TANIM

B kapalı ve sınırlı bir bölge ve f bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. B bölgesinin bir $P = \{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ parçalanması verildiğinde, ΔA_k, B_k bölgesinin alanını, (x_k^*, y_k^*) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** veya **integral toplamı** adı verilir.

TANIM

Eğer

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali** denir,

$$\iint_B f(x, y)\, dA \qquad (14.1)$$

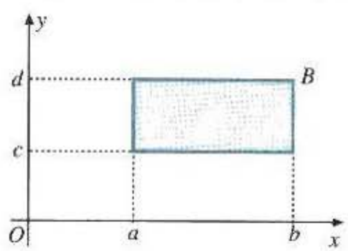
ile gösterilir. $f(x, y)$ ifadesine **integrant**, B bölgesine de **integrasyon bölgesi** denir.

TEOREM 14.1 (Birinci Fubini Teoremi)

$B = \{ (x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d \}$ ve $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

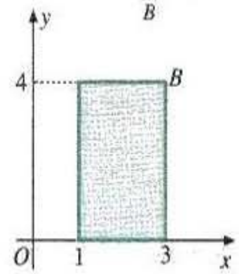
Bu teoreme göre, integrasyon bölgesi bir dikdörtgensel bölge olduğunda integralin sırası değiştirilebilir.



ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4 \}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4 \}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

Çözüm : $$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_1^3 2xy^3\, dx dy = \int_0^4 \left(\int_1^3 2xy^3\, dx \right) dy$$



$$= \int_0^4 (x^2 y^3) \Big|_1^3 dy = \int_0^4 (9y^3 - y^3)\, dy$$

$$= \int_0^4 8y^3\, dy = 2y^4 \Big|_0^4 = 2.4^4 = 512 .$$

olur. Integrasyon sırasını değiştirerek; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\iint_B f(x,y) dA = \int_1^3 \int_0^4 2xy^3\, dy dx = \int_1^3 \left(\int_0^4 2xy^3\, dy \right) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2} xy^4 \Big|_0^4 dx = \int_1^3 128x dx = 64x^2 \Big|_1^3 = 512$$

ÖRNEK 1 İki Katlı Bir İntegral Hesaplamak

$f(x, y) = 1 - 6x^2y$ ve $R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$ için $\iint_R f(x, y)\, dA$'yı hesaplayın.

Çözüm Fubini teoremiyle,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 (1 - 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 - 16y)\, dy = \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 4$$

bulunur. İntegrasyon sırasını değiştirmek de aynı sonucu verir:

$$\int_0^2 \int_{-1}^{1} (1 - 6x^2y)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)]\, dx$$

$$= \int_0^2 2\, dx = 4.$$ ∎

İKİ KATLI İNTEGRAL

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} (xy + \sin x)\, dy\, dx$$

integrasyon sırasını dy dx belirler.

dy dx → önce y ye göre integral al

dx dy → önce x'e göre integral et

$$\int_{x=2}^{x=3}\int_{y=5}^{10} (xy + x^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left(\int_{y=5}^{10} (xy + x^2)\, dy\right) dx$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left(\left(x\frac{y^2}{2} + x^2 y\right)\Bigg|_{y=5}^{10}\right) dx =$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left(\left(\frac{xy^2}{2} + x^2 y\right)\Bigg|_{y=5}^{10}\right) dx =$$

$$= \int_{x=2}^{3}\left[\left(\frac{x \cdot 10^2}{2} + x^2 \cdot 10\right) - \left(\frac{x \cdot 5^2}{2} + x^2 \cdot 5\right)\right] dx$$

$$= \int_{x=2}^{3} \left(50x + 10x^2 - 12.5x - 5x^2\right) dx$$

$$= \int_{x=2}^{3} \left(5x^2 + 37.5x\right) dx = \left(5\frac{x^3}{3} + 37.5\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=2}^{3}$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 3^3}{3} + 37.5\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{5 \cdot 2^3}{3} + 37.5\frac{2^2}{2}\right)$$

$$= 125.4$$

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=h(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

1) Önce y'ye göre integral alınır.
2) y yerine önce g(x) sonra h(x) konulur

$$\int_{y=a}^{b} \int_{x=h(y)}^{g(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

önce x'e göre integral alınır.

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\, d \quad \text{şeklinde}$$

Sınırlar sabit ise integrasyon sırasının önemi yoktur.

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=h(x)}^{y=g(x)} f(x,y)\, d \quad \text{şeklinde}$$

ise integrasyon sırası önemlidir. Mutlaka önce y ye göre integral alınmalı daha sonra x'e göre alınmalıdır.

$$\int_{x=2}^{x=4} \int_{y=2x}^{x^2} xy\, dy\, dx = ?$$

$$\int_{x=2}^{x=4} \left(\int_{y=2x}^{x^2} xy\, dy \right) dx = \int_{x=2}^{4} x\, \frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=2x}^{x^2} dx$$

$$= \int_{x=2}^{4} \left(x\, \frac{(x^2)^2}{2} - x\, \frac{(2x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=2}^{4} \left(\cancel{x}^5 - 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=2}^{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^6}{6} - 2\,\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{2^6}{6} - 2\cdot\frac{2^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[103.5 - 5.33\right] = 49.08$$

$$\int_{y=4}^{5}\int_{x=3y}^{y^3} \left(x^2 y + x\right) dx\, dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left(\int_{x=3y}^{y^3} \left(x^2 y + x\right) dx\right) dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left(\left(\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=3y}^{y^3}\right) dy$$

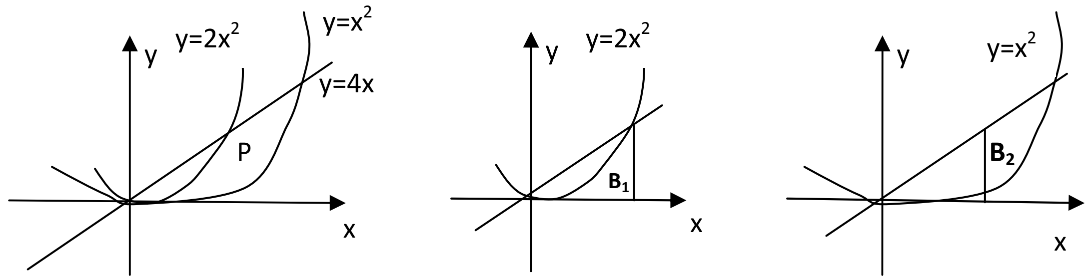
$$= \int_{y=4}^{5}\left[\left(\frac{(y^3)^3}{3}\cdot y + \frac{(y^3)^2}{2}\right) - \left(\frac{(3y)^3}{3}\cdot y + \frac{(3y)^2}{2}\right)\right] dy$$

$$= \int_{y=4}^{5}\left[\left(\frac{y^{10}}{3} + \frac{y^6}{2}\right) - \left(9y^4 + \frac{9}{2}y^2\right)\right] dy$$

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Problemin degisik cozumleri mevcuttur.

Cozum 1)

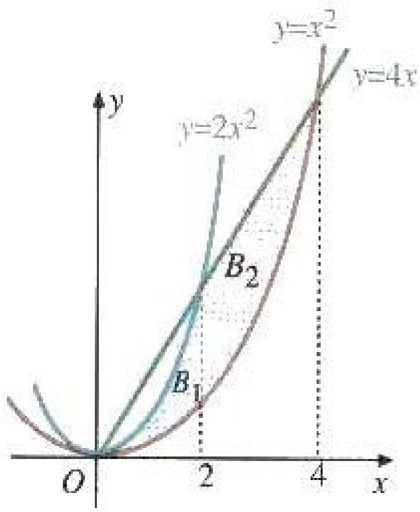


Sorulan integral P alani uzerindeki integraldir. Bu integral $P=B_1+B_2$ oldugu aciktir. Dolayisiyla B_1 ve B_2 yi hesaplar sonra $P= B_1+B_2$ hesaplariz.

$$I = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

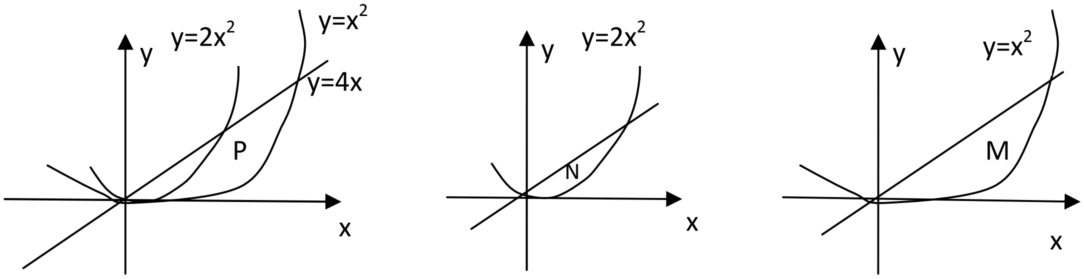
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x+y+1)\,dy\,dx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x+y+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + y \right) \Big|_{x^2}^{4x} dx$$

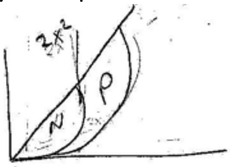


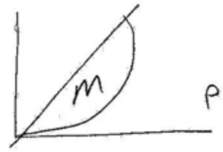
$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5} = \mathbf{86.4}$$

Cozum 2)



Sorulan integral P alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=M-N oldugu aciktir. Dolayisiyla once N ve M yi hesaplariz sonra P=M-N yi hesaplariz.





$P=M-N$

$$N=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=2x^2}^{y=4x}(x+y+1)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{2x^2}^{4x}$$

$$N=\int_0^2\left(x(4x)+\frac{(4x)^2}{2}+4x\right)-\left(x(2x^2)+\frac{(2x^2)^2}{2}+2x^2\right)dx$$

$$=\int_0^2 4x^2+8x^2+4x-\{2x^3+2x^4+2x^2\}\,dx$$

$$=\int_0^2\left(-2x^4-2x^3+10x^2+4x\right)dx$$

$$=-2\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+10\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$=-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{10}{3}x^3+2x^2\Big|_0^2$$

$N=13.8667-0=13.8667$

51

$$M=\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=x^2}^{y=4x}(x+y+1)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{2x^2}^{4x}dx$$

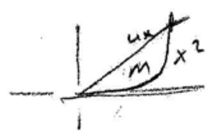
$$=\int_0^4\left(x(4x)+\frac{(4x)^2}{2}+4x\right)-\left(x(x^2)+\frac{(x^2)^2}{2}+x^2\right)dx$$

$$=\int 4x^2+8x^2+4x-\left(x^3+\frac{x^4}{2}+x^2\right)dx$$

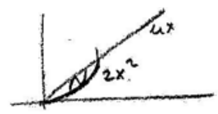
$$=\int\left(-\frac{x^4}{2}-x^3+11x^2+4x\right)dx$$

$$=-\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}+\frac{11}{3}x^3+2x^2\Big|_0^4$$

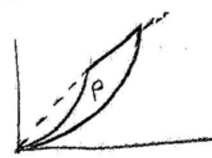
$=100.2667-0=100.2667=$



$M=100.2667$



$N=13.8667$

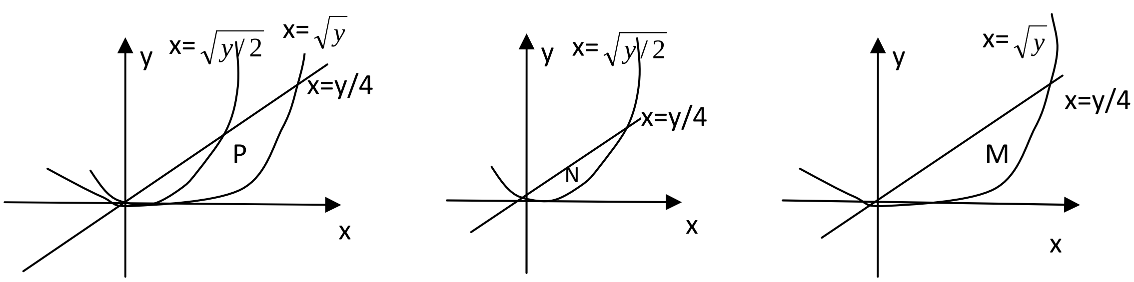


$P=M-N=100.26-13.86$

$=86.4.$

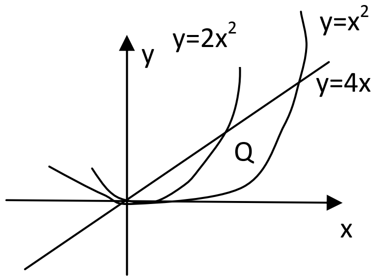
52

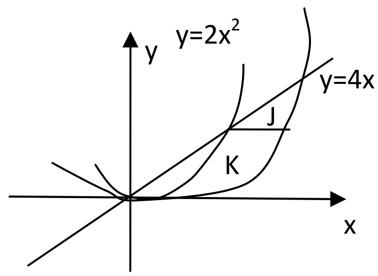
Cozum 2.b)Yukaridaki integralde integral sinirlarini degistirerek once x e sonra y ye gore integral alarak da hesaplayabiliriz.



$$N=\int_{y=0}^{y=8}\int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=y/4}(x+y+1)\,dx\,dy, \qquad M=\int_{y=0}^{y=16}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=y/4}(x+y+1)\,dx\,dy, \qquad N=13.8667,\ M=100.2667,\ P=M-N=86.4$$

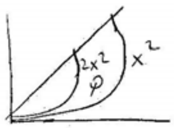
Cozum 3)

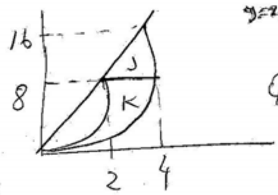




Sorulan integral Q alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=K+J oldugu aciktir. Dolayisiyla K ve J yi hesaplar sonra P= K+J yi hesaplariz.

Problemi X eksenine paralel bolerek de çözebiliriz





$y=2x^2 \quad x^2=\frac{y}{2} \quad x=\sqrt{\frac{y}{2}}$

$Q = K + J$

$$K=\int_{y=0}^{y=8}\int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}}(x+y+1)\,dx\,dy=\int\left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Bigg|_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^8\left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2}+\sqrt{y}\cdot y+\sqrt{y}\right)-\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2}{2}+\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot y+\sqrt{\frac{y}{2}}\right)$$

$$=\int_0^8 \frac{y}{2}+y^{3/2}+y^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{\sqrt{2}}y^{3/2}+\frac{1}{\sqrt{2}}y^{1/2}\right)$$

$$=\int_0^8\Big(\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{A}y+\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{B}y^{3/2}+\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{C}y^{1/2}\Big)\,dy$$

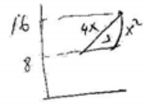
$$=\int_0^8\left(Ay+By^{3/2}+Cy^{1/2}\right)dy$$

$$=A\frac{y^2}{2}+B\frac{1}{\frac{5}{2}}y^{5/2}+C\frac{1}{3/2}y^{3/2}\Bigg|_0^8=\frac{A}{2}y^2+\frac{2B}{5}y^{5/2}+\frac{2C}{3}y^{3/2}\Bigg|_0^8$$

53

$$K=33.62-0=33.62$$

54



$$J=\int_{y=8}^{y=16}\int_{x=\frac{y}{4}}^{x=\sqrt{y}}(x+y+1)\,dx\,dy=\int_8^{16}\left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Bigg|_{y/4}^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int\left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2}+\sqrt{y}\cdot y+\sqrt{y}\right)-\left(\frac{\left(\frac{y}{4}\right)^2}{2}+\frac{y}{4}\cdot y+\frac{y}{4}\right)$$

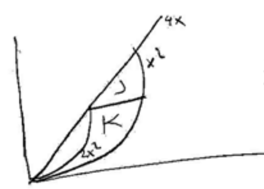
$$=\int\frac{y}{2}+y^{3/2}+y^{1/2}-\left(\frac{1}{32}y^2+\frac{y^2}{4}+\frac{y}{4}\right)$$

$$=\int\underbrace{\left(-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}\right)}_{A}y^2+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}_{B}y+y^{3/2}+y^{1/2}$$

$$=\int Ay^2+By+y^{3/2}+y^{1/2}$$

$$=\frac{A}{3}y^3+\frac{B}{2}y^2+\frac{1}{\frac{5}{2}}y^{5/2}+\frac{y^{3/2}}{3/2}\Bigg|_8^{16}$$

$$J=100.2667-47.4927=52.77$$



$$K+J=33.62+52.77=86.4$$

UYARI

Bir integralde önce hangi değişkenin diferensiyeli yazılmışsa önce o değişkene göre integral alınır. $f(x, y)$ ifadesine en yakın sınırlar önce diferensiyeli yazılan değişkenin sınırlarıdır.

TEOREM 14.2 (İkinci Fubini Teoremi)

$u, v : [a, b] \to R$ fonksiyonları sürekli, $\forall x \in [a, b]$ için $u(x) \leq v(x)$ ve

$B = \{ (x, y) : a \leq x \leq b \,,\; u(x) \leq v(x) \}$ olsun. $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

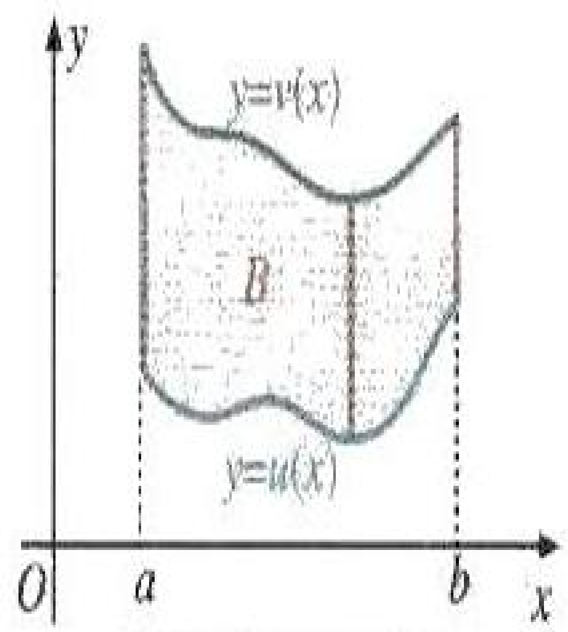
dır.

Teoremde sözü edilen B bölgesi yandaki şekilde gösterilmiştir. Böyle bölgelere **düşey basit bölge** adı verilir. Böyle bir bölgede düşey olarak çizilen her doğru parçasının üst ucu $y = v(x)$, alt ucu $y = u(x)$ eğrisi üzerinde bulunur. Bu doğrunun bütün bölgeyi taraması için $x = a$ doğrusundan başlayıp $x = b$ doğrusuna kadar hareket etmesi gerekir.

Benzer olarak, $D = \{ (x, y) : c \leq y \leq d \,,\; \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$ bölgesi üzerindeki integral

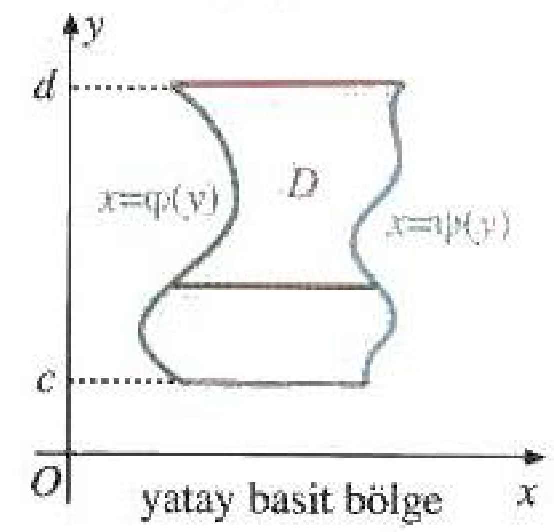
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

biçiminde hesaplanabilir.



düşey basit bölge

D bölgesi tipindeki bölgelere **yatay basit bölge** adı verilir. Böyle bölgelerde yatay olarak çizilen doğrular $x = \varphi(y)$ ve $x = \psi(y)$ eğrilerini birer noktada keser.

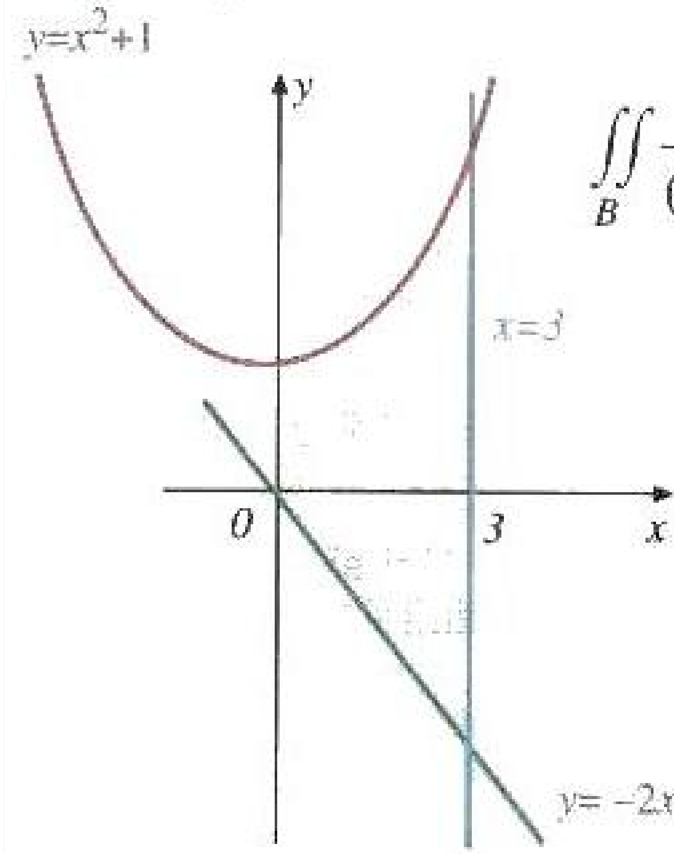


yatay basit bölge

ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 3 \,,\; -2x \leq y \leq x^2 + 1 \}$ bölgesi üzerinde

$$\iint\limits_B \frac{2y}{(x+1)^2}\,dA$$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen bölgenin grafiği yanda verilmiştir. Buna göre



$$\iint\limits_B \frac{2y}{(x+1)^2}\,dA = \int_0^3 \int_{-2x}^{x^2+1} \frac{2y}{(x+1)^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{y^2}{(x+1)^2}\Big|_{-2x}^{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{(x^2+1-2x)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx$$

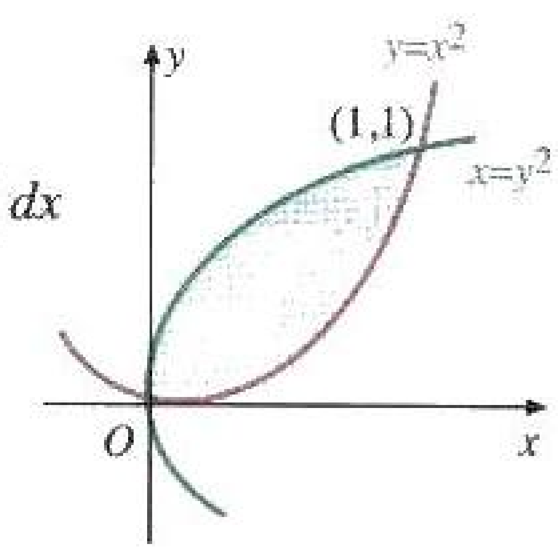
$$= \int_0^3 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(8+1) = 3 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\iint\limits_B dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen bölge yanda gösterilmiştir.



$$\iint\limits_B dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

olur.

