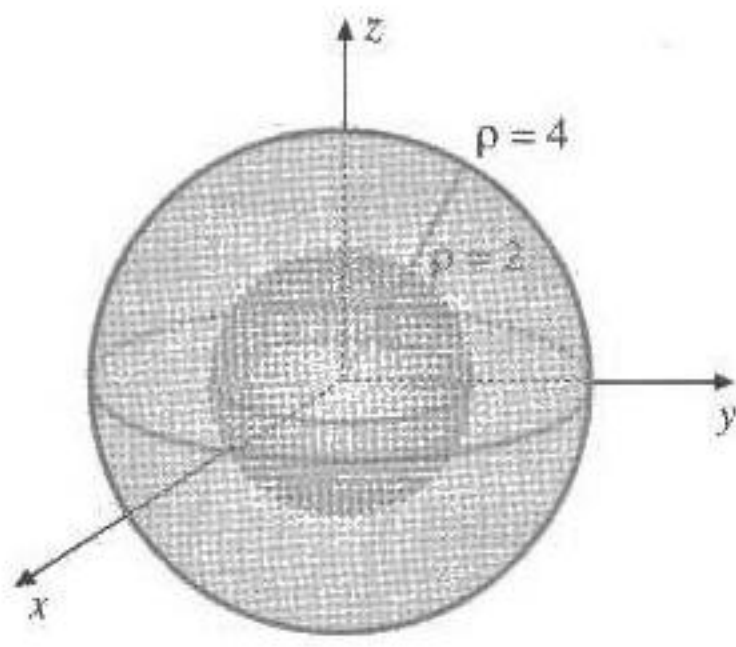
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -\cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) 2\pi = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK : G integrasyon bölgesi, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ küreleri arasında kalan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

integralini hesaplayınız.

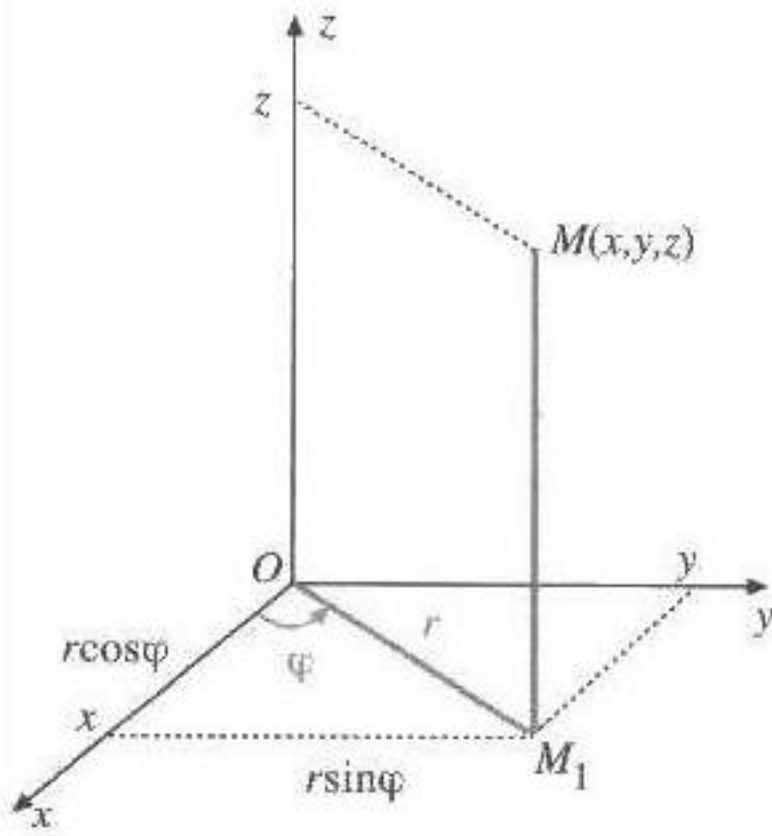


Çözüm : Küresel koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^4 \frac{\rho^2 |\sin \theta|}{(\rho^2)^{3/2}} d\rho d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^4 \sin \theta \frac{1}{\rho} d\rho d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \ln \rho \Big|_2^4 d\theta d\varphi = \ln 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -\ln 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \Big|_0^{\pi} d\varphi = 2 \ln 2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \ln 2
 \end{aligned}$$

bulunur.

SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR



xyz koordinat sisteminde bir $M(x, y, z)$ noktası alalım. M noktasının xOy düzlemindeki dik izdüşümü M_1 ve M_1 noktasının xOy düzlemindeki kutupsal koordinatları (r, φ) olsun. Buna göre

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

olur. r, φ, z koordinatlarına M noktasının silindirik koordinatları denir.

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

olduğundan

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

olur.

