TANIM

B kapalı ve sınırlı bir bölge ve f bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. B bölgesinin bir $P = \{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ parçalanması verildiğinde, ΔA_k, B_k bölgesinin alanını, (x_k^*, y_k^*) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** veya **integral toplamı** adı verilir.

TANIM

Eğer

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali** denir,

$$\iint_B f(x, y)\, dA \qquad (14.1)$$

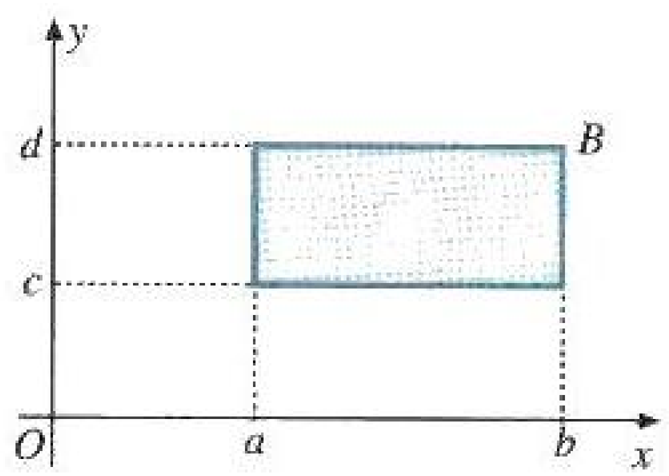
ile gösterilir. $f(x, y)$ ifadesine **integrant**, B bölgesine de **integrasyon bölgesi** denir.

TEOREM 14.1 **(Birinci Fubini Teoremi)**

$B = \{ (x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d \}$ ve $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Bu teoreme göre, integrasyon bölgesi bir dikdörtgensel bölge olduğunda integralin sırası değiştirilebilir.



ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4 \}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

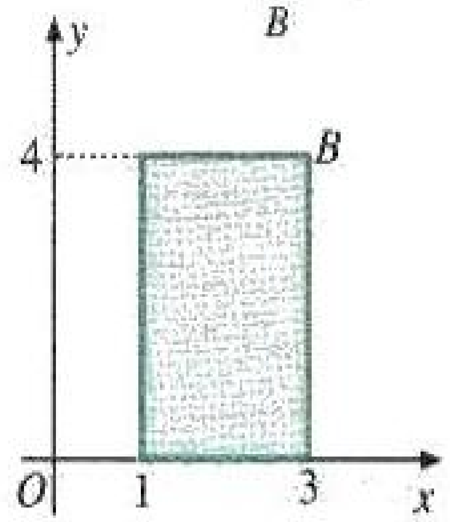
ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4 \}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_1^3 2xy^3\, dx dy = \int_0^4 \left(\int_1^3 2xy^3\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^4 (x^2 y^3) \Big|_1^3 dy = \int_0^4 (9y^3 - y^3)\, dy$$

$$= \int_0^4 8y^3\, dy = 2y^4 \Big|_0^4 = 2.4^4 = 512\,.$$



olur. Integrasyon sırasını değiştirerek; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\iint_B f(x,y) dA = \int_1^3 \int_0^4 2xy^3\, dy dx = \int_1^3 \left(\int_0^4 2xy^3\, dy \right) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2} xy^4 \Big|_0^4 dx = \int_1^3 128x\, dx = 64x^2 \Big|_1^3 = 512$$

ÖRNEK 1 İki Katlı Bir İntegral Hesaplamak

$f(x, y) = 1 - 6x^2y$ ve $R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$ için $\iint_R f(x, y)\, dA$'yı hesaplayın.

Çözüm Fubini teoremiyle,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 (1 - 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 - 16y)\, dy = \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 4$$

bulunur. İntegrasyon sırasını değiştirmek de aynı sonucu verir:

$$\int_0^2 \int_{-1}^{1} (1 - 6x^2y)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)]\, dx$$

$$= \int_0^2 2\, dx = 4.$$

UYARI

Bir integralde önce hangi değişkenin diferensiyeli yazılmışsa önce o değişkene göre integral alınır. $f(x, y)$ ifadesine en yakın sınırlar önce diferensiyeli yazılan değişkenin sınırlarıdır.

TEOREM 14.2 (İkinci Fubini Teoremi)

$u, v : [a, b] \to R$ fonksiyonları sürekli, $\forall x \in [a, b]$ için $u(x) \le v(x)$ ve

$B = \{ (x, y) : a \le x \le b \,,\ u(x) \le v(x) \}$ olsun. $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

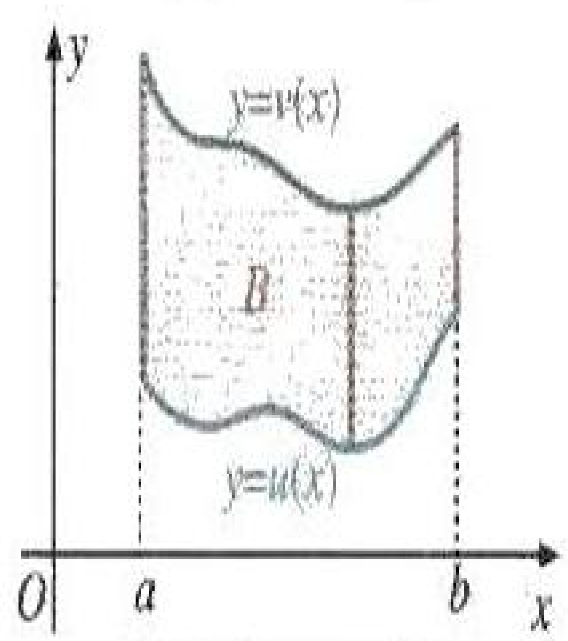
dır.

Teoremde sözü edilen B bölgesi yandaki şekilde gösterilmiştir. Böyle bölgelere **düşey basit bölge** adı verilir. Böyle bir bölgede düşey olarak çizilen her doğru parçasının üst ucu $y = v(x)$, alt ucu $y = u(x)$ eğrisi üzerinde bulunur. Bu doğrunun bütün bölgeyi taraması için $x = a$ doğrusundan başlayıp $x = b$ doğrusuna kadar hareket etmesi gerekir.

Benzer olarak, $D = \{ (x, y) : c \le y \le d \,,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y) \}$ bölgesi üzerindeki integral

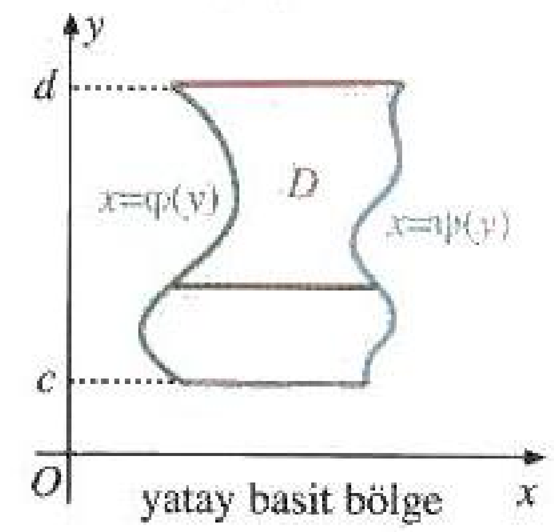
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

biçiminde hesaplanabilir.



düşey basit bölge

D bölgesi tipindeki bölgelere **yatay basit bölge** adı verilir. Böyle bölgelerde yatay olarak çizilen doğrular $x = \varphi(y)$ ve $x = \psi(y)$ eğrilerini birer noktada keser.

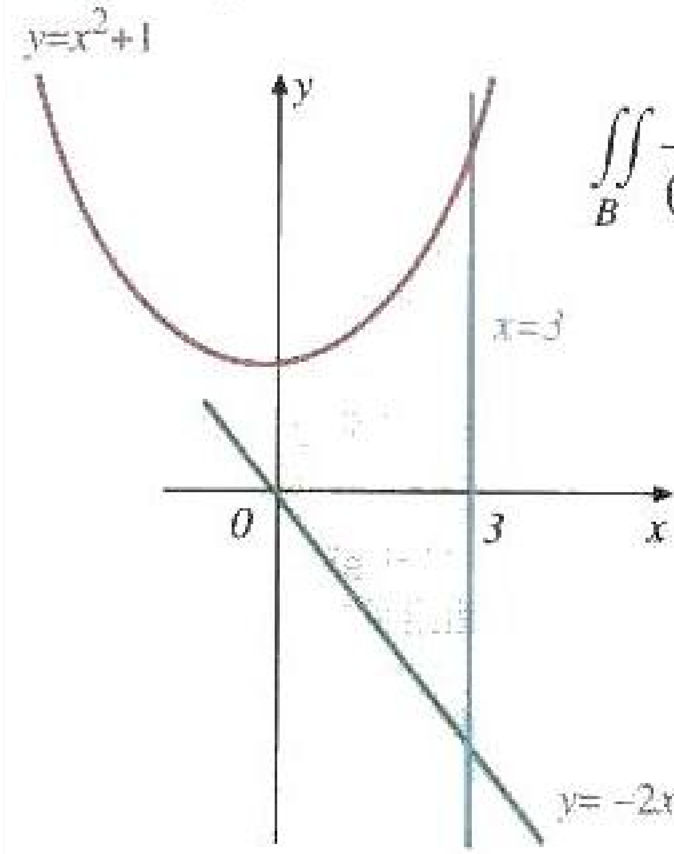


yatay basit bölge

ÖRNEK : $B = \{ (x, y) : 0 \le x \le 3 \,,\ -2x \le y \le x^2 + 1 \}$ bölgesi üzerinde

$$\iint_B \frac{2y}{(x+1)^2}\,dA$$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen bölgenin grafiği yanda verilmiştir. Buna göre



$$\iint_B \frac{2y}{(x+1)^2}\,dA = \int_0^3 \int_{-2x}^{x^2+1} \frac{2y}{(x+1)^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{y^2}{(x+1)^2}\Big|_{-2x}^{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{(x^2+1-2x)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx$$

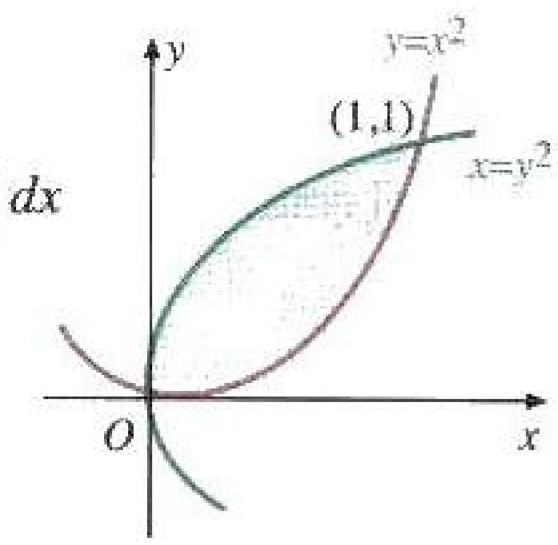
$$= \int_0^3 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(8+1) = 3$$ olur.

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\iint_B dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen bölge yanda gösterilmiştir.



$$\iint_B dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\ \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

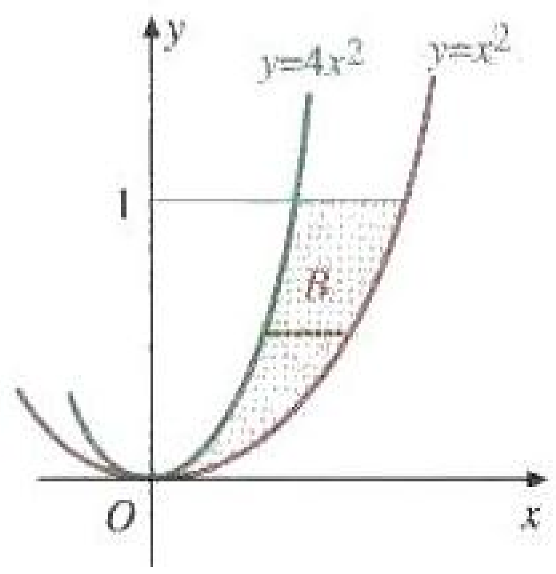
olur.

ÖRNEK : B bölgesi, birinci bölgede $y = 4x^2$, $y = x^2$ parabolleri ile $y = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B (x + y)\,dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Bölge yatay basit bölge olduğundan, önce x değişkenine göre integral almak gerekir.



$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} (x+y)\,dx dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + xy \Big|_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{8}y + \frac{1}{2}y^{3/2}\right) dy = \frac{3}{16}y^2 + \frac{1}{5}y^{5/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{5} = \frac{31}{80}$$

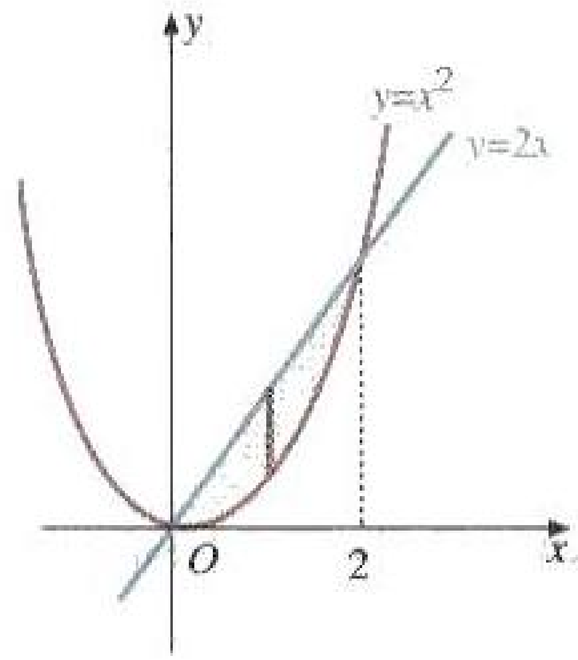
bulunur.

ÖRNEK : $I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy\ dx\ dy$ integrali veriliyor.

(a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

(b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

(c) İntegrali hesaplayınız.



Çözüm : (a) $x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$, $x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x$, $y = 0$ ve $y = 4$ tür.

Bu eğriler ve doğrular çizilirse yandaki şekil elde edilir. İntegrasyon sınırlarına dikkat edildiğinde, integrasyon bölgesinin taralı bölge olduğu görülür.

(b) Önce y değişkenine göre integral alalım. Bölge içinde y eksenine paralel bir doğru çizildiğinde, bu doğru parçasının alt ucu $y = x^2$ eğrisi, üst ucu $y = 2x$ doğrusu üzerindedir. Bu nedenle y nin sınırları x^2 ve $2x$ dir. Bölgenin en solunda bulunan noktanın apsisi $x = 0$, en sağında bulunan noktanın apsisi $x = 2$ olduğundan, verilen integral

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\ dy\ dx$$ biçiminde de yazılabilir.

(c) İntegrasyon sırasının değişmesi integralin değerini değiştirmediğinden, integrallerden herhangi biri hesaplanabilir. Son integrali hesaplayalım.

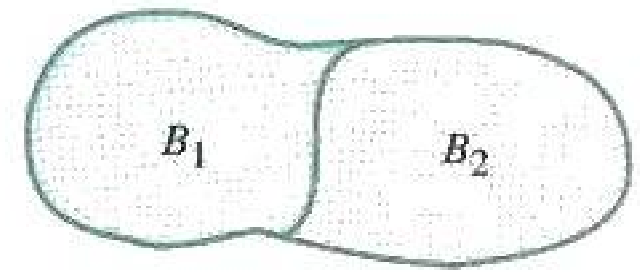
$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\ dy\ dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - \frac{x^5}{2}\right) dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{x^6}{12}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

olur.

Limit ve toplam sembolünün özelikleri gözönüne alındığında aşağıdaki özeliklerin varlığı kolayca gösterilebilir. Buradaki f ve g fonksiyonları B üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

(1) Her c sabiti için



$$\iint_B cf(x,y)\,dA = c\iint_B f(x,y)\,dA$$

dır.

(2) $$\iint_B [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint_B f(x,y)\,dA + \iint_B g(x,y)\,dA .$$

(3) B_1 ve B_2 , arakesitleri, en fazla bir eğri parçası olan iki bölge ise

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x,y)\,dA = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

dır.

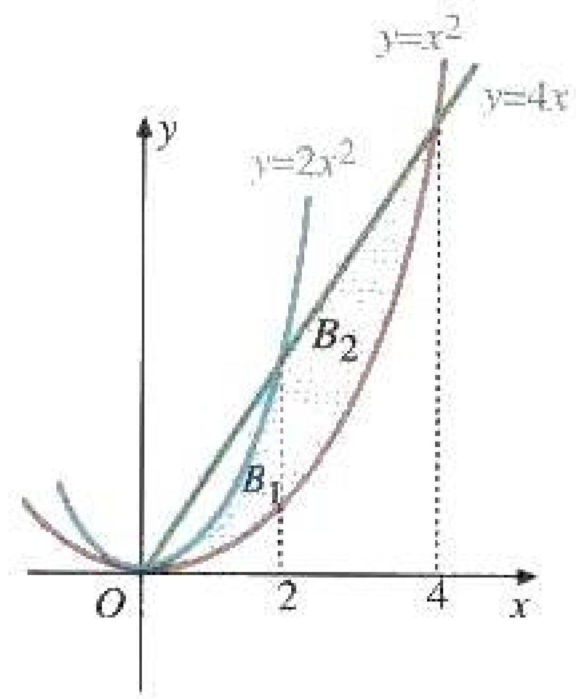
(4) Her $(x, y) \in B$ için $f(x, y) \le g(x, y)$

$$\iint_B f(x,y)\,dA \le \iint_B g(x,y)\,dA$$

dır.

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu bölge yanda gösterilmiştir. Bu bölge iki düşey basit bölgenin birleşimi olduğundan, istenen integral iki integralin toplamı olacaktır.



$$I = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x+y+1)\,dydx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x+y+1)\,dydx$$

$$= \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2} + y\ \Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + y\right)\Big|_{x^2}^{4x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^4 + x^3 + x^2\right) dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 11x^2 + 4x\right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big|_2^4$$

$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5}$$ olur.

ÖRNEK : $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{1} \cos(x^2)\,dxdy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\cos(x^2)$ fonksiyonunun x değişkenine göre integrali hesaplanamaz. Şimdi integralin sırasını değiştirelim. Bunun için önce integrasyon bölgesini çizelim

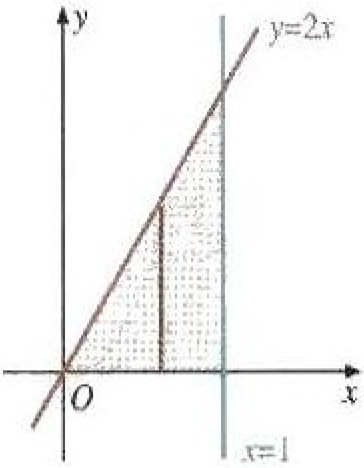
$x = \dfrac{y}{2}$ ise $y = 2x$ ve $x = 1$ doğruları çizilirse integrasyon bölgesinin, yandaki şekilde taralı olan bölge olduğu görülür.

Önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa

$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2)\,dydx = \int_0^1 \cos(x^2)\,y\Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2)\ \Big|_0^1 = \sin 1$$

bulunur.



ÖRNEK : B bölgesi $x = y^2$ parabolü ile $x + y = 2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B dA \qquad \text{integralini hesaplayınız.}$$

Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda çizilmiştir.

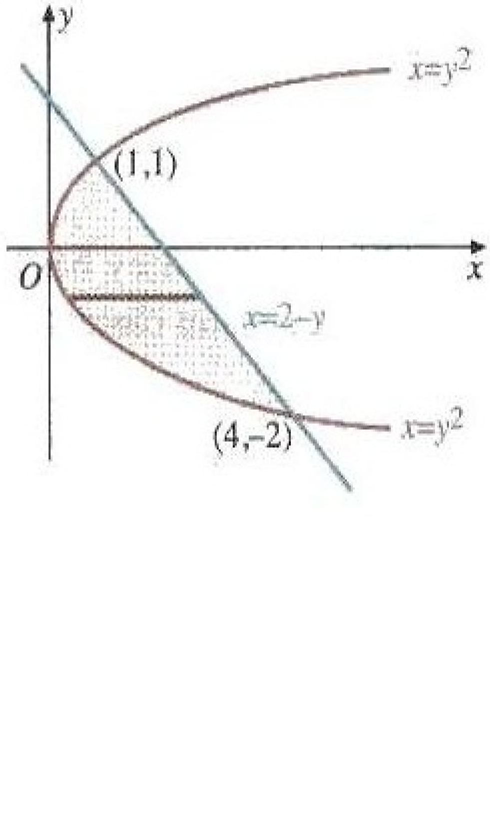
Buna göre

$$I = \int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{2-y} dxdy = \int_{-2}^{1} x\Big|_{y^2}^{2-y} dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy = 2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\ \Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$$

olur.



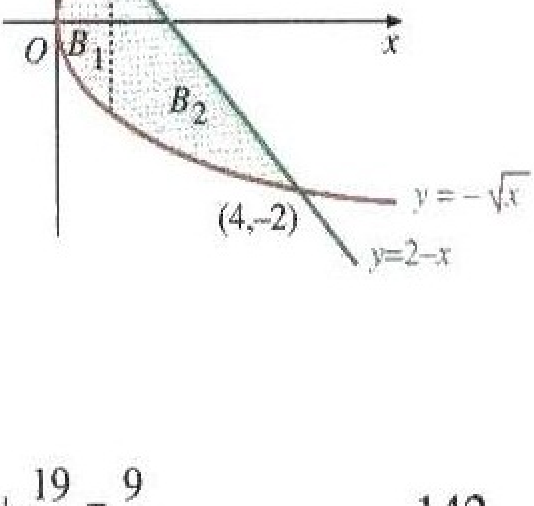
Yukarıdaki integral, integrasyon sırasını değiştirerek

$$I = \iint_{B_1} dydx + \iint_{B_2} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dydx$$

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\,\mathrm{dx} + \int_0^4 \left(2 - x + \sqrt{x}\right)\mathrm{dx}$$

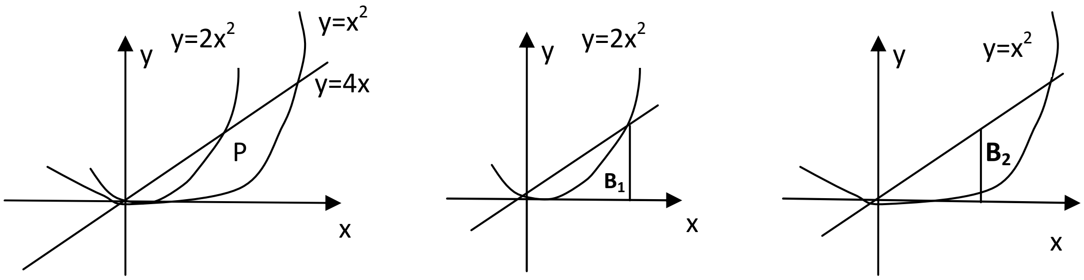
$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$$



biçiminde de hesaplanabilir.

ÖRNEK : B bölgesi $y = x^2$, $y = 2x^2$ parabolleri ile $y = 4x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y) = x + y + 1$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

Problemin degisik cozumleri mevcuttur.
Cozum 1)

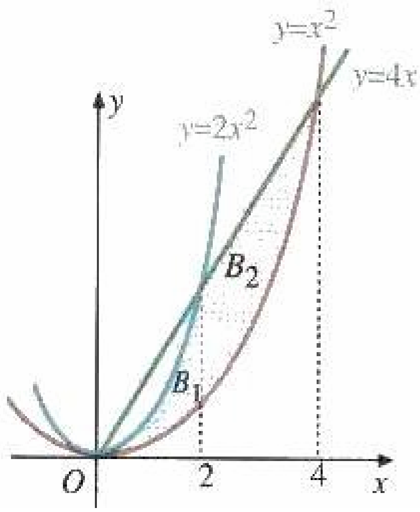


Sorulan integral P alani uzerindeki integraldir. Bu integral $P=B_1+B_2$ oldugu aciktir. Dolayisiyla B_1 ve B_2 yi hesaplar sonra $P= B_1+B_2$ hesaplariz.

$$I = \iint_{B_1} f(x,y)\,dA + \iint_{B_2} f(x,y)\,dA$$

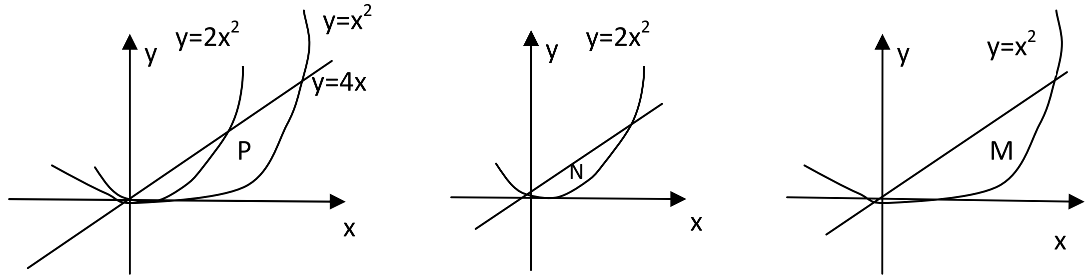
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} (x+y+1)\,dy\,dx + \int_2^4 \int_{x^2}^{4x} (x+y+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2} + y \,\Big|_{x^2}^{2x^2} dx + \int_2^4 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + y \right) \Big|_{x^2}^{4x} dx$$



$$= \frac{244}{15} + \frac{1052}{15} = \frac{1296}{15} = \frac{432}{5} = \mathbf{86.4}$$

Cozum 2)



Sorulan integral P alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=M-N oldugu aciktir. Dolayisiyla once N ve M yi hesaplariz sonra P=M-N yi hesaplariz.