ÖRNEK : B bölgesi, birinci bölgede $y = 4x^2$, $y = x^2$ parabolleri ile $y = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint\limits_B (x + y)\,dA$$

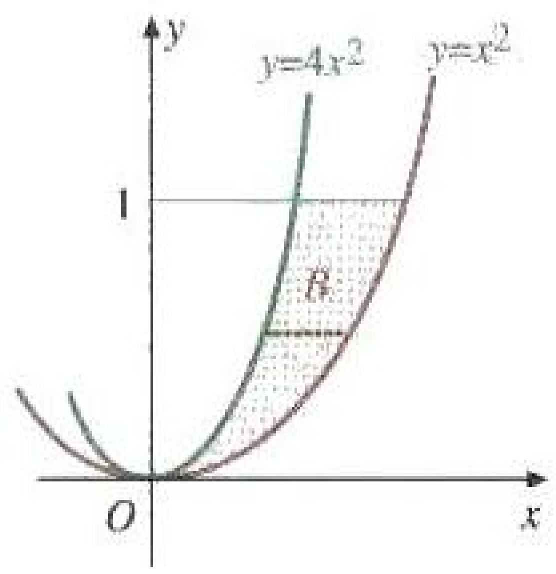
integralini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Bölge yatay basit bölge olduğundan, önce x değişkenine göre integral almak gerekir.

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + xy \Big|_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{8}y + \frac{1}{2}y^{3/2}\right) dy = \frac{3}{16}y^2 + \frac{1}{5}y^{5/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{5} = \frac{31}{80}$$



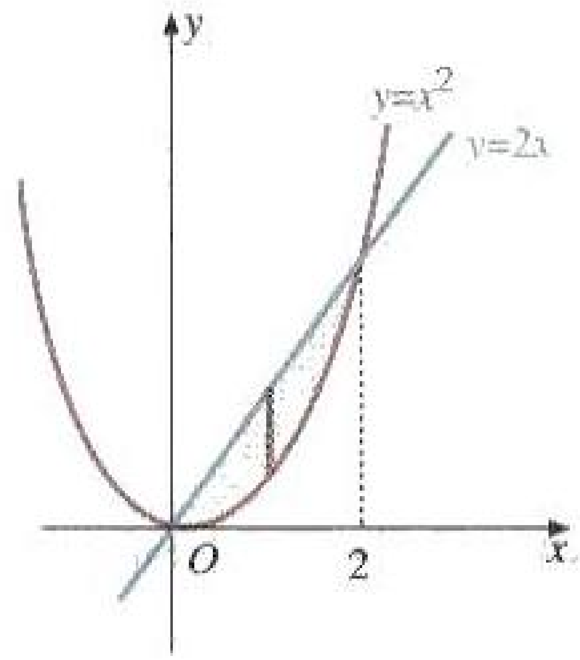
bulunur.

ÖRNEK : $I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy\; dx\; dy$ integrali veriliyor.

(a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

(b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

(c) İntegrali hesaplayınız.



Çözüm : (a) $x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$, $x = \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = 2x$, $y = 0$ ve $y = 4$ tür.

Bu eğriler ve doğrular çizilirse yandaki şekil elde edilir. İntegrasyon sınırlarına dikkat edildiğinde, integrasyon bölgesinin taralı bölge olduğu görülür.

(b) Önce y değişkenine göre integral alalım. Bölge içinde y eksenine paralel bir doğru çizildiğinde, bu doğru parçasının alt ucu $y = x^2$ eğrisi, üst ucu $y = 2x$ doğrusu üzerindedir. Bu nedenle y nin sınırları x^2 ve $2x$ dir. Bölgenin en solunda bulunan noktanın apsisi $x = 0$, en sağında bulunan noktanın apsisi $x = 2$ olduğundan, verilen integral

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\; dy\; dx$$ biçiminde de yazılabilir.

(c) İntegrasyon sırasının değişmesi integralin değerini değiştirmediğinden, integrallerden herhangi biri hesaplanabilir. Son integrali hesaplayalım.

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\; dy\; dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - \frac{x^5}{2}\right) dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{x^6}{12}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

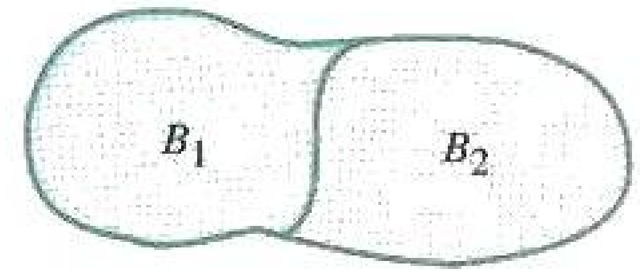
olur.

Limit ve toplam sembolünün özelikleri gözönüne alındığında aşağıdaki özeliklerin varlığı kolayca gösterilebilir. Buradaki f ve g fonksiyonları B üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

(1) Her c sabiti için

$$\iint_B cf(x,y)\,dA = c \iint_B f(x,y)\,dA$$

dır.



(2) $$\iint_B [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint_B f(x,y)\,dA + \iint_B g(x,y)\,dA \,.$$

(3) B_1 ve B_2 , arakesitleri, en fazla bir eğri parçası olan iki bölge ise

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x,y)\,dA = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

dır.

(4) Her $(x, y) \in B$ için $f(x, y) \le g(x, y)$

$$\iint_B f(x,y)\,dA \le \iint_B g(x,y)\,dA$$

dır.

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu bölge yanda gösterilmiştir. Bu bölge iki düşey basit bölgenin birleşimi olduğundan, istenen integral iki integralin toplamı olacaktır.

$$I = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

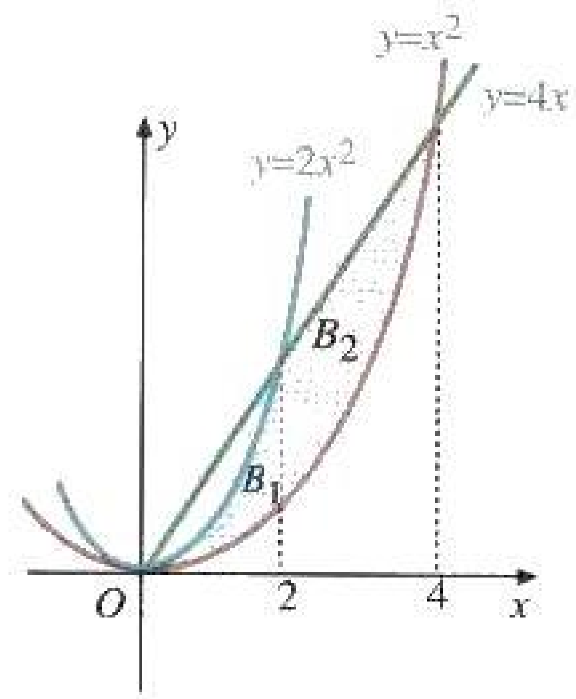
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x+y+1)\,dydx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x+y+1)\,dydx$$

$$= \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + y\right)\Big|_{x^2}^{4x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^4 + x^3 + x^2\right) dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 11x^2 + 4x\right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big|_2^4$$

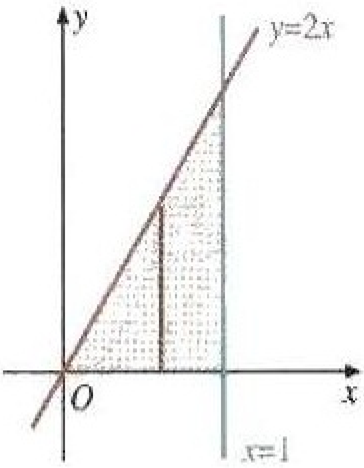
$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5}$$ olur.



ÖRNEK : $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{1} \cos(x^2)\,dxdy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\cos(x^2)$ fonksiyonunun x değişkenine göre integrali hesaplanamaz. Şimdi integralin sırasını değiştirelim. Bunun için önce integrasyon bölgesini çizelim

$x = \frac{y}{2}$ ise $y = 2x$ ve $x = 1$ doğruları çizilirse integrasyon bölgesinin, yandaki şekilde taralı olan bölge olduğu görülür.



Önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa

$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2)\, dy dx = \int_0^1 \cos(x^2)\, y \Big|_0^{2x} dx$$

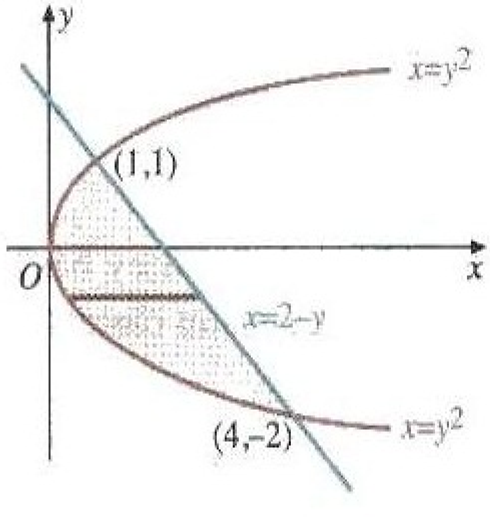
$$= \int_0^1 2x\cos(x^2)\, dx = \sin(x^2) \Big|_0^1 = \sin 1$$

bulunur.

ÖRNEK : B bölgesi $x = y^2$ parabolü ile $x + y = 2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B dA \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda çizilmiştir.



Buna göre

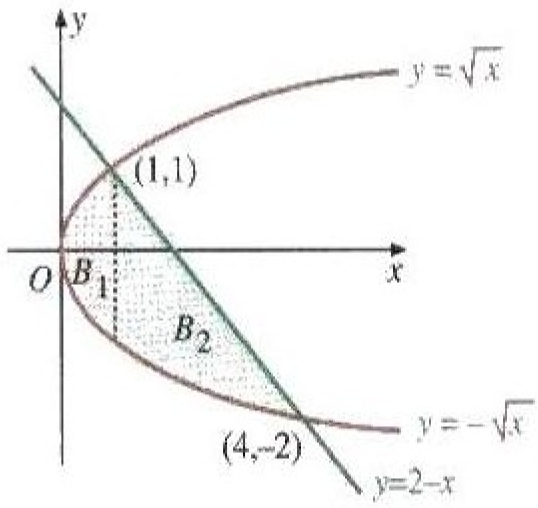
$$I = \int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{2-y} dxdy = \int_{-2}^{1} x \Big|_{y^2}^{2-y} dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = 2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$$

olur.

Yukarıdaki integral, integrasyon sırasını değiştirerek



$$I = \iint_{B_1} dydx + \iint_{B_2} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dydx$$

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\, \mathrm{dx} + \int_0^4 \left(2 - x + \sqrt{x}\right) \mathrm{dx}$$

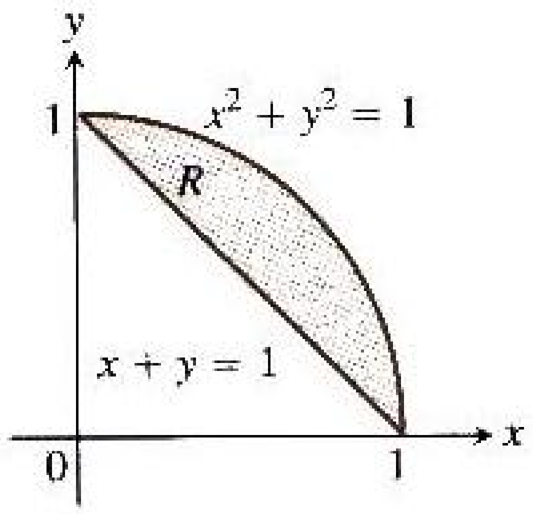
$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^4 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$$

biçiminde de hesaplanabilir.

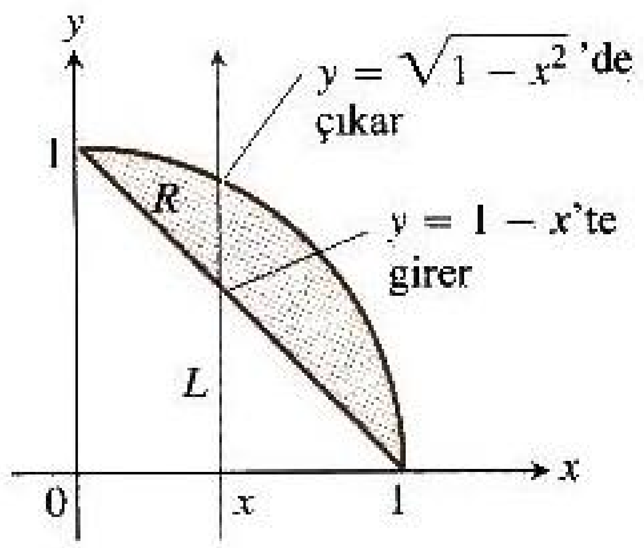
Şimdi, integrasyon sınırlarını bulmak için, düzlemde bir çok bölgeye uygulanabilen bir prosedür veriyoruz. Bu prosedürün işe yaramadığı daha karmaşık bölgeler, çoğunlukla bu prosedür uygulanabilecek şekilde parçalara ayrılır.

$\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini, önce y'ye sonra da x'e göre integre ederek hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. *Çizim*. İntegrasyon bölgesini çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun y sınırlarını bulun* Artan y yönünde R'den geçen dikey bir L doğrusu hayal edin. L'nin girdiği ve çıktığı y değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun y sınırlarıdır ve genellikle x'in fonksiyonlarıdırlar (sabit yerine).

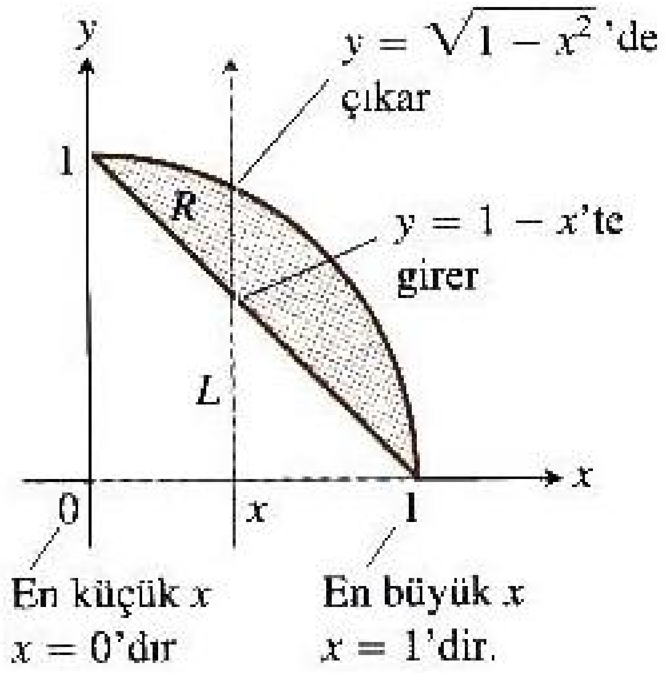


3. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun* R'den geçen bütün dikey doğruları kapsayan x-sınırlarını seçin. İntegral

$$\iint_R f(x,y)\,dA =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

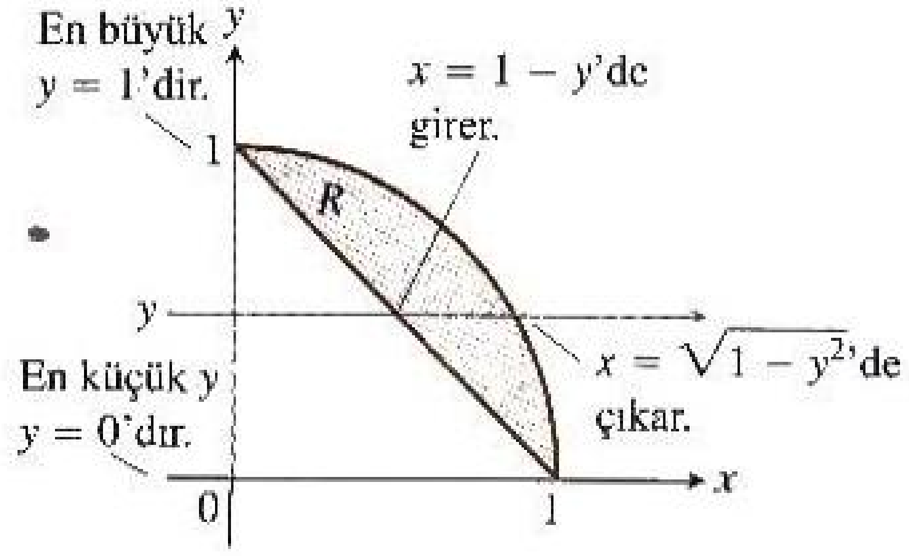
olur.



Aynı iki katlı integrali, integrasyon sırası değişmiş tekrarlı integral olarak hesaplamak için, 2. ve 3. adımlarda dikey doğrular yerine yatay doğrular kullanın. İntegral

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

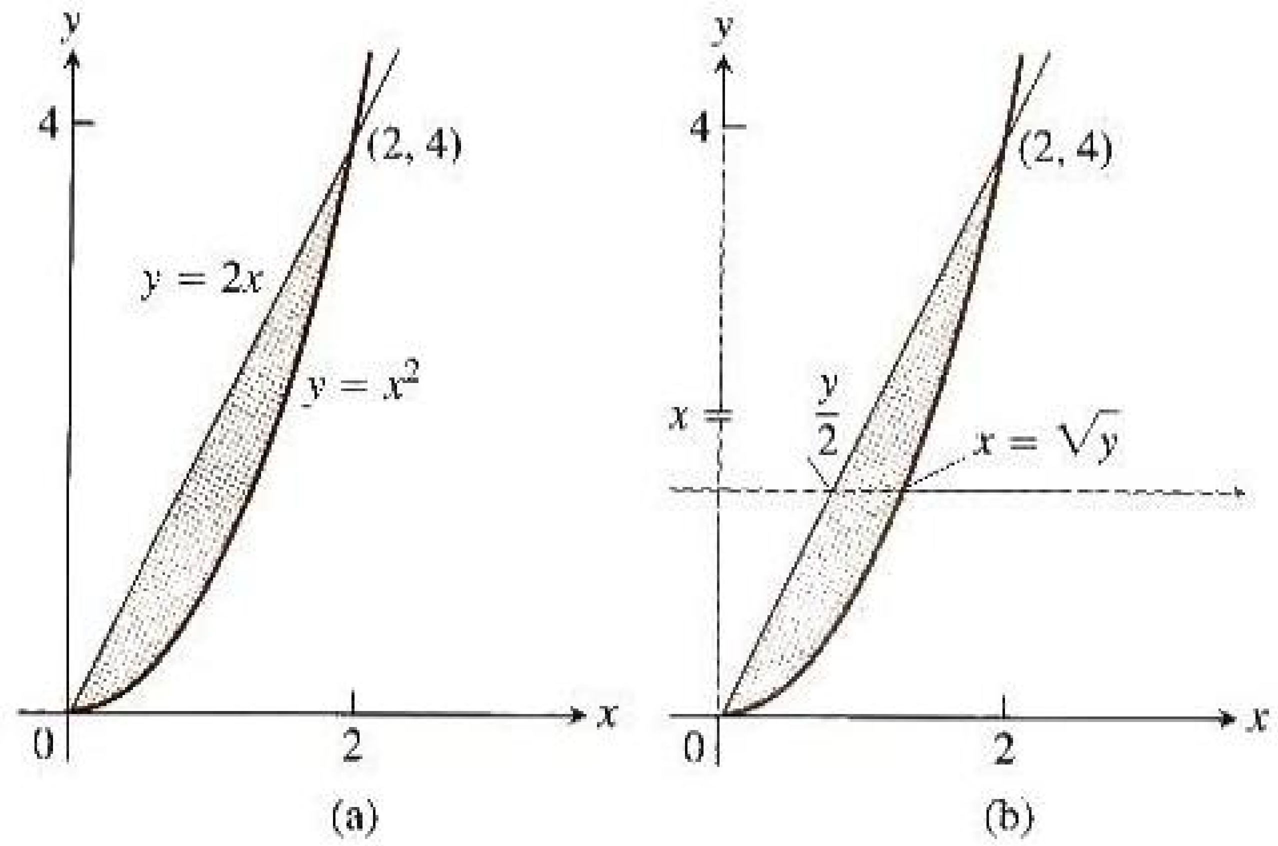


ÖRNEK 4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\,dy\,dx$$

integralinin integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş eşdeğer bir integral yazın.

Çözüm İntegrasyon bölgesi, $x^2 \le y \le 2x$ ve $0 \le x \le 2$ eşitsizlikleriyle verilmektedir. Dolayısıyla, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında $y = x^2$ ile $y = 2x$ eğrilerinin sınırladığı bölgedir (Şekil 15.13a).



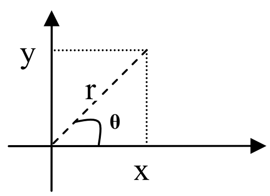
ŞEKİL 15.13 Örnek 4'ün integrasyon bölgesi

Değiştirilmiş sırada integrasyonun sınırlarını bulmak için, bölge boyunca soldan giden bir yatay doğru hayal ederiz. $x = y/2$'de girer ve $x = \sqrt{y}$'de çıkar. Böyle bütün doğruları kapsamak üzere, y'yi $y = 0$'dan $y = 4$'e götürürüz (Şekil 15.13b). İntegral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\,dx\,dy$$

olur. Bu integrallerin ortak değeri 8'dir.