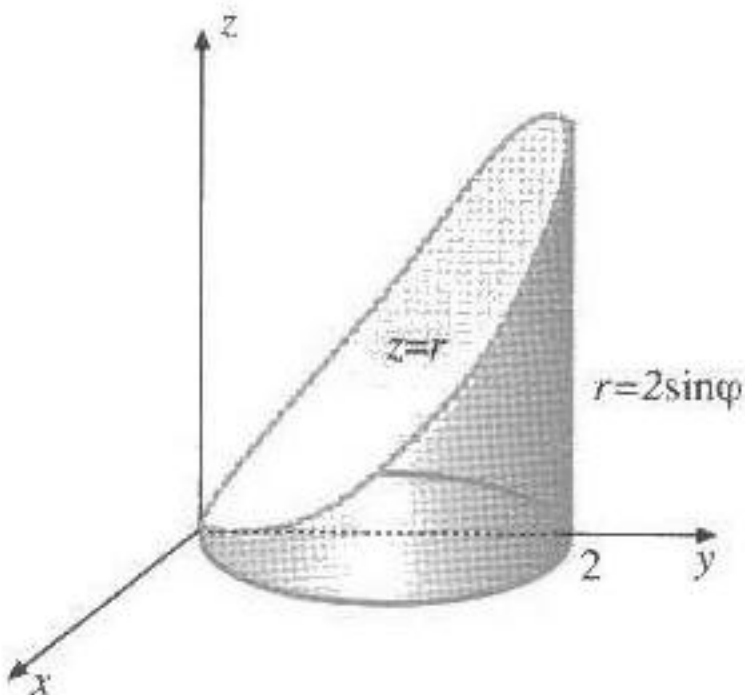
İntegrasyon bölgesinin bir silindir parçası olması halinde silindirik koordinatları kullanmak yararlıdır.

ÖRNEK : Silindirik koordinatlar yardımıyla

$$I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz dx dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ koni, $x = \pm \sqrt{2y - y^2} \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$ dairesel silindir $z = 0$, xOy düzlemi olduğundan integrasyon bölgesi, alttan xOy düzlemi, üstten $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, yandan $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ silindiri tarafından sınırlanan bölgedir. Bu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir.



$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nin silindirik koordinatlardaki denklemi $z = r$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ silindirin silindirik koordinatlardaki denklemi $r = 2 \sin \varphi$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi} \int_{r=0}^{2 \sin \varphi} \int_{z=0}^r z r dz dr d\varphi = \int_0^{\pi} \int_{r=0}^{2 \sin \varphi} \frac{z^2}{2} \Big|_0^r r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \varphi} r^3 dr d\varphi \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} r^4 \Big|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi \\
 &= 2 \int_0^{\pi} (\sin^2 \varphi)^2 d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi
 \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK : Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ile $z = 0$, $z = 4$, $y = 0$ ve $y = x$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge üzerinde

$$I = \iiint_G xyz \, dx dy dz$$

integralini hesaplayınız.

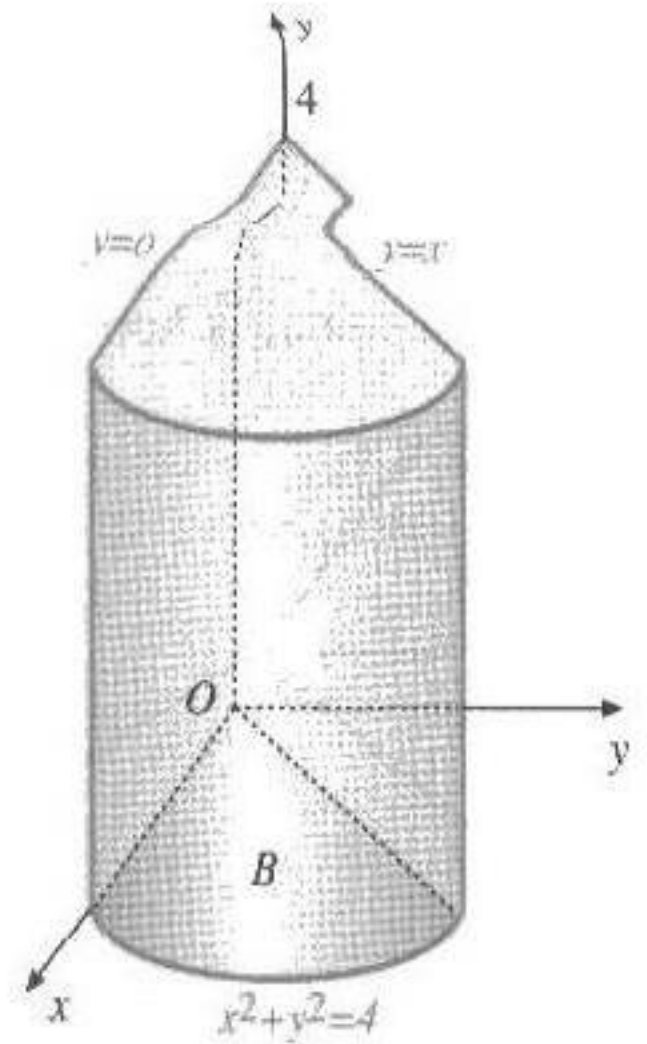
Çözüm : Söz konusu bölge yanda verilmiştir.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \int_0^4 r \cos \varphi r \sin \varphi z r \, dz dr d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r^3 \cos \varphi \sin \varphi \frac{z^2}{2} \Big|_0^4 dr d\varphi$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 32 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= 32 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 8$$