P=M−N

$$N=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=2x^2}^{y=4x}(x+y+1)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{2x^2}^{4x}$$

$$N=\int_0^2\left(x(4x)+\frac{(4x)^2}{2}+4x\right)-\left(x(2x^2)+\frac{(2x^2)^2}{2}+2x^2\right)dx$$

$$=\int_0^2 4x^2+8x^2+4x-\{2x^3+2x^4+2x^2\}\,dx$$

$$=\int_0^2\left(-2x^4-2x^3+10x^2+4x\right)dx$$

$$=-2\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+10\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$=-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{10}{3}x^3+2x^2\Big|_0^2$$

$$N=13.8667-0=13.8667$$

51

$$M=\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=x^2}^{y=4x}(x+y+1)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{2x^2}^{4x}dx$$

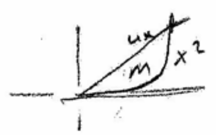
$$=\int_0^4\left(x(4x)+\frac{(4x)^2}{2}+4x\right)-\left(x(x^2)+\frac{(x^2)^2}{2}+x^2\right)dx$$

$$=\int 4x^2+8x^2+4x-\left(x^3+\frac{x^4}{2}+x^2\right)dx$$

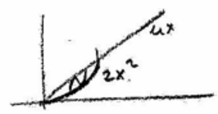
$$=\int\left(-\frac{x^4}{2}-x^3+11x^2+4x\right)dx$$

$$=-\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}+\frac{11}{3}x^3+2x^2\Big|_0^4$$

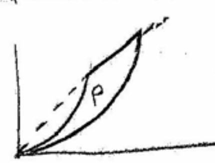
$$=100.2667-0=100.2667=$$



$M=100.2667$



$N=13.8667$

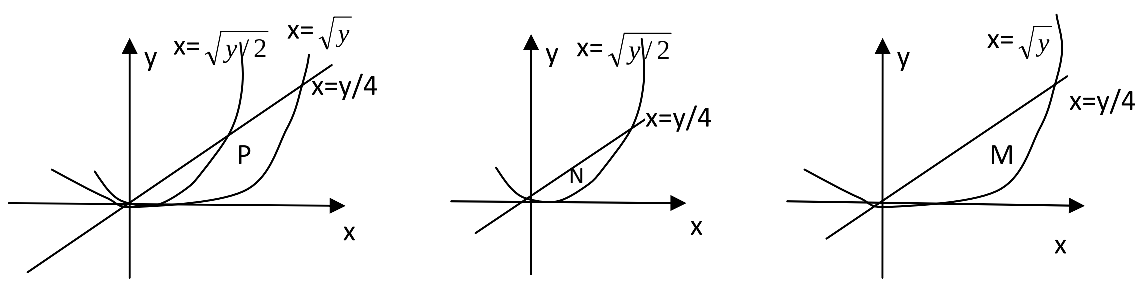


$P=M-N=100.26-13.86$

$=86.4.$

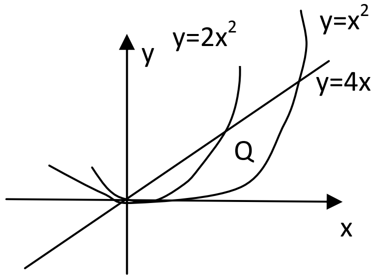
52

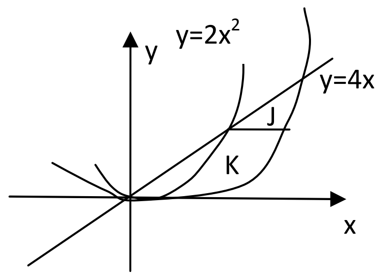
Cozum 2.b)Yukaridaki integralde integral sinirlarini degistirerek once x e sonra y ye gore integral alarak da hesaplayabiliriz.



N= $\int_{y=0}^{y=8} \int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=y/4} (x+y+1)dxdy$, M= $\int_{y=0}^{y=16} \int_{x=\sqrt{y}}^{x=y/4} (x+y+1)dxdy$, N=13.8667, M=100.2667, P=M-N=86.4

Cozum 3)

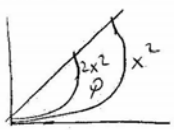


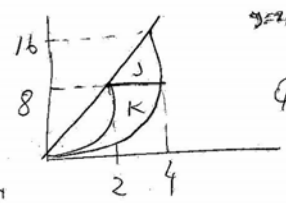


Sorulan integral Q alani uzerindeki integraldir. Bu integral P=K+J oldugu aciktir. Dolayisiyla K ve J yi hesaplar sonra P= K+J yi hesaplariz.

Problemi X eksenine paralel bolerek de görebiliriz

$y=2x^2 \quad x^2=\frac{y}{2} \quad x=\sqrt{\frac{y}{2}}$





$Q = K + J$

$$K = \int_{y=0}^{y=8} \int_{x=\sqrt{y}/2}^{x=\sqrt{y}} (x+y+1)\, dx\, dy = \int \left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Big|_{x=\sqrt{y}/2}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^8 \left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y}\cdot y + \sqrt{y}\right) - \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2}{2} + \sqrt{\frac{y}{2}}\cdot y + \sqrt{\frac{y}{2}}\right)$$

$$= \int_0^8 \frac{y}{2} + y^{3/2} + y^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{1/2}\right)$$

$$= \int_0^8 \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{A} y + \underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{B} y^{3/2} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{C} y^{1/2}\right) dy$$

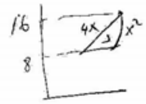
$$= \int_0^8 \left(Ay + By^{3/2} + C y^{1/2}\right) dy$$

$$= A\frac{y^2}{2} + B\frac{1}{\frac{5}{2}}y^{5/2} + C\frac{1}{3/2}y^{3/2}\Big|_0^8 = \frac{A}{2}y^2 + \frac{2B}{5}y^{5/2} + \frac{2C}{3}y^{3/2}\Big|_0^8$$

53

$K = 33.62 - 0 = 33.62$

54



$$J = \int_{y=8}^{y=16} \int_{x=\frac{y}{4}}^{x=\sqrt{y}} (x+y+1)\, dx\, dy = \int_8^{16} \left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Big|_{y/4}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int \left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y}\cdot y + \sqrt{y}\right) - \left(\frac{\left(\frac{y}{4}\right)^2}{2} + \frac{y}{4}\cdot y + \frac{y}{4}\right)$$

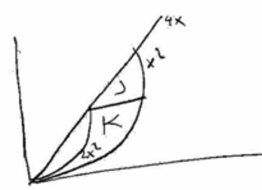
$$= \int \frac{y}{2} + y^{3/2} + y^{1/2} - \left(\frac{1}{32}y^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{y}{4}\right)$$

$$= \int \underbrace{\left(-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}\right)}_{A} y^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}_{B} y + y^{3/2} + y^{1/2}$$

$$= \int Ay^2 + By + y^{3/2} + y^{1/2} \Big|_8^{16}$$

$$= \frac{A}{3}y^3 + \frac{B}{2}y^2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}y^{5/2} + \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_8^{16}$$

$J = 100.2667 - 47.4927 = 52.77$

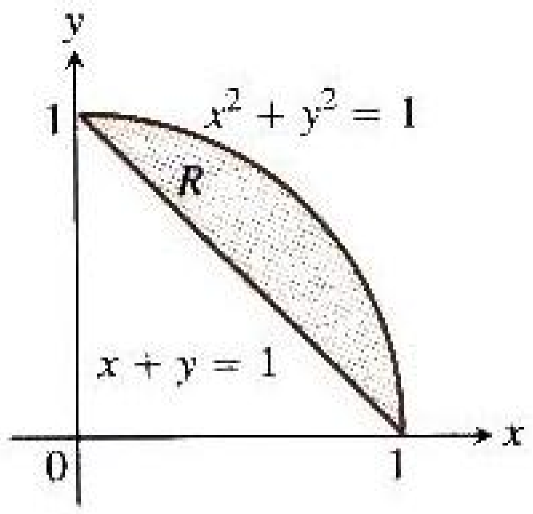


$K+J = 33.62 + 52.77 = 86.4$

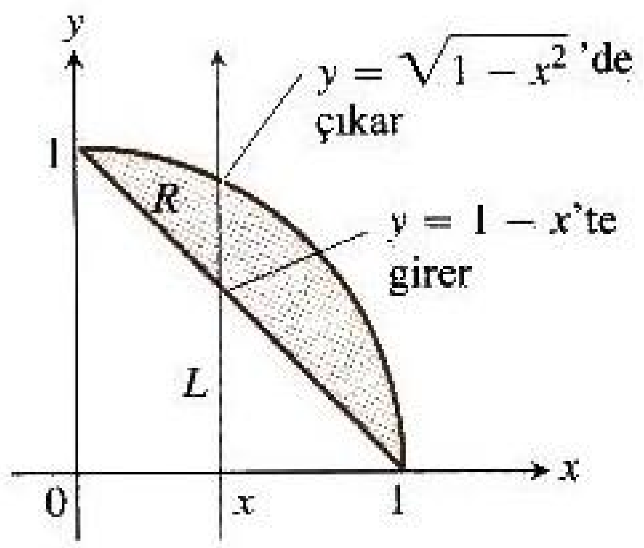
Şimdi, integrasyon sınırlarını bulmak için, düzlemde bir çok bölgeye uygulanabilen bir prosedür veriyoruz. Bu prosedürün işe yaramadığı daha karmaşık bölgeler, çoğunlukla bu prosedür uygulanabilecek şekilde parçalara ayrılır.

$\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini, önce y'ye sonra da x'e göre integre ederek hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. *Çizim*. İntegrasyon bölgesini çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun y sınırlarını bulun* Artan y yönünde R'den geçen dikey bir L doğrusu hayal edin. L'nin girdiği ve çıktığı y değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun y sınırlarıdır ve genellikle x'in fonksiyonlarıdırlar (sabit yerine).

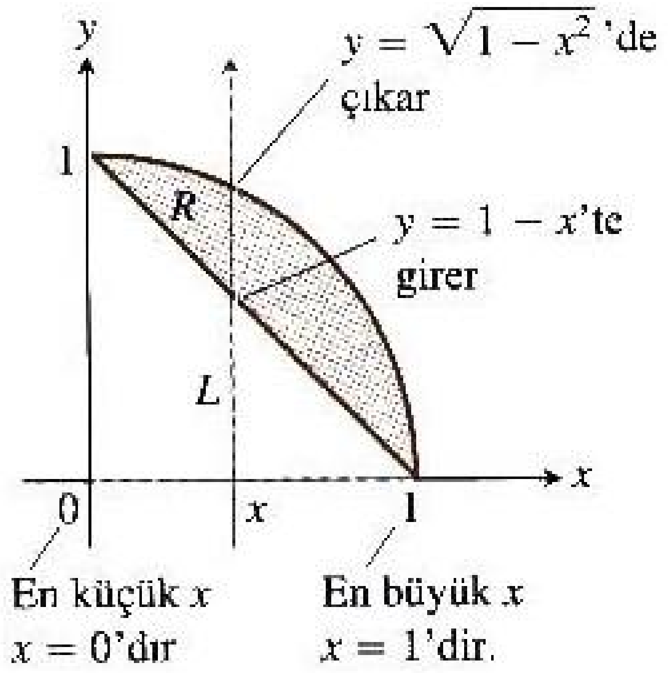


3. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun* R'den geçen bütün dikey doğruları kapsayan x-sınırlarını seçin. İntegral

$$\iint_R f(x,y)\,dA =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

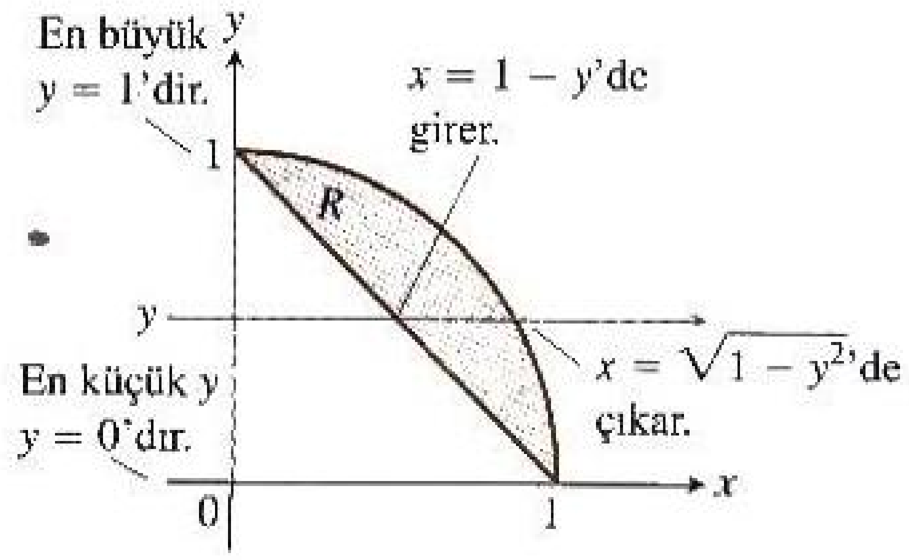
olur.



Aynı iki katlı integrali, integrasyon sırası değişmiş tekrarlı integral olarak hesaplamak için, 2. ve 3. adımlarda dikey doğrular yerine yatay doğrular kullanın. İntegral

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

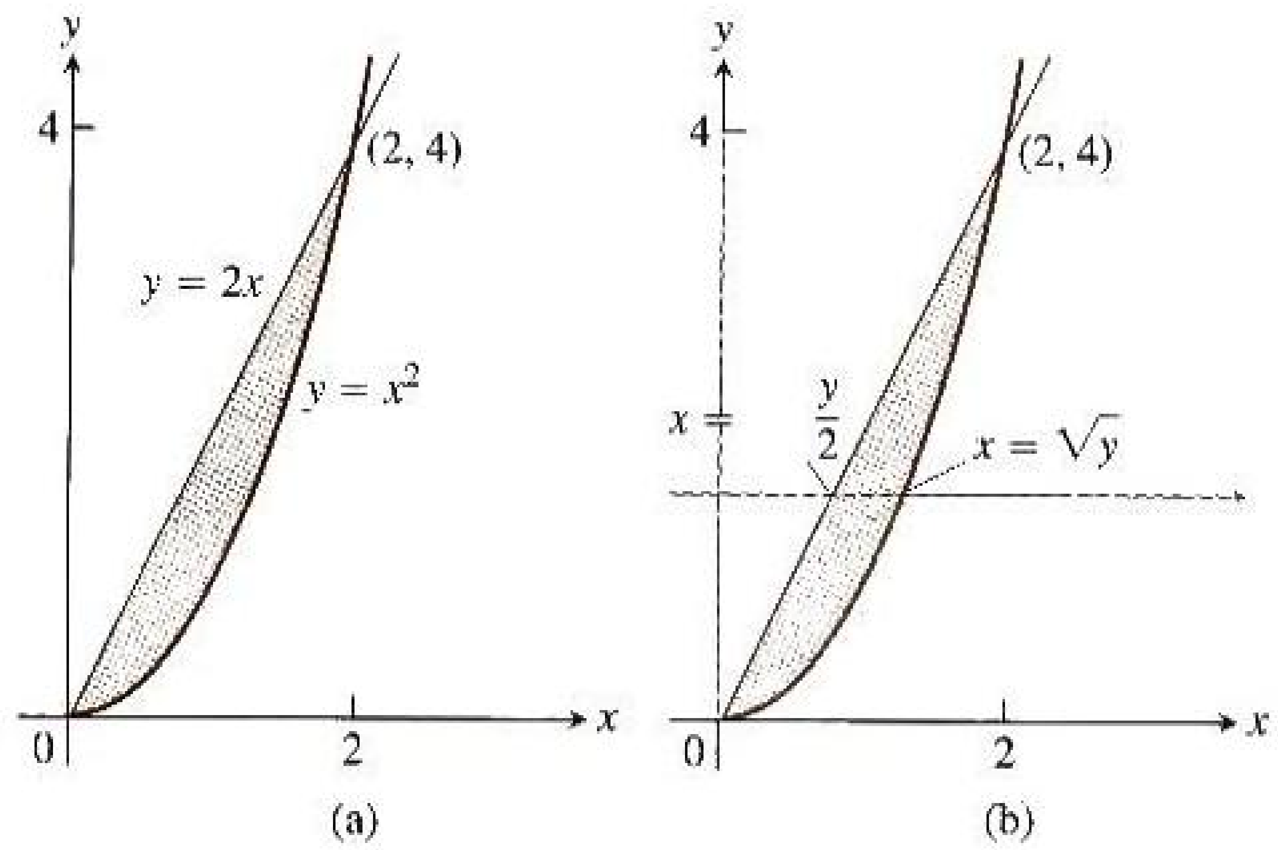


ÖRNEK 4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\,dy\,dx$$

integralinin integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş eşdeğer bir integral yazın.

Çözüm İntegrasyon bölgesi, $x^2 \le y \le 2x$ ve $0 \le x \le 2$ eşitsizlikleriyle verilmektedir. Dolayısıyla, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında $y = x^2$ ile $y = 2x$ eğrilerinin sınırladığı bölgedir (Şekil 15.13a).



ŞEKİL 15.13 Örnek 4'ün integrasyon bölgesi

Değiştirilmiş sırada integrasyonun sınırlarını bulmak için, bölge boyunca soldan giden bir yatay doğru hayal ederiz. $x = y/2$'de girer ve $x = \sqrt{y}$'de çıkar. Böyle bütün doğruları kapsamak üzere, y'yi $y = 0$'dan $y = 4$'e götürürüz (Şekil 15.13b). İntegral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\,dx\,dy$$

olur. Bu integrallerin ortak değeri 8'dir.

Koordinat Donusumleri

1)Duzlemde Kartezyen koordinat sistemi

2)Duzlemde kutupsal koordinat sistemi

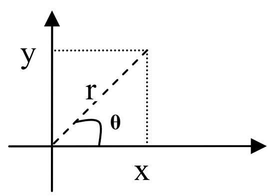
3)Uzayda Kartezyen koordinat sistemi

3)Uzayda Silindirik koordinat sistemi

3)Uzayda Kuresel koordinat sistemi

-------- --------------------------------

Duzlemde Kartezyen ve Kutupsal Koord. Sist.
Duzlemde bir noktanin x,y ile belirtilmesi kartezyen koordinat sistemi, r(genlik,uzunluk.mesafe) ve θ (aci) ile belirtilmesi kutupsal koordinat sistemi olur.



x=r cos θ

y=r sin θ

r=$\sqrt{x^2+y^2}$

θ=$\tan^{-1}\frac{y}{x}$

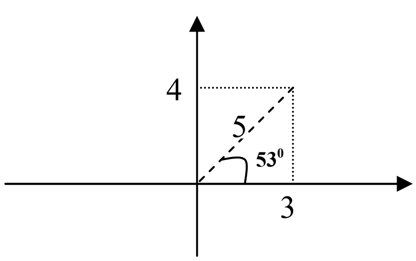
$\tan^{-1}$(z): arg tan(z) demektir.

Ornek Asagidaki kartezyen koordinat sisteminde verilen noktalari kutupsal koordinat sisteminde belirtin. a)(3,4) b)(-3,4), c)(-3.-4), d)(3,-4)

Cozum:

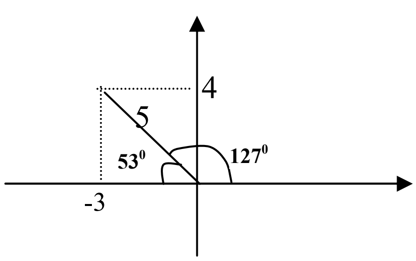
a)x=3, y=4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5,

θ=$\tan^{-1}\frac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(4/3) = 53.1^0



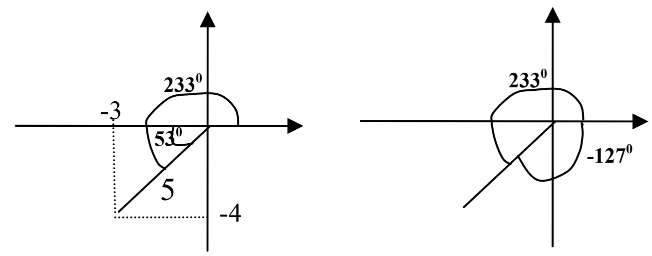
b)x=-3, y=4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{(-3)^2+4^2}$ =5,

θ=$\tan^{-1}\frac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(4/(-3)) =180-53.1^0=127^0



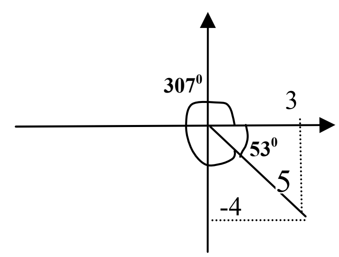
c)x=-3, y=-4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ = r=$\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$ =5,

θ=$\tan^{-1}\frac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(-4/(-3)) =180+53.1^0=233^0=360-233^0=-127^0



d)x=3, y=-4, ➔ r=$\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{3^2+(-4)^2}$ =5,

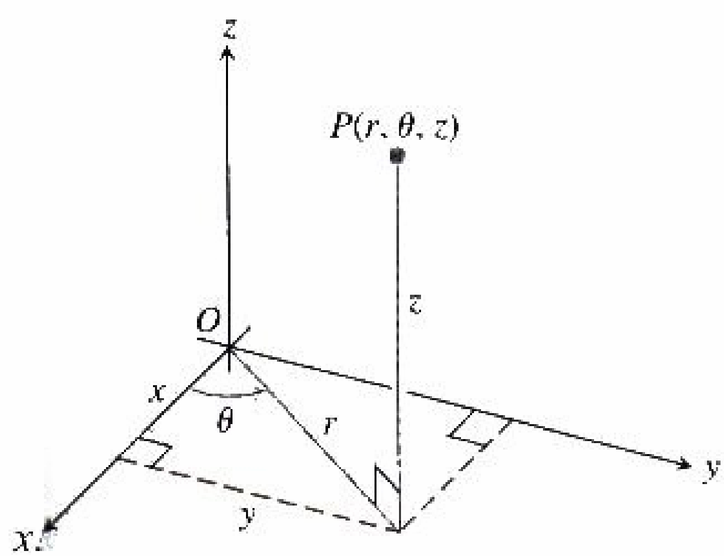
θ=$\tan^{-1}\frac{y}{x}$=$\tan^{-1}$(-4/3) =-53.1^0=360-53=307



Uzayda Silindirik Koordinat Sistemi

Silindirik koordinatlar (r, θ, z) sıralı üçlüleri ile uzayda bir P noktasını temsil ederler. Burada,

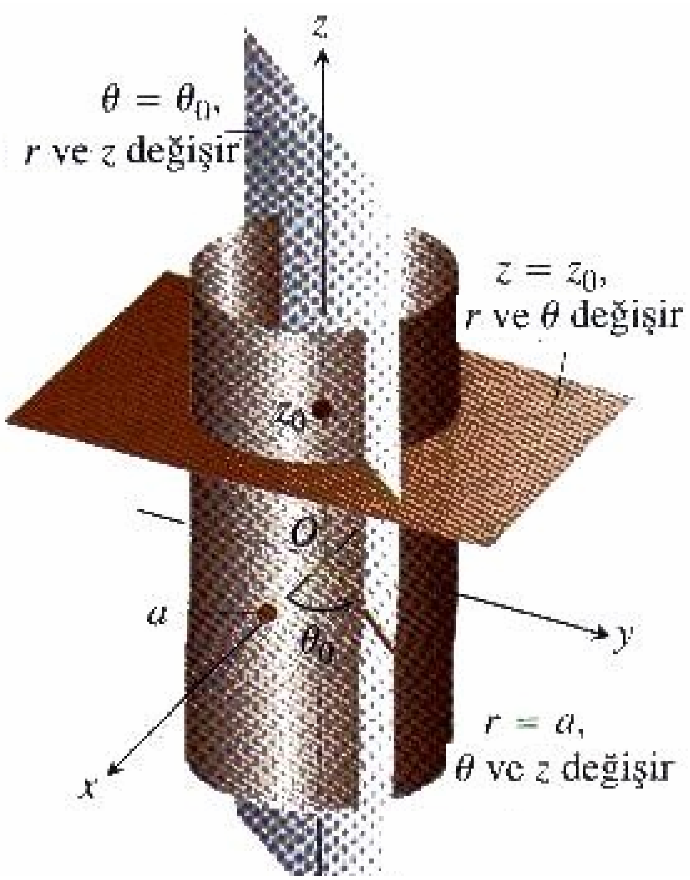
1. r ve θ, P'nin xy-düzlemine dik izdüşümünün kutupsal koordinatlarıdır.
2. z kartezyen dikey koordinattır.