Duzlemde Kartezyen ve Kutupsal Koord. Sist.
Duzlemde bir noktanin x,y ile belirtilmesi kartezyen koordinat sistemi olur.
Bir noktanin r(genlik,uzunluk.mesafe) ve θ (aci) ile belirtilmesi kutupsal koordinat sistemi olur.



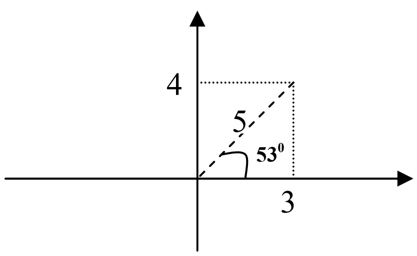
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

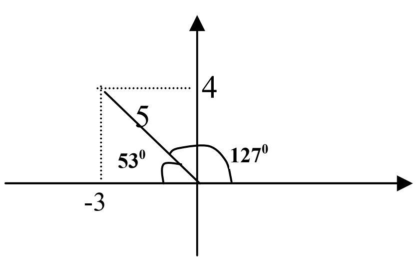
$\tan^{-1}(z)$: arg tan(z) demektir.
P611) Asagidaki kartezyen koordinat sisteminde verilen noktalari kutupsal koordinat sisteminde belirtin. a)(3,4) b)(-3,4), c)(-3.-4), d)(3,-4)
Cozum:
a)x=3, y=4, ➔ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}(4/3) = 53.1^0$



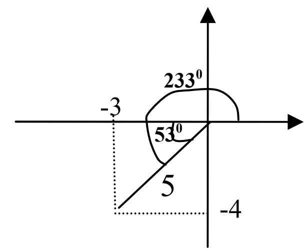
b)x=-3, y=4, ➔ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$,

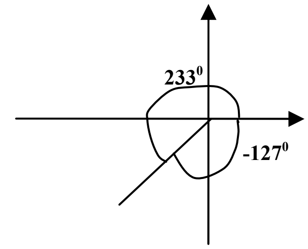
$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}(4/(-3)) = 180 - 53.1^0 = 127^0$



c)x=-3, y=-4, ➔ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$,

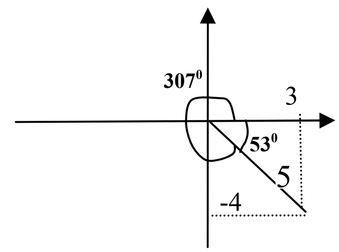
$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}(-4/(-3)) = 180 + 53.1^0 = 233^0 = 360 - 233^0 = -127^0$





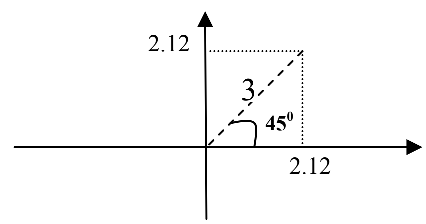
d)x=3, y=-4, ➔ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$,

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}(-4/3) = -53.1^0 = 360 - 53 = 307$

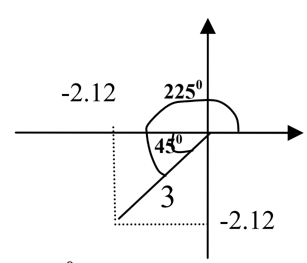


---------------- ---------------------- ---------------------
P613) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari kartezyen koordinat sisteminde belirtin.
a)($r=3$, $\theta=45^0$) b)($r=3$, $\theta=225^0$)
c)($r=10$, $\theta=225^0$), d)($r=10$, $\theta=-60^0$),

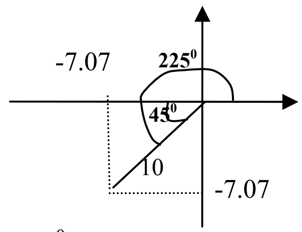
Cozum:
a)$\theta=45^0$, r=3
$x = r\cos(45^0) = 3\ 0.707 = 2.12$
$y = r\sin(45^0) = 3\ 0.707 = 2.12$



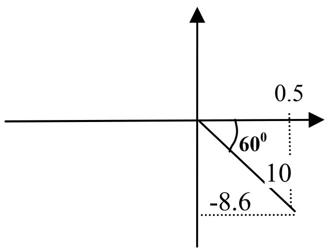
b)$\theta=225^0$, r=3
$x = r\cos(225^0) = 3\ (-0.707 = -2.12$
$y = r\sin(225^0) = 3\ (-0.707) = -2.12$



c)$\theta=225^0$, r=10
$x = r\cos(225^0) = 10\ (-0.707 = -7.07$
$y = r\sin(225^0) = 10\ (-0.707) = -7.07$



d)$\theta=-60^0$, r=10
x= r cos(-60^0) = 10   0.5 = 0.5
y= r sin(-60^0) = 10 (-0.86) = - 8.6



Kutupsal koordinatlarda gosterim:
Kutupsal koordinatlarda verilen bir noktayi koordinat sisteminde gostermek icin uc turlu yol ile cozebiliriz.

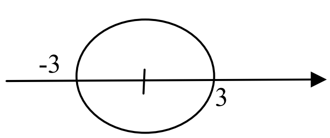
Birinci yol: onceki problemde oldugu gibi kartezyen koordinat sistemine cevir ve x,y noktalarini bul.

Ikinci yol: a) merkezi orijinde olan r yaricapli bir daire ciz. b) x ekseni ile $\theta^{\,0}$ lik aci yapan dogrunun daireyi kestigi noktayi bul.

Ucuncu yol: a) x eksenine $\theta^{\,0}$ lik aci yapan dogruyu ciz. b)Dogru uzerinde orijinden r kadar git ve noktayi bul.

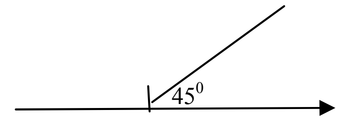
P617) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin. a) (r=3, $\theta=45^0$)

Ikinci yol: ile cozelim.
r=3 yaricapli daire ciz.

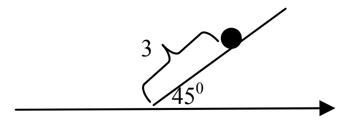


x ekseni ile $\theta=45^0$ lik aci yapan dogru ciz.

Ucuncu Yol a) x eksenine $45^{\,0}$ lik aci yapan dogruyu ciz.

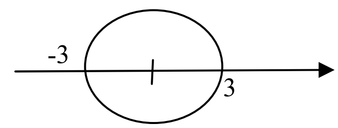


b)Dogru uzerinde orijinden r kadar git ve noktayi bul.

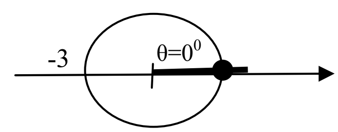


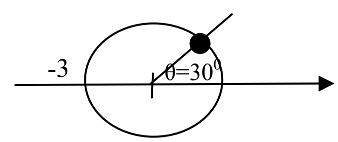
P618) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin.
a)A (r=3, $\theta=0^0$)   b) B(r=3, $\theta=30^0$)   c) C(r=3, $\theta=45^0$),
d)D (r=3, $\theta=60^0$)   e)E (r=3, $\theta=90^0$)

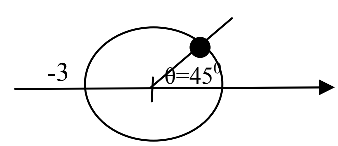
Cozum: noktalarin hepsinde r=3 dur o halde noktalar r=3 yaricapli cember uzerinde bulunacaktir.

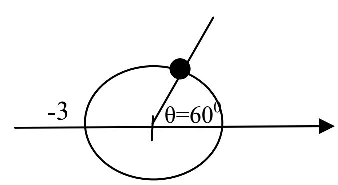


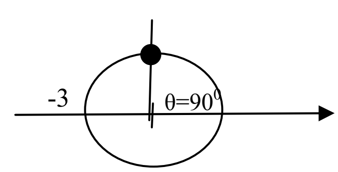
$\theta=0^0$, $\theta=30^0$, $\theta=45^0$, $\theta=60^0$ $\theta=90^0$
acilarin cemberi kestigi noktalar aranan noktalardir.







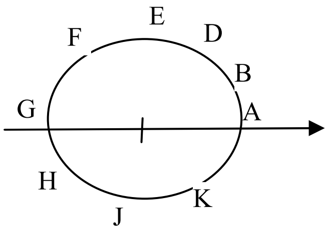




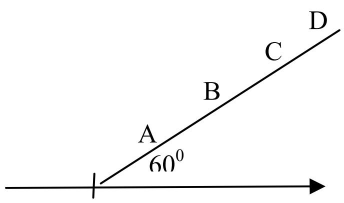
P617) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin.
a)A (r=3, $\theta=0^0$)   b) B(r=3, $\theta=30^0$)
d)D (r=3, $\theta=60^0$)   e)E (r=3, $\theta=90^0$)
f)F (r=3, $\theta=120^0$)   g) G(r=3, $\theta=180^0$)

h) H($r=3$, $\theta=225^0$), j)J ($r=3$, $\theta=270^0$) k)K ($r=3$, $\theta=330^0$)

Cozum: noktalarin hepsinde $r=3$ dur o halde noktalar $r=3$ yaricapli cember uzerinde bulunacaktir.

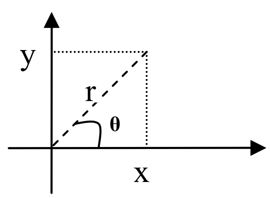


P623) Asagidaki kutupsal koordinat sisteminde verilen noktalari koordinat sisteminde gosterin.
a)A ($r=3$, $\theta=60^0$) b)B ($r=6$, $\theta=60^0$)
a)C ($r=9$, $\theta=60^0$) a)D ($r=12$, $\theta=60^0$)
Cozum. noktalarin hepsi $\theta=60^0$ lik aci dogrusu uzerindedir.



---------------------------- ----------------------------

y=f(x) ve r=g(θ) fonksiyonlarinin donusumu.



$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

P231) $y^3=x^2+3$, ise $r=f(\theta)$ nedir.
Cozum: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ konulursa,
$(r\sin\theta)^3=(r\cos\theta)^2+3$,

P231) $y^2=-x^2+16$, ise $r=f(\theta)$ nedir.
Cozum:
$(r\sin\theta)^2=-(r\cos\theta)^2+10$,
$(r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2=10$,
$r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=10$,
$r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=10$,
$r^2(1)=10$,
$r^2=10$,

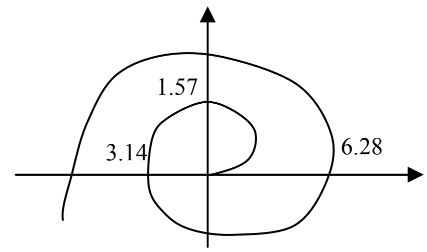
θ ne olursa olsun $r=\sqrt{10}$ dur. su halde aranan fonksiyon bir cemberdir.

-------------------- ------------------------------------

Kutupsal koordinatlarda Grafik Cizimi.
Derece olarak belirtilmemise Θ devamli olarak radyan alinir.

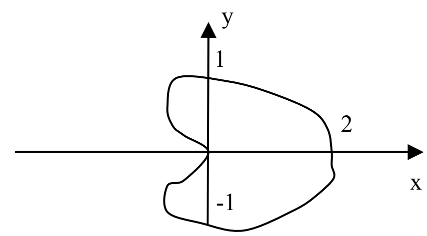
Ornek 312 : $r=\Theta$, grafigini cizin.

Θ(radyan)	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10
Θ(derece)	0	5.7	90	180	360	572
r	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10



Ornek 313: $r=1+\cos(\Theta)$, grafigini cizin.

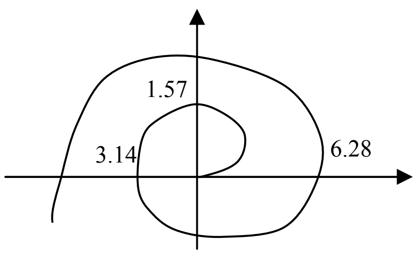
Θ(derece)	0	45	90	135	180	225	270	315	360
r	2	1.7	1	0.3	0	0.3	1	1.7	2



Kutupsal koordinatlar

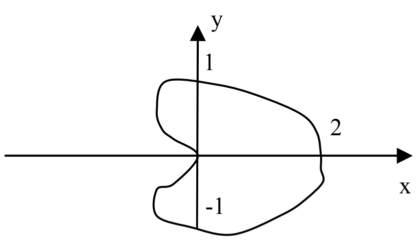
Ornek 312 : r=Θ, grafigini cizin.

Θ(radyan)	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10
Θ(derece)	0	5.7	90	180	360	572
r	0	0.1	1.57	3.14	6.28	10



Ornek 313: r=1+cos(Θ), grafigini cizin.

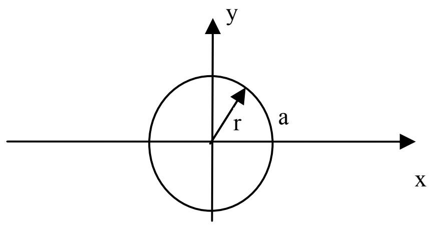
Θ(derece)	0	45	90	135	180	225	270	315	360
r	2	1.7	1	0.3	0	0.3	1	1.7	2



Kutupsal koordinatlarda integrasyon.

Integral alinan alan kutupsal koordinatlara uygun ise sekil dairesel veya kutupsal formda basit oluyor ise bu metod tatbik edilir.

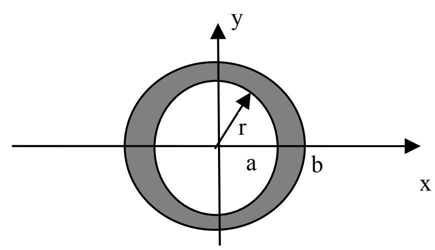
Ornek 315. r=f(Θ)=a ise. Asagidaki bolge (daire) icin alan formulunu yazin.



$$\int_{\theta=0}^{\theta=360} \int_{r=0}^{r=a} r\,dr\,d\theta$$

Ornek 315. r=f(Θ)=a ise. Asagidaki bolge (daire parcasi) icin alan formulunu yazin.

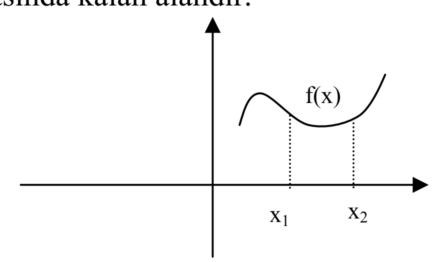
Ornek 323. r=f(Θ)=a ise. Asagidaki bolge icin alan formulunu yazin.



$$\int_{\theta=0}^{\theta=360} \int_{r=a}^{r=b} r\,dr\,d\theta$$

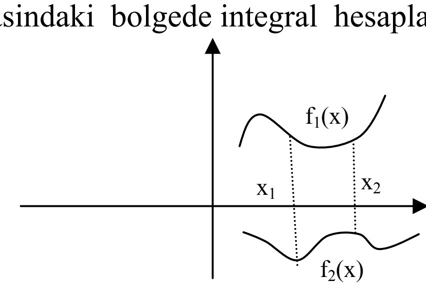
-- -

Tek katli Integralin anlami f(x) egrisi ile x ekseni arasinda kalan alandir.



-- - ----

Cift katli Integralde $f_1(x)$ egrisi ile $f_2(x)$ egrileri arasindaki bolgede integral hesaplanir.



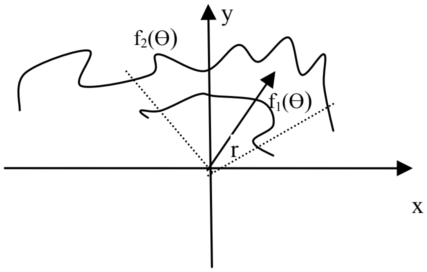
$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} g(x,y)\,dy\,dx$$

ozel olarak g(x,y)=1 ise integral sonucu **alan**i verir.

------------------------------------ -----------------

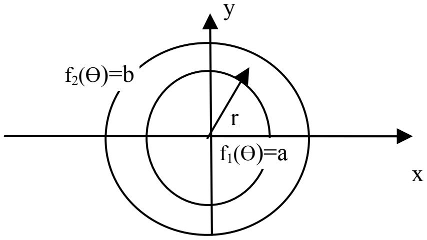
kutupsal koordinatlarda da benzer durum vardir.

$$\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} g(r,\ \theta)\,dr\ \ d\theta$$



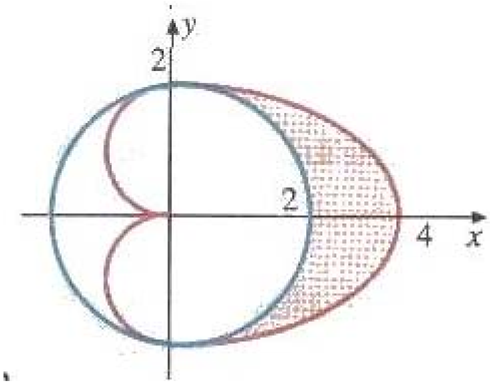
g(r,Θ)=r ise integral sonucu alani verir.

Ornek 351: a yaricapli cember ile b yaricapli cember arasinda kalan alani hesaplayin.



$$\text{Alan}=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=a}^{r=b} r\,dr\,d\theta=\pi(b^2-a^2)$$

Ornek 352. 2 yaricapli cember ile r=2(1+cos Θ) egrisi arasinda kalan alani hesaplayin. Θ bu soruda φ olarak gosterilmis.

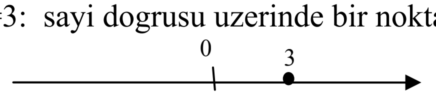


$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi$$

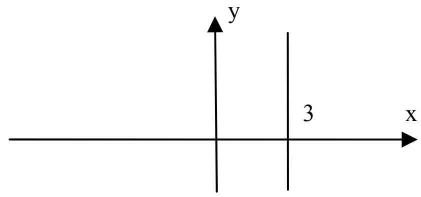
--------------------- ---------------

Aciklamalar

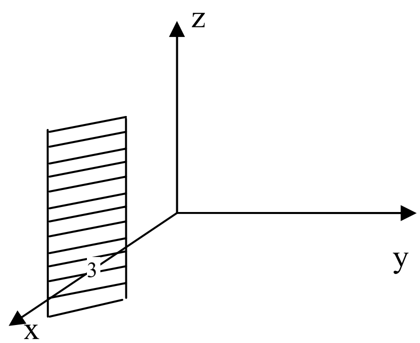
x=3: sayi dogrusu uzerinde bir noktadir

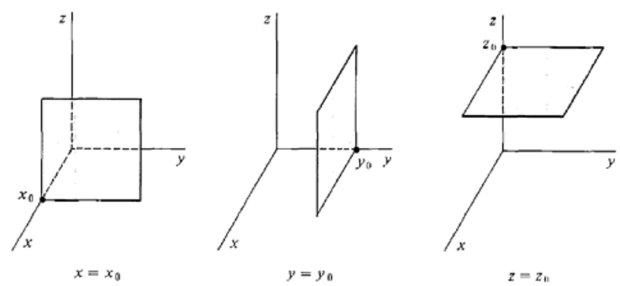


x=3: x,y ekseninde bir dogrudur



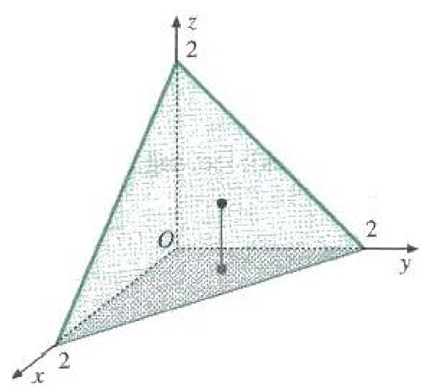
x=3: x,y,z ekseninde bir duzlemdir





$$\text{Hacim formulu}\int_{x=x_1}^{x=x_2}\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}\int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} dz\,dy\,dx$$

Ornek: x+y+z=2 , x=0, y=0, z=0 duzlemleri tarafindan sinirlanan dortyuzlu icine yerlestirilen cismin hacim integralini yazin.



x degiskeni $0<x<2$ arasinda degismektedir.