bulunur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

G bölgesine yerleştirilmiş bir cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ olsun. İki katlı integrallerdeki düşünceyle, ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_G x \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_G y \sigma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_G z \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

olurlar. Eğer cisim homogen, yani $\sigma(x, y, z)$ sabitse yukarıdaki ifadeler

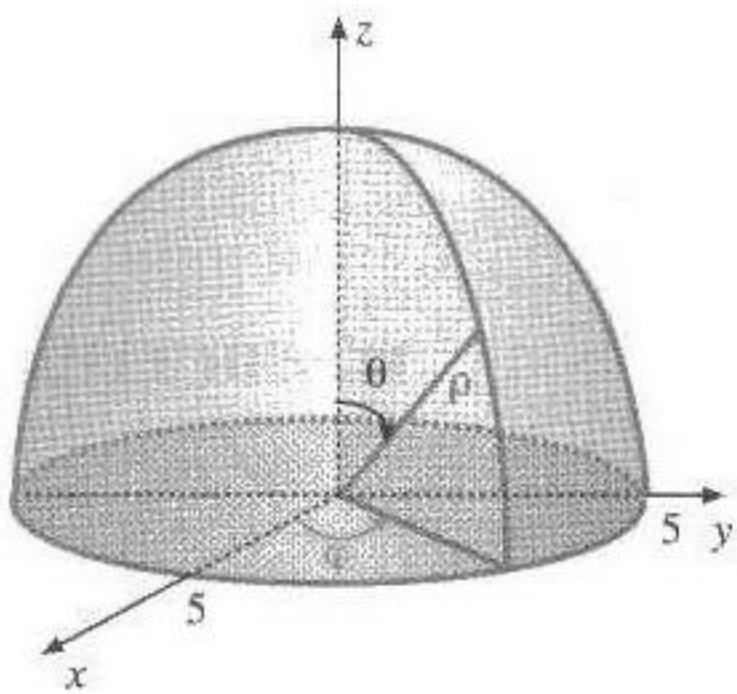
$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_G x dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_G y dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_G z dx dy dz \quad \text{şeklini alırlar.}$$

ÖRNEK : $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ yarı küresiyle $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu, her noktada o noktanın küre merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Bu yarı kürenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :

$$M = \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} k \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 k \rho \cdot \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\phi$$



$$\begin{aligned}
&= k \cdot \frac{625}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{625}{4} k \int_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \frac{625}{4} k \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{625}{2} \pi k
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_B zk \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx \\
&= \frac{2}{625\pi k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 \rho \cos \theta k \rho \rho^2 |\sin \theta| d\rho d\theta d\varphi \\
&= \frac{2}{625\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^5 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{\pi} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2
\end{aligned}$$

dır. Cisim simetrik olduğundan $\bar{x} = \bar{y} = 0$ dır. O halde cismin ağırlık merkezi $(0, 0, 2)$ noktasıdır.

ÖRNEK : $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan küp içine yerleştirilen bir cismin her noktadaki yoğunluğu o noktanın xOy düzlemine olan uzaklığıyla orantılıdır. Bu cismin ağırlık merkezini bulunuz.

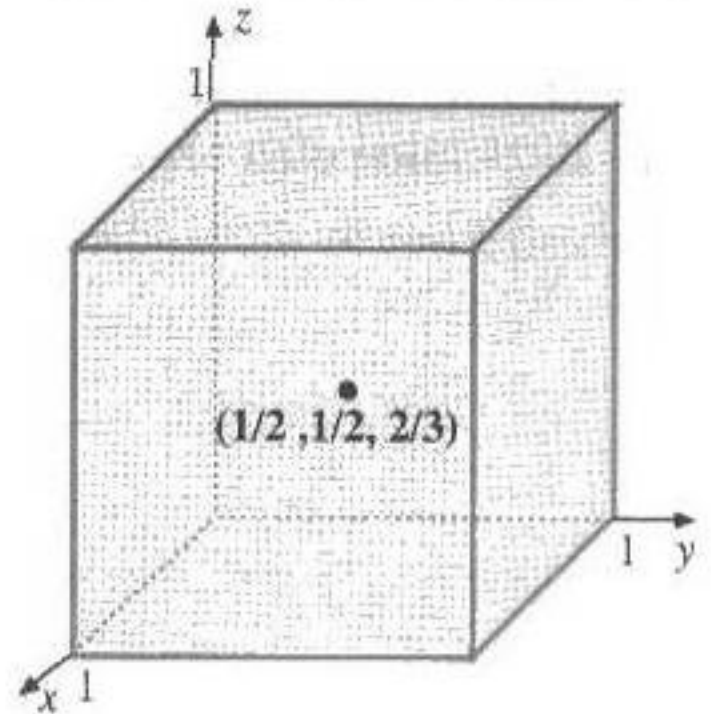
Çözüm :