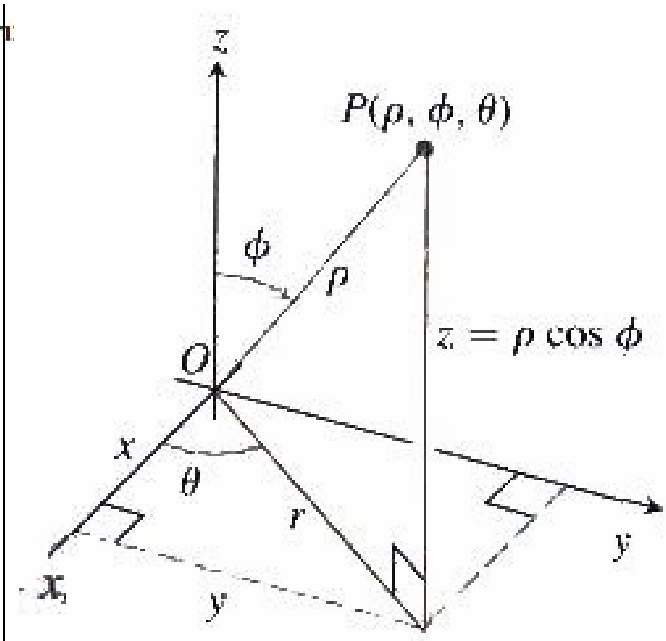


Kartezyen (x, y, z) ve Silindirik (r, θ, z) Koordinatları Bağlayan Denklemler

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = y/x$$



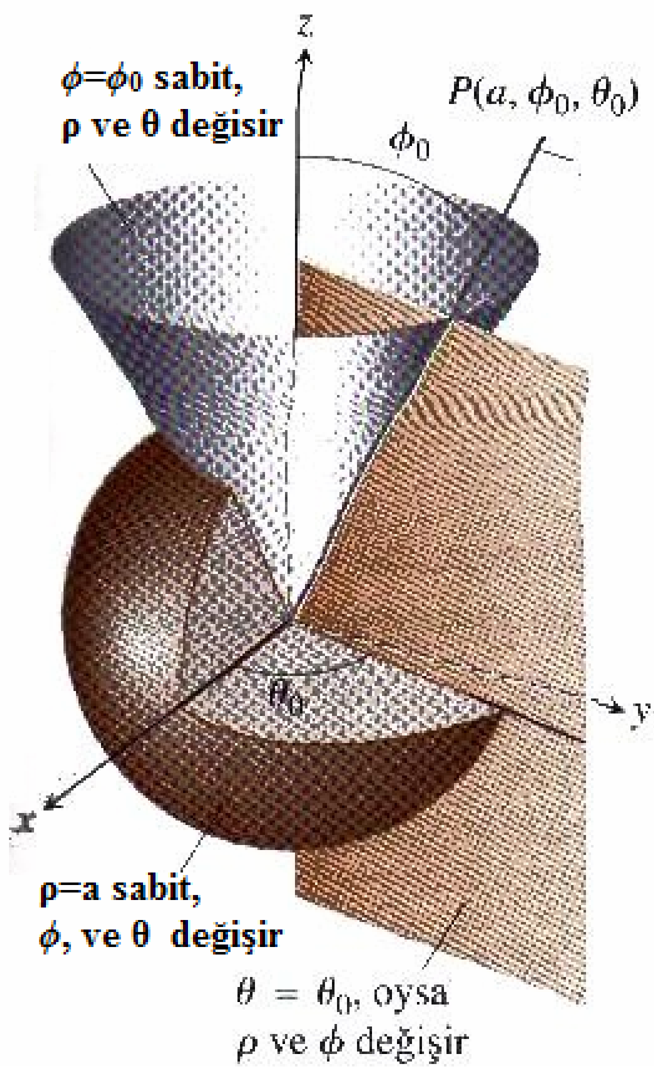


Uzayda Kuresel Koordinat Sistemi

Küresel Koordinatlar uzayda bir P noktasını,

1. ρ, P'den orijine uzaklık.
2. ϕ, $\overrightarrow{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açı $(0 \le \phi \le \pi)$
3. θ, silindirik koordinatlardaki açı

olmak üzere, sıralı (ρ, ϕ, θ) üçlüleri ile temsil eder.



Kuresel(ρ, φ, θ), Silindirik(r,θ,z), Kartezyen(x,y,z) arsindaki bagintilar.

$$r = \rho\sin\phi, \qquad x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta,$$

$$z = \rho\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

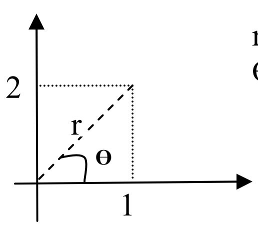
Koordinat Dönüşüm Formülleri

SİLİNDİRİKTEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN SİLİNDİRİĞE
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$	$r = \rho\sin\phi$
$y = r\sin\theta$	$y = \rho\sin\phi\sin\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

HACIM FORMULLERI

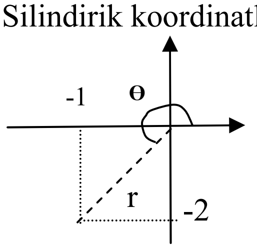
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$= dz\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Ornek Problem. Asagidaki kartezyen noktalari silindirik ve kuresel koordinatlara cevirin.
a)(1,2,3), b)(-1,-2,3)
Cozum. a)x=1, y=2, z=3,
Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



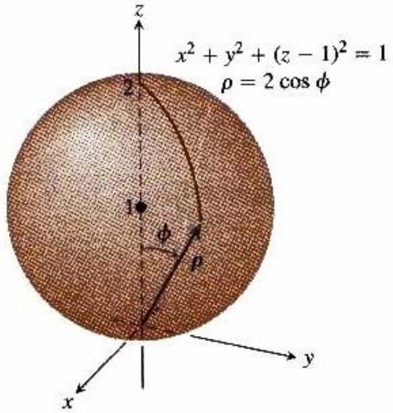
r= $\sqrt{1^2+2^2}$ = 2.23
Θ=$\tan^{-1}$(2/1)=63^0

Kuresel koordinatlar icin
ρ = $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{z^2+\rho^2}$ =3.74
z= ρ cos(ϕ) → ϕ= arg cos(z/ρ) =
ϕ= arg cos(3/3.74)=36.66^0
Θ = 63^0 (silindirik koordinat ile Θ aynidir)
Cozum. b)x=-1, y=-2, z=3,
Silindirik koordinatlarda z=z yani z=3 dur.



r= $\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}$ =2.23
Θ=$\tan^{-1}$(-2/-1)=180+63
= 243^0= -117^0

Kuresel koordinatlar icin
Θ = 243^0 (silindirik koordinat ile Θ aynidir)
ϕ= arg cos(z/ρ) =arg cos(3/3.74)=36.66^0
ρ = $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{z^2+\rho^2}$ =3.74



ŞEKİL 15.43 Örnek 3'teki küre.

ÖRNEK 3 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz.

Çözüm x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırız:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$
$$\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 = 1$$
$$\rho^2 \sin^2\phi \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + \rho^2\cos^2\phi - 2\rho\cos\phi + 1 = 1$$
$$\rho^2 \underbrace{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}_{1} = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho = 2\cos\phi$$

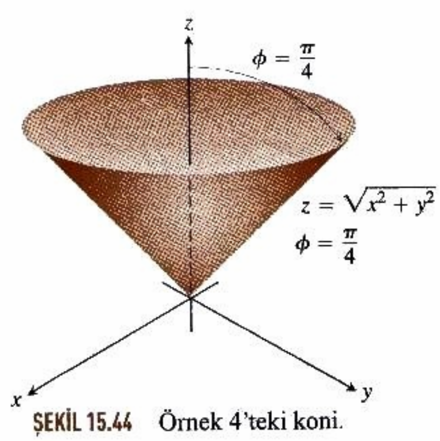
Şekil 15.43'e bakın.

ÖRNEK 4 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz (Şekil 15.44).

Çözüm 1 *Geometri kullanın.* Koni, z-eksenine göre simetriktir ve yz-düzleminin birinci bölgesini $z = y$ doğrusu boyunca keser. Bu nedenle, koni ile pozitif z-ekseni arasındaki açı $\pi/4$ radyandır. Koni, küresel ϕ koordinatı $\pi/4$'e eşit olan noktalardan oluşur dolayısıyla denklemi $\phi = \pi/4$'tür.

Çözüm 2 *Çebir kullanın.* x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırsak aynı sonucu elde ederiz:



ŞEKİL 15.44 Örnek 4'teki koni.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi} \qquad \text{Örnek 3}$$
$$\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \qquad \rho \ge 0,\ \sin\phi \ge 0$$
$$\cos\phi = \sin\phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{4} \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

Küresel koordinatlar, merkezleri orijinde olan küreleri, kenarı z-ekseni olan yarıdüzlemleri ve tepe noktaları orijinde, eksenleri z-ekseninde olan konileri tanımlamakta yararlıdır. Bu gibi yüzeylerin sabit koordinat değerli denklemleri vardır:

$$\rho = 4 \qquad \text{Küre, yarıçap 4, merkez orijinde}$$
$$\phi = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Orijinden yukarı açılan koni, pozitif } z\text{-ekseniyle } \pi/3 \text{ açısı yapar}$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad z\text{-ekseni etrafında dönen yarı düzlem, pozitif } x\text{-ekseniyle } \pi/3 \text{ açısı yapar.}$$

Bölge dönüşümleri kesiminde belirtildiği gibi, $uv-$ düzlemindeki bir D bölgesi

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla $xy-$ düzlemindeki bir B bölgesine dönüştürülmüş olsun.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\,|J|\,dudv$$

dır. Eğer özel olarak

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

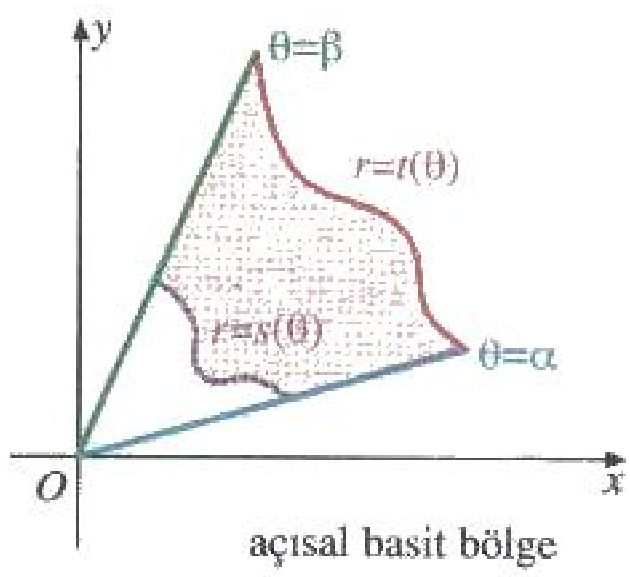
kutupsal koordinatlarına geçirilirse

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\,r\,drd\theta$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

olur.



açısal basit bölge

Eğer $D = \{\,(r,\theta) : s(\theta) \le r \le t(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\,\}$ ise

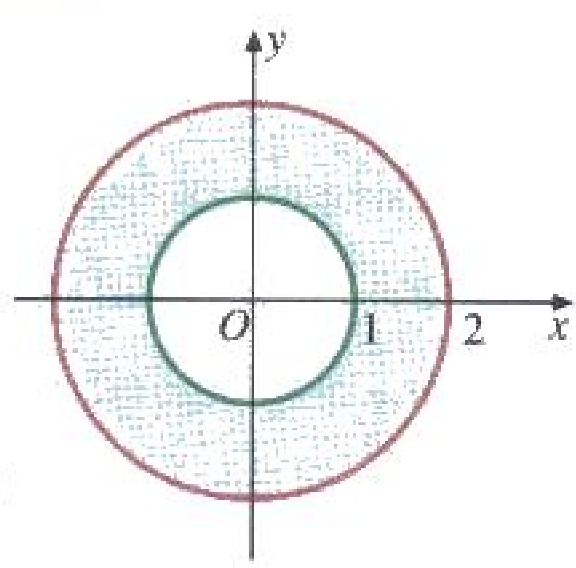
$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \int_{s(\theta)}^{t(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

olur. Bu tip D bölgelerine **açısal basit bölge** adı verilir.

ÖRNEK : B bölgesi $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=4$ çemberleri arasında kalan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

integralini hesaplayınız.



Çözüm : Kutupsal koordinatlara geçilirse

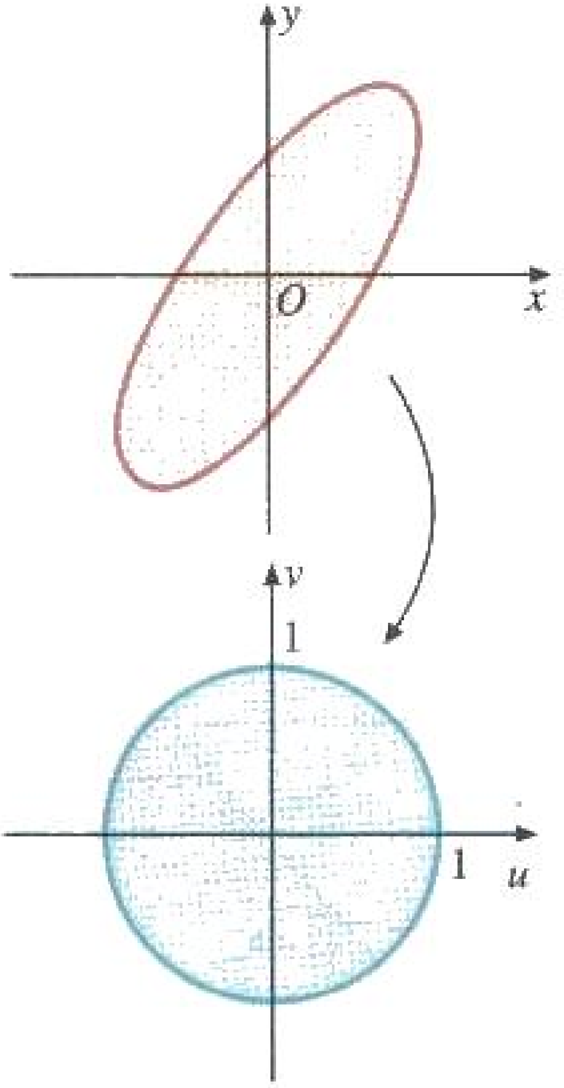
$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^2\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\; r dr d\theta=\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\, dr d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_1^2 d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)d\theta=\frac{7}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{14}{3}\pi$$

bulunur.

ÖRNEK : B bölgesi $2x^2-2xy+y^2=5$ elipsi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\begin{cases}x=2u+v\\ y=3u-v\end{cases}$$



dönüşümü yardımıyla

$$I=\iint_B\sqrt{2x^2-2xy+y^2}\;dxdy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $2x^2-\ 2xy+y^2=5$

denkleminde

$x=2u+v,$

$y=3u-v$

yazılırsa

$2\,(2u+v)^2-\ 2\,(2u+v)\,(3u-v)+(3u-v)^2=5$

$\Rightarrow\ 5\,(u^2+v^2)=5$

$\Rightarrow\ u^2+v^2=1$

çemberi bulunur.

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5$$

olduğundan

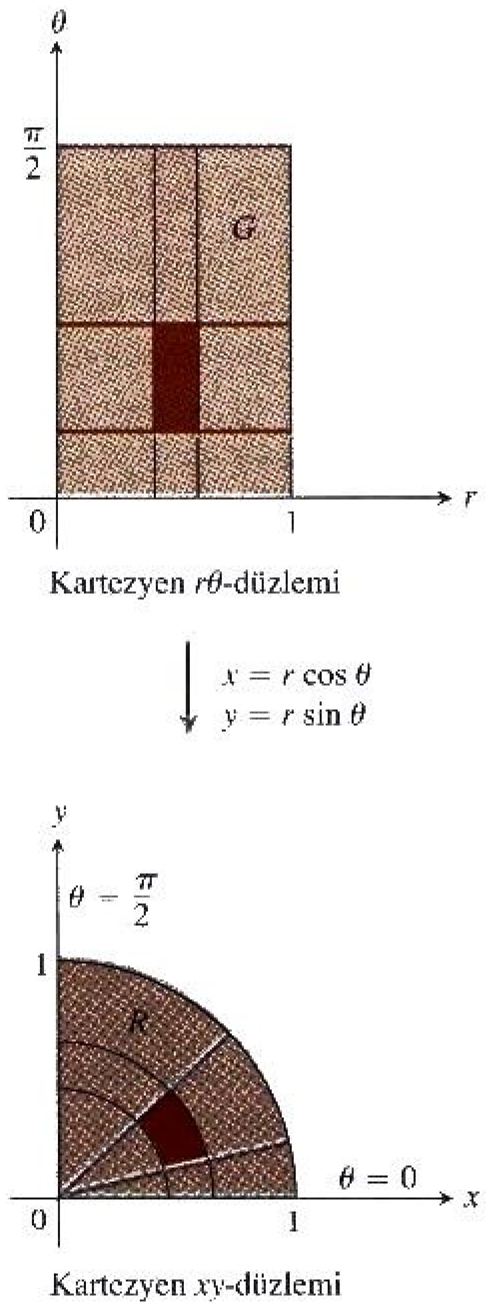
$$I=\iint_B\sqrt{2x^2-2xy+y^2}\;dxdy=\iint_D\sqrt{5\,(u^2+v^2)}\;5\;du\,dv$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$I=5\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r.r\;dr\;d\theta=5\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\theta=\frac{5\sqrt{5}}{3}\cdot 2\pi$$

$$=\frac{10}{3}\sqrt{5}\,\pi$$

bulunur.



ŞEKİL 15.48 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür.

(3) denkleminin sağ tarafındaki integralin, $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$'nın kutupsal koordinat düzleminde bir bölgede integrali olmadığına dikkat edin. $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ve r'nin çarpımının, *Kartezyen* $r\theta$-düzleminde bir G bölgesindeki integralidir.

Aşağıda başka bir değişken dönüşümünün örneği vardır.

ÖRNEK 1 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

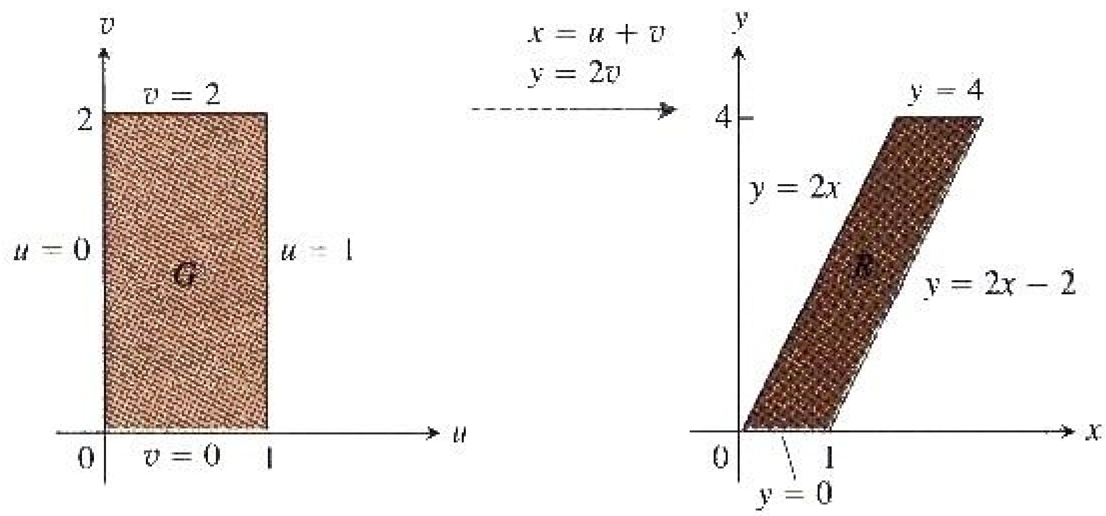
$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy$$

integralini

$$u = \frac{2x-y}{2}, \qquad v = \frac{y}{2} \tag{4}$$

dönüşümünü uygulayarak ve uv-düzleminde uygun bir bölgede integre ederek hesaplayın.

Çözüm xy-düzlemindeki R integrasyon bölgesini çizer ve sınırlarını belirleriz (Şekil 15.49).



ŞEKİL 15.49 $x = u + v$ ve $y = 2v$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür. Dönüşümü $u = (2x - y)/2$ ve $v = y/2$ denklemleriyle tersine çevirmek R'yi G'ye dönüştürür (Örnek 1).

(1) denklemini uygulamak için, karşılık gelen uv-bölgesi G'yi ve dönüşümün Jakobiyenini bulmamız gerekir. Bunları bulmak için, (4) denklemlerinden x ve y'yi u ve v cinsinden çözeriz. Kısa bir hesaplama

$$x = u + v \qquad y = 2v \tag{5}$$

verir. Bu ifadeleri R'nin sınırlarının denklemlerinde yerine koyarak G'nin sınırlarını buluruz (Şekil 15.49).

R'nin sınırlarının xy-denklemleri	**G'nin sınırlarının karşılık gelen uv-denklemleri**	**Basitleştirimiş uv-denklemleri**
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

Dönüşümün Jakobiyeni (yine (5) denklemlerinden)

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

bulunur. Artık (1) denklemini uygulamak için her şeye sahibiz:

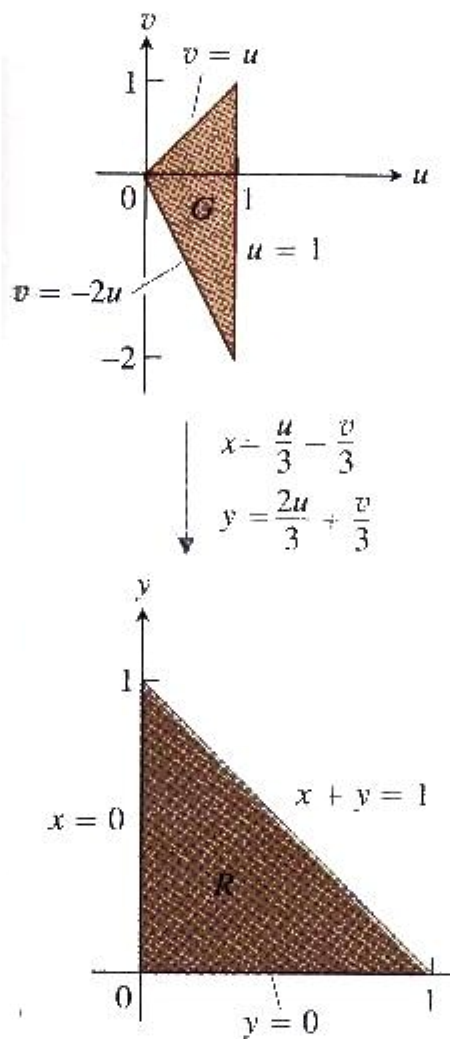
$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy = \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u\,|J(u, v)|\, du\, dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2)\, du\, dv = \int_0^2 \Big[u^2\Big]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2$$

ÖRNEK 2 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\, dy\, dx$$



ŞEKİL 15.50 $x = (u/3) - (v/3)$ ve $y = (2u/3) + (v/3)$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür. Dönüşümü $u = x + y$ ve $v = y - 2x$ denklemleriyle tersine çevirmek, R'yi G'ye dönüştürür (Örnek 2).

Çözüm xy-düzlemindeki integrasyon bölgesi R'yi çizer ve sınırları belirleriz (Şekil 15.50). İntegrand, $u = x + y$ ve $v = y - 2x$ dönüşümünü önerir. Biraz cebir, x ve y'yi u ve v cinsinden verir:

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \qquad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}$$

(6) denklemlerinden uv-bölgesi'nin sınırlarını bulabiliriz (Şekil 15.50).

R'nin sınırlarının xy-denklemleri	G'nin sınırlarının karşılık gelen uv-denklemleri	Basitleştirimiş uv-denklemleri
$x + y = 1$	$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$	$u = 1$
$x = 0$	$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$	$v = u$
$y = 0$	$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$	$v = -2u$

(6) denklemindeki dönüşümün Jakobiyeni

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

(1) denklemini uygulayarak, integrali hesaplarız:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 |J(u,v)|\,dv\,du$$

$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv\,du = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{v=-2u}^{v=u} du$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,du = \int_0^1 u^{7/2}\,du = \frac{2}{9}u^{9/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Üç Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Bölüm 15.6'daki silindirik ve küresel koordinat dönüşümleri, üç katlı integrallerdeki değişkenlerin değişimlerini, üç boyutlu bölgelerin dönüşümleri olarak resimleyen bir dönüşüm yönteminin özel durumlarıdır. Yöntem, şimdi iki yerine üç boyutta çalışmamızın dışında, iki katlı integrallerdeki yöntem gibidir.

uvw-uzayındaki bir G bölgesinin xyz-uzayındaki bir D bölgesine, Şekil 15.51'de önerildiği gibi,

$$x = g(u, v, w), \qquad y = h(u, v, w), \qquad z = k(u, v, w)$$

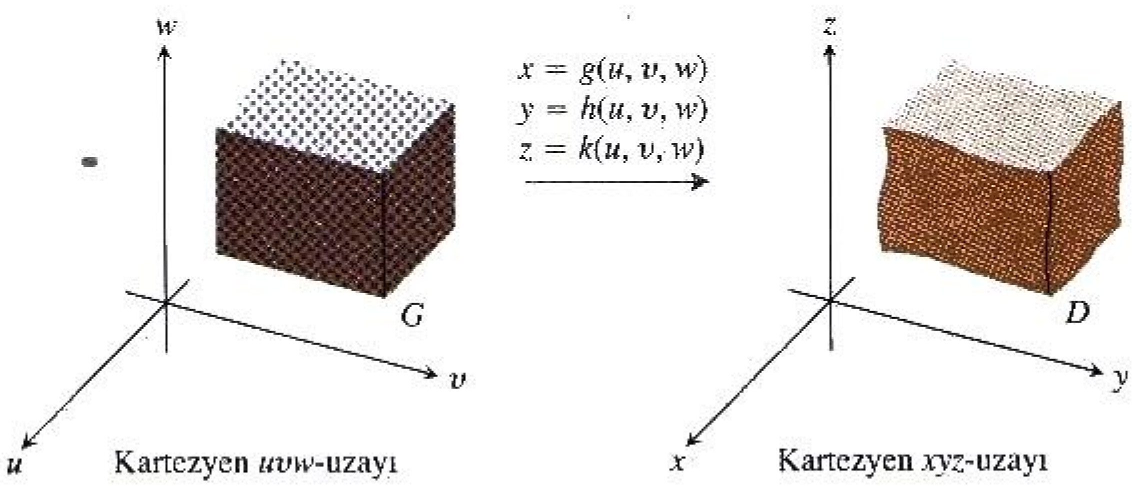
formundaki diferansiyellenebilir denklemlerle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayın. Bu durumda, D üzerinde tanımlı herhangi bir $F(x, y, z)$ fonksiyonu G üzerinde tanımlı bir

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

fonksiyonu olarak düşünülebilir. g, h ve k'nin birinci mertebe kısmi türevleri var ve sürekli iseler, $F(x, y, z)$'nin D üzerindeki integrali $H(u, v, w)$'nun G üzerindeki integraline

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(u, v, w)\,|J(u, v, w)|\,du\,dv\,dw \qquad (7)$$

denklemiyle bağlıdır.