$x_1=0$, $x_2=2$

y degiskeni x ekseni (y=0) ile x+y=2 dogrusu arasinda degismektedir. $f_1(x)=0$. $f_2(x)=2-x$
z degiskeni x-y duzlemi (z=0) ile x+y+z=2 duzlemi arasinda degismektedir. $g_1(x,y)=0$. $g_2(x,y)=2-x-y$
hacim formulu.

$$H = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz dy dx$$

Tek degiskenli integraller

$$\int_a^b dx = x \Big|_a^b = b - a$$

$$\int_a^b x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\Big|_a^b$$

$$\int_a^b e^{px}\, dx = \frac{e^{px}}{p}\Big|_a^b$$

$$\int_a^b e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)}\Big|_a^b$$

$$\int_a^b \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln x\Big|_a^b$$

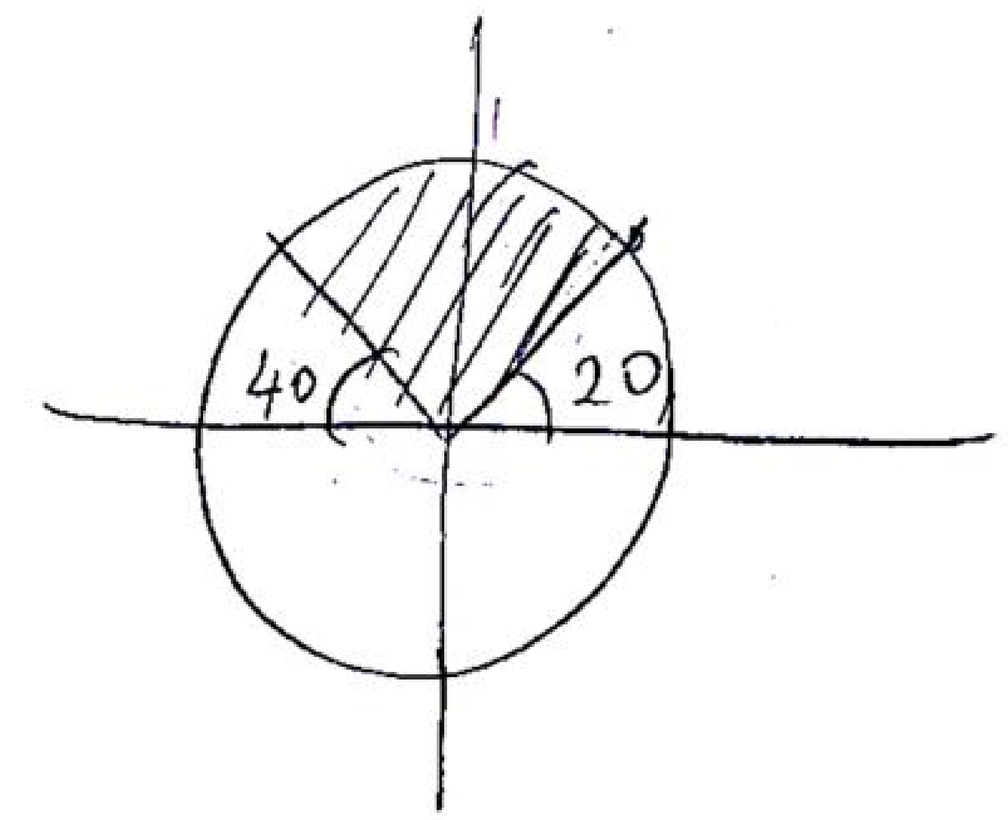
157

$$=\left(\frac{1}{3}\,\frac{y^{11}}{11}+\frac{1}{2}\frac{y^{7}}{7}-9\,\frac{y^{5}}{5}-\frac{9}{2}\,\frac{y^{3}}{3}\right)\Bigg|_{y=4}^{5}$$

$$=1479408-126331=1353077$$

p316) Taralı alan için alan formulünü yazın. alanı hesaplayın

yarıçap = 10



$$20^{\circ}=20\times\frac{3.14}{180}=0.35 \text{ radyan}$$

$$180-40=140^{\circ}$$

$$140^{\circ}=140\times\frac{3.14}{180}=2.44$$

$$\int_{\theta=20^{\circ}}^{140^{\circ}}\int_{r=0}^{r=10} r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0.35\text{ radyan}}^{2.44\text{ radyan}}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{10}d\theta$$

$$=\int_{\theta=0.35}^{\theta=2.44}\left(\frac{10^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)d\theta=50\int_{\theta=0.35}^{2.44}d\theta=50\,\theta\Big|_{0.35}^{2.44}$$

$$=50\,(2.44-0.35)=104.5$$

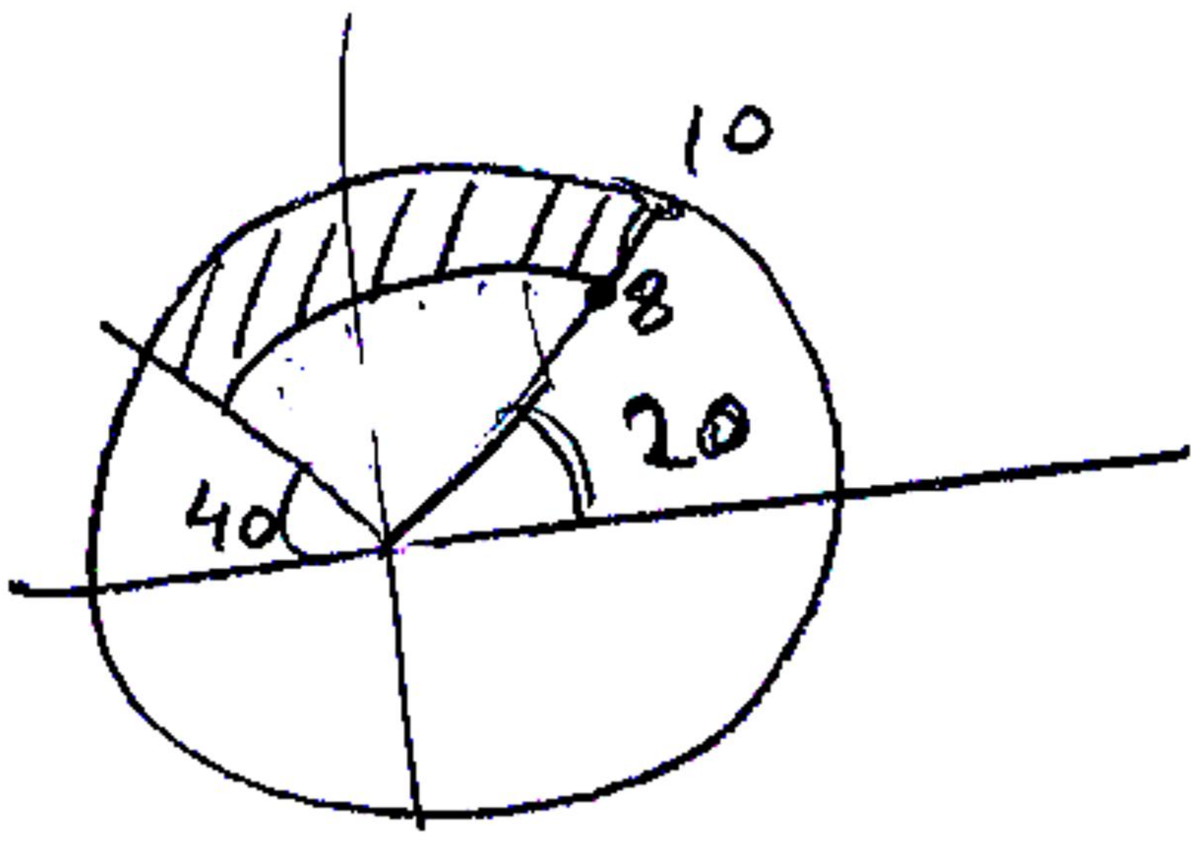
Not: daire parçası $140-20=120^{\circ}$ lik bir parçadır. Tüm alan $\pi r^2=3.14\times100=314$

360° 314

120° x

$$x=\frac{314\times120}{360}=104.5$$

P317) Taralı alan için alan formülünü yazın. r



yarıçap = 10

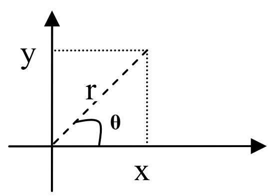
taralı alan yarıçapı = 8

$$\int_{\theta=0.35}^{2.44}\int_{r=8}^{10} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta} \frac{r^2}{2}\Big|_{8}^{10} d\theta = \int_{\theta}\left(\frac{10^2}{2}-\frac{8^2}{2}\right)d\theta$$

$$= 18\int d\theta = 18\ \theta\Big|_{0.35}^{2.44} = 37.6$$

Koordinat Donusumleri
1)Duzlemde Kartezyen koordinat sistemi
2)Duzlemde kutupsal koordinat sistemi
3)Uzayda Kartezyen koordinat sistemi
3)Uzayda Silindirik koordinat sistemi
3)Uzayda Kuresel koordinat sistemi
-------- --------------------------------

Duzlemde Kartezyen ve Kutupsal Koord. Sist.
Duzlemde bir noktanin x,y ile belirtilmesi kartezyen koordinat sistemi, r(genlik,uzunluk.mesafe) ve θ (aci) ile belirtilmesi kutupsal koordinat sistemi olur.



x=r cos θ
y=r sin θ

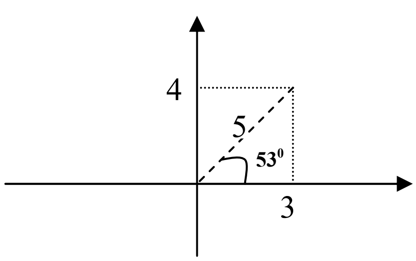
r= $\sqrt{x^2+y^2}$

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$

tan^{-1}(z): arg tan(z) demektir.
Ornek Asagidaki kartezyen koordinat sisteminde verilen noktalari kutupsal koordinat sisteminde belirtin. a)(3,4) b)(-3,4), c)(-3.-4), d)(3,-4)
Cozum:

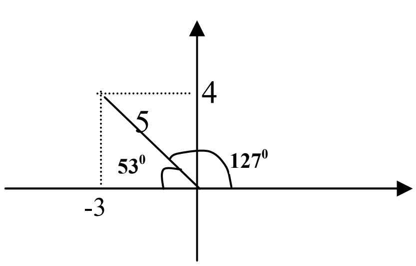
a)x=3, y=4, ➔ r= $\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5,

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(4/3) = 53.1^0



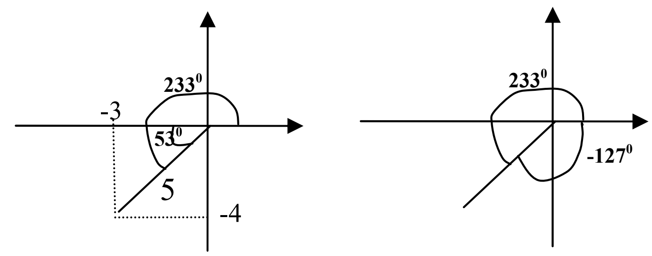
b)x=-3, y=4, ➔ r= $\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{(-3)^2+4^2}$ =5,

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(4/(-3)) =180-53.1^0=127^0



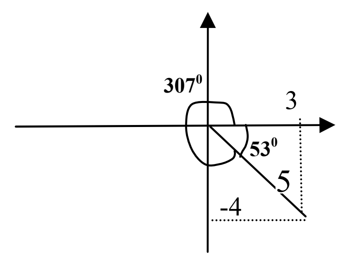
c)x=-3, y=-4, ➔ r= $\sqrt{x^2+y^2}$ = r= $\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$ =5,

θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(-4/(-3)) =180+53.1^0=233^0=360-233^0=-127^0



d)x=3, y=-4, ➔ r= $\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{3^2+(-4)^2}$ =5,

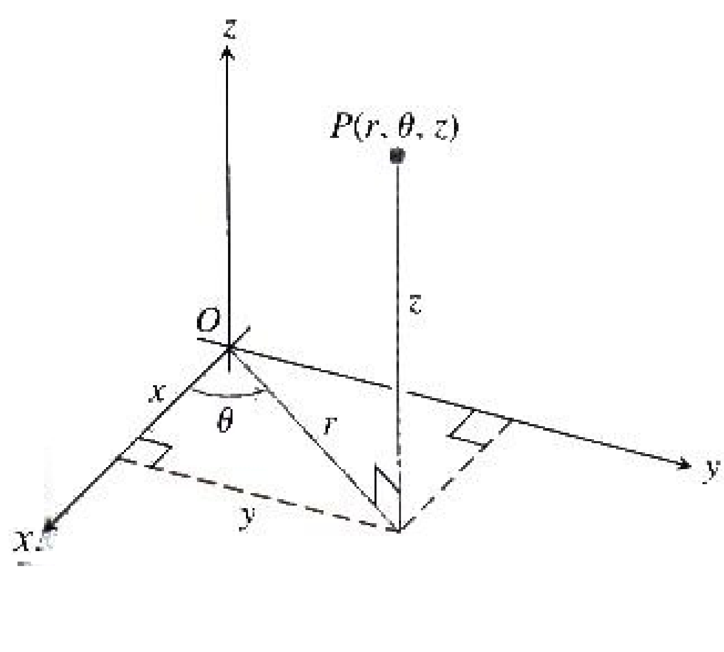
θ=tan^{-1} $\frac{y}{x}$ =tan^{-1}(-4/3) =-53.1^0=360-53=307



Uzayda Silindirik Koordinat Sistemi

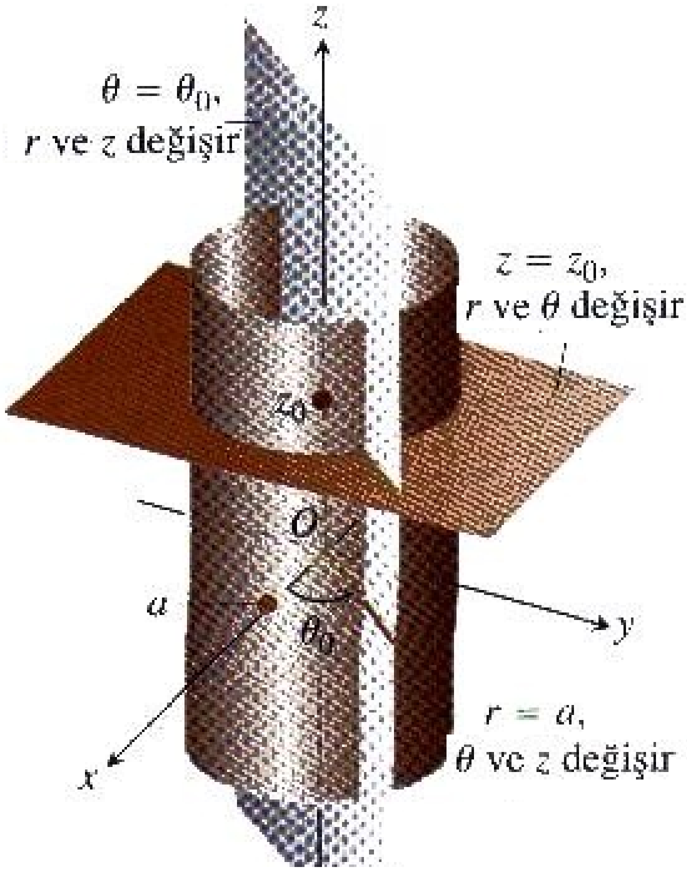
Silindirik koordinatlar (r, θ, z) sıralı üçlüleri ile uzayda bir P noktasını temsil ederler. Burada,

1. r ve θ, P'nin xy-düzlemine dik izdüşümünün kutupsal koordinatlarıdır.
2. z kartezyen dikey koordinattır.



Kartezyen (x, y, z) ve Silindirik (r, θ, z) Koordinatları Bağlayan Denklemler

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = y/x$$



Uzayda Kuresel Koordinat Sistemi

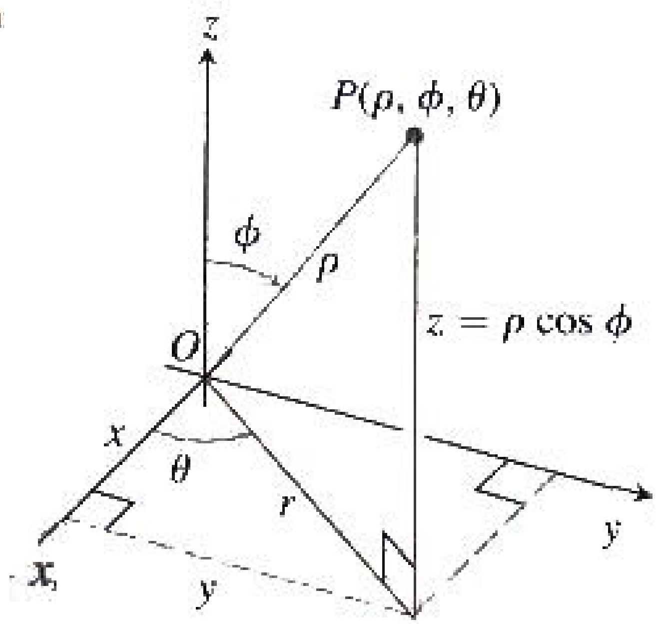
Küresel Koordinatlar uzayda bir P noktasını,

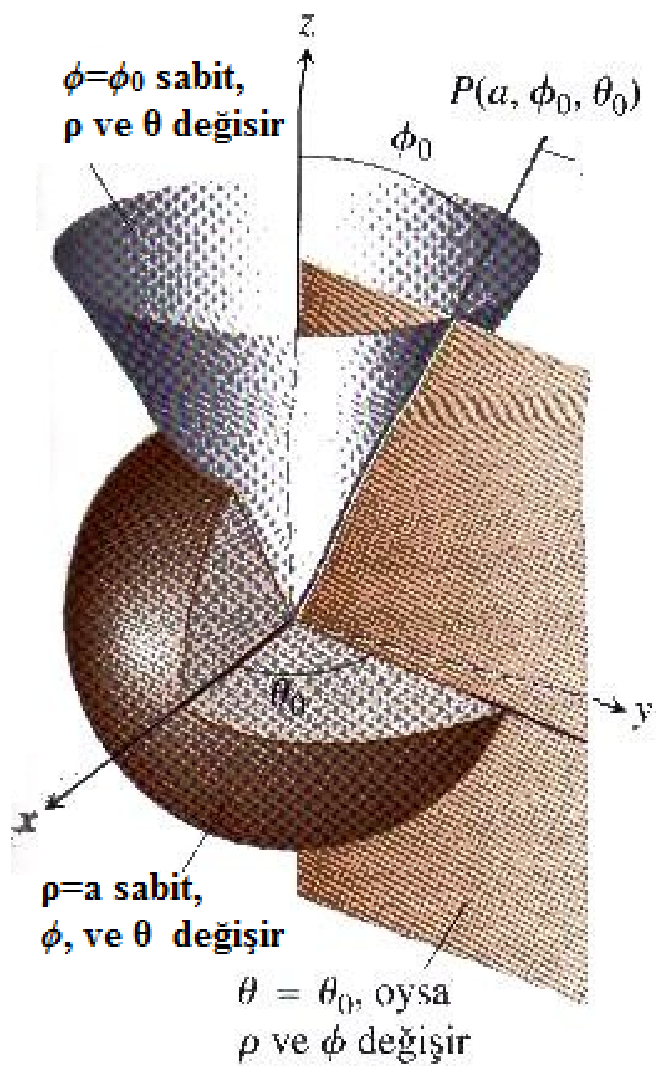
1. ρ, P'den orijine uzaklık.
2. ϕ, $\overrightarrow{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açı $(0 \le \phi \le \pi)$
3. θ, silindirik koordinatlardaki açı

olmak üzere, sıralı (ρ, ϕ, θ) üçlüleri ile temsil eder.

Kuresel(ρ, ϕ, θ), Silindirik(r,θ,z), Kartezyen(x,y,z) arsindaki bagintilar.

$$r = \rho\sin\phi, \qquad x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta,$$
$$z = \rho\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta,$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$





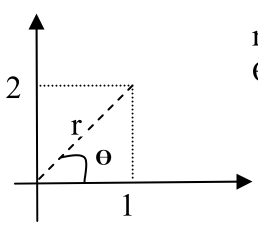
Koordinat Dönüşüm Formülleri

SİLİNDİRİKTEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN SİLİNDİRİĞE
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$	$r = \rho\sin\phi$
$y = r\sin\theta$	$y = \rho\sin\phi\sin\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

HACIM FORMULLERI

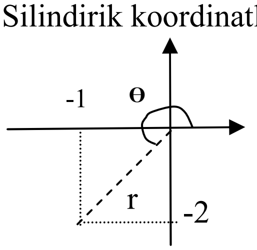
$$
\begin{aligned}
dV &= dx\,dy\,dz \\
&= dz\,r\,dr\,d\theta \\
&= \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta
\end{aligned}
$$

Ornek Problem. Asagidaki kartezyen noktalari silindirik ve kuresel koordinatlara cevirin.
a)(1,2,3), b)(-1,-2,3)
Cozum. a)x=1, y=2, z=3,
Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



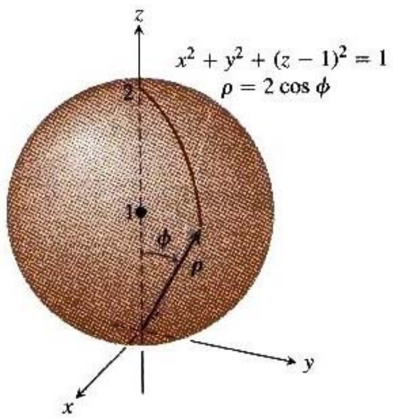
$r=\sqrt{1^2+2^2} = 2.23$
$\Theta=\tan^{-1}(2/1)=63^0$

Kuresel koordinatlar icin
$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{z^2+\rho^2} = 3.74$
$z = \rho\cos(\phi) \rightarrow \phi = \arg\cos(z/\rho) =$
$\phi = \arg\cos(3/3.74) = 36.66^0$
$\Theta = 63^0$ (silindirik koordinat ile Θ aynidir)
Cozum. b)x=-1, y=-2, z=3,
Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



$r=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = 2.23$
$\Theta=\tan^{-1}(-2/-1)=180+63$
$= 243^0 = -117^0$

Kuresel koordinatlar icin
$\Theta = 243^0$ (silindirik koordinat ile Θ aynidir)
$\phi = \arg\cos(z/\rho) = \arg\cos(3/3.74) = 36.66^0$
$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{z^2+\rho^2} = 3.74$



ŞEKİL 15.43 Örnek 3'teki küre.

ÖRNEK 3 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz.

Çözüm x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırız:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$
$$\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 = 1$$
$$\rho^2 \sin^2\phi \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + \rho^2\cos^2\phi - 2\rho\cos\phi + 1 = 1$$
$$\rho^2 \underbrace{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}_{1} = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho = 2\cos\phi$$

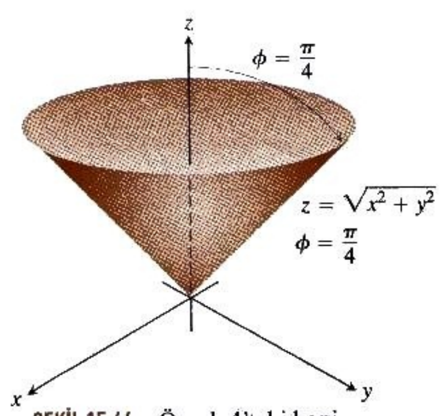
Şekil 15.43'e bakın.

ÖRNEK 4 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz (Şekil 15.44).

Çözüm 1 *Geometri kullanın.* Koni, z-eksenine göre simetriktir ve yz-düzleminin birinci bölgesini $z = y$ doğrusu boyunca keser. Bu nedenle, koni ile pozitif z-ekseni arasındaki açı $\pi/4$ radyandır. Koni, küresel ϕ koordinatı $\pi/4$'e eşit olan noktalardan oluşur dolayısıyla denklemi $\phi = \pi/4$'tür.