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 kz dz dy dx = k \int_0^1 \int_0^1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 dy dx \\
&= \frac{k}{2} \int_0^1 \int_0^1 dy dx = \frac{k}{2} \int_0^1 y \Big|_0^1 dx = \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M} \iiint_B x \sigma(x, y, z) dx dy dz = \frac{2}{k} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x kz dy dx \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 x dy dx = \int_0^1 \int_0^1 x dy dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\bar{y} = \frac{1}{2}$ olduğu gösterilebilir.



$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_B z \, kz \, dz dy dx = \frac{2}{k} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 kz^2 \, dz dy dx \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 dy dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^1 dy dx = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

olur. O halde cismin ağırlık merkezi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ noktasıdır.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

(x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ olan bir cismin koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \sigma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) \sigma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \sigma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

orijine göre eylemsizlik momenti

$$I_O = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \sigma(x, y, z) \, dx dy dz$$

olacaktır. Çünkü bir $A(x, y, z)$ noktasının Ox - eksenine olan uzaklığının karesi $y^2 + z^2$, Oy - eksenine olan uzaklığının karesi $x^2 + z^2$, Oz - eksenine olan uzaklığının karesi $x^2 + y^2$ ve orijine olan uzaklığının karesi $x^2 + y^2 + z^2$ dir.

Eksenlere göre tanımlanan eylemsizlik momentlerine benzer olarak, koordinat düzlemlerine göre de eylemsizlik momenti tanımlanabilir. Bir $A(x, y, z)$ noktasının xOy - düzlemine olan uzaklığı $|z|$, xOz - düzlemine olan uzaklığı $|y|$, yOz - düzlemine olan uzaklığı $|x|$ olduğundan, sözkonusu düzlemlere göre eylemsizlik momentleri sırasıyla

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \sigma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

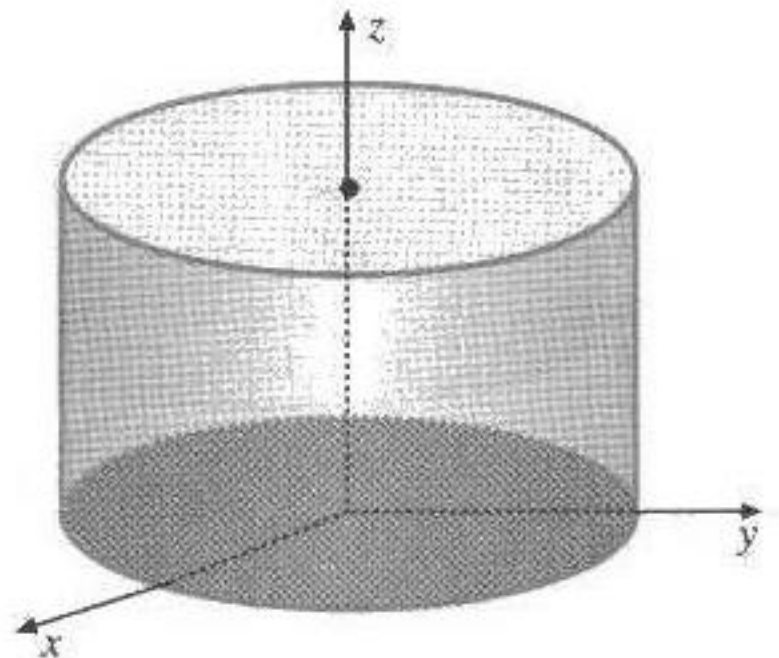
$$I_{xz} = \iiint_G y^2 \sigma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \sigma(x, y, z) \, dx dy dz$$

olacaktır.

ÖRNEK : Taban yarıçapı 4, yüksekliği 3 birim olan bir dik dairesel silindirin, taban düzleminde bulunan ve tabanın merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız. Cisim homogen olup $\delta(x, y, z) = 1$ dir.