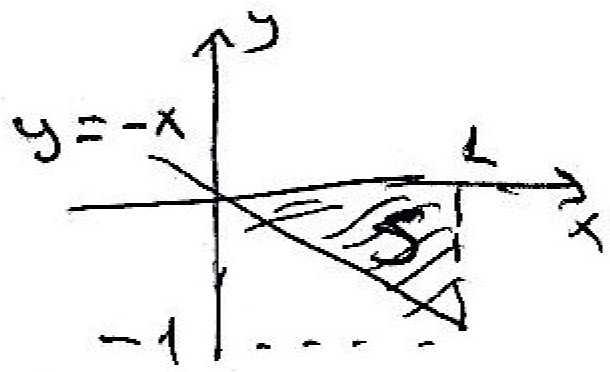


ŞEKİL 15.51 $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ ve $z = k(u, v, w)$ denklemleri Kartezyen xyz-uzayının bir D bölgesindeki bir integrali Kartezyen uvw-uzayının bir G bölgesindeki bir integrale dönüştürmemizi sağlar.

ALAN HESABI

R bölgesinin **alanı**

$$A = \iint_R dA$$

1) 

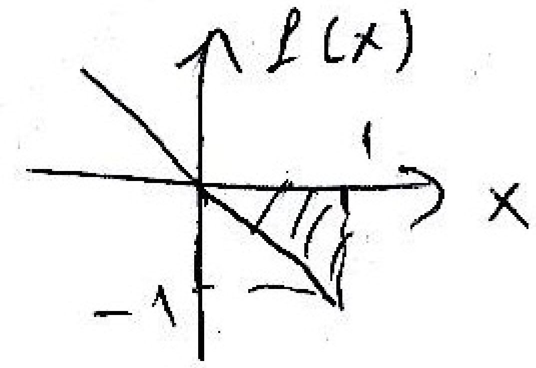
$S = ?$

$$S = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=-x}^{y=0} dy\,dx = \int_0^1 y \Big|_{-x}^{0} dx$$

$$= \int_0^1 (0-(-x))\,dx = \int_0^1 x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

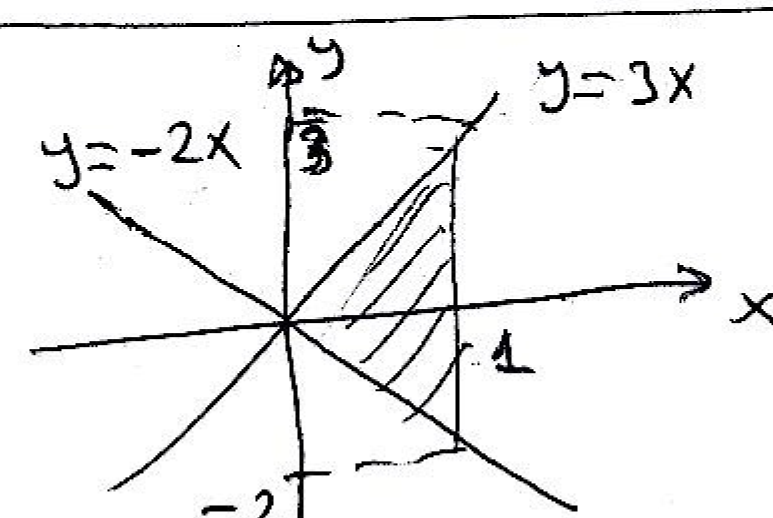
Tek degiskenli fonksiyonlarda alan negatif olabilir.



$$\int_{x=0}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 (-x)\,dx = -\int_0^1 x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

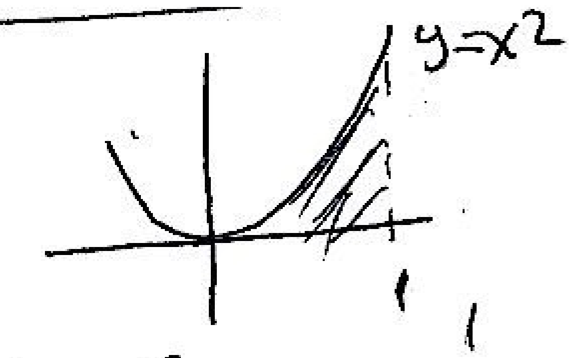
Çift katlı integral ile alan hesabında alan devamlı (+) çıkar. (

3) 

$$S = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-2x}^{y=3x} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} y \Big|_{-2x}^{3x} dx$$

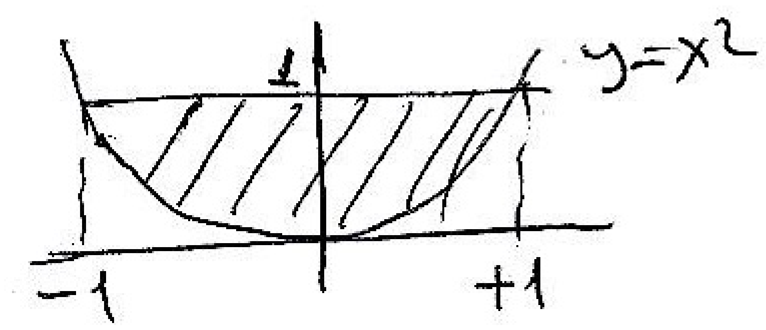
$$= \int_0^1 [3x - (-2x)]\,dx = \int_0^1 5x\,dx$$

$$= 5\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 5\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$$

4) 

$$S = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 y \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

5) 

$$\int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} dy\,dx = \int_{-1}^{1} y \Big|_{x^2}^{1} dx$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

14.3 İKİ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

İki katlı integrallerin Fizik, Matematik, İstatistik ve Mühendisliklerde çeşitli uygulamaları vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını vereceğiz.

ALAN HESABI

İki katlı integral tanımlanırken $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint\limits_B dxdy$

olduğu verilmişti. Her $(x, y) \in B$ için $f(x, y) \equiv 1$ olarak tanımlanırsa yukardaki eşitlik

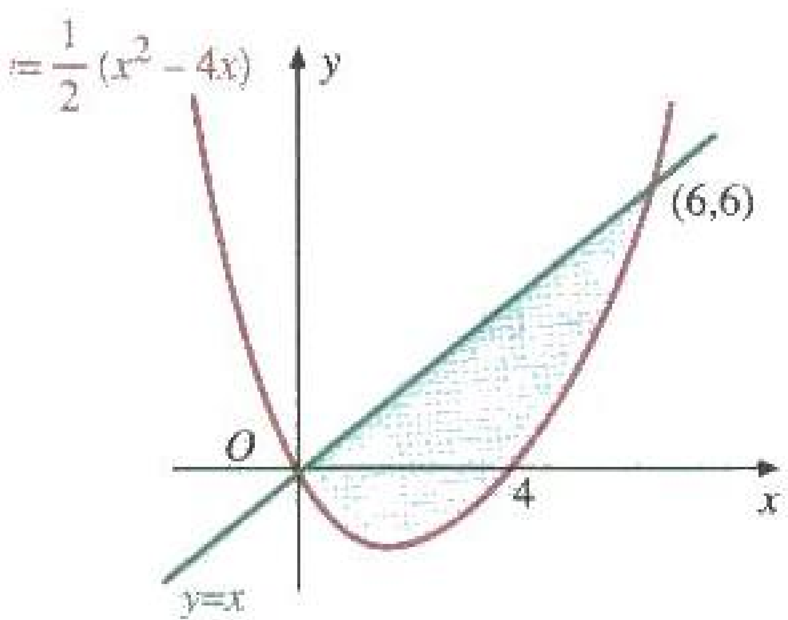
$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_B dxdy$$

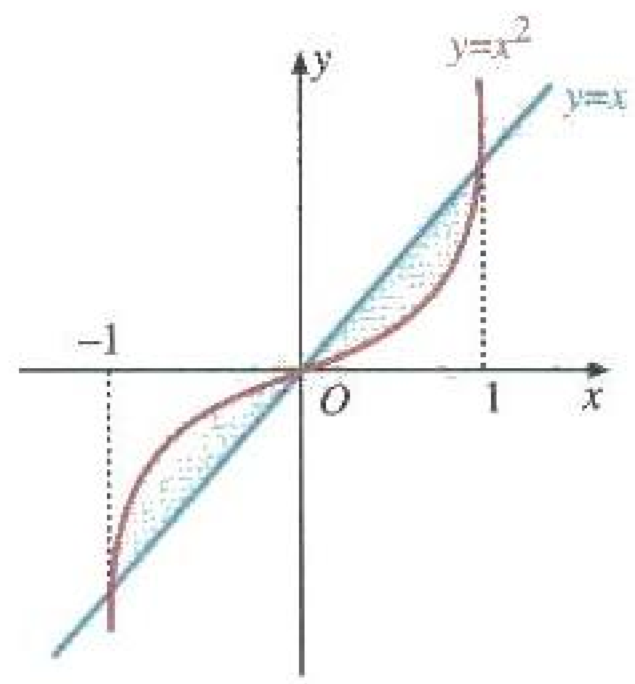
şeklini alır. Parçalanma nasıl yapılırsa yapılsın ΔA_k alanlarının toplamı B bölgesinin alanı olacağından

$$\text{Alan}(B) = \iint_B dxdy \qquad (14.2)$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından

$$\text{Alan}(B) = \iint_B rdrd\varphi \quad \text{bulunur.} \qquad (14.3)$$





ÖRNEK : $2y = x^2 - 4x$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm : Söz konusu bölge yandaki şekilde taralı olarak gösterilmiştir. Bu bölge bir düşey basit bölge olduğundan, integrali önce y, sonra x değişkenine göre almakta yarar vardır. Buna göre A alanı

$$A = \int_0^6 \int_{\frac{1}{2}(x^2-4x)}^{x} dydx = \int_0^6 y \Big|_{\frac{1}{2}(x^2-4x)}^{x} dx = \int_0^6 \left(x - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^6 = 54 - 36 = 18 \qquad \text{birimkare olur.}$$

ÖRNEK : $y = x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

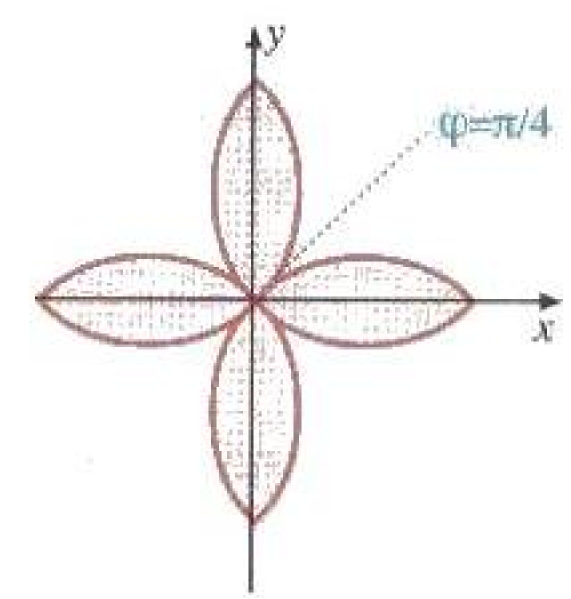
Çözüm : Alanı istenen bölge yanda gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, söz konusu bölge iki basit bölgeden meydana gelmiştir.

Dolayısıyla

$$A = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dydx + \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dydx = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x\right)dx + \int_0^1 (x - x^3)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ÖRNEK : $r = a\cos 2\varphi$ dört yapraklı gül eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : $A = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\cos 2\varphi} rdrd\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{a\cos 2\varphi} d\varphi$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 + \cos 4\varphi)d\varphi$$

$$= 2a^2\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\pi a^2$$

birimkare olur.

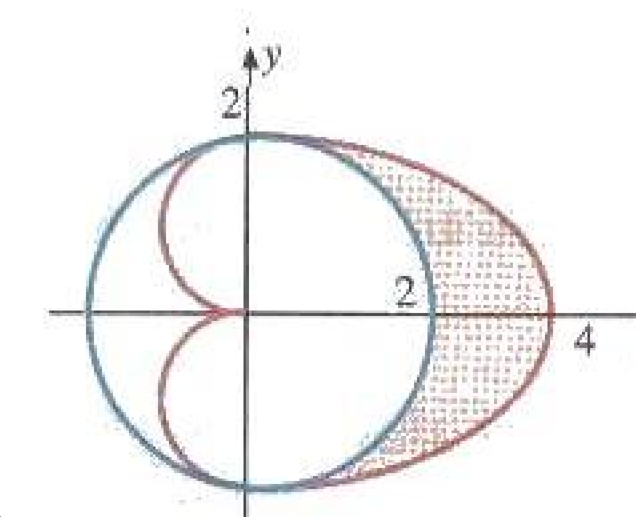
ÖRNEK : $r = 2$ çemberinin dışında, $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Alanı istenen bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Bu bölgede alınan herhangi bir (r, φ) noktasının koordinatları

$$2 \le r \le 2(1 + \cos\varphi) \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

eşitliklerini sağlarlar. Bölgenin kutup eksenine (Ox– eksenine) göre simetrik olduğu da gözönüne alınırsa

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\varphi)} rdrd\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\varphi)} rdrd\varphi$$



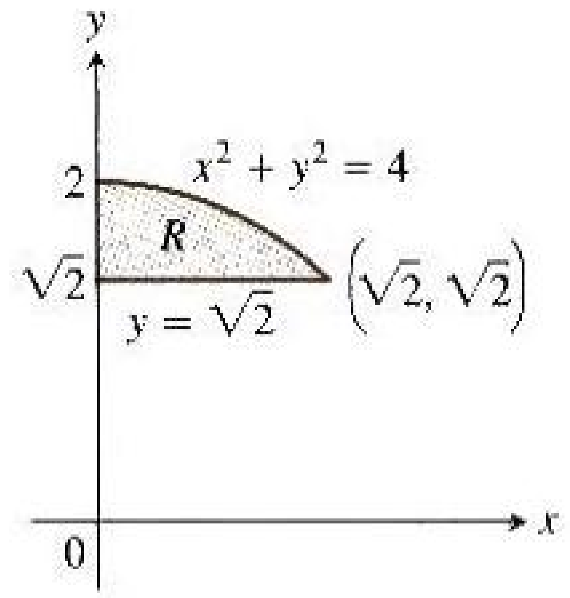
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_2^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = 4\left(2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

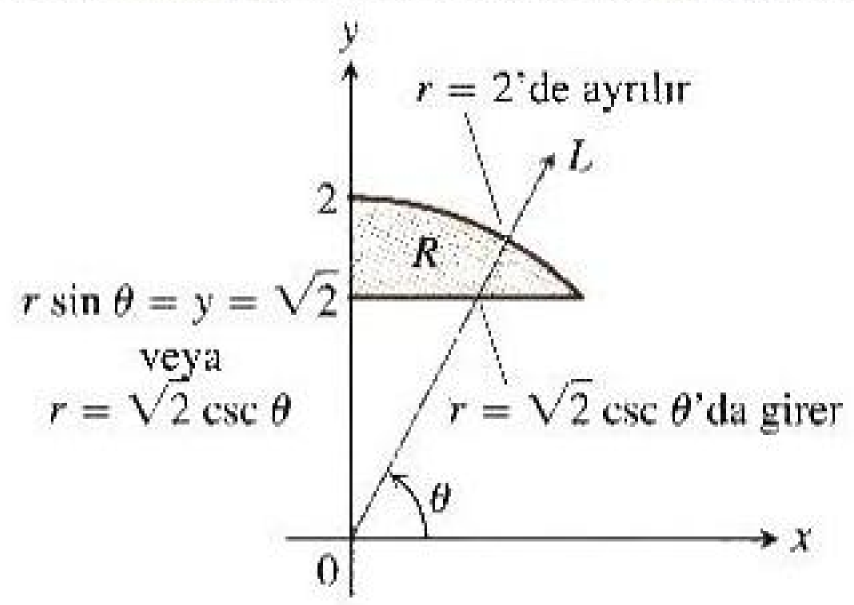
$= \pi + 8$ birimkare olur.

KUTUPSAL KOORDINATLARDA INTEGRASYON YONU

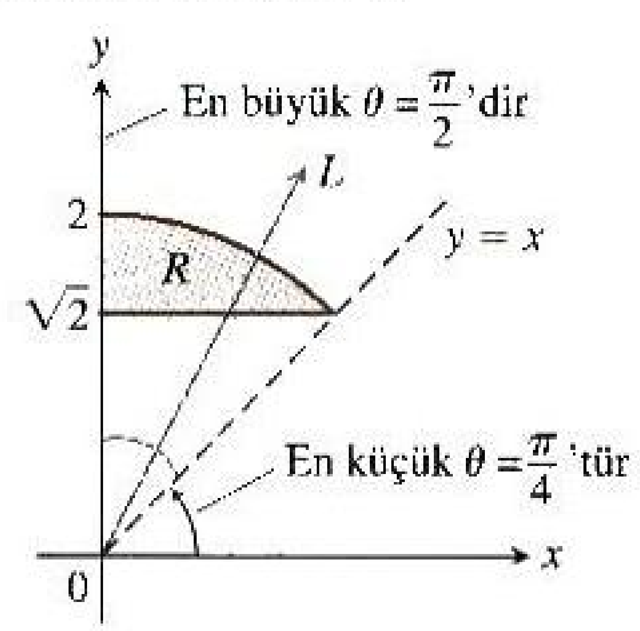
1. *Bir çizim:* Bölgeyi çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun r-sınırlarını bulun*: Orijinden geçen ve R'yi artan r yönünde kesen bir L ışını düşünün L'nin R'ye girdiği ve çıktığı r-değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun r-sınırlarıdır. Genellikle L'nin pozitif x-ekseniyle yaptığı θ açısına bağlıdırlar.



3. *İntegrasyonun θ-sınırlarını bulun*: R'yi sınırlayan en büyük ve en küçük θ-değerlerini bulun. Bunlar integrasyonun θ-sınırlarıdır.



İntegral

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

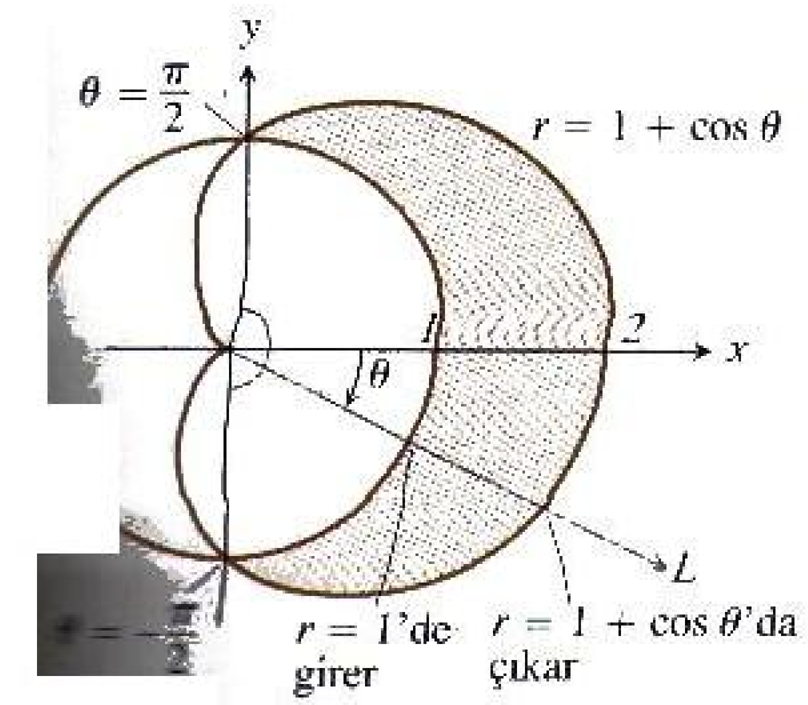
olur.

ÖRNEK 1 İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

$r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan R bölgesinde $f(r, \theta)$'yı integre etmek için integrasyon sınırlarını bulun.

Çözüm

1. Önce bölgeyi çizer ve sınırlayıcı eğrileri belirtiriz (Şekil 15.23).
2. Sonra *integrasyonun r-sınırlarını* buluruz. Orijinden çıkan tipik bir ışın $r = 1$'de R'ye girer ve $r = 1 + \cos\theta$'da çıkar.



ŞEKİL 15.23 Örnek 1'deki bölge için kutupsal koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulmak..

3. Son olarak *integrasyonun θ-sınırlarını* buluruz: Orijinden çıkarak R'yi kesen ışınlar $\theta = -\pi/2$' den $\theta = \pi/2$'ye kadar değişir. İntegral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

olur.

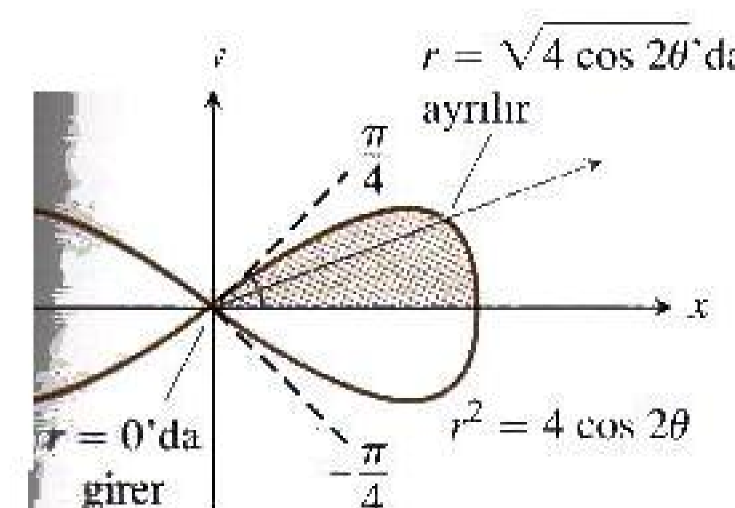
$f(r, \theta)$, değeri 1 olan sabit fonksiyon ise, f'nin R üzerindeki integrali R'nin alanıdır.

> **Kutupsal Koordinatlarda Alan**
> Kutupsal koordinat düzleminde kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin alanı
>
> $$A = \iint_R r\, dr\, d\theta$$
>
> ile bulunur.

Bu alan formülü, ispatlamayacağımız halde, daha önceki bütün formüllerle uyumludur.

ÖRNEK 2 Kutupsal Koordinatlarda Alan Bulmak

$r^2 = 4\cos 2\theta$ fiyonguyla çevrelenen bölgenin alanını bulun.



ŞEKİL 15.24 *Renkli bölge üzerinde integral almak için,* r'yi 0'dan $\sqrt{4\cos 2\theta}$ 'ya ve θ'yı da 0'dan $\pi/4$'e götürürüz (Örnek 2).

Çözüm İntegrasyon sınırlarını belirlemek için fiyongu çizer (Şekil 15.24) ve simetriden dolayı toplam alanın, birinci dörtte bir bölgedeki kısmın 4 katı olduğunu görürüz.

$$A = 4\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta = 4\sin 2\theta \Big]_0^{\pi/4} = 4 \quad ■$$

Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Çevirmek

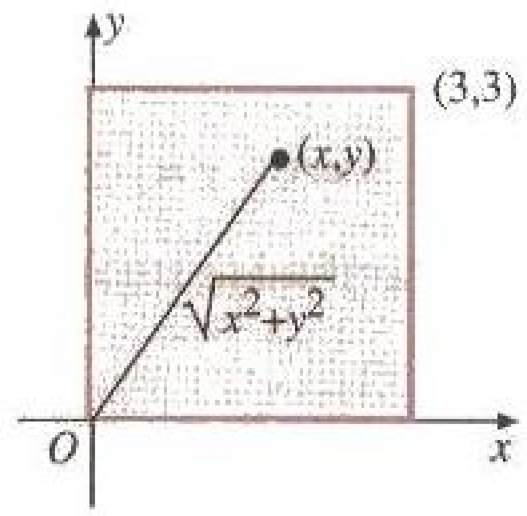
Kartezyen bir $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ integralini kutupsal bir integrale çevirme prosedürünün iki adımı vardır. Önce $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazın ve Kartezyen integraldeki $dx\, dy$ yerine $r\, dr\, d\theta$ koyun. Sonra R'nin sınırı için kutupsal integrasyon sınırlarını bulun.

Bu durumda Kartezyen integral, G kutupsal koordinatlardaki integrasyon bölgesini belirtmek üzere,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

halini alır. Bu, Bölüm 5'teki değişken değiştirme yöntemi gibidir. Yalnız bu defa bir yerine değiştirilmesi gereken iki değişken vardır. $dx\, dy$ yerine, $dr\, d\theta$ değil, $r\, dr\, d\theta$ yazıldığına dikkat edin. Katlı integrallerde değişken dönüşümünün (yerine koyma) daha genel bir incelemesi Bölüm 15.7'de verilmiştir.

kutle hesabi



$$M = \iint_B \sigma(x, y)\, dx\, dy \qquad (14.5)$$

bulunur.