Çözüm 2 *Çebir kullanın.* x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırsak aynı sonucu elde ederiz:



ŞEKİL 15.44 Örnek 4'teki koni.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi} \qquad \text{Örnek 3}$$
$$\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \qquad \rho \geq 0,\ \sin\phi \geq 0$$
$$\cos\phi = \sin\phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{4} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Küresel koordinatlar, merkezleri orijinde olan küreleri, kenarı z-ekseni olan yarıdüzlemleri ve tepe noktaları orijinde, eksenleri z-ekseninde olan konileri tanımlamakta yararlıdır. Bu gibi yüzeylerin sabit koordinat değerli denklemleri vardır:

$\rho = 4$	Küre, yarıçap 4, merkez orijinde
$\phi = \frac{\pi}{3}$	Orijinden yukarı açılan koni, pozitif z-ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar
$\theta = \frac{\pi}{3}$	z-ekseni etrafında dönen yarı düzlem, pozitif x-ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar.

13.11 BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

(u, v) noktaları bir D bölgesinin elemanları olmak üzere,

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases} \tag{13.6}$$

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Hatirlatma:determinat: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ =ab-cd, Ornek: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ $=2_x6-5_x4=-8$,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (12+5) - 2\,(0 - 10) + 3\,(0 - 8) = 13.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & c_1b_2a_3 & c_2b_3a_1 & c_3b_1a_2 \end{array}$$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & a_1b_2c_3 & a_2b_3c_1 & a_3b_1c_2 \end{array}$$

$$\Delta = \left(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2\right) - \left(c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2\right).$$

ÖRNEK : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm : $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} = (0 + 4 + 12) - (0 + 1 + 30) = 16 - 31 = -15.$

Jakobien Hesabi

P441)

x=u+2v,   y=3u+4v

$$\mathrm{j} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1_x 4 - 3_x 2 = -2$$

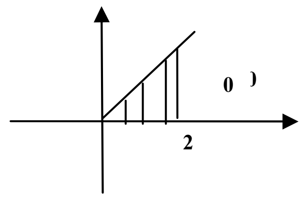
P442) $x=u^2+v^3$,   y=cos(u)+sin(2v)

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -\sin(u) & 2\cos(2v) \end{vmatrix} = 4u\cos(2v) + 2v\sin(u)$$

balci128 ornek

Kartezyen integrali kutupsal integrale cevirin.

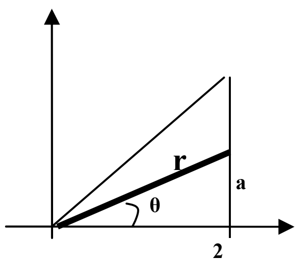
$$\mathbf{8.}\quad \int_0^2 \int_0^x y\, dy\, dx$$

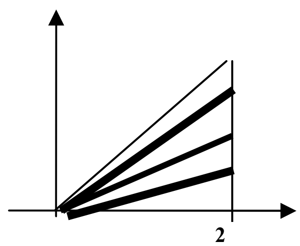


Cevap:

$$8.\quad \int_0^2 \int_0^x \mathrm{y\, dy\, dx} = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sec\theta} \mathrm{r}^2 \sin\theta\, \mathrm{dr\, d}\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \tan\theta \sec^2\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$$

Aciklama:

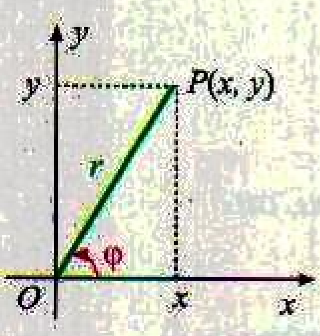




r yatay x ekseninden y=x dogrusuna kadar degismektedir. bu degisimi formul haline getirmemiz lazim. sekilden goruldugu gibi. cos θ =2/r --> r=2/cos θ=2 sec θ. Dolayisiyla r 0 ile 2 sec θ arasinda degisirse, θ 0 ile 45 arasinda degisirse alanin tamami kaplanmis olur.

Bölüm 9 Kutupsal Koordinatlar

9.1 KUTUPSAL KOORDİNATLAR



Kartezyen koordinat sisteminde bir $P(x, y)$ noktası alalım. Bu noktanın $O(0, 0)$ noktasına olan uzaklığı r, $[OP]$ doğru parçasının Ox– ekseniyle pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ ile gösterilirse

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{9.1}$$

olur. Bu (r, φ) ikilisine P noktasının **kutupsal koordinatları**, O noktasına **kutup noktası**, φ açısına **kutup açısı**, Ox- eksenine de **kutup ekseni** adı verilir.

Bilindiği gibi düzlemde herbir noktanın bir tek kartezyen koordinatı vardır. Halbuki kutupsal koordinatlarda durum böyle değildir. Herbir noktanın birden fazla kutupsal koordinatları vardır.Örneğin (r, φ) bir noktanın kutupsal koordinatları ise $(r, \varphi + 2\pi)$, $(r, \varphi + 4\pi)$, ..., $(r, \varphi + 2k\pi)$ koordinatları da aynı noktanın kutupsal koordinatlarıdır.

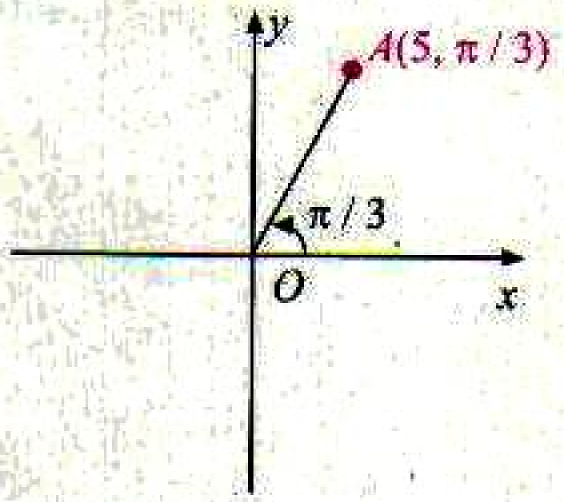
Bir (r, φ) sayı ikilisini bir noktanın kutupsal koordinatları olarak gözönüne alabilmek için bazı kabullere ihtiyaç vardır. Bunlar şunlardır :

1. (r, φ) bir P noktasının kutupsal koordinatları ise her $k \in \mathbb{Z}$ için $(r, \varphi + 2k\pi)$ de P noktasının kutupsal koordinatlarıdır.
2. (r, φ) bir P noktasının kutupsal koordinatları ise $(-r, \varphi + \pi)$ de aynı noktanın kutupsal koordinatlarıdır. Yani $(-r, \varphi)$ ile $(r, \varphi + \pi)$ aynı noktayı gösterir.
3. Her φ için $(0, \varphi)$ koordinatları kutbun (orijinin) kutupsal koordinatlarıdır.

ÖRNEK 1

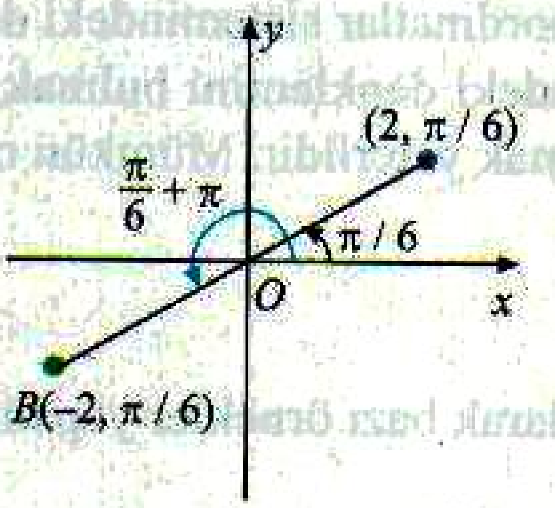
$A(5, \frac{\pi}{3})$ ve $B(-2, \frac{\pi}{6})$ noktalarını düzlemde gösteriniz.

Çözüm



$A(5, \frac{\pi}{3})$ noktası, orijinden geçen ve Ox– ekseniyle $\frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan doğru üzerinde bulunan ve orijinden (kutup noktasından) 5 birim uzakta olan noktadır.

$(-2, \frac{\pi}{6})$ noktası ile $(2, \frac{\pi}{6} + \pi) = (2, \frac{7\pi}{6})$ noktası aynı noktayı gösterdiğinden, $(-2, \frac{\pi}{6})$ noktasını bulmak için $(2, \frac{\pi}{6})$ noktasının kutba göre simetriğini almak yetecektir. ■



r ve φ kutupsal koordinatlarını x ve y kartezyen koordinatları cinsinden ifade etmek mümkündür.

(9.1) de her iki tarafın karesi alınır ve toplanırsa

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi = r^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$$

bulunur. (9.1) de ikinci eşitlik birinciye bölünürse

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin\varphi}{r \cos\varphi} = \tan\varphi \Longrightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

bulunur. Buna göre x ve y kartezyen koordinatları verildiğinde r ve φ

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{9.2}$$

bağıntılarından yararlanılarak hesaplanabilir.

ÖRNEK 2

$P(3, \sqrt{3})$noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm $r^2 = x^2 + y^2 = 9 + 3 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$ olur.

$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ olacağından verilen noktanın kutupsal koordinatları

$(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ olur.

ÖRNEK 3

Kutupsal koordinatları $A(2, \frac{\pi}{4})$ ve $B(-2, \frac{\pi}{3})$ olan noktaların kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$$x = r\cos\varphi = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = r\sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

olduğundan A noktasının kartezyen koordinatları $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dir. B noktasının kartezyen koordinatları da

$$x = r\cos\varphi = (-2)\cdot\cos\frac{\pi}{3} = (-2)\frac{1}{2} = -1$$

$$y = r\sin\varphi = (-2)\cdot\sin(\frac{\pi}{3}) = (-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

olur.

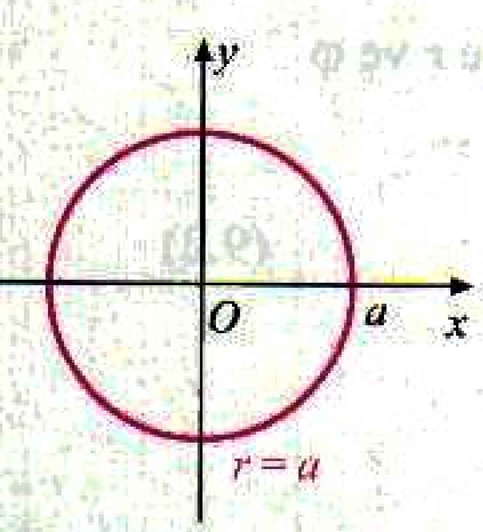
Kartezyen koordinat sisteminde olduğu gibi eğrilerin denklemini kutupsal koordinatlar cinsinden de ifade etmek mümkündür. Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi verilen bir eğrinin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini bulmak için verilen denklemde x yerine $r\cos\varphi$, y yerine $r\sin\varphi$ yazmak yeterlidir. Mümkün olduğu takdirde, r çekilerek

$$r = f(\varphi)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Şimdi bununla ilgili olarak bazı örnekler yapalım.

ÖRNEK 4

Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $x^2 + y^2 = a^2$ olan çemberin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.



Çözüm Verilen denklemde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ yazılırsa

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = a^2 \Rightarrow r^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2$$

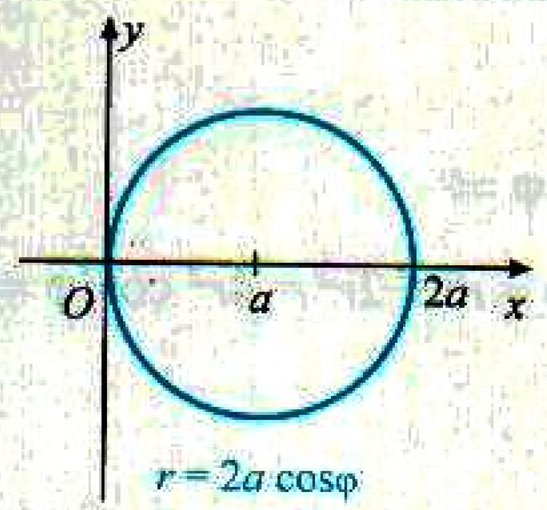
bulunur. Buradan söz konusu çemberin denklemi olarak

$$r = a$$

bulunur.

ÖRNEK 5 Merkezi $(a, 0)$ da olan a yarıçaplı çemberin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

Çözüm Bilindiği gibi bu çemberin kartezyen koordinat sistemindeki denklemi



$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

dir. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ yazılırsa

$$(r\cos\varphi - a)^2 + r^2\sin^2\varphi = a^2 \Rightarrow r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2\,r\,a\cos\varphi \Rightarrow$$

$$r = 2a\cos\varphi$$

bulunur.

ÖRNEK 6 Kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemi

$$r^2\cos\varphi\sin\varphi = 1$$

olan eğrinin kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemini bulunuz. Bu eğrinin cinsini belirtiniz.

Çözüm $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$ yazılabilir. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa,

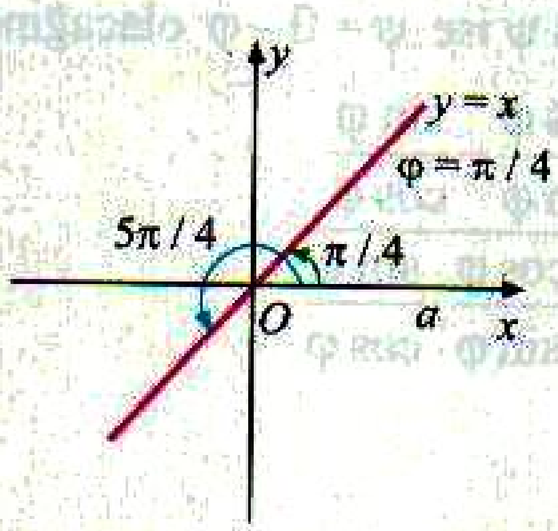
$$x\,y = 1$$

bulunur. Şu halde verilen eğri bir hiperboldür.

ÖRNEK 7 $y = x$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

Çözüm Verilen denklemde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ yazılırsa

$$r\sin\varphi = r\cos\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ veya } \varphi = \frac{5\pi}{4}$$



bulunur. Ox– ekseniyle $\dfrac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapan doğru ile $\dfrac{5\pi}{4}$ radyanlık açı yapan doğru aynı doğru olduğundan istenilen denklem olarak

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

alınabilir. Kutup (orijin) noktasından geçen tüm doğruların denklemi

$$\varphi = \varphi_0$$

biçimindedir.

ÖRNEK 8 Kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)=4x^2$$

olan eğrinin kutupsal koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

Çözüm x yerine $r\cos\varphi$, y yerine $r\sin\varphi$ yazılırsa

$$(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2+2(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)=4\,r^2\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$[r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)]^2+2r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi]=4r^2\cos^2\varphi=r^4+2r^2=4r^2\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$r^2=4\cos^2\varphi-2=2\,(2\cos^2\varphi-1)\ \Rightarrow\ r^2=2\cos^2\varphi$$

bağıntısı elde edilir.

Bir eğri, üzerindeki bir noktanın kutupsal koordinatları r ve φ olmak üzere, $r=f(\varphi)$ olarak tanımlandığında bu eğri üzerindeki bir (x,y) noktasının koordinatları

$$\begin{cases} x=f(\varphi)\cos\varphi \\ y=f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

olacaktır. Bu, verilen eğrinin parametrik gösteriminden başka bir şey değildir. Şimdi bundan yararlanarak, $r=f(\varphi)$ eşitliği ile tanımlanan bir eğrinin bir kutup açısına karşılık gelen bir $P(r,\varphi)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.

$$dx=d[r\cos\varphi]=\frac{d}{d\varphi}(r\cos\varphi)\,d\varphi=(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$dy=d[d\sin\varphi]=\frac{d}{d\varphi}(r\sin\varphi)\,d\varphi=(r'\sin\varphi-r\cos\varphi)\,d\varphi$$

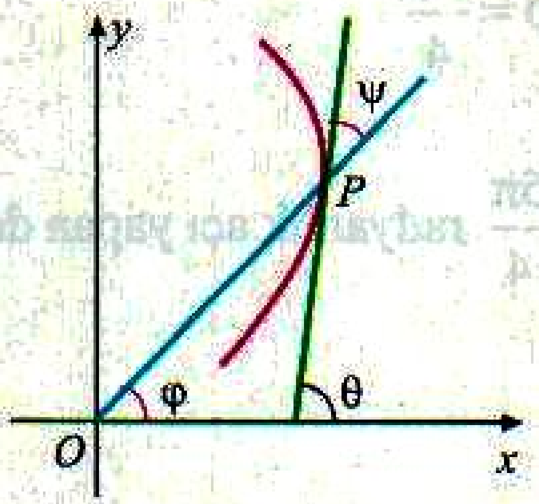
olduğundan, teğetin m eğimi,

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

olur. Bunun bir anlama sahip olması için f nin sürekli türevlere sahip olması gerektiği açıktır.

θ, teğetin $0x$– ekseni ile yaptığı açının pozitif yöndeki ölçüsü olsun. Bu takdirde,

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\ \text{ olur.}$$



OP doğrusunun teğetle pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü ψ ise $\psi=\theta-\varphi$ olacağından

$$\tan\psi=\tan(\theta-\varphi)=\frac{\tan\theta-\tan\varphi}{1+\tan\theta\tan\varphi}=\frac{\dfrac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}-\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1+\dfrac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}$$

bulunur. Teğetin eğim açısının ölçüsü

$$\theta=\psi+\varphi$$

olur.

ÖRNEK 9 $r = 2(1+\sin\varphi)$ eğrisinin $A(\frac{\pi}{6}, 3)$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.

Çözüm

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{2(1+\sin\varphi)}{2\cos\varphi} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

olduğundan $\psi = \frac{\pi}{3}$ dür. Şu halde teğetin eğim açısının ölçüsü

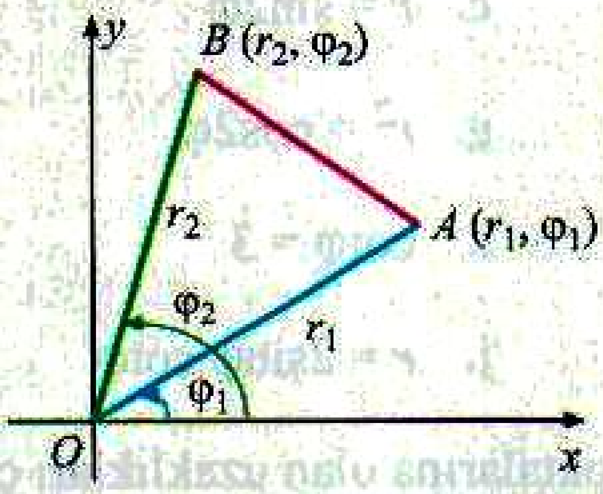
$$\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

olur. O halde teğet $0x-$ eksenine dik olan bir doğrudur. Dolayısıyla $x = a$ biçiminde bir denklemi vardır. Değme noktasının apsisi

$$x = r\cos\varphi = 2(1+\sin\varphi)\cos\varphi = 2(1+\sin\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olduğundan teğetin denklemi $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ olur. Teğetin kutupsal koordinatlarındaki denklemi $r\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ olacaktır.

ÖRNEK 10 $A(r_1, \varphi_1)$, $B(r_2, \varphi_2)$ noktaları arasındaki uzaklığın



$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak $A(12, \frac{3\pi}{4})$ ve $B(16, \frac{5\pi}{4})$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm Yandaki şekilde AOB üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,|OA|\,|OB|\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

bulunur. Buradan

$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

bulunur.

$r_1 = 12, \quad r_2 = 16, \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ alınırsa

$$|AB| = \sqrt{(12)^2 + (16)^2 - 2\cdot 12\cdot 16\cdot\cos\frac{\pi}{2}} = 20$$

birim olur.

1. Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaların kartezyen koordinatlarını yazınız.

a. $(2, \frac{\pi}{3})$ b. $(2, -\frac{\pi}{3})$ c. $(3, 0)$

ç. $(-3, 0)$ d. $(-3, \pi)$ e. $(-3, 2\pi)$

f. $(-2, \frac{\pi}{3})$ g. $(2, \frac{2\pi}{3})$ h. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

ı. $(-1, 7\pi)$ i. $(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{6})$ j. $(1, \frac{\pi}{4})$

2. Aşağıdaki noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

a. $(-1, -1)$ b. $(\sqrt{3}, -1)$ c. $(2, 2)$

d. $(-1, \sqrt{3})$ e. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ f. $(-3, \sqrt{3})$

3. Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

a. $(2, \frac{\pi}{2})$ b. $(2, 0)$ c. $(-2, \frac{\pi}{2})$

d. $(-2, 0)$ e. $(3, \frac{\pi}{4})$ f. $(-2, \frac{\pi}{6})$

g. $(4, \frac{\pi}{3})$ h. $(2, -\frac{\pi}{6})$

4. Aşağıda kartezyen koordinatlardaki denklemleri verilen doğru ve eğrilerin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

a. $x = 4$ b. $x = 2y$ c. $xy = 1$

ç. $y = x^2$ d. $y = 4$ e. $x^2 + y^2 = 16$

f. $x^2 - y^2 = 16$ g. $x + y = 2$ h. $x^2 + (y-4)^2 = 16$

5. Aşağıda kutupsal koordinatlardaki denklemleri verilen doğru ve eğrilerin kartezyen koordinatlardaki denklemlerini yazınız. Bunların grafiklerini çiziniz.

a. $r\cos\varphi = 2$ b. $r\sin\varphi = -1$

c. $\sin\varphi = \cos\varphi$ ç. $r\cos\varphi + r\sin\varphi = 1$

d. $r^2 = 4r\sin\varphi$ e. $r^2\sin 2\varphi = 2$

f. $r = \cot\varphi \,.\, \csc\varphi$ g. $r = \csc\varphi\, e^{r\cos\varphi}$

h. $r\sin\varphi = \ln r + \ln\cos\varphi$ ı. $r = 2\sin\varphi - 4\cos\varphi$

i. $r^2 + 2r^2\cos\varphi\sin\varphi = 4$ j. $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$

k. $r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 3$ l. $r\cos\varphi = \sin 2\varphi$

6. Aşağıda kartezyen koordinatlardaki denklemi verilen eğrilerin kutupsal koordinatlardaki denklemlerini yazınız. Mümkün olanlarını $r = f(\varphi)$ biçimine getiriniz.

a. $x^2 + y^2 = (\arctan\frac{y}{x})^2$

b. $x^4 = x^2 + y^2$

c. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

d. $y^2 = \dfrac{x^3}{2 - x}$

e. $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \quad (a > 0)$

f. $x^2 - y^2 = 25\sqrt{x^2 + y^2}$

7. Aşağıda kutupsal koordinatlardaki denklemi verilen eğrilerin kartezyen koordinatlardaki denklemlerini yazınız.

a. $r = 3$ b. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

c. $r = -5\cos\varphi$ ç. $r = 1 - \cos 2\varphi$

d. $r = 1 - \cos^2\varphi$ e. $r = \sin 2\varphi$

f. $r = 2 + \sin\varphi$ g. $r^2 = \cos 2\varphi$

h. $\tan\varphi = 6$ ı. $\cot\varphi = 3$

i. $r\cot\varphi = 3$ j. $r = 2\sin\varphi\cot\varphi$

8. $A(-2, 0)$ ve $B(2, 0)$ noktalarına olan uzaklıkları çarpımı 16 olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz. Bu denklemi kutupsal formda yazınız.