Çözüm : Silindirin eksenini olarak Oz - eksenini ve tabanın merkezinden geçen eksen olarak da Ox - eksenini seçelim. Problem sözkonusu silindirin Ox - eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplamaya indirgenir. Buna göre



$$I_x = \int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^3 (y^2 + z^2) dz dy dx$$

olur. Silindirik koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^3 (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (3r^3 \sin^2 \varphi + 9r) dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} r^4 \sin^2 \varphi + \frac{9}{2} r^2 \right]_0^4 d\varphi = \int_0^{2\pi} (192 \sin^2 \varphi + 72) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(192 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + 72 \right) d\varphi = 96 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + 72\varphi \Big|_0^{2\pi} \\ &= 192\pi + 144\pi = 336\pi \end{aligned}$$

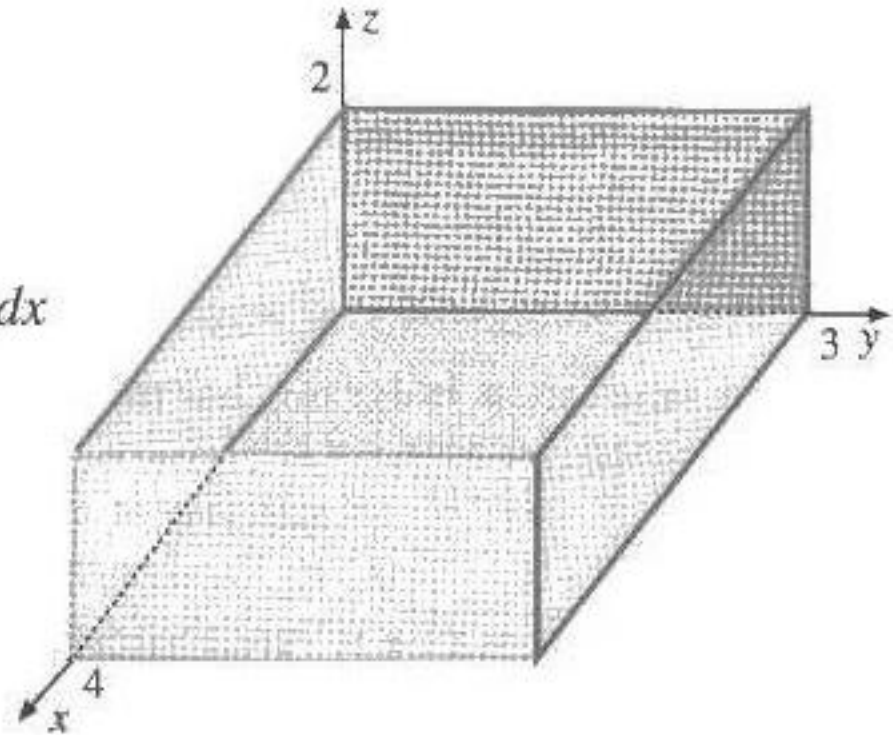
olur.

ÖRNEK : $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ ve $z = 2$ düzlemleri tarafından sınırlanan dikdörtgenler prizmasının her (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = z$ dir. Bu cismin orijine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

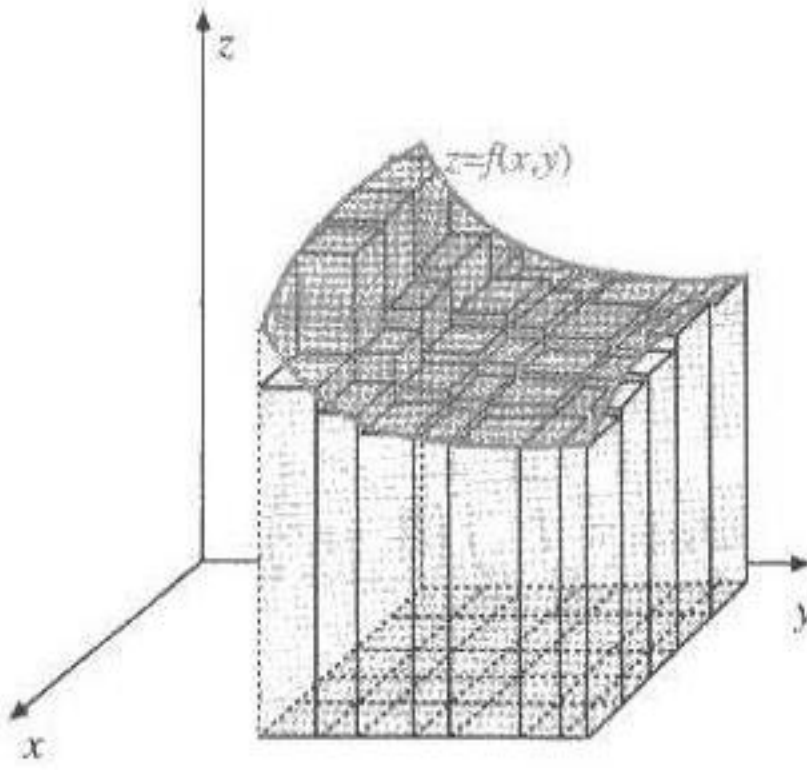
Çözüm :