ÖRNEK : Bir kenarının uzunluğu 3 birim olan kare şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın karenin bir köşesine olan uzaklığının karesi ile orantılı olarak değişmektedir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

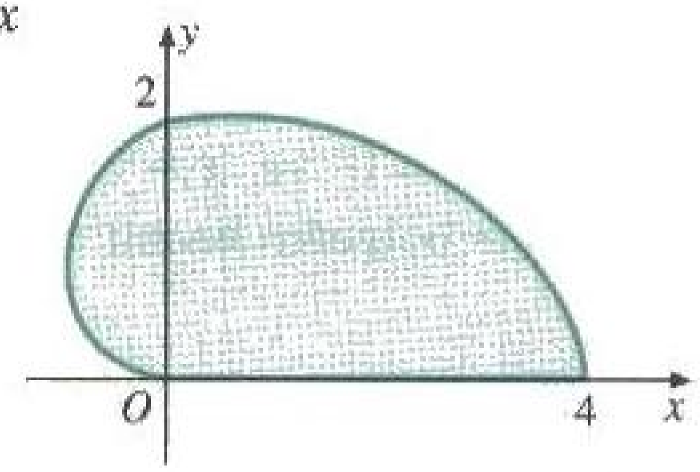
Çözüm : Karenin sözkonusu köşesini orijin, bu köşeden çıkan iki kenarı da koordinat eksenleri olarak alalım. k orantı katsayısı olmak üzere

$\sigma(x, y) = k(x^2 + y^2)$ olacağından

$$M = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{3} k\left(x^2+y^2\right) dy dx = k \int_0^3 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 dx$$

$$= k \int_0^3 \left(3x^2+9\right) dx = k\left(x^3+9x\right)\Big|_0^3 = 54\,k$$

bulunur.



ÖRNEK : $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısına yerleştirilen ve yoğunluğu, her noktada o noktanın orijine olan uzaklığı ile orantılı olan bir levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm : Verilen levha yandaki şekilde gösterilmiştir. $\sigma = kr$ olacağından

$$M = \int_0^{\pi} \int_0^{2(1+\cos\varphi)} kr.rdrd\varphi = k \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi$$

$$= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 d\varphi = \frac{8}{3} k \int_0^{\pi} (1 + 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + \cos^3\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi} \left[1 + 3\cos\varphi + 3\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\right] d\varphi$$

$$= \frac{8}{3} k \left[\varphi + 3\sin\varphi + \frac{3}{2}\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{8}{3} k \left(\frac{5}{2}\pi\right) = \frac{20}{3}\, k\pi$$

olur.

ÖRNEK : 3 cm yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın daire merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde yoğunluk 6 olduğuna göre bu levhanın kütlesini bulunuz.

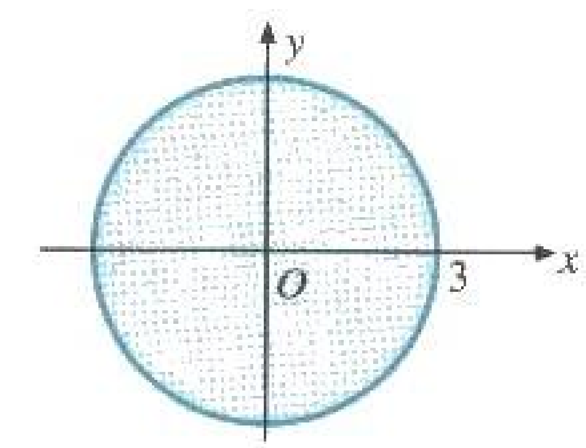
Çözüm : (x, y) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ dir.

$x^2 + y^2 = 9$ için $\sigma(x, y) = 6$ olduğundan

$6 = k\sqrt{9} \Rightarrow 6 = 3k \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \sigma(x, y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ dır. Buna göre

$$M = \iint_B \sigma(x,y) dxdy = \iint_B 2\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 r.rdrd\varphi = 2\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^3 d\varphi = 18\int_0^{2\pi} d\varphi = 36\pi$$



olur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

(x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y)$ olan ve $x\,o\,y$ düzleminde bir B bölgesine yerleştirilen bir levhayı gözönüne alalım. B bölgesinin bir parçalanması $P = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ ve (x_k^*, y_k^*) da B_k bölgesinde bir nokta olsun. B_k bölgesinde bulunan levhanın kütlesi, yaklaşık olarak $\sigma(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ kadardır. Burada ΔA_k, B_k bölgesinin alanını göstermektedir. Bu kütleyi (x_k^*, y_k^*) noktasına toplanmış gibi düşünebiliriz. Böyle noktalara **kütlesel nokta** adı verilir.

Bilindiği gibi, bir kütlesel nokta sistemin ağırlık merkezinin $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ koordinatları

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k\,\sigma(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k\,\sigma(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k}$$

biçiminde tanımlanır. $\sigma(x, y)$ sürekli olduğunda, yukarıdaki toplamlar birer integral toplam olup $\|P\| \to 0$ için B üzerinde iki katlı integrale yaklaşır. Buna göre,

$$\bar{x} = \frac{\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dA}{\iint_B \sigma(x,y)\,dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_B y\,\sigma(x,y)\,dA}{\iint_B \sigma(x,y)\,dA} \tag{14.6}$$

olur. Paydadaki integraller levhanın kütlesi olduğundan

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_B y\,\sigma(x,y)\,dA \tag{14.7}$$

yazılabilir.

Eğer levhanın kütlesi sabit σ değerine eşit, yani levha homogen ise, $M = k.A$ ve $\iint_B xkdxdy = k\iint_B xdxdy$ olacağından

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_B x\,dxdy, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_B y\,dxdy \tag{14.8}$$

olur. Burada A, levhanın alanını göstermektedir.

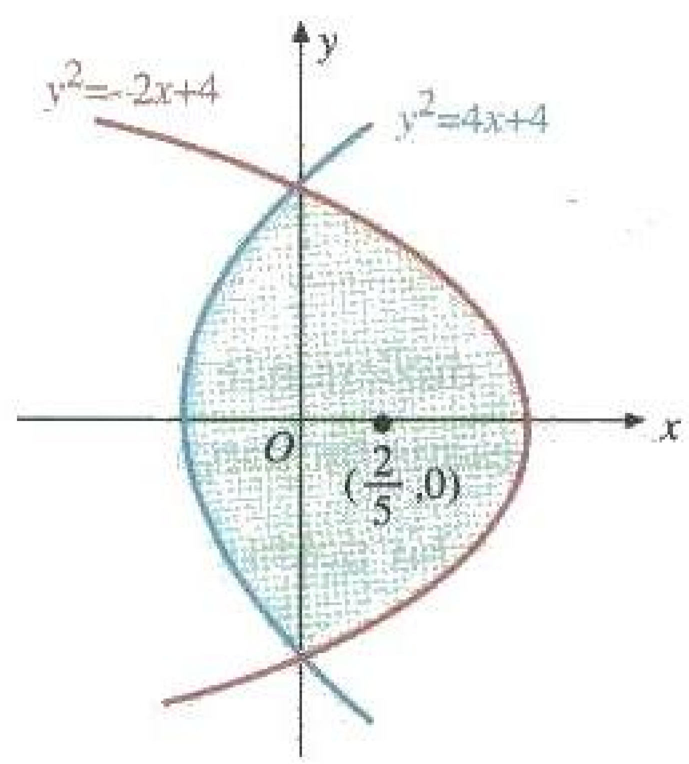
ÖRNEK : $y^2 = 4x + 4$ ve $y^2 = -2x + 4$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm : Once levhanın alanını bulalım.

$$A = \int_{-2}^{2}\int_{\frac14(y^2-4)}^{\frac12(4-y^2)} dxdy = 2\int_0^2 \int_{\frac14(y^2-4)}^{\frac12(4-y^2)} dxdy = 2\int_0^2 x\,\Big|_{\frac14(y^2-4)}^{\frac12(4-y^2)} dy$$

$$= \int_0^2\left(6 - \frac{3}{2}y^2\right)dy = 6y - \frac{1}{2}y^3\,\Big|_0^2 = 8\ \text{br}^2$$

bulunur.



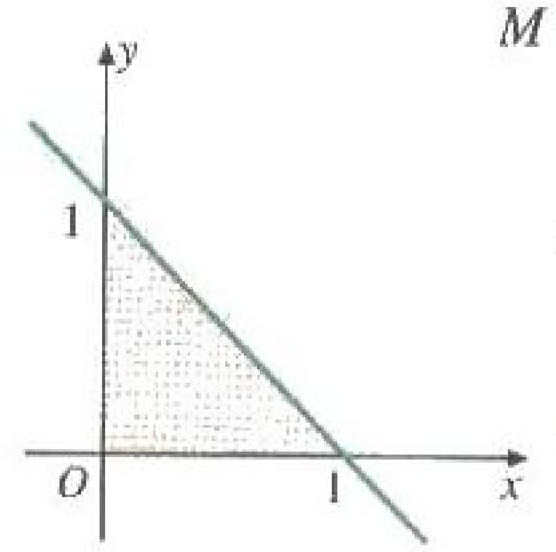
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_B xdxdy = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\int_{\frac14(y^2-4)}^{\frac12(4-y^2)} x\,dxdy = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\,\Big|_{\frac14(y^2-4)}^{\frac12(4-y^2)} dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{16}y^4 - \frac{3}{2}y^2 + 3\right)dy = \frac{2}{5}$$

olur. Bölge Ox– eksenine göre simetrik ve levha homogen olduğundan $\bar{y} = 0$ olacaktır. O halde ağırlık merkezi $M\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ noktasıdır.

ÖRNEK : $x = 0$, $y = 0$ ve $x + y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan üçgensel bölge içine yerleştirilen bir levhanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu o noktanın koordinatları çarpımına eşittir. Bu levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :



$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dxdy = \iint_B xydxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} xydydx$$

$$= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\,\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

olur. Buna göre

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dxdy = 24\int_0^1\int_0^{1-x} x.xydydx$$

$$= 24\int_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2\,\Big|_0^{1-x} dx = 12\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx$$

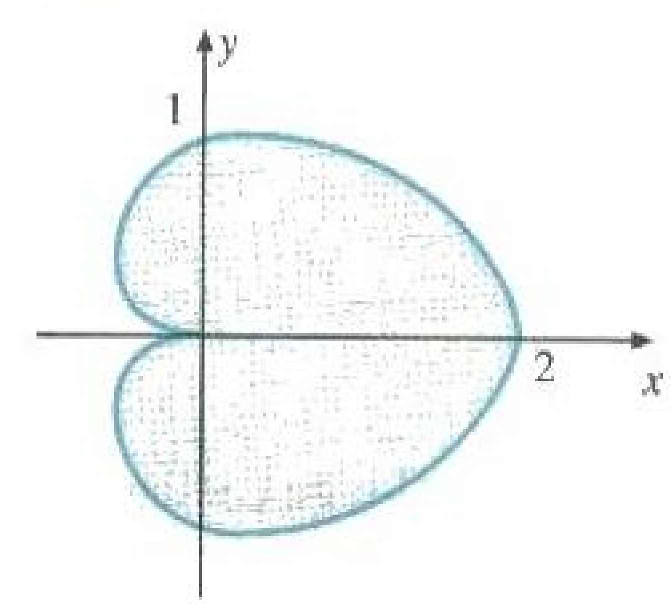
$$= 12\int_0^1\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)dx = 12\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

bulunur. Benzer şekilde $\bar{y} = \frac{2}{5}$ olduğu gösterilebilir. Buna göre verilen levhanın ağırlık merkezi $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ noktasıdır.

ÖRNEK : $r = 1 + \cos\varphi$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu, o noktanın orijine (kutba) olan uzaklığıyla ters orantılıdır. Levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm : $\sigma(x, y) = k\,.\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ olacağından, levhanın kütlesi



$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} drd\varphi$$

$$= k\int_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)\,d\varphi = k(\varphi + \sin\varphi)\,\Big|_0^{2\pi} = 2k\pi$$

olur. Buna göre

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} r\cos\varphi\,\frac{k}{r}\,rdrd\varphi$$

$$= \frac{1}{2k\pi} k \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \cos\varphi \, dr d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + \cos^3\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos\varphi + (1+\cos 2\varphi) + \left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi\right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\sin\varphi + \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi = \frac{1}{2}$$

bulunur.

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint y \, \sigma(x,y)\, dxdy = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} r\sin\varphi \frac{k}{r} r dr d\varphi$$

$$= \frac{k}{2k\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\,\frac{(1+\cos\varphi)^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0$$

olacağından, ağırlık merkezi $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasıdır.

Kütle ve birinci moment formülleri.

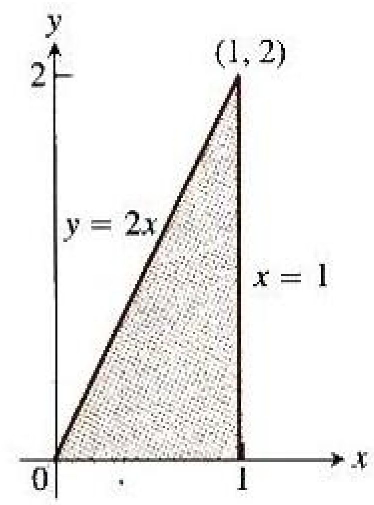
Kütle: $M = \iint_R \delta(x, y)\, dA$ $\quad \delta(x, y)$, (x, y)'deki yoğunluktur.

Birinci momentler: $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA, \qquad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$

Kütle merkezi: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

ÖRNEK 4 Değişken Yoğunluklu İnce Bir Plakanın Kütle Merkezini Bulmak

İnce bir plaka, birinci dörtte bir bölgede x-ekseni ile $x = 1$ ve $y = 2x$ doğrularının sınırladığı üçgensel bölgeyi kaplamaktadır. (x, y) noktasında plakanın yoğunluğu $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$'dır. Plakanın kütlesini ve koordinat eksenleri etrafındaki birinci momentleri ile kütle merkezini bulun.



ŞEKİL 15.17

Çözüm Plakayı çizer ve hesaplamamız gereken integrallerin integrasyon sınırlarını belirleyecek kadar detay ekleriz (Şekil 15.17).

Plakanın kütlesi

$$M = \int_0^1\int_0^{2x} \delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y\right]_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\, dx = \left[8x^3 + 6x^2\right]_0^1 = 14$$

olarak bulunur.

x-ekseni etrafındaki birinci moment

$$M_x = \int_0^1\int_0^{2x} y\delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)\, dx$$

$$= \left[7x^4 + 4x^3\right]_0^1 = 11 \qquad \text{olur.}$$

Benzer bir hesaplama, y-ekseni etrafındaki momenti verir:

$$M_y = \int_0^1\int_0^{2x} x\delta(x, y)\, dy\, dx = 10.$$

Dolayısıyla kütle merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14} \qquad \text{olur.}$$

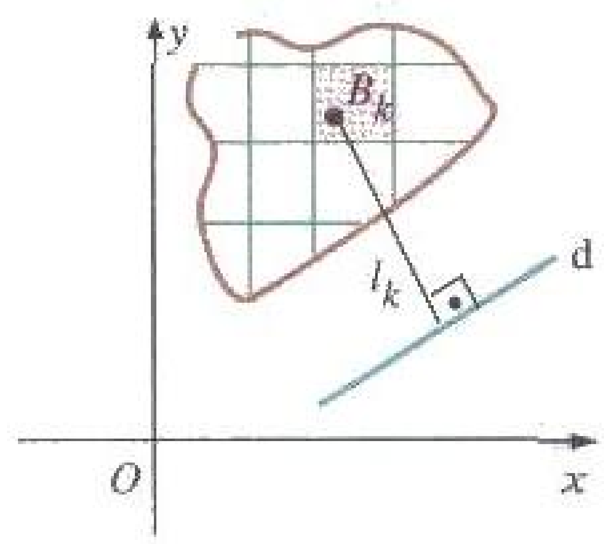
EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

Bir noktasal kütlenin bir eksene göre eylemsizlik momenti, o noktanın kütlesi ile eksene olan uzaklığının karesi çarpımıdır. Bir nokta sisteminin bir eksene göre eylemsizlik momenti de, sistemdeki noktaların eylemsizlik momentlerinin toplamına eşittir.

Bir B bölgesine yerleştirilmiş bir levhanın $\sigma(x, y)$ yoğunluğu sürekli olsun. B bölgesi B_1, B_2, ..., B_n gibi alt bölgelere ayrıldığında levha da n tane parçaya ayrılmış olur. $P_k(x_k^*, y_k^*)$, B_k bölgesinin herhangi bir noktasını ve ΔA_k, B_k bölgesinin alanını göstersin.

$P_k(x_k^*, y_k^*)$ noktasının d eksenine olan uzaklığını l_k ile gösterelim. B_k bölgesindeki levhanın kütlesi, yaklaşık olarak, $m_k = \sigma(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ olacaktır. Dolayısıyla B_k bölgesindeki levha parçasının d eksenine göre eylemsizlik momenti $\sigma(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \cdot l_k^2$ olacaktır. Buna göre tüm levhanın d eksenine göre eylemsizlik momenti, yaklaşık olarak,

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k^*, y_k^*)\, l_k^2\, \Delta A_k$$



olur. Eğer parçalanma, normu sıfıra gidecek şekilde yapılırsa levhanın I_d eylemsizlik momenti

$$I_d = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k^*, y_k^*)\, l_k^2\, \Delta A_k$$

olacaktır. Sağdaki limit $\iint_B \sigma(x, y)\, l^2\, dxdy$ integrali olduğundan

$$I_d = \iint_B \sigma(x, y)\, l^2(x, y)\, dxdy \qquad (14.9)$$

bulunur. Bir $P(x, y)$ noktasının Ox– eksenine olan uzaklığı $|y|$, Oy– eksenine olan uzaklığı $|x|$ olduğundan, bir B levhasının Ox ve Oy– eksenlerine göre eylemsizlik momentleri, sırasıyla,

$$I_x = \iint_B \sigma(x, y)\, y^2\, dxdy \quad \text{ve} \quad I_y = \iint_B \sigma(x, y)\, x^2\, dxdy \quad \text{olur.} \qquad (14.10)$$

Bir noktaya göre eylemsizlik momenti de benzer şekilde tanımlanabilir. Burada l, $P(x, y)$ noktasının sözkonusu noktaya olan uzaklığıdır. Örneğin bir B levhasının $O(0, 0)$ noktasına göre eylemsizlik momenti, $l^2 = x^2 + y^2$ olduğundan,

$$I_0 = \iint_B (x^2 + y^2)\, \sigma(x, y)\, dxdy \qquad (14.11)$$

olacaktır. I_x ve I_y ifadeleri gözönüne alındığında

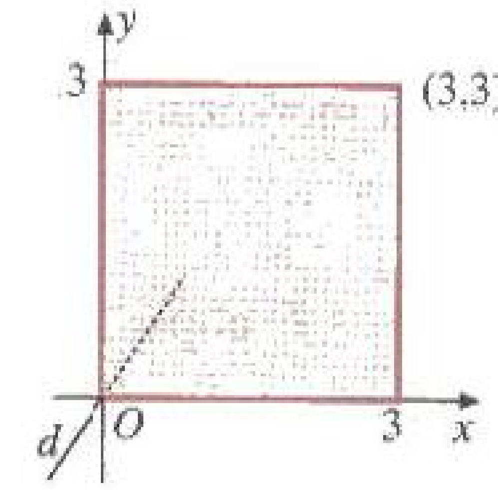
$I_0 = I_x + I_y$ yazılabilir.

ÖRNEK : Bir kenarının uzunluğu 3 birim olan kare şeklindeki homogen bir levhanın, karenin bir köşesinden geçen ve levha düzlemine dik olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

Çözüm : Söz konusu köşeyi orijin, bu köşeden geçen kenarları koordinat ekleri olarak alalım. Kare üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktasının adı geçen doğruya olan uzaklığı, o noktanın $O(0, 0)$ noktasına olan uzaklığından başka birşey değildir. Buna göre;

$$I_d = I_0 = \int_0^3 \int_0^3 (x^2 + y^2)\, dydx = \int_0^3 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right)\Big|_0^3 dx$$

$$= \int_0^3 (3x^2 + 9)\, dx = x^3 + 9x \Big|_0^3 = 54$$



olur. Levha homogen olduğundan $\sigma(x, y)$ sabittir. Bu durumda $\sigma(x, y) \equiv 1$ alınabilir.

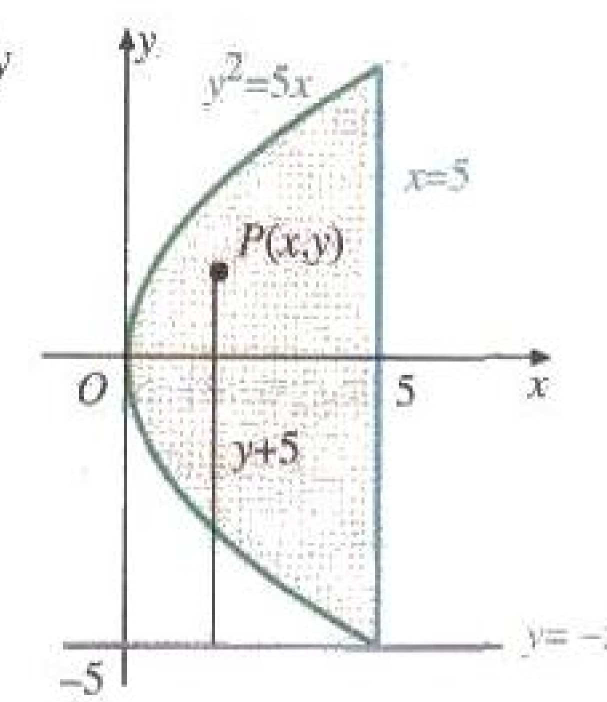
ÖRNEK : $y^2 = 5x$ parabolü ile $x = 5$ doğrusu tarafından sınırlanan homogen levhanın $y = -5$ ve $x = 5$ doğrularına göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

Çözüm : Levha üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktasının $y = -5$ doğrusuna olan uzaklığı $l = y + 5$ birimdir. $\sigma(x, y) = k$ olsun. Bu durumda

$$I_1 = k \int_{-5}^{5} \int_{y^2/5}^{5} (y + 5)^2\, dxdy = k \int_{-5}^{5} (y + 5)^2 \left(5 - \frac{y^2}{5}\right) dy$$

$$= \frac{1}{5} k \int_{-5}^{5} (625 + 250y - 10y^3 - y^4)\, dy = 1000\, k$$

olur.



Şimdi de verilen levhanın $x = 5$ doğrusuna göre eylen

Levha içinde alınan bir noktanın $x = 5$ doğrusuna olan uzaklığı $l = 5 - x$ olacağından

$$I_2 = k \int_0^5 \int_{-\sqrt{5x}}^{\sqrt{5x}} (5 - x)^2\, dydx = 2k \int_0^5 (5 - x)^2 \sqrt{5x}\, dx$$

$$= 2\sqrt{5}\, k \int_0^5 (25x^{1/2} - 10x^{3/2} + x^{5/2})\, dx$$

$$= 2\sqrt{5}\, k \left(\frac{50}{3} x^{3/2} - 4x^{5/2} + \frac{2}{7} x^{7/2}\right)\Big|_0^5$$

$$= \frac{4000}{21} k$$

bulunur.

yorsak, üçüncüyü otomatik olarak biliyoruz demektir (I_0 momentine bazen z- ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini temsil eden I_z de denir. Bu durumda, $I_z = I_x + I_y$ bağıntısına **Dik Eksen Teoremi** denir). ve

Jirasyon yarıçapı R_x

$$I_x = MR_x^2$$

denklemiyle tanımlanır. Plakanın tüm kütlesinin aynı I_x'i verecek şekilde x-ekseninden ne kadar uzakta yoğunlaştığını söyler. Jirasyon yarıçapı eylemsizlik momentini bir kütle ve bir uzunluk cinsinden ifade etmenin uygun bir yolunu verir. R_y ve R_0 yarıçapları aynı şekilde

$$I_y = MR_y^2 \quad \text{ve} \quad I_0 = MR_0^2$$

ile verilir. Eylemsizlik momentleri'nin (ikinci momentler) yanı sıra jirasyon yarıçaplarının formüllerini de veren Tablo 15.2'deki formülleri elde etmek için karekök alırız.

TABLO 15.2 xy-düzleminde ince plakalar için ikinci moment formülleri

Eylemsizlik momentleri (ikinci momentler):

x-ekseni etrafında: $I_x = \iint y^2\delta(x, y)\, dA$

y-ekseni etrafında: $I_y = \iint x^2\delta(x, y)\, dA$

Bir L doğrusu etrafında: $I_L = \iint r^2(x, y)\delta(x, y)\, dA,$

$r(x, y) = (x, y)$'den L'ye olan uzaklık

Orijin etrafında (kutupsal moment): $I_0 = \iint (x^2 + y^2)\delta(x, y)\, dA = I_x + I_y$

Jirasyon yarıçapı:

x-ekseni etrafında: $R_x = \sqrt{I_x/M}$

y-ekseni etrafında: $R_y = \sqrt{I_y/M}$

Orijin etrafında: $R_0 = \sqrt{I_0/M}$

ÖRNEK 5 Eylemsizlik Momentleri ve Jirasyon Yarıçapları Bulmak

Örnek 4'teki ince plaka için (Şekil 15.17), koordinat eksenleri ve orijin etrafındaki eylemsizlik momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulunuz.