9. Kutupsal koordinatlarda verilen

$$A\left(3, -\frac{4\pi}{9}\right) \text{ ve } B\left(5, \frac{3\pi}{14}\right)$$

bir $ABCD$ paralelkenarının komşu iki köşesidir. Bu paralelkenarın köşegenleri kutup noktasında kesiştiklerine göre diğer iki köşesinin koordinatlarını bulunuz.

10. Kutupsal koordinatlarda verilen

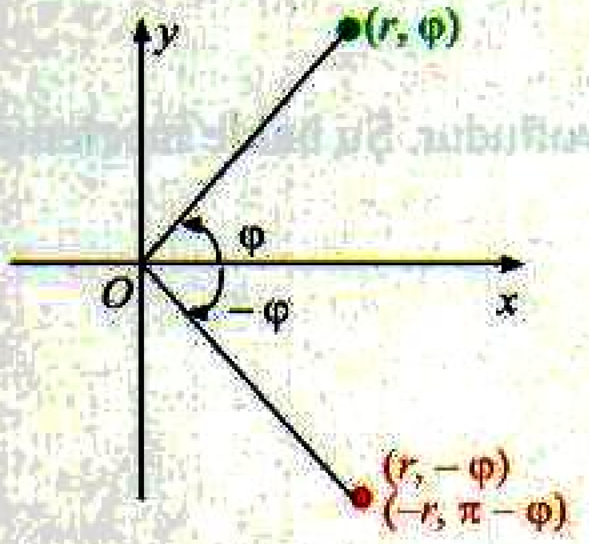
$$A\left(5, -\frac{\pi}{12}\right), B\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$$

noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

9.2 KUTUPSAL KOORDİNATLARDAKİ DENKLEMİ VERİLEN EĞRİLERİN ÇİZİMİ

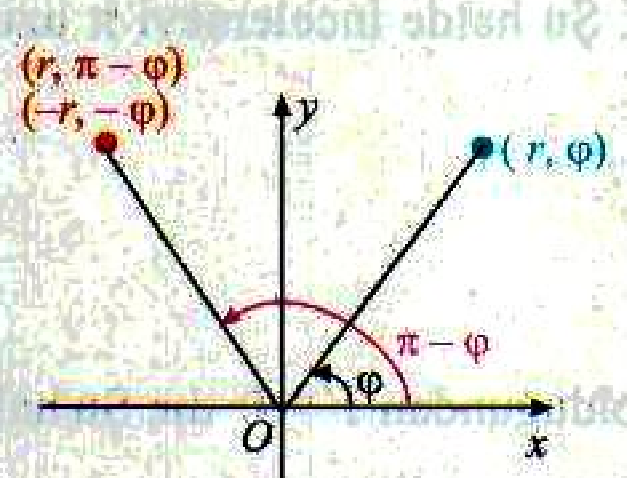
$r = f(\varphi)$ eşitliğiyle verilen eğriyi çizmek için şu yolu takip etmekte yararı vardır:

1. Tanım kümesi bulunur.



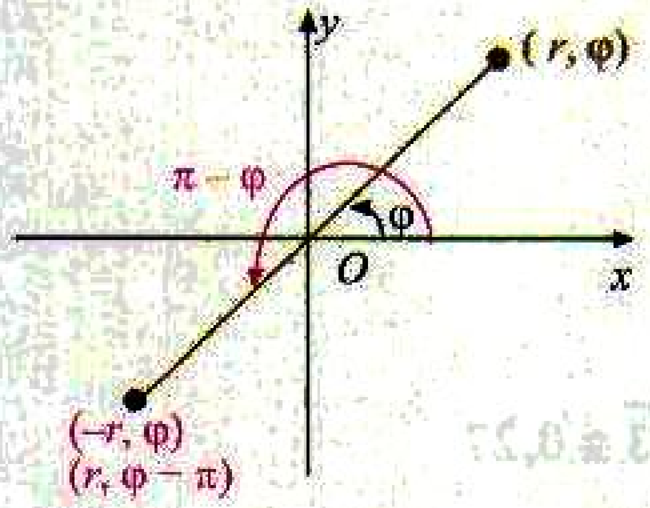
2. f periyodik ise periyodu bulunur. Periyot T ise T uzunluktaki bir aralıkta inceleme yapmak yeterdir. Diğer tüm aralıklarda fonksiyonun aldığı değerler bu aralıkta aldığı değerlerle aynıdır.

3. Simetri araştırılır. Simetriyi araştırmanın belli başlı birkaç yolu vardır. Şimdi bunları verelim.



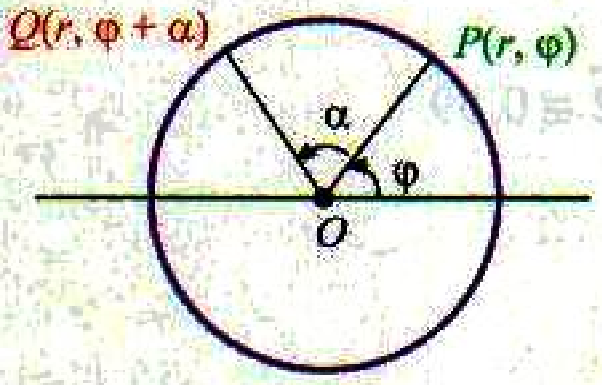
a) (r, φ) verilen denklemi sağladığında $(r, -\varphi)$ veya $(-r, \pi - \varphi)$ denklemi sağlarsa eğri kutup eksenine (Ox– eksenine) göre simetriktir. Zira $(r, -\varphi)$ ve $(-r, \pi - \varphi)$ noktaları (r, φ) noktasının Ox– eksenine göre simetriğidir. Şu halde f bir çift fonksiyon ise eğri Ox– eksenine göre simetriktir.

b) (r, φ) verilen denklemi sağladığında $(-r, -\varphi)$ veya $(r, \pi - \varphi)$ de denklemi sağlarsa, eğri Oy– eksenine göre simetriktir. Zira $(-r, -\varphi)$ veya aynı noktayı gösteren $(r, \pi - \varphi)$ noktası ile (r, φ) noktası Oy– eksenine göre simetriktir. Şu halde f tek fonksiyon ise grafik Oy– eksenine göre simetriktir.

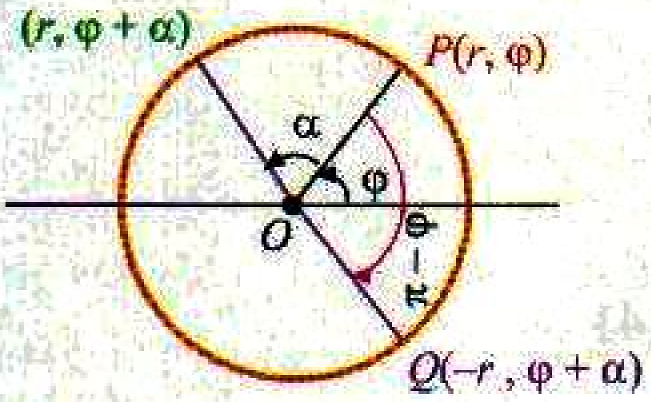


c) (r, φ) denklemi sağladığında $(-r, \varphi)$ veya aynı noktayı gösteren $(r, \pi + \varphi)$ verilen denklemi sağlarsa eğri O kutup noktasına göre simetriktir. Zira $(-r, \varphi)$ ile (r, φ) noktaları O kutup noktasına göre simetriktir.

d) (r, φ) verilen denklemi sağladığında bir α reel sayısı için $(r, \varphi + \alpha)$ da denklemi sağlarsa $P(r, \varphi)$ ile $Q(r, \varphi + \alpha)$ aynı çember üzerindedir. Q noktasını elde etmek için P noktasını pozitif yönde α kadar döndürmek yeterdir. Q noktasının kutup etrafında α kadar döndürülmesiyle elde edilen R noktası da eğri üzerinde bir noktadır. Aynı şey R nin a kadar döndürülmesiyle elde edilecek nokta için de söylenebilir. Bu durumda incelemeyi α uzunluğundaki bir aralıkta yapmak yeterlidir. Bu şekilde elde edilen eğri parçasını kutup etrafında α kadar döndürmek ve bu döndürmeleri, eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar devam ettirmek suretiyle eğrinin çizimi tamamlanır.



e) (r, φ) denklemi sağladığında bir α sayısı için $(-r, \varphi + \alpha)$ da denklemi sağlarsa, yani $f(\varphi + \alpha) = -f(\varphi)$ ise, $P(r, \varphi)$ noktası ile $Q(-r, \varphi + \alpha)$ noktası aynı çember üzerinde bulunur. Diğer taraftan $Q(-r, \varphi + \alpha)$ ile $(r, \varphi + \alpha - \pi)$ noktaları aynı olduğundan ve $\alpha + \varphi - \pi = \varphi - (\pi - \alpha)$ yazılabildiğinden Q noktasını bulmak için P noktasını φ açısının ters yönünde $\pi - \alpha$ kadar çevirmek yeterdir. Buna göre eğrinin α uzunluğundaki bir aralıkta çizimini yapıp, elde edilen eğri parçasını negatif yönde $\pi - \alpha$ kadar döndürmelidir. Döndürme işlemi, eğri kendi kendisi ile üst üste gelinceye kadar devam etmelidir.



4. $r' = f'(\varphi)$ türevinin işareti incelenerek, eğrinin kutba nerede yaklaştığı, nerede uzaklaştığı saptanır.

5. Fonksiyonun inceleme aralığındaki özel noktalarda (fonksiyonun değerlerinin kolayca hesaplanabildiği noktalarda) aldığı değerler bulunur.

6. Değişim tablosu yapılır. Bulunan değerler bu tabloda belirtilir.

7. Değişim tablosuna göre çizim yapılır.

8. Simetri söz konusu ise, gerekli simetriler alınarak çizim tamamlanır.

Şimdi bazı eğrilerin grafiklerini çizelim.

ÖRNEK 11 $r = 2(1 + \sin\varphi)$ eğrisini çiziniz.

Çözüm

1. Fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır.

2. $\sin\varphi$, 2π periyotlu olduğundan fonksiyon 2π periyotludur. Şu halde inceleme 2π uzunluğundaki bir aralıkta yapılmalıdır.

3. $(r, \pi - \varphi)$ nin denklemi sağladığını gösterelim.

$$r = 2(1 + \sin(\pi - \varphi)) \Rightarrow r = 2(1 + \sin\varphi)$$

olduğundan eğri Oy– eksenine göre simetriktir. Şu halde incelemeyi π uzunluğundaki $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında yapmak yeterdir.

4. $r' = 2\cos\varphi$ dir. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $\cos\varphi > 0$ olduğundan $r' > 0$ dır. Şu halde açı büyüdükçe r büyümekte, yani eğrinin noktaları kutuptan uzaklaşmaktadır.

5. Bazı özel noktalarda aldığı değerleri bulalım.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(1-1) = 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - \sqrt{3} \cong 0{,}27$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2} \cong 0{,}59$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

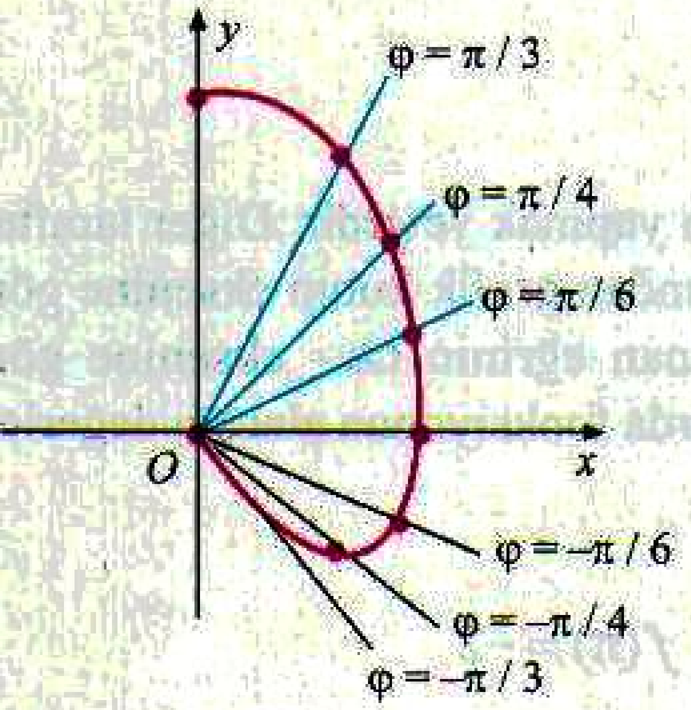
$$f(0) = 2(1 + \sin 0) = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2} \cong 3{,}41$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3} \cong 3{,}73$$

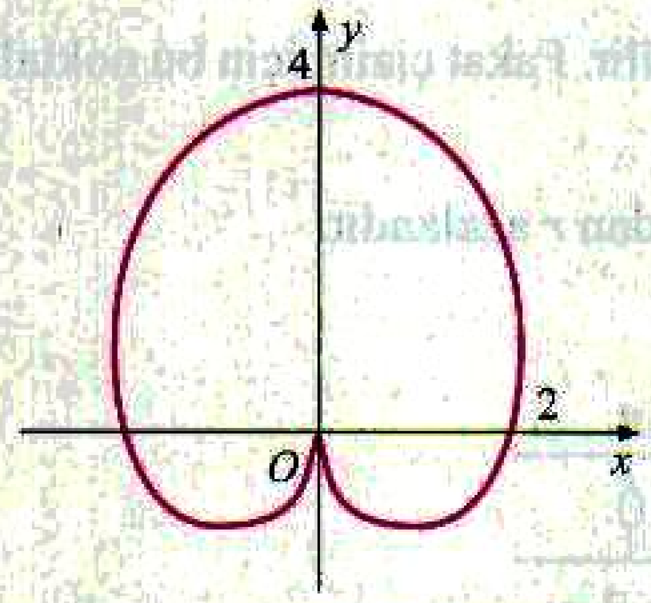
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(1+1) = 4$$



6. Değişim tablosu

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r'	0 +	+	+	+	+	+	+	+	0
r	0 ↗	$2-\sqrt{3}$ ↗	$2-\sqrt{2}$ ↗	1 ↗	2 ↗	3 ↗	$2+\sqrt{2}$ ↗	$2+\sqrt{3}$ ↗	4

7. Bu tabloya göre çizim yanda yapılmıştır. [(r, φ) noktaları işaretlenip bunlar bir eğriyle birleştirilmiştir.]

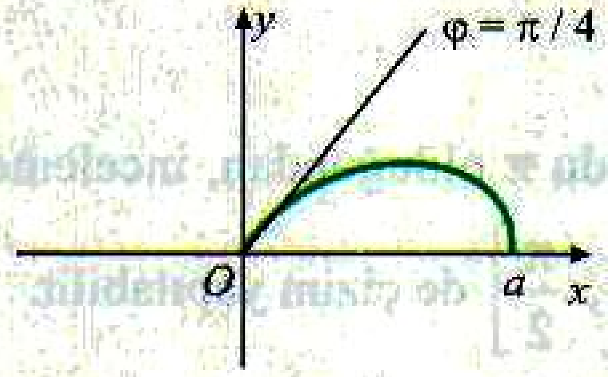


8. Eğri Oy– eksenine göre simetrik olduğundan verilen $r = 2(1 + \sin\varphi)$ eğrisinin grafiği yandaki gibi olacaktır. Bu eğriye **kardiyoid** adı verilir.

$r = a(1 - \sin\varphi)$, $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a(1 - \cos\varphi)$ denklemleri de birer kardioid denklemidir.

ÖRNEK 12 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ eğrisini çiziniz.

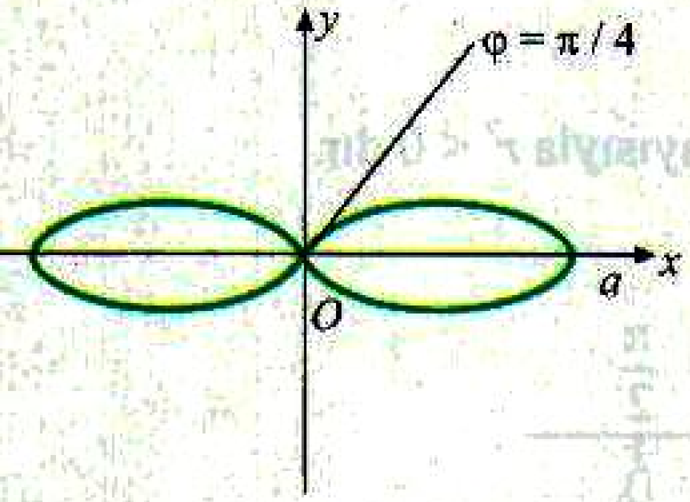
Çözüm $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ olduğundan $r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$ yazılabilir. $\cos 2\varphi$ nin periyodu π olduğundan inceleme π uzunluğunda bir aralık üzerinde yapılmalıdır. Tanım kümesine ait her bir φ değerine iki farklı r değeri karşılık geldiğinden, eğri kutup noktasına göre simetriktir. Şu halde, $r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$ eğrisi çizilmeli, elde edilen eğrinin kutba göre simetriği alınmalıdır. $\cos 2\varphi \geq 0$ olması gerektiğinden $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ olmalıdır. Diğer taraftan $f(-\varphi) = f(\varphi)$ olduğundan o eğri kutup eksenine göre simetriktir. O halde $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığında inceleme yapmak yetecektir. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığında çizilen eğrinin, kutup eksenine göre simetriği alındıktan sonra, elde edilen eğrinin kutup noktasına göre simetriği alınacaktır.



$$r' = \frac{2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \leq 0$$

dır.

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
r'		−		−	
r	a	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	↘	0

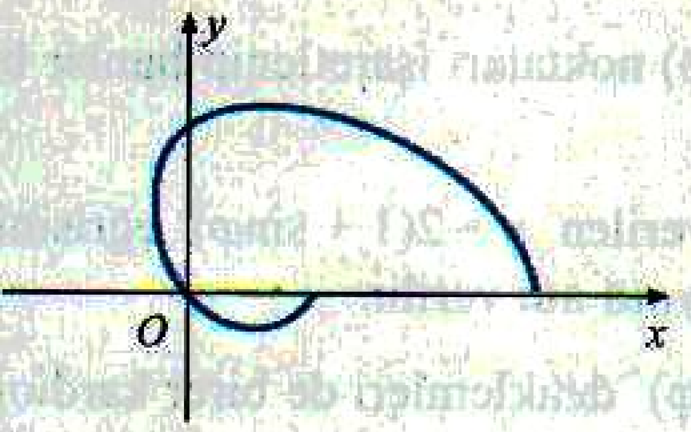


$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatı

Bu tabloya göre çizilen eğri yanda verilmiştir. Bu eğri parçasının önce kutup eksenine göre simetriği alınır, sonra elde edilen kapalı eğrinin kutup noktasına göre simetriği alınırsa **lemniskat** denilen yandaki eğri bulunur.

ÖRNEK 13 $r = 2 + 4\cos\varphi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm Fonksiyon 2π periyotludur. $[-\pi, \pi]$ aralığında çizim yapmak yeterdir. Diğer taraftan $f(-\varphi) = 2 + 4(\cos(-\varphi)) = 2 + 4\cos\varphi = f(\varphi)$ olduğundan grafik kutup eksenine göre simetriktir. Şu halde $[0, \pi]$ de grafiği çizip bulunan eğrinin $Ox-$ eksenine göre simetriğini almak yetecektir. Şimdi bazı özel noktalarda fonksiyonun alacağı değerleri bulalım.

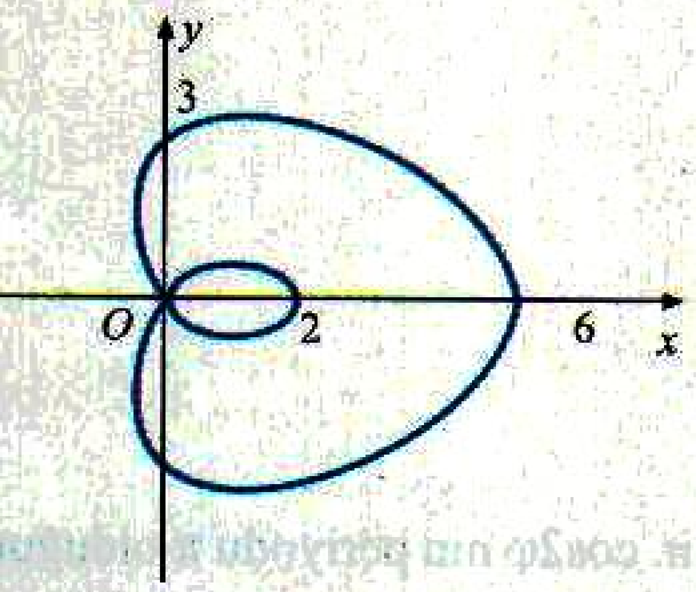


$$f(0) = 5,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0,\ f(\pi) = -2$$

dır. Daha birçok noktada fonksiyon değerleri bulunabilir. Fakat çizim için bu noktalar yeterlidir.

$r' = 4\sin\varphi$ olur. Her $\varphi \in [0, \pi]$ için $r' \le 0$ olacağından r azalandır.