$$\begin{aligned} I_O &= \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) z dz dy dx \\ &= \int_0^4 \int_0^3 \left[(x^2 + y^2) \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_0^2 dy dx \\ &= \int_0^4 \int_0^3 [2(x^2 + y^2) + 4] dy dx \\ &= \int_0^4 \left(2x^2 y + \frac{2}{3} y^3 + 4y \right) \Big|_0^3 dx \\ &= \int_0^4 (6x^2 + 30) dx = (2x^3 + 30x) \Big|_0^4 \\ &= 248 \end{aligned}$$

olur.



HACİM HESABI



f fonksiyonu B bölgesinde sürekli ve pozitif tanımlı ise

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

ifadesi, taban alanı ΔA_k , yüksekliği $f(x_k^*, y_k^*)$ olan dik pirizmaların hacimleri toplamıdır. Eğer B bölgesi parçalanmanın normu sıfıra gidecek şekilde parçalanırsa bu hacimlerin toplamı, $z = f(x, y)$ denklemlili yüzey, B bölgesi ve B bölge-sini taban kabul eden dik silindir arasında kalan bölgenin V hacmine eşit olur. Şu halde,

$$V = \iint_B f(x, y) dx dy \quad (14.4)$$

olur.

ÖRNEK : $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidi, xOy düzlemi ve $x^2 + y^2 = 4$ silindir tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : Söz konusu bölge yanda gösterilmiştir. B integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 \leq 4$ daire-sidir.

$$V = \iint_B f(x, y) dx dy = \iint_B (9 - x^2 - y^2) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9 - r^2) r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (9r - r^3) dr d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^2 d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 14 d\varphi = 56 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 28\pi \text{ birimküp.}$$

ÖRNEK : $z = y^2$ silindiri ile $x = 0$, $z = 0$, $y = -1$, $y = 1$ ve $x = 1$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

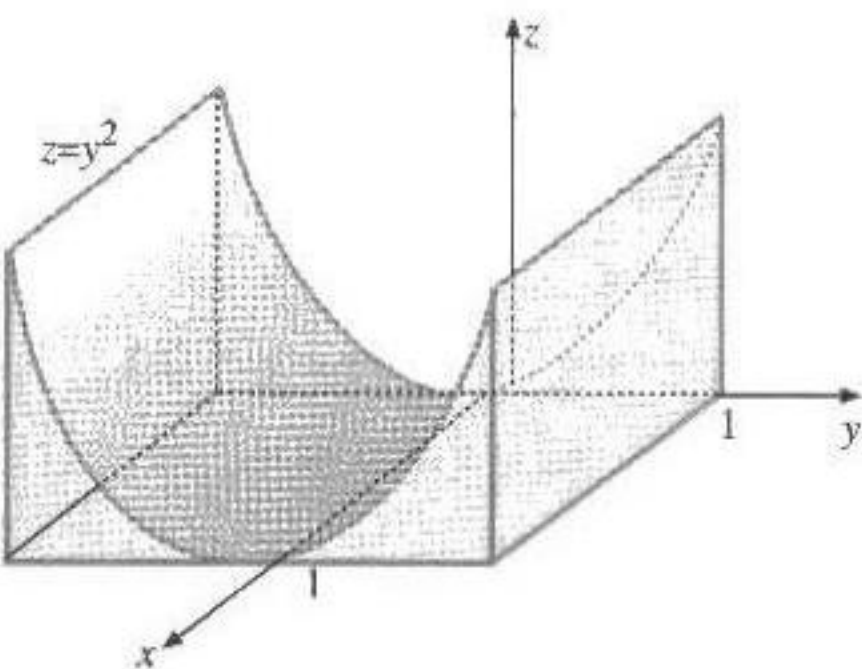
Çözüm : B bölgesi, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$ ve $y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgedir. Buna göre,

$$V = \iint_B f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-1}^1 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 dx$$

$$= \frac{2}{3}$$

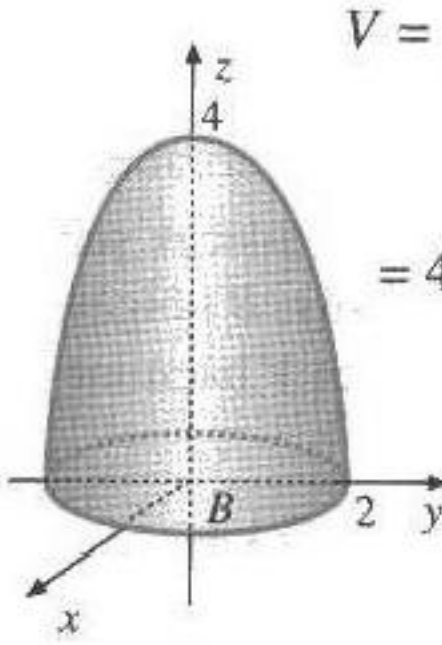
birimküp olur.