Çözüm Örnek 4'te verilen $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ yoğunluk fonksiyonunu kullanarak x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\, dx \\ &= \left[8x^5 + 4x^4\right]_0^1 = 12 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

14.4 ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

G, xyz koordinat sisteminde bir bölge ve f de bu bölge üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $P = \{ G_1 , G_2 , \dots , G_n \}$, G bölgesinin bir parçalanması, (x_k^*, y_k^*, z_k^*) da G_k alt bölgesinin herhangi bir noktası olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\ \Delta V_k$$

ifadesine bir integral toplamı veya Riemann toplamı denir. Burada ΔV_k, G_k bölgesinin hacmını göstermektedir. $\|P\|$ sayısı $G_1 , G_2 , \dots , G_n$ alt bölgelerinin çaplarının en büyüğü olsun. Analiz ve İleri Matematik kitaplarında, f sürekli olduğunda $\|P\| \to 0$ için Riemann toplamının bir limitinin varolduğu bilinmektedir. Bu limite f nin G üzerindeki üç katlı integrali denir, $\iiint_G f(x, y, z)\, dV$ ile gösterilir. Buna göre

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\ \Delta V_k = \iiint_G f(x,y,z)\, dV$$

olur. Eğer G bölgesinin parçalanması, koordinat eksenlerine paralel düzlemlerle yapılırsa, ΔV_k hacmi $\Delta x_k \,.\, \Delta y_k \,.\, \Delta z_k$ olacağından, yukarıdaki integral

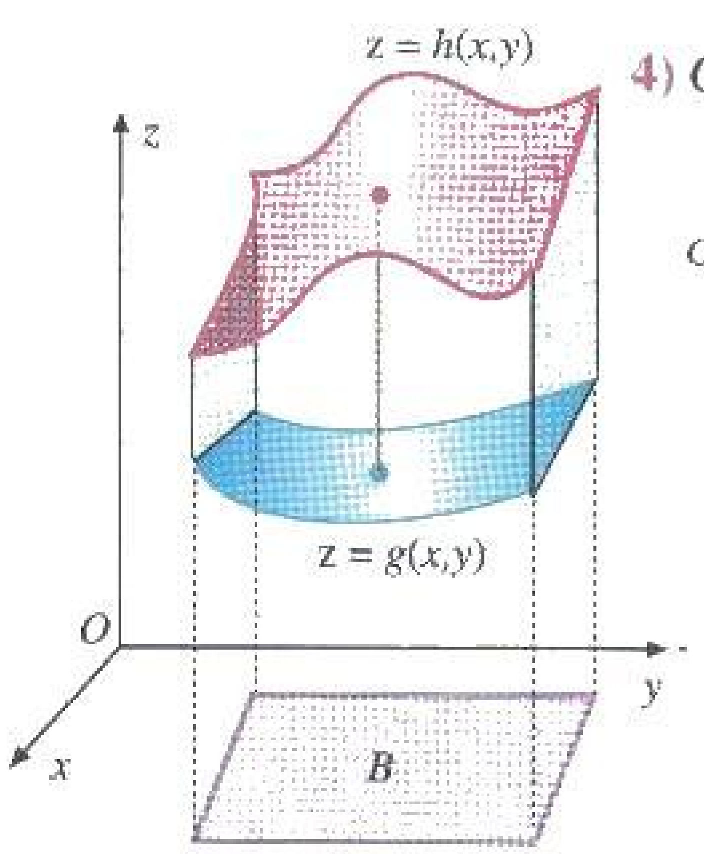
$\iiint_G f(x, y, z)\, dxdydz$ biçiminde de yazılabilir.

Σ toplam sembolünün ve limitin özelliklerinden yararlanarak, üç katlı integrallerin aşağıdaki özeliklere sahip olduğu kolayca gösterilebilir.

1) $\iiint_G k f(x, y, z)\, dV = k \iiint_G f(x, y, z)\, dV$

2) $\iiint_G [\, f(x, y, z) + g(x, y, z)\,]\, dV = \iiint_G f(x, y, z)\, dV + \iiint_G g(x, y, z)\, d$

3) G üzerinde $f(x, y, z) \geq 0$ ise $\iiint_G f(x, y, z)\, dV \geq 0$



4) G_1 ve G_2 iç bölgeleri ayrık iki bölge ise

$$\iiint_{G_1 \cup G_2} f(x,y,z)\, dV = \iiint_{G_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint_{G_2} f(x,y,z)\, dV$$

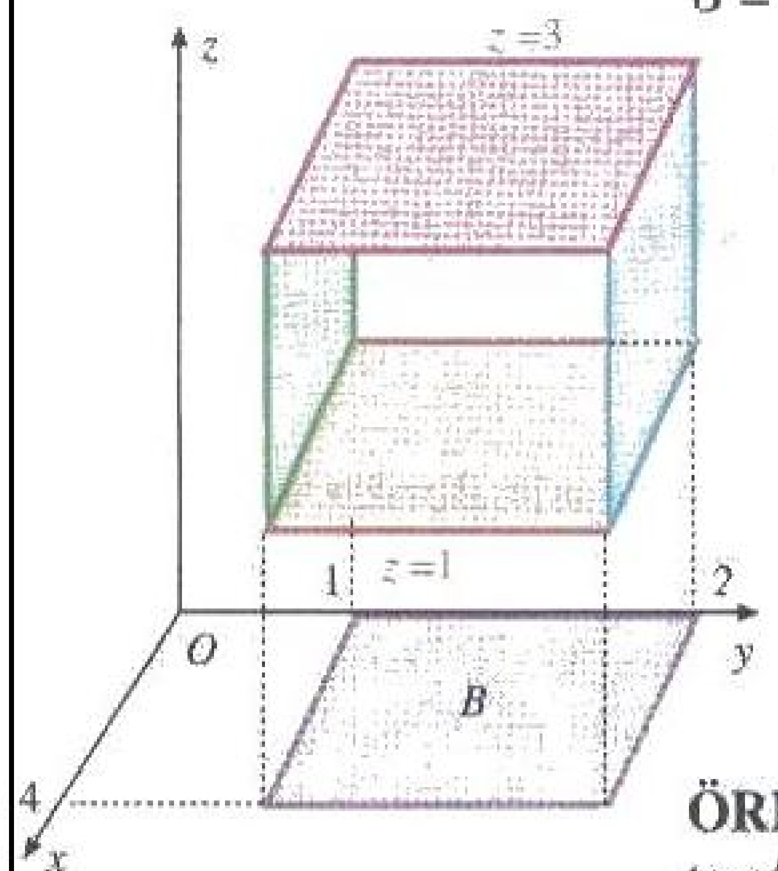
Şimdi kabul edelim ki, G bölgesi alttan $z = g(x, y)$, üstten $z = h(x, y)$ yüzeyleri, yandan da bir silindirik yüzey ile sınırlandırılmış olsun. Bu bölgenin xOy düzlemi üzerindeki dik izdüşümü B ise

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_B \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dxdy$$ dir.

ÖRNEK : G bölgesi, $x = 0$, $x = 4$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 1$ ve $z = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G (x + yz)\, dxdydz$$

integralini hesaplayınız.



Çözüm : G bölgesi üstten $z = 3$, alttan $z = 1$ düzlemleri tarafından kapatılmıştır. G nin xOy düzlemi üzerindeki izdüşümü

$B = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq 2 \}$ dikdörtgensel bölgesi olduğundan

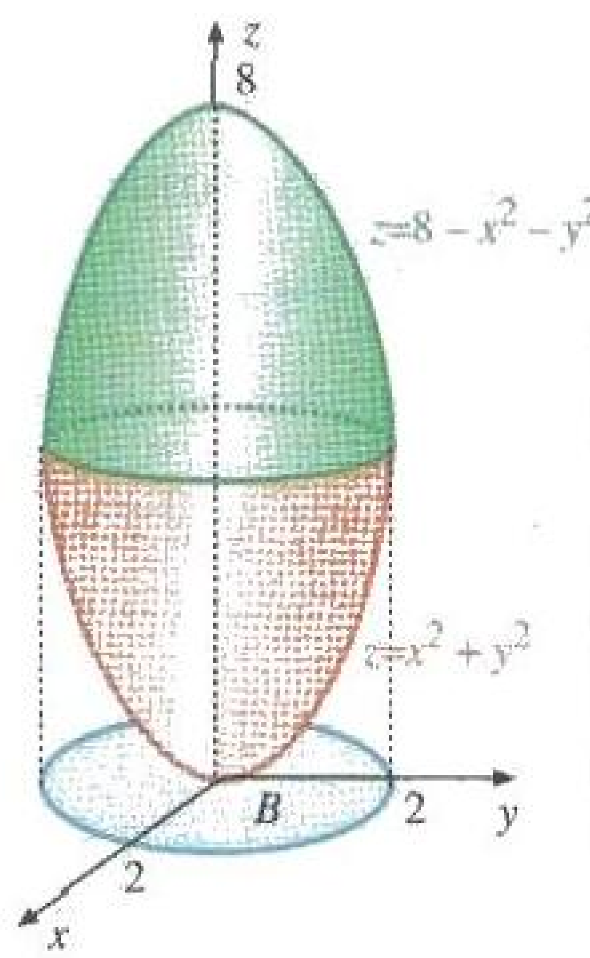
$$I = \iint_B \left[\int_{z=1}^{z=3} (x + yz)\, dz \right] dxdy = \iint_B \left(zx + \frac{y}{2} z^2 \right) \Big|_1^3 dxdy = \iint_B (3x + 4y)\, dxdy$$

$$= \int_0^4 \int_1^2 (3x + 4y)\, dydx = \int_0^4 (3xy + 2y^2) \Big|_1^2 dx$$

$$= \int_0^4 (3x + 6)\, dx = \frac{3}{2} x^2 + 6x \Big|_0^4 = 48$$

ÖRNEK : G bölgesi alttan $z = x^2 + y^2$, üstten $z = 8 - x^2 - y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$I = \iiint_G xy\ dxdydz$ integralini hesaplayınız.

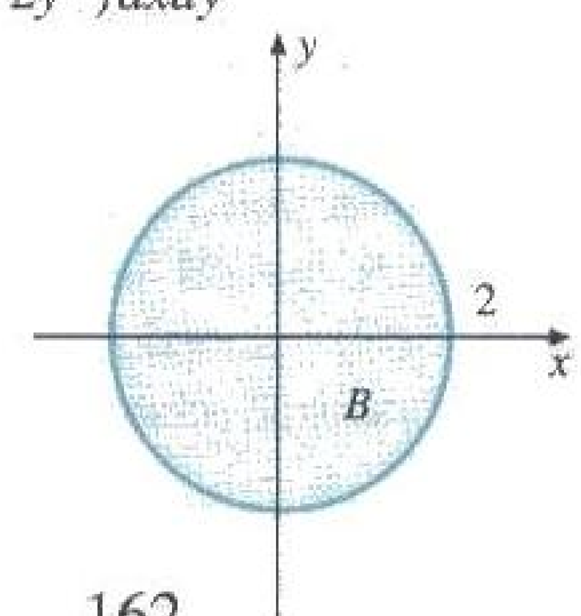


Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda çizilmiştir. Bu bölgenin izdüşümünü bulalım.

$z = x^2 + y^2$ ve $z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ bulunur. $x^2 + y^2 = 4$ için $z = 4$ olur. O halde iki paraboloidin arakesit eğrisi $z = 4$ düzlemi üzerinde $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Bunun xOy düzlemindeki dik zdüşümü de $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Dolayısıyla B izdüşüm bölgesi $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesidir.

$$I = \iint_B \left[\int_{z=x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} xy\, dz \right] dxdy = \iint_B xy(8 - 2x^2 - 2y^2)\, dxdy$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

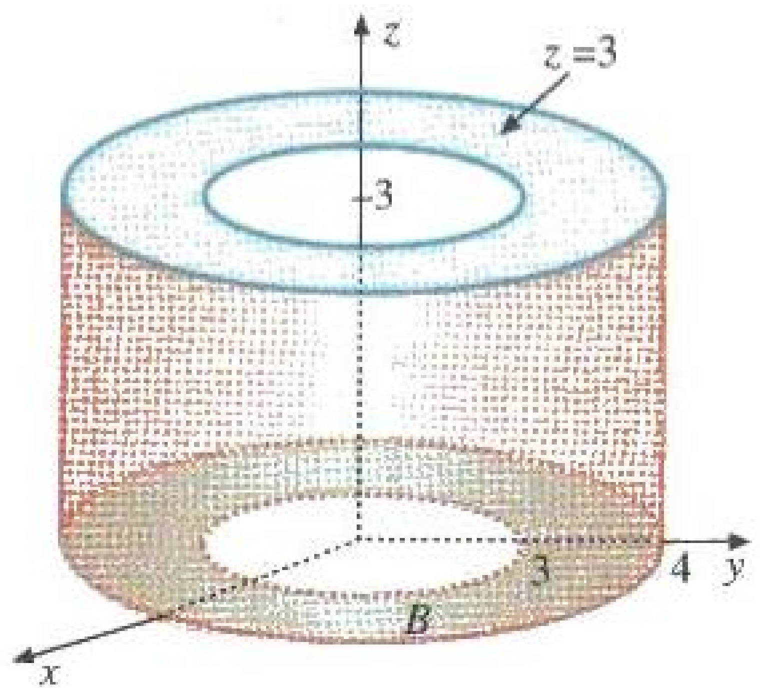


$$I = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, (8 - 2r^2)\, r dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \sin\varphi \cos\varphi\, (8r^3 - 2r^5)\, dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\left(2r^4 - \frac{1}{3}r^6\right)\Big|_0^2 d\varphi$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{32}{3}\ \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$ bulunur.



ÖRNEK : G bölgesi, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$ silindirleri ile $z = 0$ ve $z = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\mathrm{I} = \iiint_G x^2\, dxdydz$$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda verilmiştir. Bu bölgenin $x\,O\,y$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümü B halkasıdır. Buna göre

$$I = \iint_B \left[\int_0^3 x^2 dz\right] dxdy = \iint_B x^2 z\Big|_0^3 dxdy = \iint_B 3x^2 dxdy$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

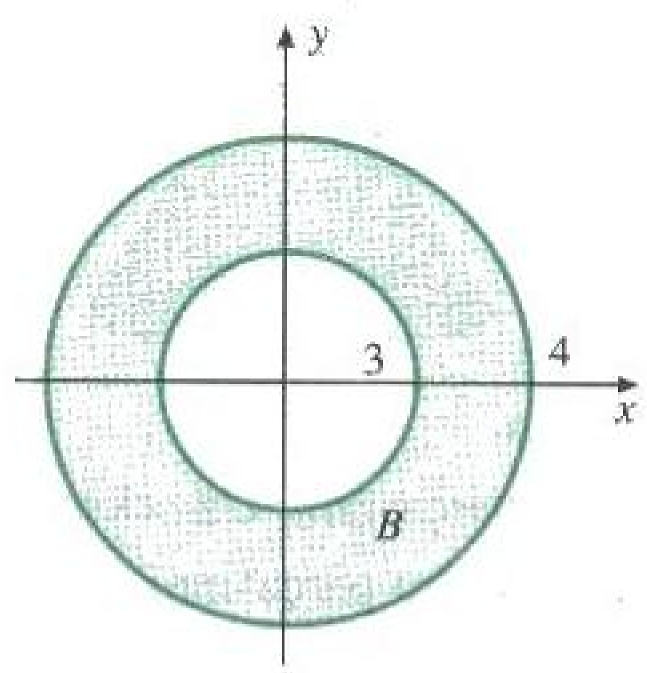
$$I = 3\int_0^{2\pi}\int_3^4 r^2\cos^2\varphi\, r dr d\varphi$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} r^4\Big|_3^4 \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{525}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{525}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{525}{4}\pi$$



bulunur.

14.6 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

Üç katlı integrallerin Matematik, Fizik ve Mühendislikte çeşitli uygulamaları vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını vereceğiz.

HACIM HESABI

Üç katlı integrali tanımlarken, sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta V_k = \iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz$$

olduğunu görmüştük. Eğer her $(x, y, z) \in G$ için $f(x, y, z) = 1$ ise, yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_G dxdydz$$

şeklini alır. Sol taraf, parçalanmadan bağımsız olarak, G bölgesinin hacmi olacağından, yukarıdaki eşitlik

$$G \text{ nin hacmi} = \iiint_G dxdydz$$

biçiminde yazılabilir. G nin hacmi V ise

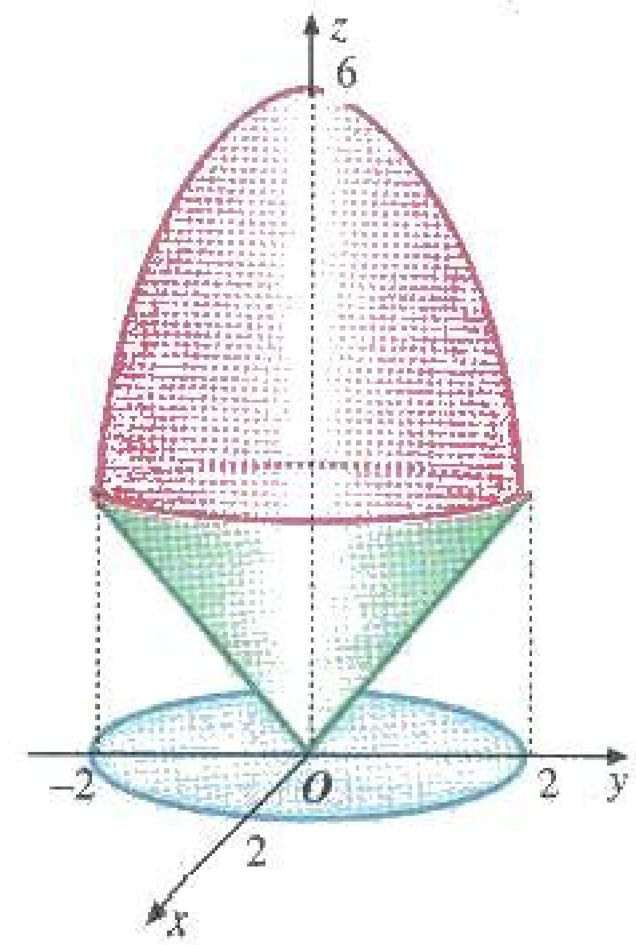
$$V = \iiint_G dxdydz$$ olur.

Eğer, hacim küresel koordinatlarda hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G \rho^2|\sin\theta|\,d\rho d\theta d\varphi$$ olacaktır.

Eğer silindirik koordinatlar kullanılarak hacim hesaplanacaksa $V = \iiint_G r\, dzdrd\varphi$

bağıntısını kullanmak gerekir.



ÖRNEK : Alttan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisi, üstten $z = 6 - x^2 - y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmını hesaplayınız.

Çözüm : Paraboloid ile koninin arakesitini bulalım :

$z = 6 - z^2 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow (z-2)(z+3) = 0 \Rightarrow z = 2$ veya $z = -3$ olur.

$z > 0$ olacağından $z = 2$ dir.

$z = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ olur. O halde arakesit eğrisi, $z = 2$ düzleminde $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Hacmi istenen bölgenin $x\,O\,y$ düzlemindeki dik izdüşümü $x^2 + y^2 \le 4$ dairesidir.

14.6 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

Üç katlı integrallerin Matematik, Fizik ve Mühendislikte çeşitli uygulamaları vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını vereceğiz.

HACIM HESABI

Üç katlı integrali tanımlarken, sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta V_k = \iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz$$

olduğunu görmüştük. Eğer her $(x, y, z) \in G$ için $f(x, y, z) = 1$ ise, yukarıdaki eşitlik

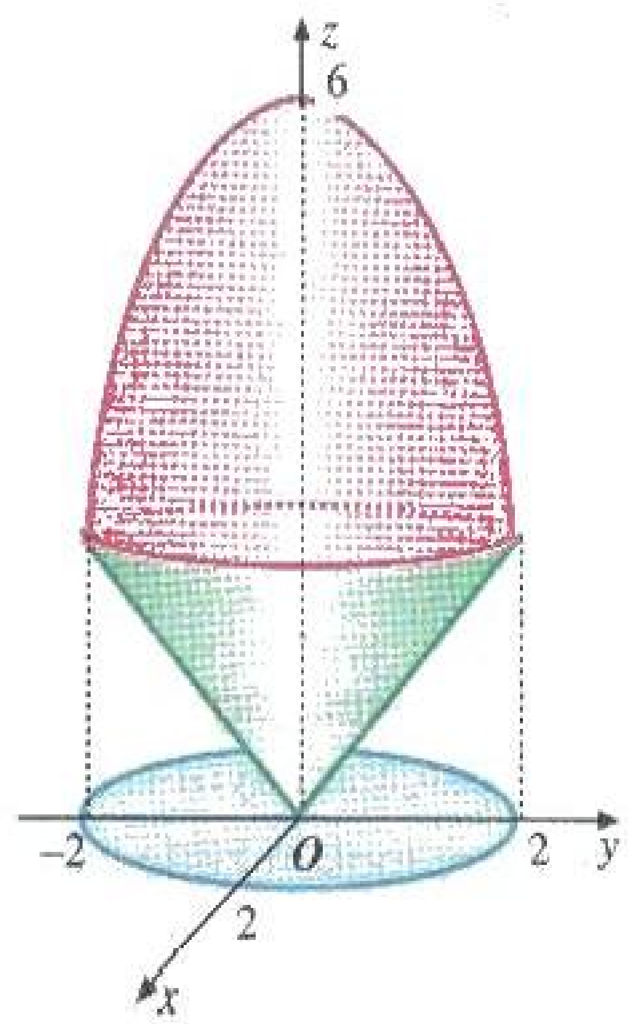
$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_G dxdydz$$

şeklini alır. Sol taraf, parçalanmadan bağımsız olarak, G bölgesinin hacmi olacağından, yukarıdaki eşitlik

$$G \text{ nin hacmi} = \iiint_G dxdydz$$

biçiminde yazılabilir. G nin hacmi V ise

$$V = \iiint_G dxdydz \quad \text{olur.}$$



Eğer, hacim küresel koordinatlarda hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G \rho^2 |\sin\theta|\, d\rho d\theta d\varphi \quad \text{olacaktır.}$$

Eğer silindirik koordinatlar kullanılarak hacim hesaplanacaksa $V = \iiint_G r\, dz dr d\varphi$

bağıntısını kullanmak gerekir.

ÖRNEK : Alttan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisi, üstten $z = 6 - x^2 - y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm : Paraboloid ile koninin arakesitini bulalım :

$z = 6 - z^2 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow (z-2)(z+3) = 0 \Rightarrow z = 2$ veya $z = -3$ olur.

$z > 0$ olacağından $z = 2$ dir.

$z = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ olur. O halde arakesit eğrisi, $z = 2$ düzleminde $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. Hacmi istenen bölgenin xOy düzlemindeki dik izdüşümü $x^2 + y^2 \le 4$ dairesidir.

Buna göre

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dydx$$

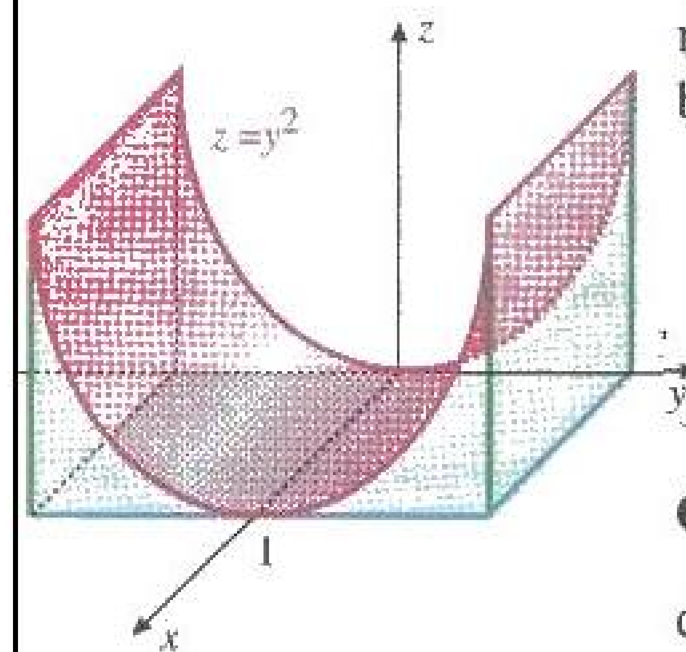
olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^2 d\varphi$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{3}\cdot 2\pi = \frac{32}{3}\pi$$

bulunur.

ÖRNEK : $z = y^2$ silindiri, $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$ ve $y = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

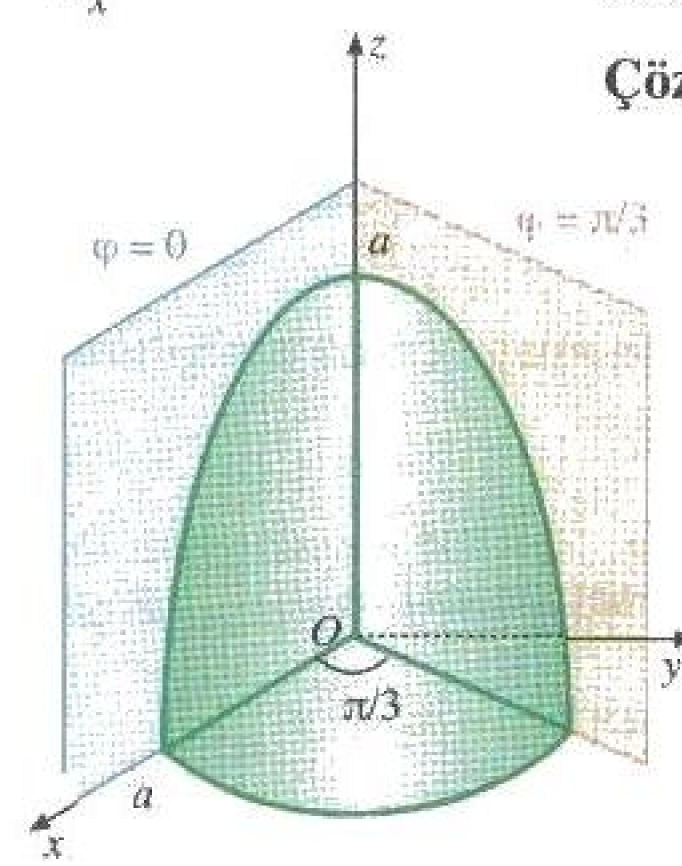


Çözüm : Hacmi istenen bölge yanda gösterilmiştir. Bu bölgenin xOy- düzlemi üzerindeki dik izdüşümü $B = \{ (x, y) : 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1 \}$ dikdörtgensel bölgesidir. Buna göre

$$V = \int_0^1\int_{-1}^1\int_0^{y^2} dzdydx = \int_0^1\int_{-1}^1 y^2\, dydx = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^1 dx = \frac{2}{3}\int_0^1 dx = \frac{2}{3}$$

birimküp olur.