φ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
r'	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0
r	6	↘	4	↘	2	↘	0	↘	-2



$r = 2 + 4\cos\varphi$ limaçonu

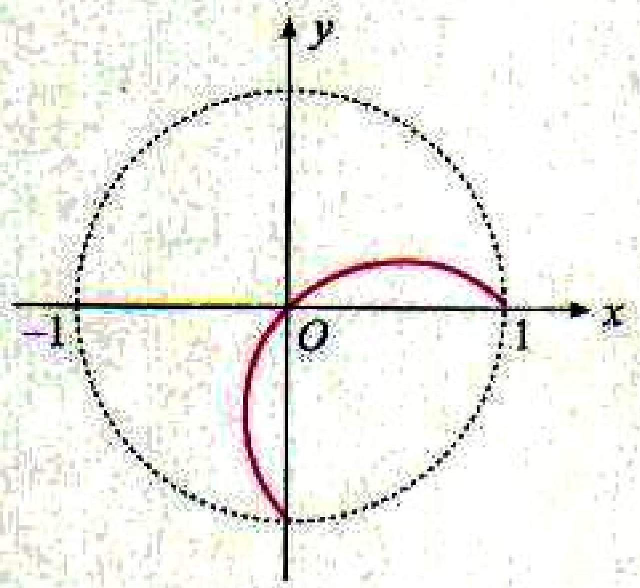
Bu tabloya göre çizim yapılırsa soldaki eğri parçası elde edilir. Bu eğri parçası ile bunun $Ox-$ eksenine göre simetriği çizimi istenen eğriyi oluşturacağından

$r = 2 + 4\cos\varphi$ eğrisi yandaki gibi olacaktır. Bu eğriye **limaçon** adı verilir.

ÖRNEK 14 $r = \cos 2\varphi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

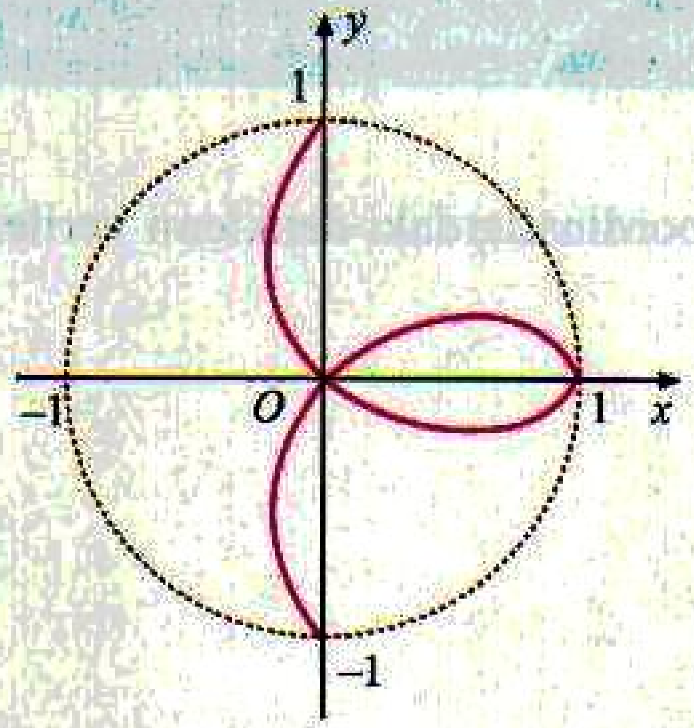
Çözüm Fonksiyon her yerde tanımlıdır. Fonksiyonun periyodu π olduğundan, inceleme π uzunluğundaki bir aralıkta yapılmalıdır. Örneğin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de çizim yapılabilir.

$f(-\varphi) = f(\varphi)$ olduğundan eğri kutup eksenine göre simetriktir. Şu halde $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de çizim yapmak yeterdir. Bu aralıkta eğri çizildikten sonra kutup eksenine göre simetri alınmalıdır.



$r' = -2\sin 2\varphi$ dir. $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ için $0 \le 2\varphi \le \pi$ ve dolayısıyla $r' < 0$ dır.

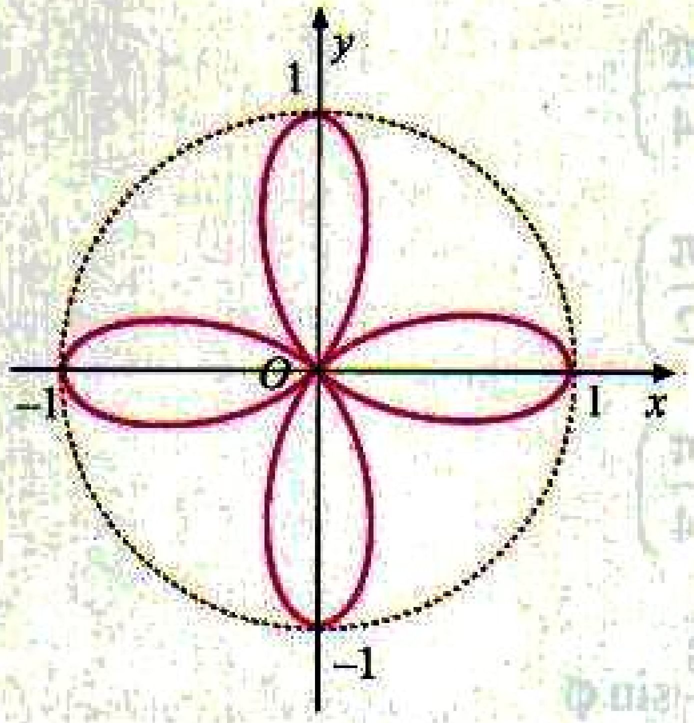
φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0
r	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-1



Bu tabloya göre eğri çizilirse yandaki grafik elde edilir. Bunun $0x-$ eksenine göre simetriği alınır.

$$f\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(2\varphi+\pi)=-\cos 2\varphi=-f(\varphi)$$

olduğundan bulunan eğriyi negatif yönde $\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ radyan döndürelim. Bu döndürme işlemine, eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar, devam edilirse yandaki grafik elde edilir. Bu eğriye **4– yapraklı gül** adı verilir.

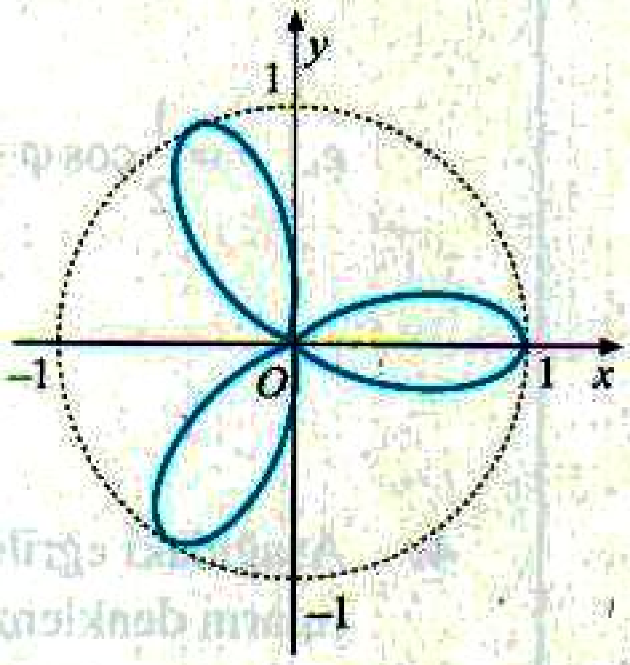


4 – yapraklı gül

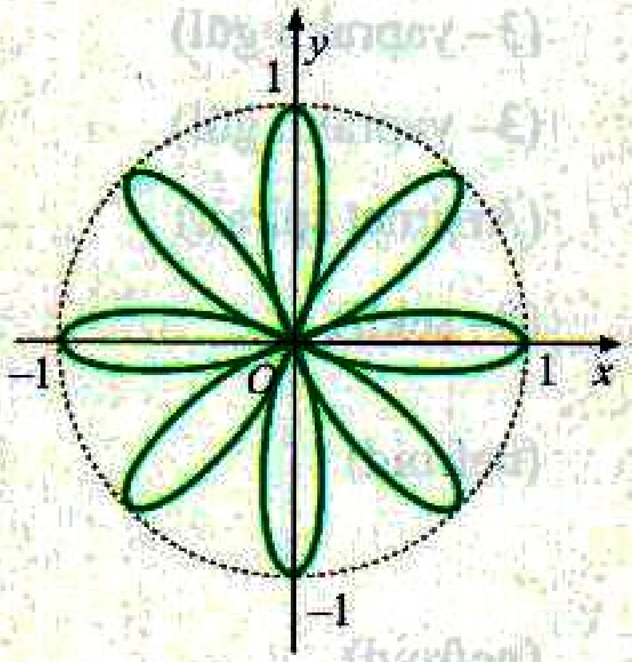
Not

$r=a\cos n\varphi$ ve $r=a\sin n\varphi$ eğrileri birer **gül eğrisi**dir. Eğer n tek ise eğri $n-$ yapraklı bir gül, n çift ise $2n-$ yapraklı bir güldür.

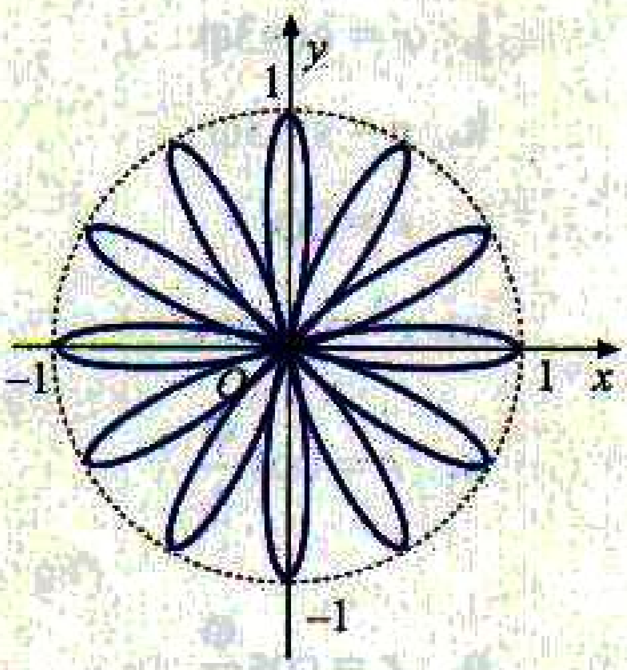
Aşağıda bazı güllerin grafikleri çizilmiştir.



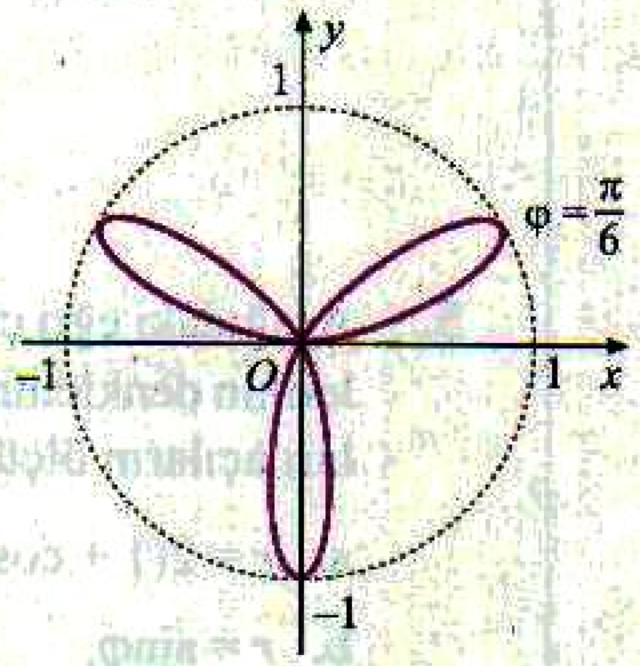
$r=\cos 3\varphi$



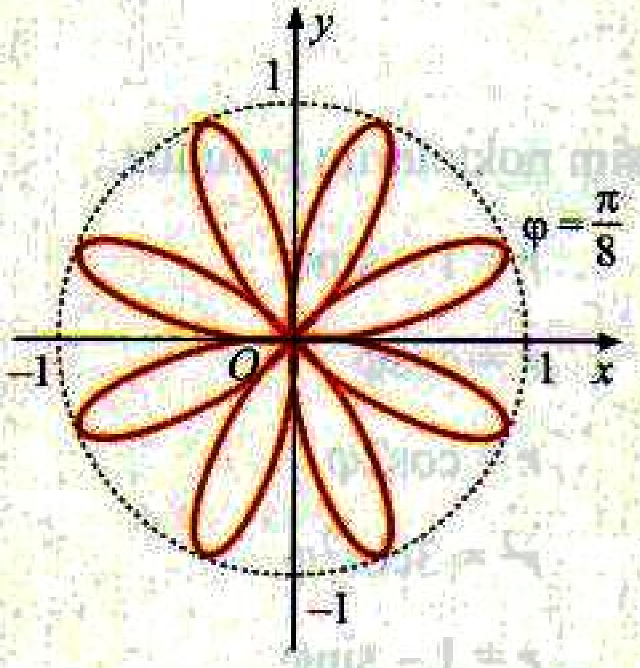
$r=\cos 4\varphi$



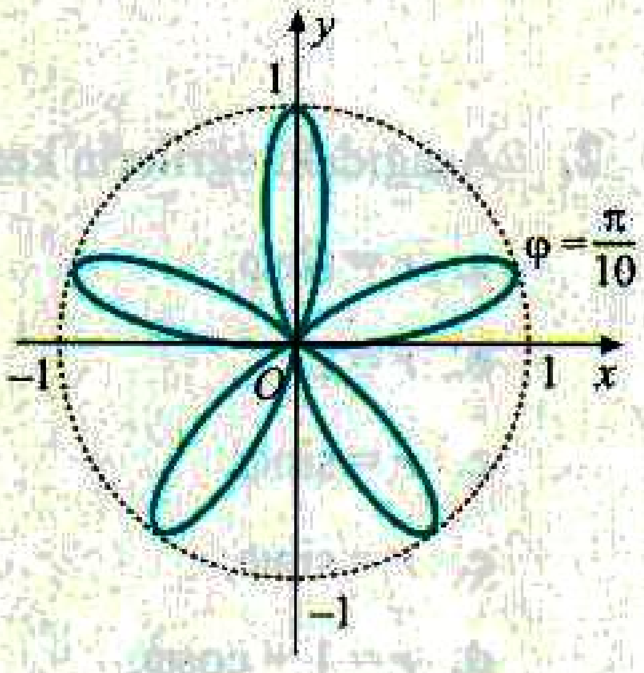
$r=\cos 6\varphi$



$r=\sin 3\varphi$



$r=\sin 4\varphi$



$r=\sin 5\varphi$

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

a. $r = 2\sin\varphi$ (çember)

b. $r = 2\cos\varphi$ (çember)

c. $r = 2\sin\varphi + 2\cos\varphi$ (çember)

d. $r = 1 + \cos\varphi$ (kardiyoid)

e. $r = 2(1 - \cos\varphi)$ (kardiyoid)

f. $r = 4(1 - \sin\varphi)$ (kardiyoid)

g. $r = 4 + 2\cos\varphi$ (limaçon)

h. $r^2 = 4\sin 2\varphi$ (lemniskat)

ı. $r = 1 + 2\cos 2\varphi$ (papyon)

i. $r = 3\sin 2\varphi$ (4– yapraklı gül)

j. $r = \cos 3\varphi$ (3– yapraklı gül)

k. $r = \sin 3\varphi$ (3– yapraklı gül)

l. $r = 2\varphi$ (Arşimet spirali)

m. $r^2 = 4\cos\varphi$ (8– şekli)

n. $r = \cos\frac{\varphi}{3}$ (nefroid)

o. $r = \cos\frac{\varphi}{2}$ (nefroid)

2. Aşağıdaki eğrilerin kesim noktalarını bulunuz.

a. $r = \sin\varphi$, $r = 1 - \sin\varphi$

b. $r = 2$, $r = \cos\varphi$

c. $r = \sin\varphi$, $r = \cos 2\varphi$

ç. $r = \sin\varphi$, $r^2 = 3\cos^2\varphi$

d. $r = 1 + \cos\varphi$, $r = 1 - \sin\varphi$

e. $r^2 = 4\sin\varphi$, $r^2 = 4\cos\varphi$

f. $r = 1 + \cos\varphi$, $r = 1 - \cos\varphi$

g. $r = \sin 2\varphi$, $r = \cos\varphi$

h. $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta$, $r^2 = \sqrt{2}\cos\varphi$

ı. $r = 1$, $r = 2\sin 2\varphi$

i. $r = 1$, $r^2 = 2\sin 2\varphi$

3. Aşağıda kutupsal koordinatlardaki denklemi verilen eğrileri çiziniz.

a. $r = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

b. $r = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

c. $r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

ç. $r = 4\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

d. $r^2 = 4\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

e. $r = \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$

4. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a. $r = 4\cos 2\varphi$ b. $r = \sin 3\varphi$

c. $r^2 = \cos 2\varphi$ ç. $r = 1 - \cos\varphi$

5. Aşağıdaki eğri çiftlerinin kesim noktalarındaki teğetlerinin denklemini bulunuz. Bu teğetlerin oluşturdukları açıların ölçülerini bulunuz.

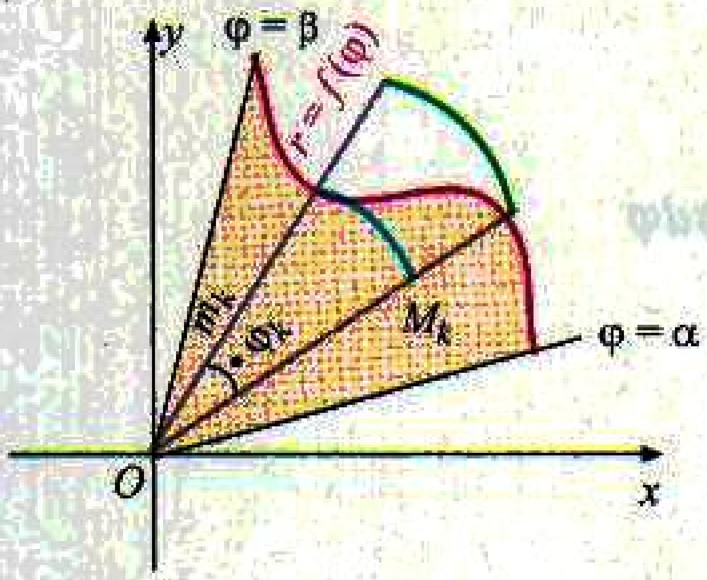
a. $r = 2(1 + \cos\varphi)$, $r = 6\cos\varphi$

b. $r = \sin\varphi$, $r = \cos 2\varphi$

c. $r = \sin\varphi$, $r = 1 - \sin\varphi$

6. $r = 2(1 - \cos\varphi)$ kardiyoidine $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasında çizilen teğet kutup ekseniyle kaç derecelik açı yapar?

9.3 KUTUPSAL KOORDİNATLARDA ALAN HESABI



f bir sürekli fonksiyon olmak üzere, $r = f(\varphi)$ eğrisi ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları arasında kalan bölgenin A alanını bulalım.

$[\alpha, \beta]$ aralığının bir $P = \{\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n = \beta\}$ parçalanmasını gözönüne alalım.

$$m_k = \min \{ f(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

ve

$$M_k = \text{maks} \{ f(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

olsun. m_k ve M_k yarıçaplı daire dilimlerinin alanları, sırasıyla, $\frac{1}{2} m_k^2 \, \Delta\varphi_k$ ve $\frac{1}{2} M_k^2 \, \Delta\varphi_k$

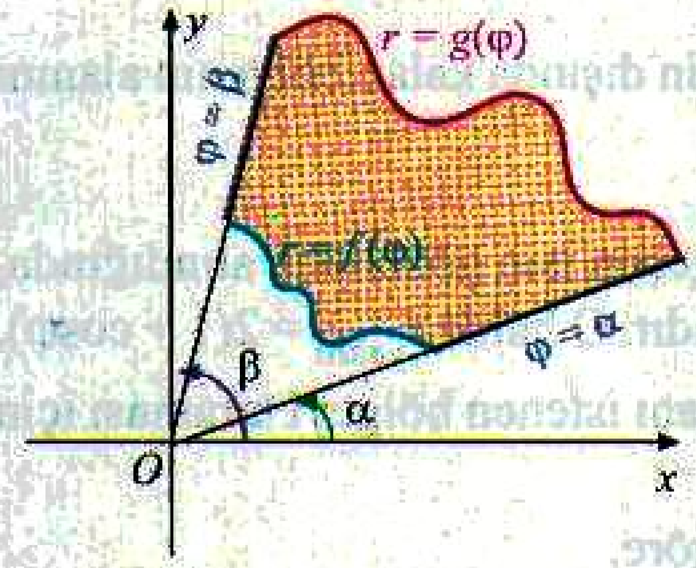
dır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k^2 \, \Delta\varphi_k \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} M_k^2 \, \Delta\varphi_k$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan integrallenebilirdir. Dolayısıyla alt ve üst toplamların $\|P\| \to 0$ için limiti fonksiyonun integraline eşittir. Şu halde

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi$$

olur.