ÖRNEK : $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile $x O y$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : Verilen paraboloidin $x O y$ düzlemiyle arakesiti $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir ($z = 4 - x^2 - y^2$ denkleminde $z = 0$ konularak bulunur).

O halde integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 = 4$ çemberi tarafından sınırlanan dairesel bölgedir. Buna göre



$$V = \iint_B z \, dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (4r - r^3) dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\varphi = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 8\pi \text{ br}^3$$

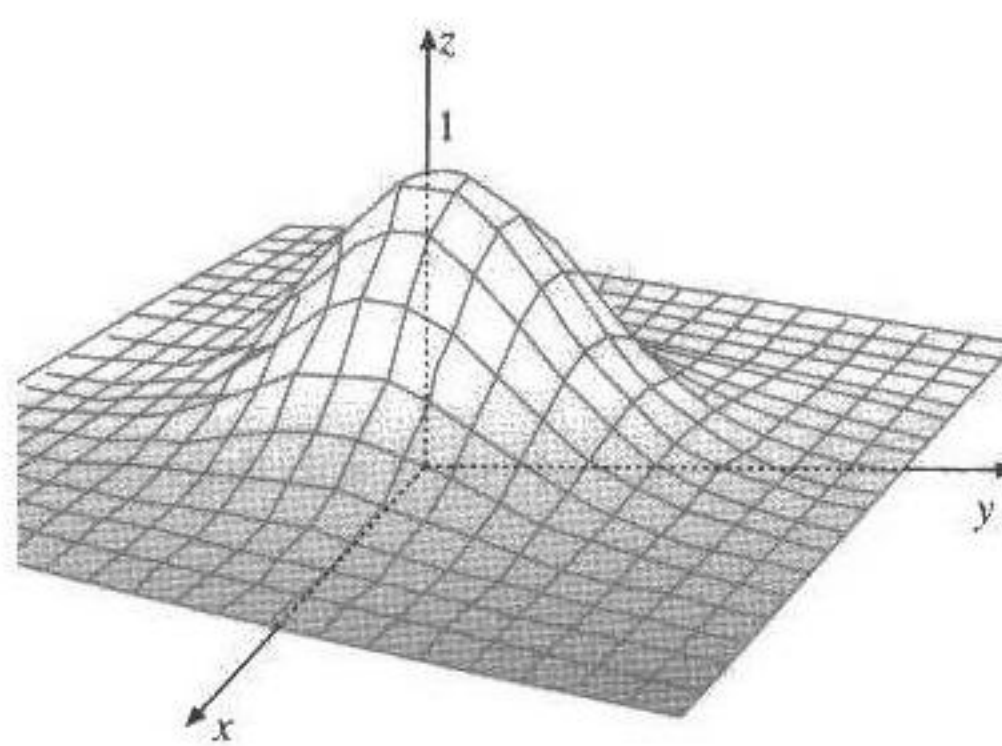
bulunur.

ÖRNEK : $z = e^{-x^2-y^2}$ yüzeyi ile $x O y$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : İstenen bölgenin hacmi

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

genelleştirilmiş integralidir.



$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \left(2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

birimküp olur.

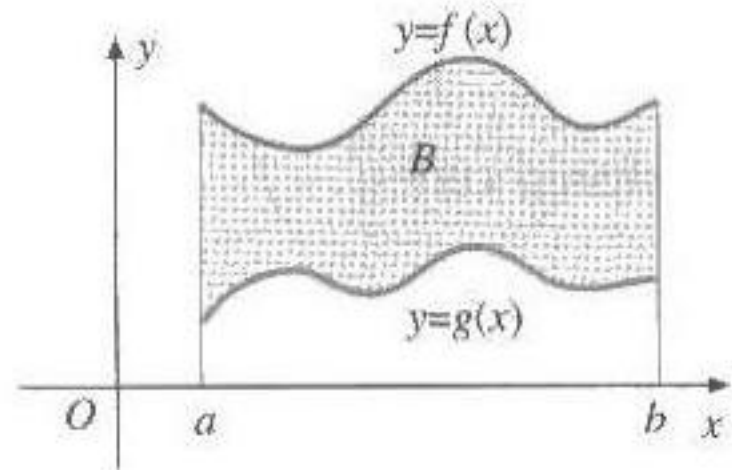
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2k\pi} k \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \cos\varphi dr d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 \cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + \cos^3\varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\varphi + (1+\cos 2\varphi) + (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi] d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\sin\varphi + \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{M} \iint y \sigma(x,y) dx dy = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \sin\varphi \frac{k}{r} r dr d\varphi \\
&= \frac{k}{2k\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi \\
&= \frac{-1}{4\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0
\end{aligned}$$

olacağından, ağırlık merkezi $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasıdır.