ÖRNEK : Birinci bölgede $\rho = a$ küresi $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ düzlemleri ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.



Çözüm : Hacmi istenen bölge yanda verilmiştir. Bu bölgenin hacmi

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^2|\sin\theta|\, d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{9}a^3$$

br^3 olur.

KÜTLE HESABI

Bilindiği gibi, bir cismin kütlesi onun hacmi ile yoğunluğunun çarpımıdır. Eğer yoğunluk sabit değilse, G cismi $G_1, G_2, \ldots G_n$ gibi parçalara ayrılır. $k = 1, 2, \ldots, n$ için, (x_k^*, y_k^*, z_k^*), G_k nın bir noktası olmak üzere toplam kütle, yaklaşık olarak, $\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$ olacaktır. Burada ΔV_k, G_k alt bölgesinin hacmini göstermektedir. Parçalanma ne kadar ince yapılırsa, yaklaşım o kadar iyi olur. Buna göre

$$M = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sigma\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right) \Delta V_k$$

olacaktır. Eğer $\sigma(x, y, z)$ integrallenebilir, örneğin sürekli ise, sağ taraf $\sigma(x, y, z)$ nin G üzerindeki integrali olacağından

$$M = \iiint_G \sigma(x,y,z)\, dxdydz$$

olur.

ÖRNEK : a yarıçaplı küre şeklindeki bir cismin her noktadaki yoğunluğu, o noktanın kürenin merkezine olan uzaklığının karesi ile ters orantılıdır. Küre yüzeyi üzerindeki noktalarda yoğunluk, kürenin yarıçapına eşit olacağına göre cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm : Kürenin merkezi $O(0, 0, 0)$ olsun. $A(x, y, z)$ noktasının küre merkezine olan uzaklığı $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ olduğundan, bu noktadaki yoğunluk

$$\sigma(x, y, z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}$$

olur. Küre yüzeyi üzerindeki noktaların merkeze olan uzaklığı a olduğundan

$$\sigma = \frac{k}{a^2} \Rightarrow a = \frac{k}{a^2} \Rightarrow k = a^3$$

olur. Şu halde

$$\sigma(x, y, z) = \frac{a^3}{x^2+y^2+z^2}$$

dır. Buna göre

$$M = \iiint_G \sigma(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_G \frac{a^3}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$

olur. Küresel koordinatlara geçilirse

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{a^3}{\rho^2}\rho^2 |\sin\theta|\, d\rho d\theta d\varphi$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho\Big|_0^a \sin\theta d\theta d\varphi = a^4 \int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\varphi$$

$$= 2a^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^4$$

bulunur.

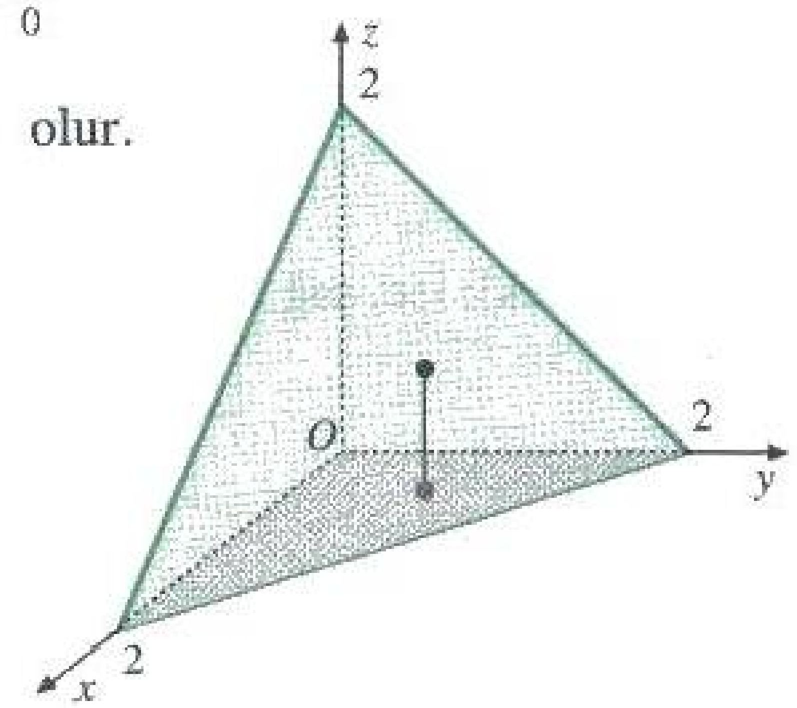
ÖRNEK : $x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ düzlemleri tarafından sınırlanan dörtyüzlü içine yerleştirilen bir cismin her noktadaki yoğunluğu, o noktanın xOy düzlemine olan uzaklığına eşittir. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm : $\sigma(x, y, z) = z$ olacağından

$$M = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} z\, dzdydx = \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y)^2\, dydx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^2 (2-x-y)^3\Big|_0^{2-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^2 (2-x)^3\, dx$$

$$= -\frac{1}{24}(2-x)^4\Big|_0^2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \qquad \text{olur.}$$



AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

G bölgesine yerleştirilmiş bir cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ olsun. İki katlı integrallerdeki düşünceyle, ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_G x\sigma(x,y,z)\, dxdydz\,, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_G y\sigma(x,y,z)\, dxdydz\,,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_G z\sigma(x,y,z)\, dxdydz$$

olurlar. Eğer cisim homogen, yani $\sigma(x, y, z)$ sabitse yukarıdaki ifadeler

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_G x\, dxdydz\,, \quad \bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_G y\, dxdydz\,, \quad \bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_G z\, dxdydz$$

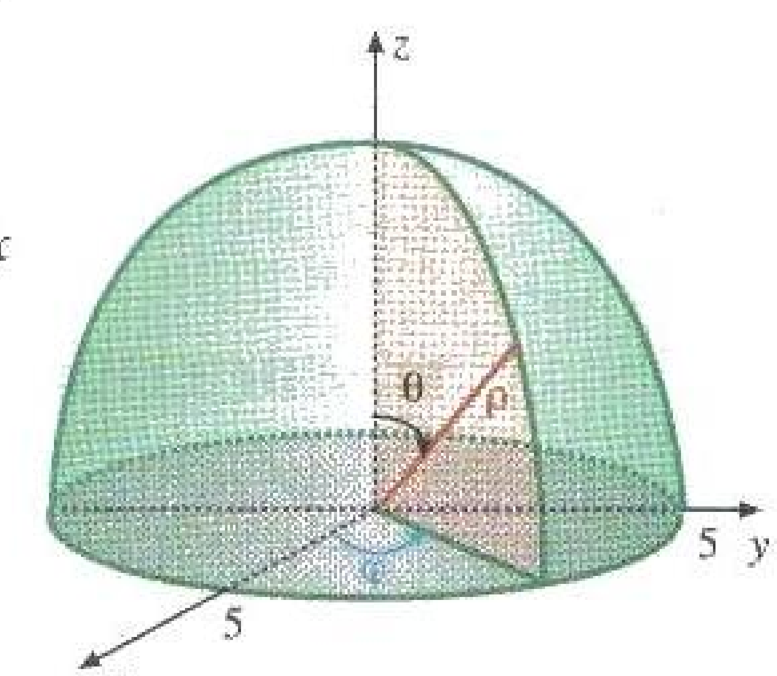
şeklini alırlar.

ÖRNEK : $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ yarı küresiyle $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu, her noktada o noktanın küre merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Bu yarı kürenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :

$$M = \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{5} k\rho.\rho^2 |\sin\theta|\, d\rho d\theta d\varphi$$



İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

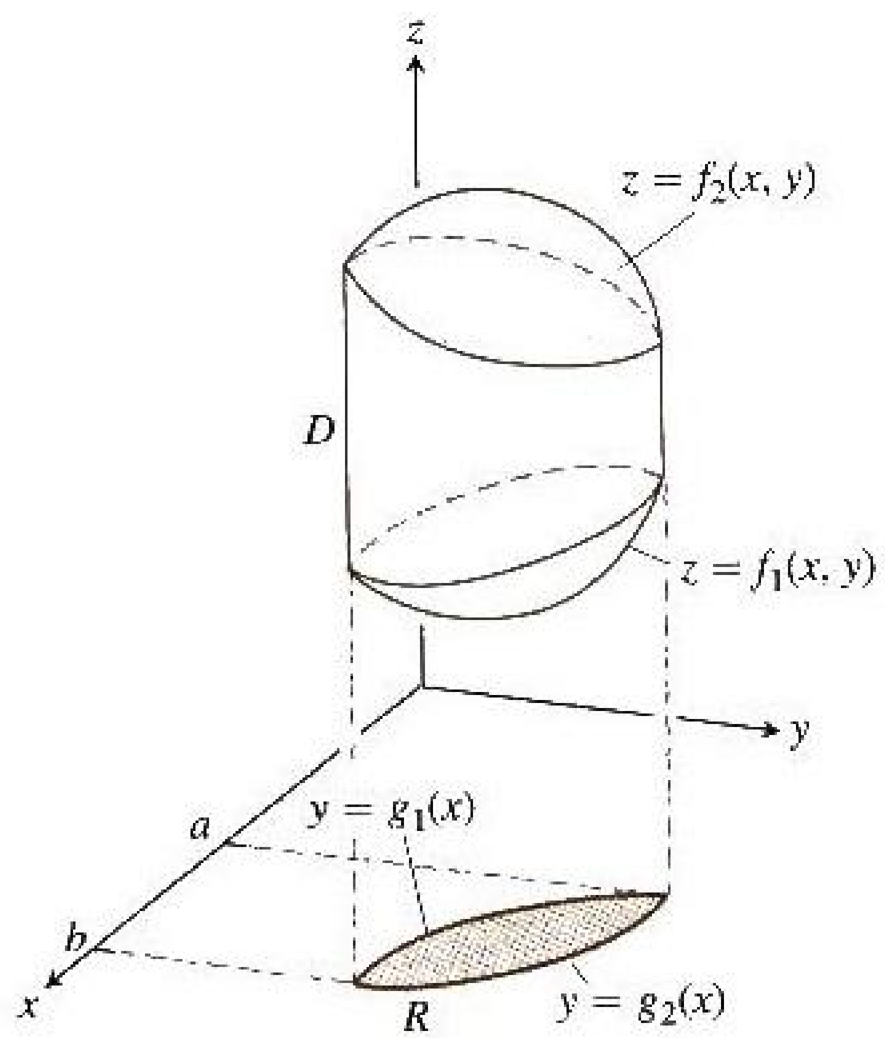
Üç katlı bir integrali, Fubini Teoreminin (Bölüm 15.1) üç-boyutlu bir versiyonunu uygulayarak, ardışık üç integrasyonla hesaplarız. İki katlı integrallerde olduğu gibi, bu ardışık integrallerin integrasyon sınırlarını bulmak için geometrik bir prosedür vardır.

Bir D bölgesi üzerinde

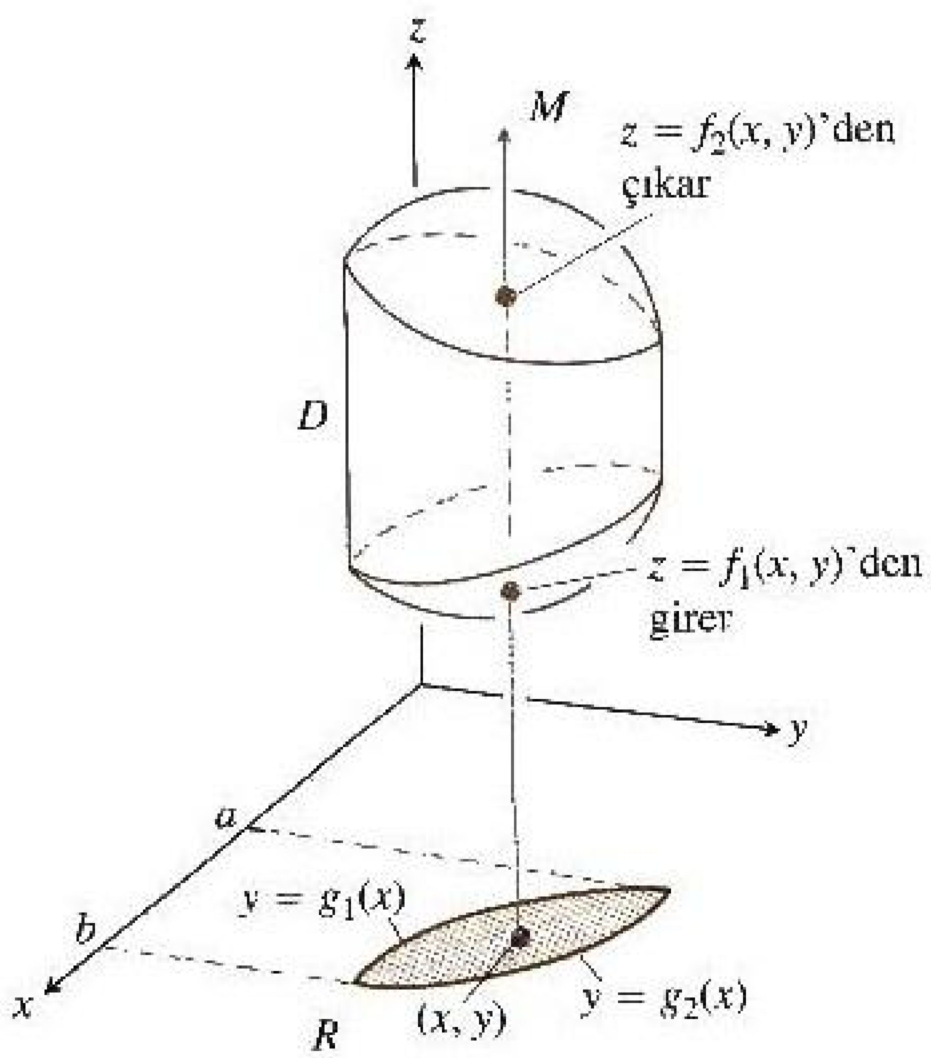
$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV$$

integralini hesaplamak için, önce z'ye sonra y'ye ve en sonunda x'e göre integral alın.

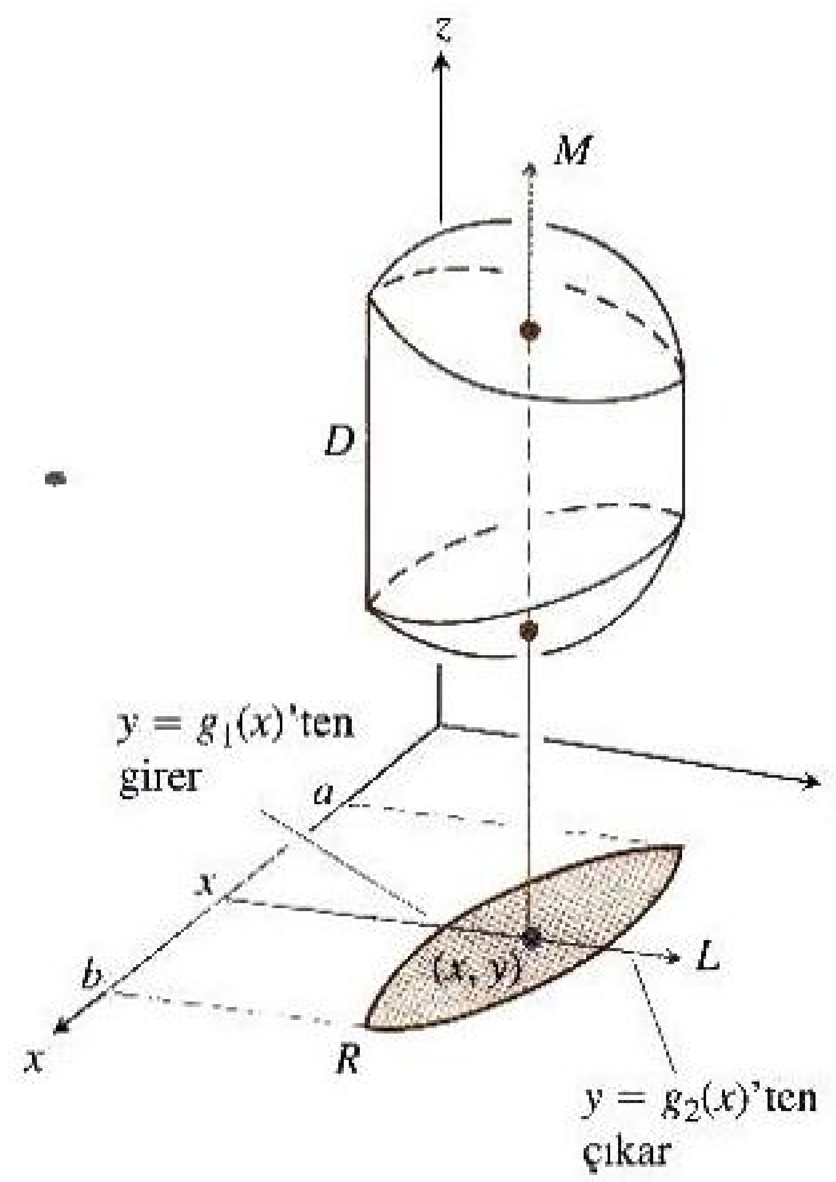
1. *Bir çizim:* D bölgesini xy-düzlemindeki "gölgesi" R (dik iz düşüm) ile birlikte çizin. D'nin alt ve üst sınır yüzeyleri ile R'nin alt ve üst sınır eğrilerini adlandırın.



2. *İntegrasyonun z-sınırlarını bulun:* R'deki tipik bir (x, y) noktasından geçen, z-eksenine paralel bir M doğrusu çizin. z arttıkça, M, D'ye $z = f_1(x, y)$'den girer ve $z = f_2(x, y)$'den çıkar. Bunlar integrasyonun z-sınırlarıdır.



3. *İntegrasyonun y-sınırlarını bulun :* (x, y)'den geçen, y-eksenine paralel bir L doğrusu çizin. y arttıkça, L, R'ye $y = g_1(x)$ den girer ve $y = g_2(x)$'den çıkar. Bunlar integrasyonun y-sınırlarıdır.



4. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun:* R'den geçen, y-eksenine paralel bütün doğruları içeren x-sınırları seçin (yukarıdaki şekilde $x = a$ ve $x = b$). Bunlar integrasyonun x-sınırlarıdır. İntegral

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

olur. İntegrasyon sırasını değiştirirseniz, benzer prosedürler izleyin. D'nin "gölgesi" ardışık integrasyonun gerçekleştiği son iki değişkenin düzleminde bulunur.

Yukarıdaki prosedür, D bölgesi, üstten ve alttan bir yüzeyle, "gölge" R bölgesi de alt ve üst eğrilerle sınırlı olduğu her durumda uygulanır. Bu prosedür, bazı hallerde bölgeyi basit bölgelere ayırarak prosedürü uygulamak mümkün olsa bile, içinde karmaşık delikler içeren bölgelere uygulanamaz.

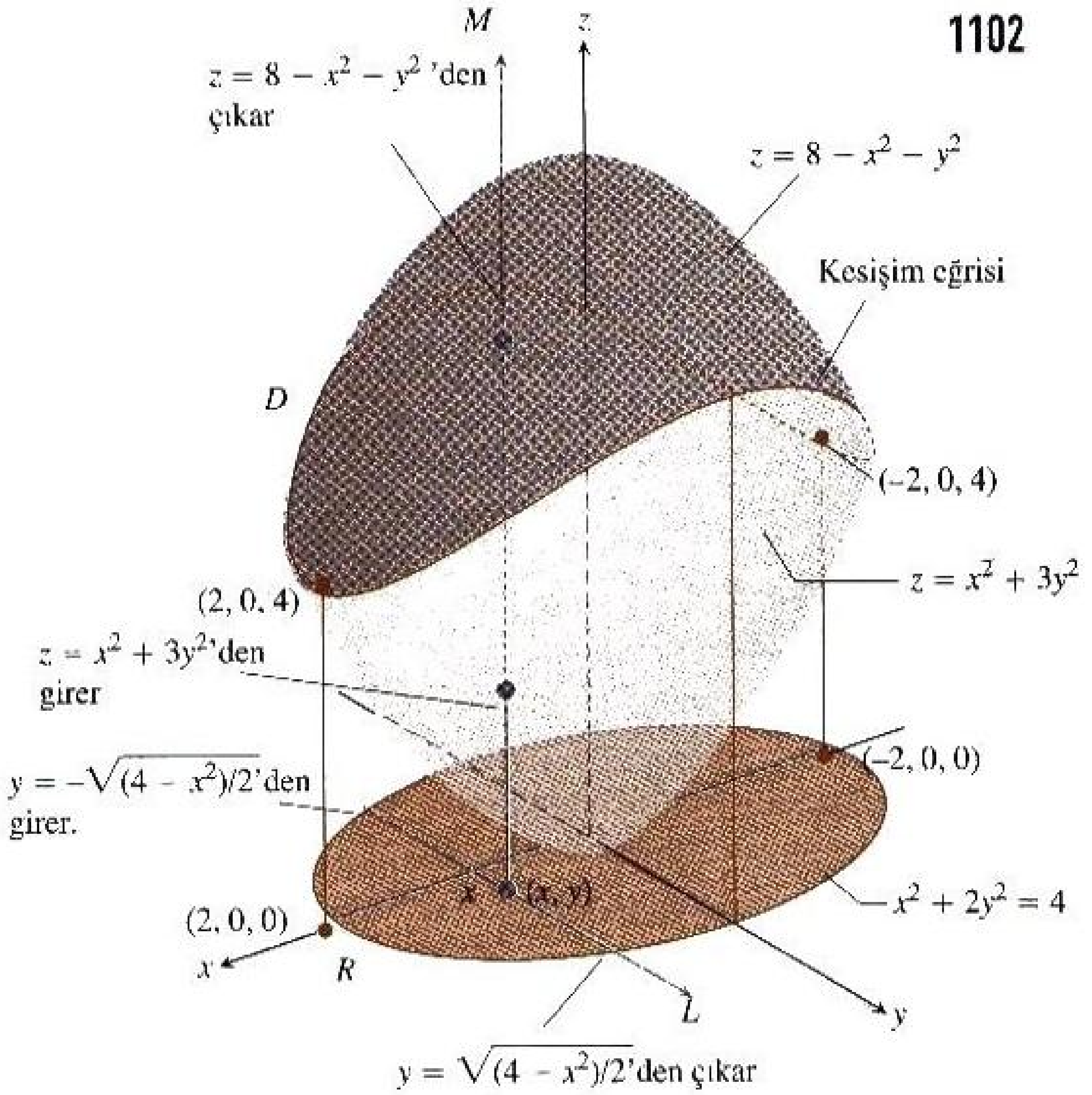
ÖRNEK 1 Bir Hacim Bulmak

$z = x^2 + 3y^2$ ve $z = 8 - x^2 - y^2$ yüzeyleriyle çevrelenen D bölgesinin hacmini bulun.

Çözüm Hacim, $F(x, y, z) = 1$'in D üzerindeki

$$V = \iiint_D dz\, dy\, dx$$

integralidir. İntegrali hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak üzere önce bölgeyi çizeriz. Yüzeyler (Şekil 15.28) $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ veya $x^2 + 2y^2 = 4$, $z > 0$ eliptik silindiri üzerinde kesişirler. D'nin xy-düzlemine izdüşümü olan R bölgesinin sınırı, denklemi aynı olan bir elipstir: $x^2 + 2y^2 = 4$. R'nin "üst" sınırı $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir. Alt sınır ise $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir.



ŞEKİL 15.28 İki paraboloid tarafından çevrelenen bu bölgenin hacmi Örnek 1' de hesaplanmaktadır.

İntegrasyonun z-sınırlarını bulalım. R'nin tipik bir (x, y) noktasından, z-eksenine paralel olarak geçen M doğrusu D'ye $z = x^2 + 3y^2$'den girer ve $z = 8 - x^2 - y^2$'den çıkar.