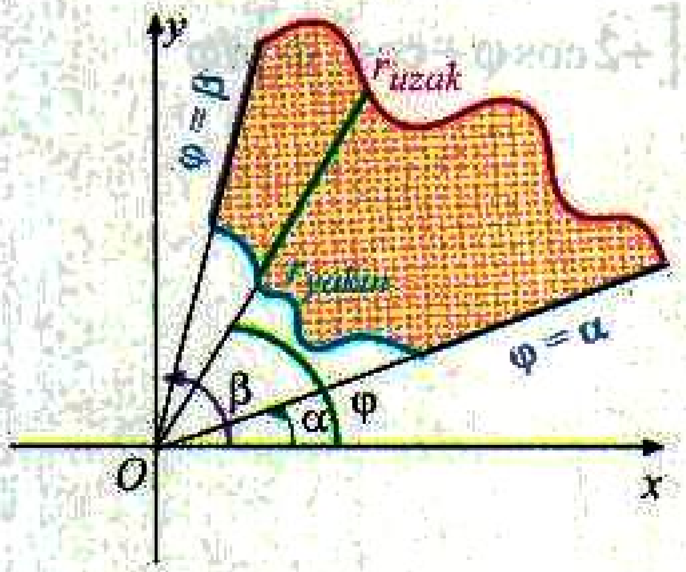


Alanı istenen bölge, $r = f(\varphi)$, $r = g(\varphi)$ eğrileri ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları tarafından sınırlanan bölge ise $\alpha \le \varphi \le \beta$ için $f(\varphi) \le g(\varphi)$ ise, bu bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi$$

farkına eşit olur. Buradan

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[g^2(\varphi) - f^2(\varphi) \right] d\varphi$$



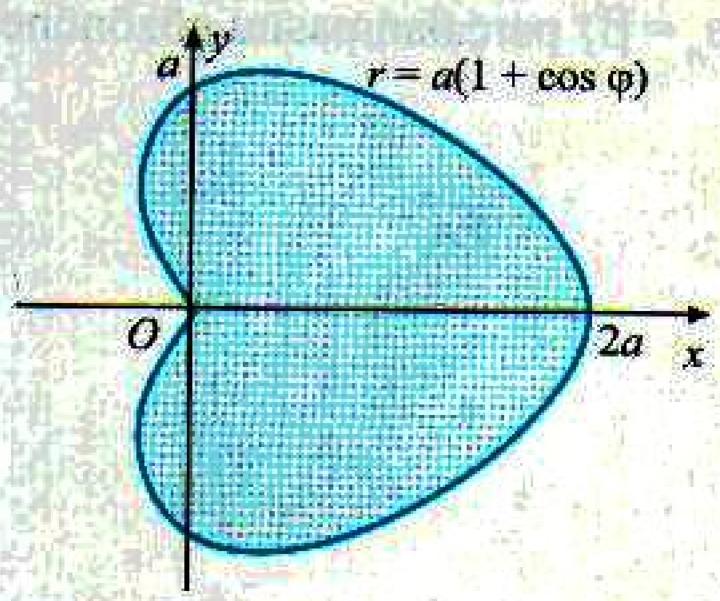
bulunur. $r = g(\varphi)$ eğrisi O kutup noktasından $r = f(\varphi)$ den daha uzakta bulunduğundan yukarıdaki formül

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[(r_{uzak})^2 - (r_{yakın})^2 \right] d\varphi$$

biçiminde yazılabilir.

ÖRNEK 15 $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm Kardiyoidin grafiği yanda verilmiştir.



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left[1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\right] d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}2\pi + 0 + 0\right] = \frac{3}{2}\pi a^2$$

birimkare olur.

Not

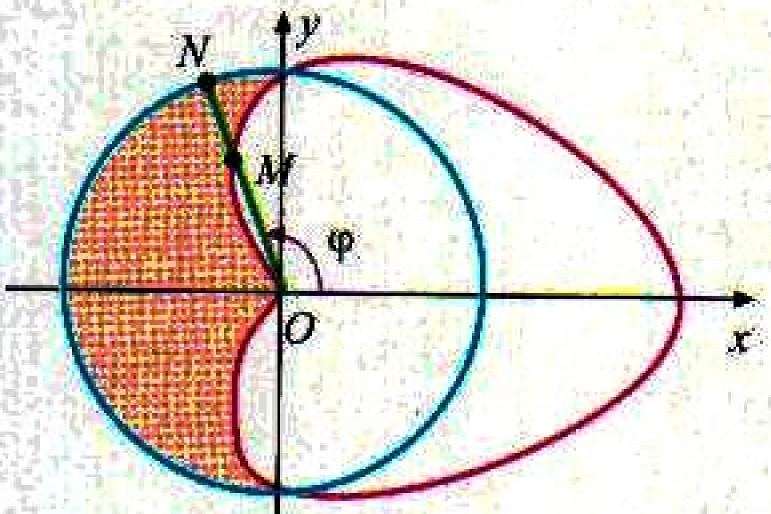
Kardiyoid kutup eksenine göre simetrik olduğundan sözkonusu alan

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \int_0^{\pi} r^2 d\varphi$$

biçiminde de hesaplanabilir.

ÖRNEK 16 $r = 2$ çemberinin içinde, $r = 2\,(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm O kutup noktasından geçen ve sözkonusu bölgeden geçen ışın gözönüne alındığında, ışının eğrileri kestiği M noktası O kutbuna daha yakındır. O halde $r_{yakın} = 2(1 + \cos\varphi)$, $r_{uzak} = 2$ dir. Diğer taraftan $[MN]$ doğru parçasının, alanı istenen bölgeyi taraması için φ nin $\frac{\pi}{2}$ den $\frac{3\pi}{2}$ ye kadar değişmesi gerekir. Buna göre,



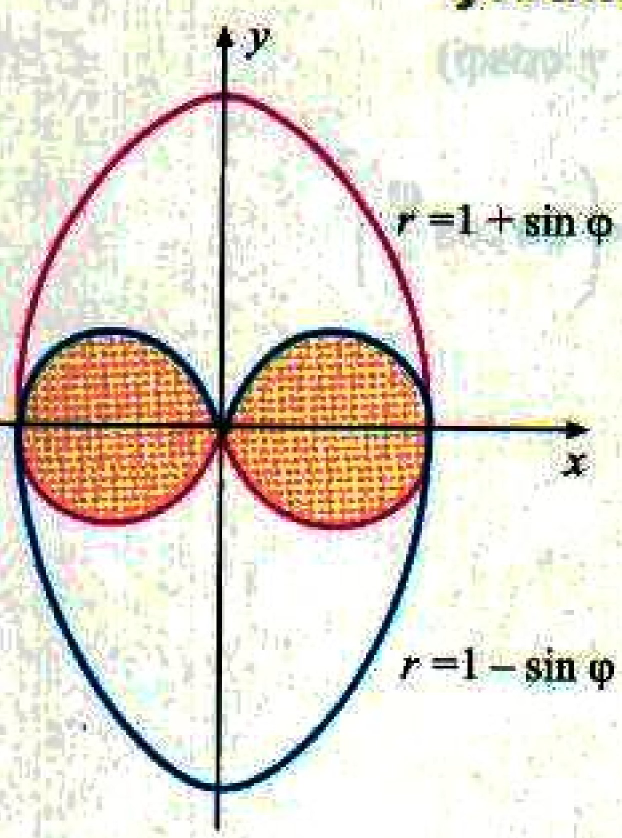
$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[2^2 - 2^2(1 + \cos\varphi)^2\right] d\varphi = -2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[+2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right] d\varphi$$

$$= -2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi\right] d\varphi$$

$$= -2\left(2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8 - \pi$$

br^2 olur.

ÖRNEK 17 $r = 1 + \sin\varphi$ ve $r = 1 - \sin\varphi$ eğrilerinin iç bölgelerinin ortak noktalarından oluşan bölgenin alanını bulunuz.



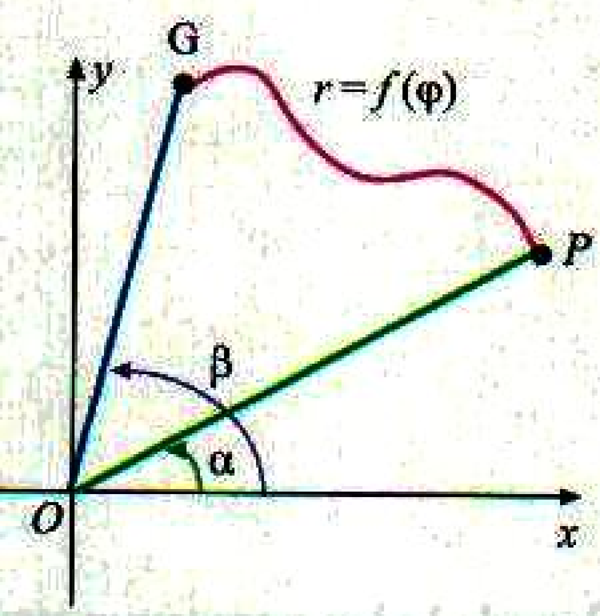
Çözüm Sözkonusu alan yandaki şekilde gösterilmiştir. Taralı alan 4 tane simetrik alandan oluştuğundan, bunların birinin alanını bulup 4 ile çarpmak yeterdir. Birinci bölgedeki alanı bulalım.

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)^2\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-2\sin\varphi+\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right] d\varphi$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\cos\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}-2 \text{ br}^2 \quad \text{olur.}$$

9.4 KUTUPSAL KOORDİNATLARDA YAY UZUNLUĞU HESABI



Kartezyen koordinatlarda $y = f(x)$ denklemi ile verilen eğrinin yay uzunluğu diferensiyelinin

$$d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

olduğunu biliyoruz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}}$$

olduğundan

$$d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$$

olduğundan

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2+(r')^2 \quad \text{dir.}$$

dir. Buna göre, yay diferensiyeli

$$d\ell = \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\varphi$$

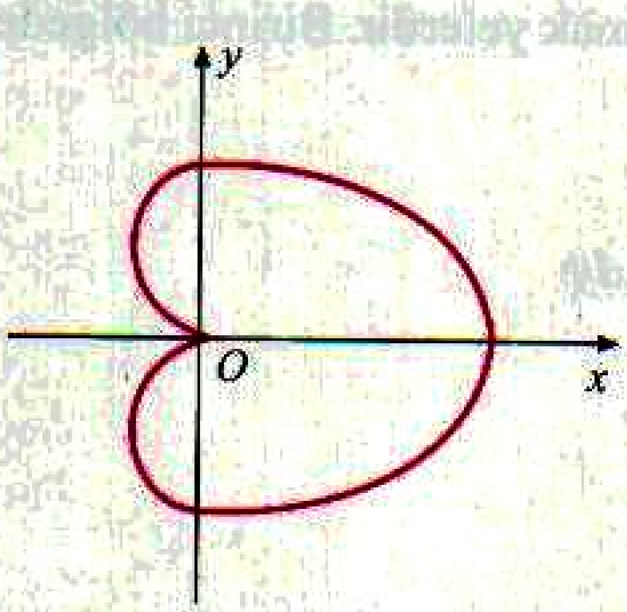
olur. O halde eğri üzerinde $P(r_1, \alpha)$, $Q(r_2, \beta)$ noktalarını birleştiren yayın uzunluğu

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\varphi$$

birimdir.

ÖRNEK 18 $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm Önce $r^2 + (r')^2$ ifadesini hesaplayalım.



$$r^2 + (r')^2 = a^2(1 + \cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2 = 2a^2(1 + \cos\varphi)$$

$$= 2a^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = \left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

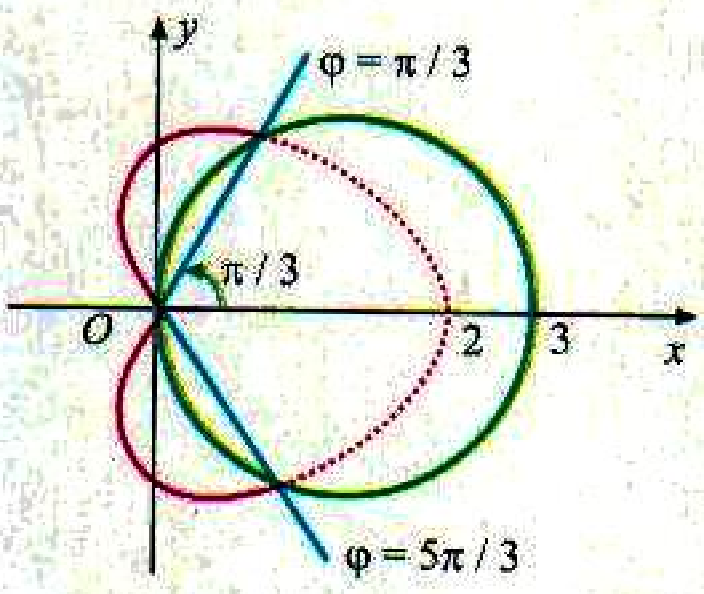
$$\ell = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8a$$

birimdir.

ÖRNEK 19 $r = 1 + \cos\varphi$ kardiyoidinin $r = 3\cos\varphi$ çemberinin dışında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm



$$r^2 + (r')^2 = (1 + \cos\varphi)^2 + (-\sin)^2 = 2 + 2\cos\varphi$$

$$= 2(1 + \cos\varphi) = 2\left(1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

dir.

Şimdi iki eğrinin kesim noktasını bulalım.

$$1 + \cos\varphi = 3\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \text{ ve } \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$$

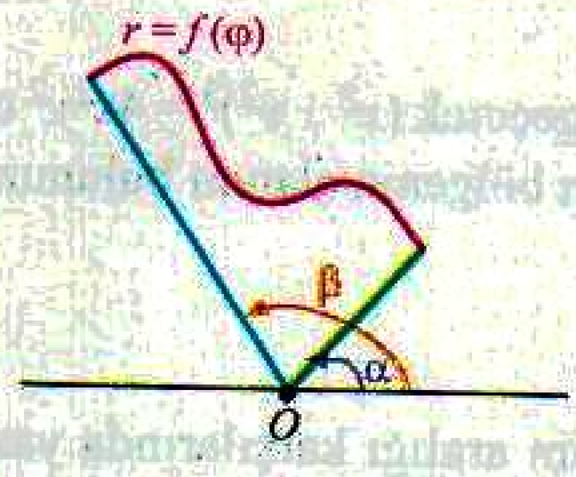
olur. Buna göre,

$$\ell = \int_{\pi/3}^{5\pi/3}\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = 2\int_{\pi/3}^{\pi}\sqrt{\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi$$

$$= 4\int_{\pi/3}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi} = 4$$

birim olur.

9.5 KUTUPSAL KOORDİNATLARDA YÜZEL ALANI HESABI



Eğer f fonksiyonu sürekli türeve sahip bir fonksiyon ve φ, α dan β ye kadar değiştiğinde $P(r,\varphi)$ noktası $r=f(\varphi)$ eğrisini oluşturursa, bu eğrinin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|r\sin\varphi|\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

eğrinin $0y$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|r\cos\varphi|\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

olur. Bu formülleri bulmak için

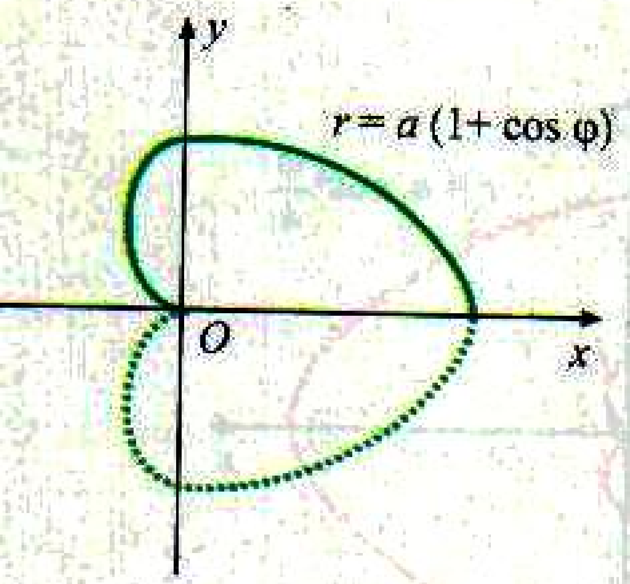
$$S=2\pi\int|y|\,d\ell \quad \text{ve} \quad S=2\pi\int|x|\,d\ell$$

formüllerini kutupsal koordinatlara göre yazmak yeterdir.

ÖRNEK 20

$r=a(1+\cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısının $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm



$$r^2+(r')^2=a^2(1+\cos\varphi)^2+(-a\sin\varphi)^2=a^2(2+2\cos\varphi)$$

$$=2a^2\left(1+2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)=\left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$S=2\pi\int_0^{\pi}|r\sin\varphi|\,2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi$$

$$=4a^2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$=4a^2\pi\int_0^{\pi}\left(1+2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$=16a^2\pi\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$=-32a^2\pi\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=-32a^2\pi\left.\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^{\pi}=\frac{32}{5}\pi a^2$$

br^2 bulunur.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

a. $r = \cos 2\varphi$ (4 yapraklı gül)

b. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (lemniskat)

c. $r^2 = 4\sin 2\varphi$ (lemniskat)

ç. $r = 4 + 2\cos\varphi$ (limaçon)

d. $r = a\sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)

e. $r^2 = \cos\varphi$

2. $r = 1$ çemberinin dışında, $r = 2\sin\varphi$ çemberinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

3. $r = \cos\varphi$ ve $r = \sqrt{3}\sin\varphi$ çemberlerinin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

4. $r = 3 + 2\cos\varphi$ limaçonunun içinde $r = 4$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

5. $r^2 = 2\cos^2\varphi$ lemniskatının içinde $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

6. $r^2 = \cos 2\varphi$ ve $r^2 = \sin 2\varphi$ lemniskatlarının her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

7. $r = 1 + \cos\varphi$ kardiyoidinin içinde $r = \cos\varphi$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. $r = \sin\varphi + \cos\varphi$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin içinde, $r = 2(1 - \cos\varphi)$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

10. Kutupsal koordinatlara geçerek $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

11. Kutup açılarının değişim aralığı karşılarında yazılı olan aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hezaplayınız.

a. $r = 4\cos\varphi,\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

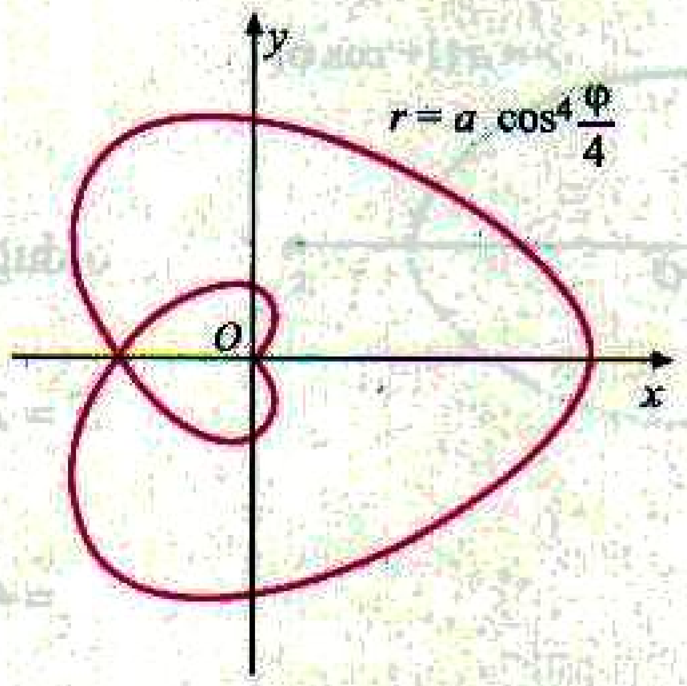
b. $r = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3},\quad 0 \le \varphi \le 3\pi$

c. $r = \varphi^2,\quad 0 \le \varphi \le \sqrt{5}$

d. $r = a\sin^2 \dfrac{\varphi}{3},\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

e. $r = \sqrt{1 + \sin 2\varphi},\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

12.



Yukarıda grafiği verilen $r = a\cos^4 \dfrac{\varphi}{4}$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.

13. $r = 1 - \cos\varphi$ kardiyoidinin ikinci bölgede bulunan parçasının Ox – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

14. $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısı Ox– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin kesim noktalarını bulunuz.

   a. $r = a,\ r = a(1-\sin\varphi)$

   b. $r = a\sec\varphi,\ r = 2a\sin\varphi$

   c. $r = a(1+\cos 2\varphi),\ r = 2a\cos 2\varphi$

2. $r = \dfrac{1}{1-\cos\varphi},\ r = \dfrac{3}{1+\cos\varphi}$

   eğrilerinin kesim noktalarını bulunuz. Eğrilerin kesim noktalarındaki teğetlerinin oluşturduğu açıların ölçülerini hesaplayınız.

3. Bilindiği gibi, iki eğri arasındaki açı, onların kesim noktalarındaki teğetleri arasındaki açıdır. Buna göre $r = 3\sec\varphi$ doğrusuyla $r = 4(1+\cos\varphi)$ kardiyoidi arasındaki açının ölçüsünü bulunuz.

4. $r = 1,\ r = 2\cos\varphi,\ r = 2\sin\varphi$

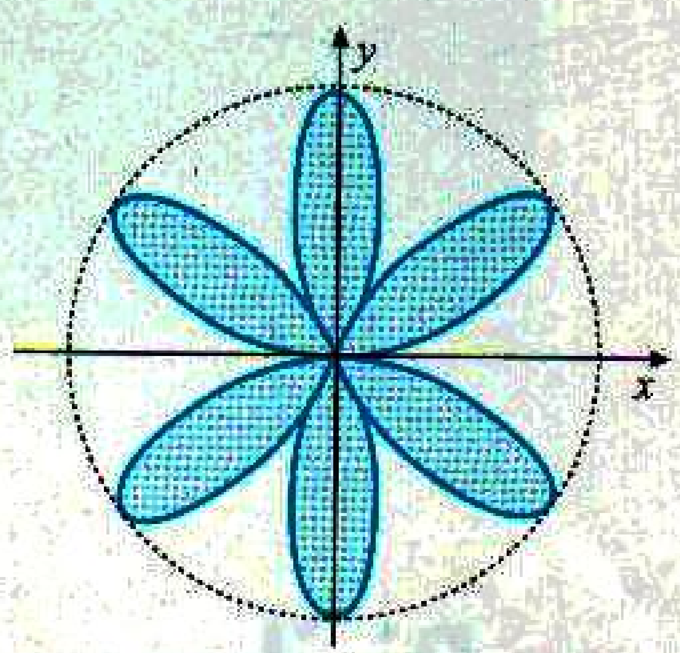
   çemberlerinin her üçü tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

5. $r = \sqrt{|\cos\varphi|}$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

6. $r = 1 + 2\sin\varphi$ limaçonunun iç ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

7. $r = 2a\cos 2\varphi$ gülünün içinde $r = \sqrt{2}\,a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. $r^2 = 4\cos 2\varphi$ lemniskatının içinde $r = \sqrt{2}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

9. 

   Yukarıda grafiği verilen $r^2 = 2\sin 3\varphi$ (6– yapraklı gül) eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

10. $r = \sqrt{2}\sin\varphi$ çemberi ile $r^2 = \sin 2\varphi$ lemniskatının her ikisinin de iç bölgesinde bulunan bölgenin alanını bulunuz.

11. $r = 1 + 2\cos\varphi$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

12. $r = 1 + \cos\varphi$ kardiyoidinin içinde ve $x = \dfrac{3}{4}$ doğrusunun solunda bulunan bölgenin alanını bulunuz.

13. $r^2 = \sin 2\varphi$ lemniskatının Oy– ekseninin sağında kalan parçası Oy– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

14. Denklemi

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

   olan eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.