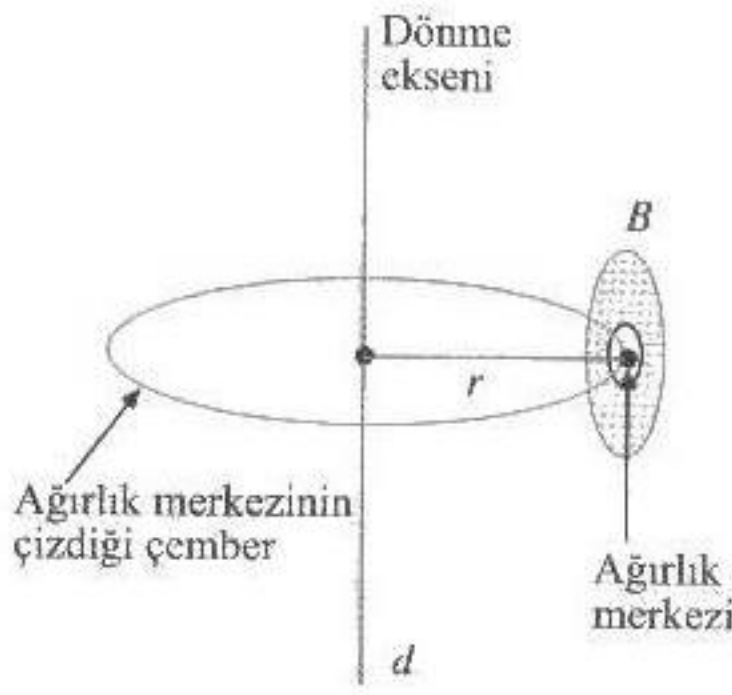
DÖNEL CİSİMLERİN HACMI



Şimdi $B = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x) \}$ bölgesine yerleştirilmiş bir homogen levhanın bu bölgeyi kesmeyen bir d doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi ile bu bölgenin ağırlık merkezinin koordinatları arasındaki bağıntıyı bulmaya çalışalım. B bölgesinin alanı A olsun. Dönme eksenini olarak y - eksenini seçelim. Silindirik tabakalar yöntemine göre, B bölgesinin y - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx = 2\pi \int_a^b x \left(\int_{g(x)}^{f(x)} dy \right) dx \\
&= 2\pi \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} x dy dx = 2\pi \iint_B x dy dx = 2\pi \bar{x} A
\end{aligned}$$

olur. $2\pi\bar{x}$ ifadesi, B bölgesinin ağırlık merkezinin çizmiş olduğu çemberin çevre uzunluğu ve A , bölgenin alanı olduğundan, şu teoremin bir özel durumu ispatlanmıştır.



TEOREM (Birinci Pappus Teoremi)

Düzlemsel bir B bölgesi, kendisiyle aynı düzlem içinde bulunan ve B nin içinden geçmeyen bir eksen etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel cismin V hacmi, B bölgesinin alanı ile B bölgesinin ağırlık merkezinin çizmiş olduğu çemberin çevre uzunluğunun çarpımına eşittir. Buna göre B bölgesinin alanı A , ağırlık merkezinin dönme eksenine olan uzaklığı r ise

$$V = 2 \pi r \cdot A$$

olur.

Eğer dönme eksen y - eksen $r = \bar{x}$ olacağından

$$V = 2 \pi \bar{x} \cdot A$$

olur. Eğer dönme eksen x - eksen $r = \bar{y}$ olur. Dolayısıyla

$$V = 2 \pi \bar{y} \cdot A$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $y = x^3$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin x - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $V = 2 \pi \bar{y} A = 2 \pi \cdot \frac{A}{A} \iint_B y \, dx \, dy$

$$= 2 \pi \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \pi \int_0^1 y^2 \Big|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \pi \int_0^1 (x - x^6) dx = \frac{5\pi}{14} \text{ br}^3$$

olur.

ÖRNEK : $r = a(1 + \cos \varphi)$ kardioidinin üst yarısı ile x - eksen arasında kalan bölgenin x - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : Söz konusu bölge yanda gösterilmiştir.

$$V = 2 \pi \iint_B y \, dx \, dy = 2 \pi \iint_B r \sin \varphi \, r \, dr \, d\varphi$$

$$= 2 \pi \int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi r^3 \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{2\pi a^3}{3 \cdot 4} (1 + \cos \varphi)^4 \Big|_0^\pi = \frac{8}{3} \pi a^3$$

bulunur.