Şimdi de integrasyonun y-sınırlarını bulalım. (x, y)'den, y-eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R'ye $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$'den girer ve $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$.'den çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. L, R'yi tararken, x'in değeri $(-2, 0, 0)$'da $x = -2$'den $(2, 0, 0)$'da $x = 2$'ye kadar değişir. D'nin hacmi

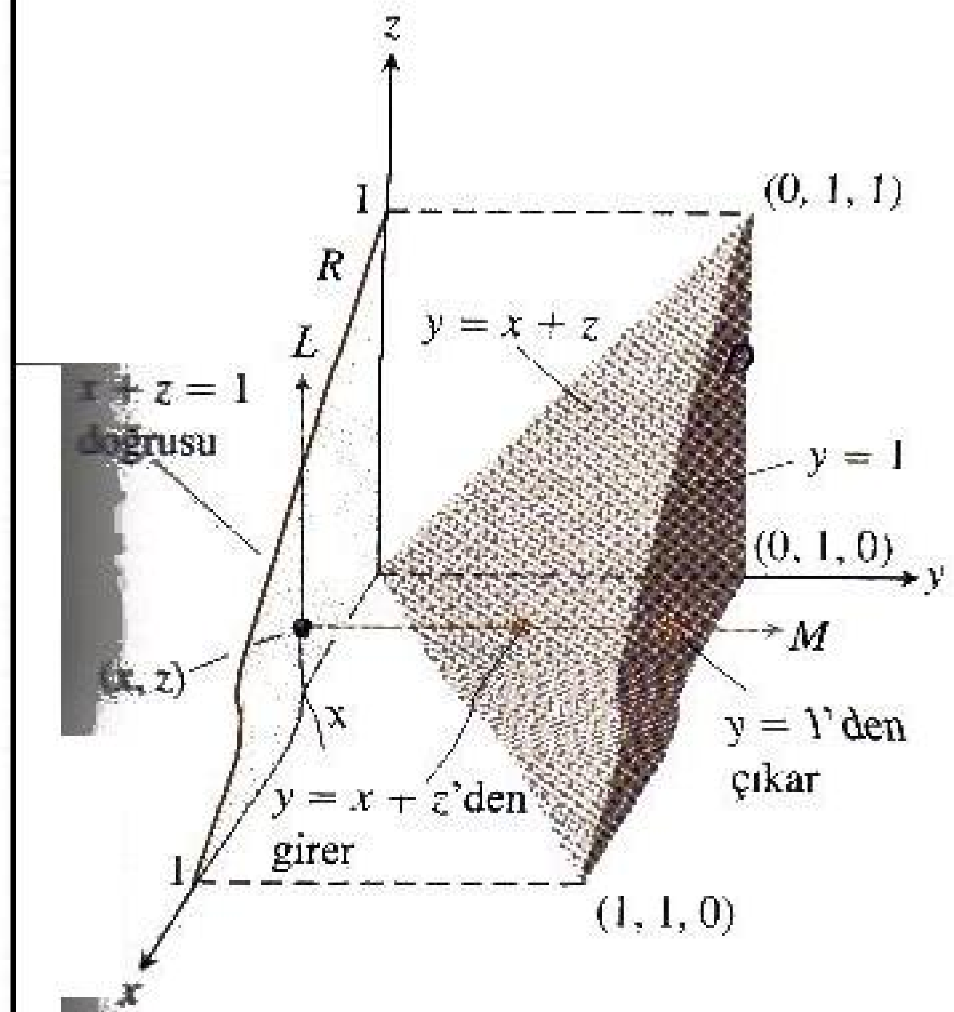
$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2}\right) dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2}\right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^{3/2}\, dx \\
&= 8\pi\sqrt{2}. \qquad x = 2\sin u \text{ dönüşümü ile integrasyondan sonra}
\end{aligned}
$$

■

Sıradaki örnekte, farklı bir integrasyon sırasının nasıl kullanıldığını göstermek için D'yi xy-düzlemi yerine xz-düzlemine iz düşürüyoruz.

ÖRNEK 2 İntegrasyon Sınırlarını $dy\,dz\,dx$ Sırasında Bulmak

Köşeleri (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0) ve (0, 1, 1)'de olan dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde bir $F(x, y, z)$ fonksiyonunun üç katlı integrali için integrasyon sınırlarını belirleyin.



ŞEKİL 15.29 Dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde tanımlı bir fonksiyonun üç katlı integralini hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak (Örnek 2).

Çözüm D'yi xz-düzlemindeki "gölgesi" R ile birlikte çizeriz (Şekil 15.29). D'nin üst (sağ taraftaki) sınır yüzeyi $y = 1$ düzlemindedir. Alt (sol taraftaki) sınır yüzey $y = x + z$ düzlemindedir. R'nin üst sınırı $z = 1 - x$ doğrusudur. Alt sınır $z = 0$ doğrusudur.

Önce integrasyonun y-sınırlarını buluruz. R'nin tipik bir (x, z) noktasından y-eksenine paralel olarak geçen doğru D'ye $y = x + z$'den girer ve $y = 1$'den çıkar.

Sonra integrasyonun z-sınırlarını buluruz. (x, z)'den z-eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R'ye $z = 0$'dan girer ve $z = 1 - x$'ten çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. L, R'yi tararken, x'in değerleri $x = 0$'dan $x = 1$'e değişir. İntegral

$$
\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^{1} F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx
$$

■

olur.

ÖRNEK 3 Örnek 2'yi $dz\,dy\,dx$ Sırası İle Tekrarlamak

$F(x, y, z)$'yi dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde $dz\,dy\,dx$ sırası ile integre etmek için adımları aşağıdaki gibi düzenleriz.

Önce integrasyonun z-sınırlarını buluruz. xy-düzlemindeki "gölge" nin tipik bir (x, y) noktasından z-eksenine paralel olarak geçen bir doğru D'ye $z = 0$'dan girer ve denklemi $z = y - x$ olan üst yüzeyinden çıkar (Şekil 15.29).

Sonra integrasyonun y-sınırlarını buluruz. xy-düzleminde, $z = 0$, dörtyüzlünün eğik yüzeyi düzlemi $y = x$ doğrusu boyunca keser. (x, y)'den y-eksenine paralel olarak geçen bir doğru xy-düzlemindeki gölge'ye $y = x$'ten girer ve $y = 1$'den çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. Önceki adımdaki y-eksenine paralel doğru gölgeyi tararken, x'in değerleri $x = 0$'dan $(1, 1, 0)$'da $x = 1$'e değişir. İntegral

$$
\int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.
$$

olur. Örneğin, $F(x, y, z) = 1$ ise

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1\int_x^1 (y - x)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Aynı sonucu $dy\,dz\,dx$ sırasıyla integre ettiğimizde de buluruz,

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} dy\,dz\,dx = \frac{1}{6}.$$ ■

Gördüğümüz gibi, bazen (ama her zaman değil) iki katlı integralleri hesaplamak için ardışık tek katlı integraller iki farklı sırada alınabilir. dx, dy ve dz altı farklı şekilde sıralanabildiğinden, üç katlı integraller için bu sayı altı olabilir. Her sıralama, uzaydaki integrasyon bölgesinin farklı bir tanımlamasını ve farklı integrasyon sınırları verir.

ÖRNEK 4 Farklı İntegrasyon Sıralarını Kullanmak

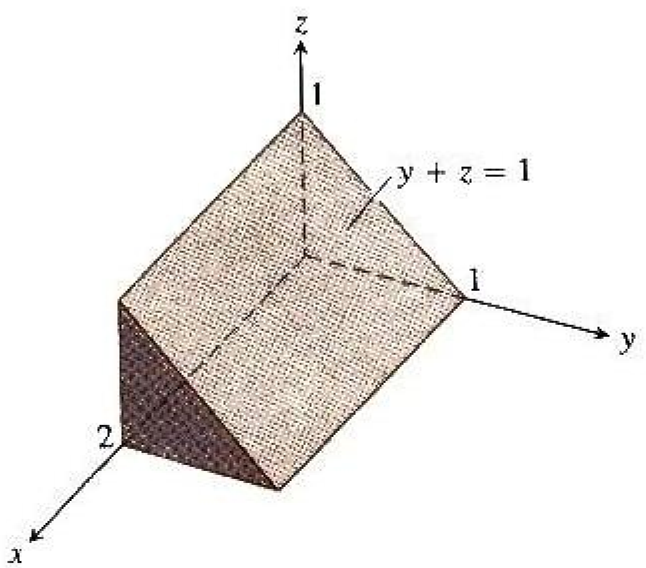
Aşağıdaki integrallerden her biri Şekil 15.30'da gösterilen katı cismin hacmini verir.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\,dy\,dz$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\,dz\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy\,dz\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$ **(f)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$

aplıyoruz.



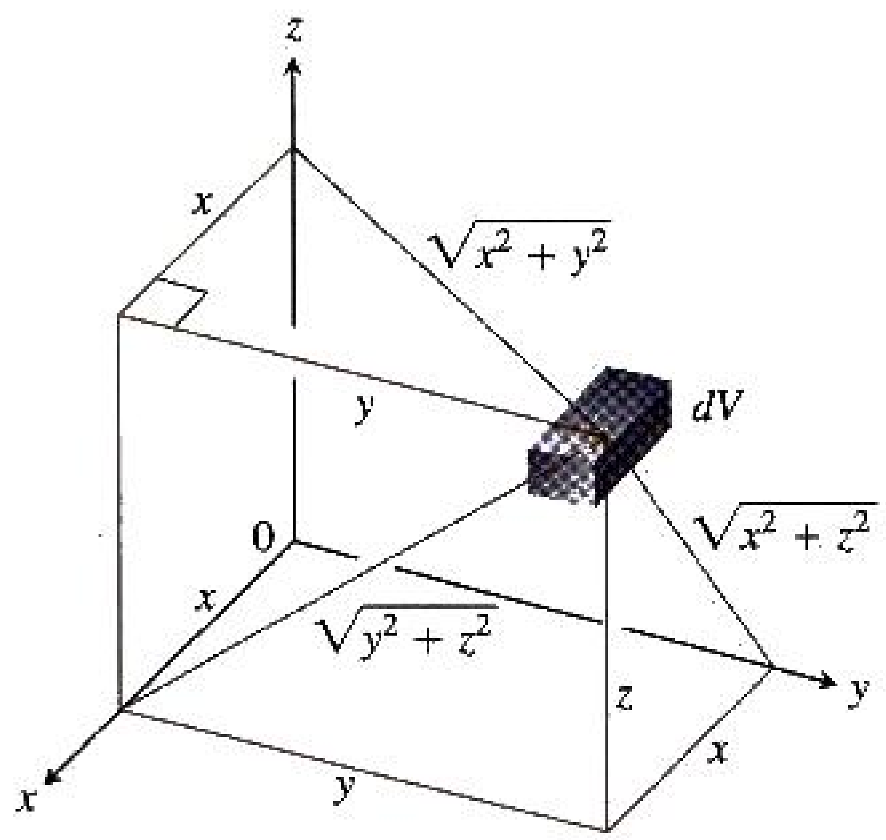
ŞEKİL 15.30 Örnek 4, bu prizmanın için altı farklı ardışık üç katlı integr verir.

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\,dz\,dy && \text{(b)'deki integral}\\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2\,dz\,dy\\
&= \int_0^1 \Big[2z\Big]_{z=0}^{z=1-y} dy\\
&= \int_0^1 2(1-y)\,dy\\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz && \text{(c)'deki integral}\\
&= \int_0^1 \int_0^2 (1-z)\,dx\,dz
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \Big[x - zx\Big]_{x=0}^{x=2} dz \;=\; \int_0^1 (2-2z)\,dz \;=1$$

(a), (d), (e) ve (f)'deki integraller de $V = 1$'i verir.



ŞEKİL 15.33 *dV*'den koordinat düzlem ve eksenlerine uzaklıklar.

Aynı şekilde L, y-ekseni veya z-ekseni ise

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\,\delta\,dV \qquad \text{ve} \qquad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\,\delta\,dV.$$

buluruz. Aynı şekilde, **koordinat düzlemlerine göre birinci momentleri** de elde edebiliriz. Örneğin,

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta(x, y, z)\,dV$$

integrali yz-düzlemine göre birinci momenti verir.

Bölüm 15.2'de düzlemsel bölgeler için incelenen kütle ve moment formüllerine benzer formüller Tablo 15.3' te özetlenmiştir.

TABLO 15.3 Uzayda, katı cisimler için kütle ve moment formülleri.

Kütle: $M = \iiint_D \delta\,dV \qquad (\delta = \delta(x, y, z) = \text{yoğunluk})$

Koordinat düzlemleri etrafında birinci momentler:

$$M_{yz} = \iiint_D x\,\delta\,dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\,\delta\,dV, \qquad M_{xy} = \iiint_D z\,\delta\,dV$$

Ağırlık merkezi:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Koordinat eksenleri etrafında eylemsizlik momentleri (ikinci momentler):

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\delta\,dV$$

Bir L doğrusu etrafında eylemsizlik momenti:

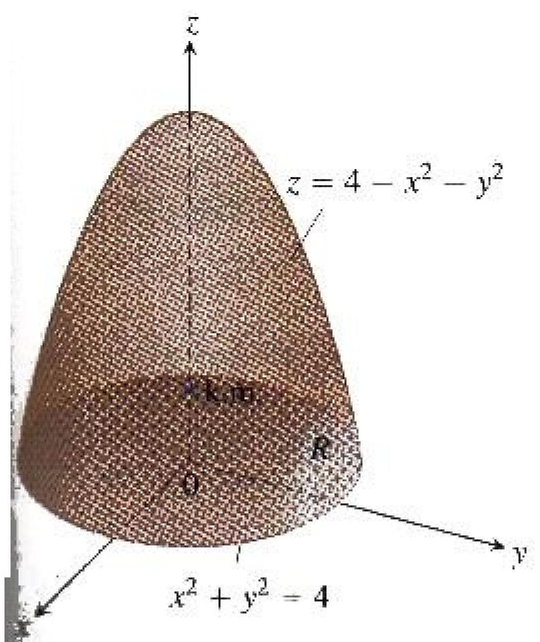
$I_L = \iiint r^2\,\delta\,dV \qquad$ ($r(x, y, z) = (x, y, z)$ noktalarından L doğrusuna olan uzaklık)

Bir L doğrusu etrafında jirasyon yarıçapı:

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

ÖRNEK 1 Uzayda Bir Cismin Kütle Merkezini Bulmak

Alttan, $z = 0$ düzleminde R: $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesi ve üstten $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidiyle sınırlı, sabit δ yoğunluklu cismin kütle merkezini bulun (Şekil 15.34).



ŞEKİL 15.34 Bir cismin kütle merkezini bulmak (Örnek 1).

Çözüm Simetriden dolayı, $\bar{x} = \bar{y} = 0$'dır. $\bar{z}$'yi bulmak için, önce M_{xy}'yi hesaplarız:

$$M_{xy} = \iint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\,\delta\,dz\,dy\,dx = \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta\,dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\iint_R (4 - x^2 - y^2)^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)^2 r\,dr\,d\theta \qquad \text{Kutupsal koordinatlar}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}.$$

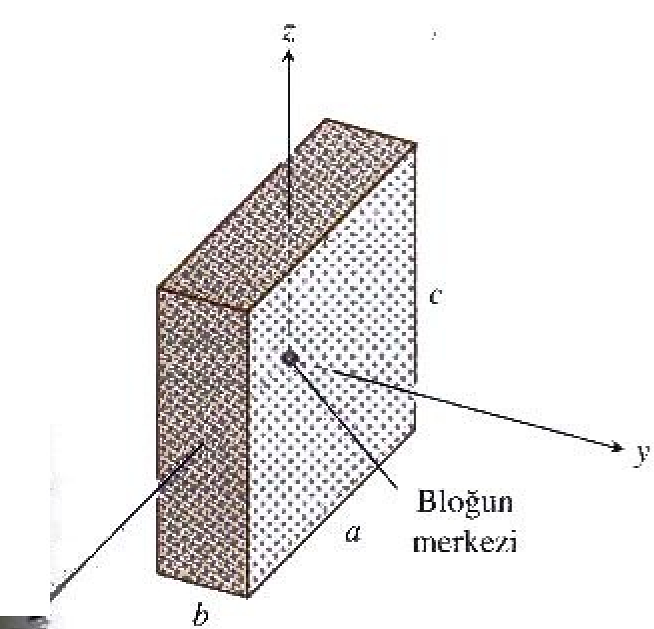
Benzer bir hesaplama

$$M = \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta\,dz\,dy\,dx = 8\pi\delta.$$

verir. Dolayısıyla, $\bar{z} = (M_{xy}/M) = 4/3$ olur ve kütle merkezi $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ bulunur. ■

Katı bir cismin yoğunluğu sabitken (Örnek 1'deki gibi), kütle merkezine (Bölüm 15.2'deki iki boyutlu cisimlerde olduğu gibi) cismin **merkezi** denir.

ÖRNEK 2 Koordinat Eksenleri Etrafındaki Eylemsizlik Momentini Bulmak



ŞEKİL 15.35 Buradaki blok için I_x, I_y ve I_z'yi bulmak. Orijin bloğun merkezindedir (Örnek 2).

Şekil 15.35'de gösterilen, sabit δ yoğunluklu dikdörtgen şekilli cisim için I_x, I_y ve I_z'yi bulun.

Çözüm Yukarıda verilen I_x formülü

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz.$$

verir. $(y^2 + z^2)\delta$'nin x, y ve z'nin bir çift fonksiyonu olduğunu gözlemlersek, integrasyon işinin birazından kurtulabiliriz. Dikdörtgen şekilli cisim, her biri bir bölgede olmak üzere, sekiz simetrik parçadan oluşur. İntegrali bu parçalardan biri üzerinde hesaplayabilir ve toplam değeri bulmak için 8 ile çarpabiliriz:

$$I_x = 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2} (y^2 + z^2)\,dy\,dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3} + z^2 y\right]_{y=0}^{y=b/2} dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2}\right) dz$$

$$= 4a\delta\left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2 + c^2) = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

Aynı şekilde,

$$I_y = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \qquad \text{ve} \qquad I_z = \frac{M}{12}($$

olur.

14.5 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

xyz koordinat sistemindeki bir G bölgesi

$$\begin{cases} x = g(u,v,w) \\ y = h(u,v,w) \\ z = k(u,v,w) \end{cases}$$

bölge dönüşümü ile bir D bölgesine dönüştürüldüğünde, xyz sistemindeki $\Delta V_{(xyz)}$ hacım elemanı ile uvw sistemindeki $\Delta V_{(uvw)}$ hacım elemanı arasında

$$\Delta V_{(xyz)} \cong |J|\,\Delta_{(uvw)}$$

bağıntısı vardır. Burada

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

olup dönüşümün jakobiyenidir. Buna göre

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_D F(u,v,w)\,|J|\,dudvdw$$

olur. Burada $F(u, v, w)$, $f(x, y, z)$ ifadesinde x, y, z yerine u, v, w cinsinden değerleri yazıldığında elde edilen ifadedir.

Üç boyutlu uzayda iki tane önemli bölge dönüşümü vardır. Şimdi bunları verelim.

KÜRESEL KOORDİNATLAR

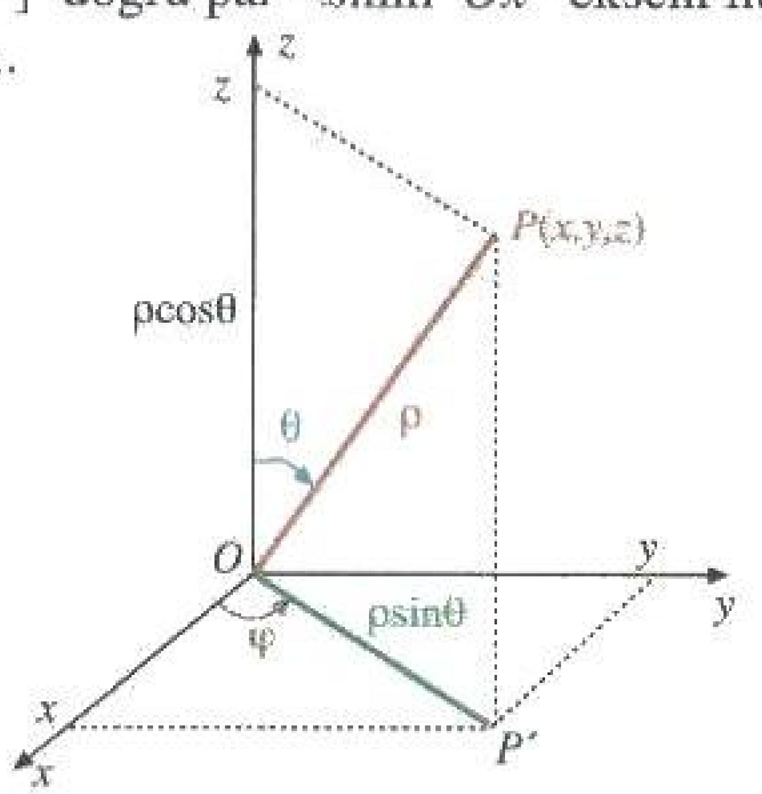
xyz uzayında bir $P(x, y, z)$ noktası verilmiş olsun.

P noktasının orijine olan uzaklığı ρ , OP doğru parçasının Oz– ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü θ olsun. $[OP]$ doğru parçasının xOy düzlemindeki dik izdüşümü $[OP']$, ve $[OP']$ doğru parçasının Ox– ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ olsun.

$$|OP'| = \rho \sin\theta$$

olduğundan

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$



olur. Böylece xyz– koordinat sisteminden $\rho\,\theta\,\varphi$ – koordinat sistemine bir bölge dönüşümü elde edilmiş olur. Bu durumda P noktasının $\rho\,\theta\,\varphi$ – sistemindeki koordinatları (ρ, θ, φ) olur. Bu sayılara P noktasının **küresel koordinatları** adı verilir. Şu halde küresel koordinatlar bir uzunluk ile iki açı ölçüsünden oluşmaktadır.

ÖRNEK : Kartezyen koordinatları $P\left(3, \sqrt{3}, 2\right)$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\theta \\ &= \rho^2 \sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^2\cos^2\theta \\ &= \rho^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \rho^2 \end{aligned}$$

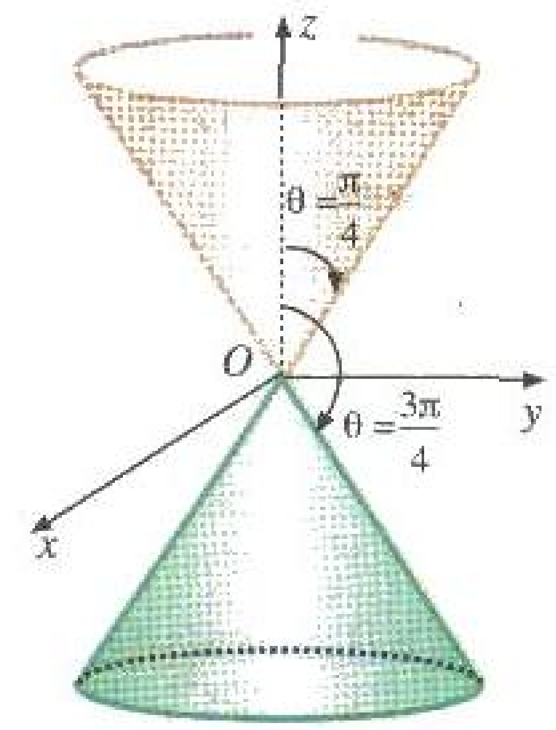
olacağından $9 + 3 + 4 = \rho^2 \Rightarrow \rho = 4$ olur.

$$z = \rho\cos\theta \Rightarrow 2 = 4\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

bulunur. Buna göre P noktasının küresel koordinatları $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ olacaktır.

ÖRNEK : Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $z^2 = x^2 + y^2$ olan koninin küresel koordinatlar sistemindeki denklemini bulunuz.



Çözüm : x, y, z koordinatlarının küresel koordinat sistemindeki değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = \rho^2\sin^2\theta \Rightarrow |\cos\theta| = |\sin\theta|$$

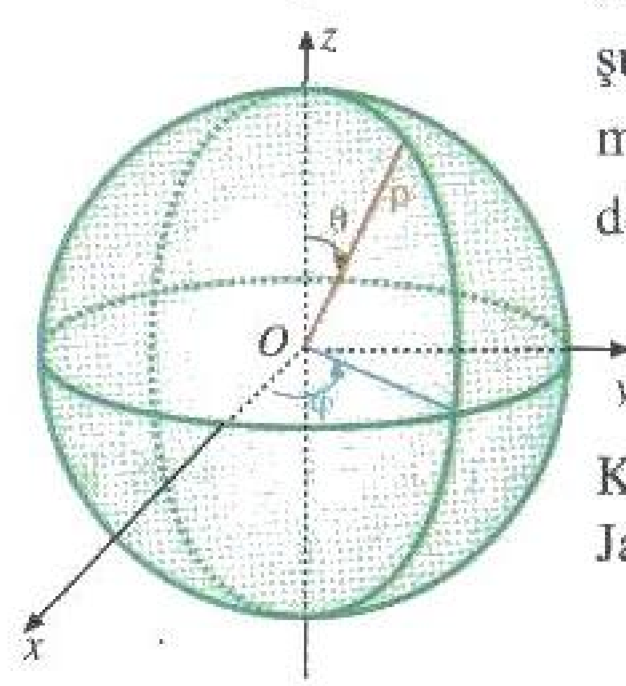
$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ veya $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ olur. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ koninin üst yarısının, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ koninin alt yarısının denklemidir (yandaki şekil).

Genel olarak, $\theta = \alpha$ denklemi, ana doğrusu z– ekseniyle α kadar açı yapan koninin denklemidir.

ÖRNEK : Küresel koordinatlar sistemindeki denklemi $\rho = 3$ olan yüzeyin kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

Çözüm : $\rho = 3 \Rightarrow \rho^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$

olur. Şu halde $\rho = 3$, yarıçapı 3 olan merkezil kürenin denklemidir. □



İntegrasyon bölgesi a yarıçaplı merkezil bir küre olduğunda ρ nun sınırları 0 dan a ya kadar değişir. θ , 0 dan π ye kadar değiştiğinde bir yarı daire oluşur. Bu yarı dairenin Oz– ekseni etrafında 2π kadar döndürülmesiyle tam küre meydana gelir. O halde φ nin 0'dan 2π ye kadar değişmesi gerekir. Bu durumda a yarıçaplı bir merkezil küre için küresel koordinatlar

$$0 \le \rho \le a\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad \text{olacaktır.}$$

Kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara geçildiğinde dönüşümün Jakobiyeni

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant açılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$J = \rho^2 \sin\theta$$

bulunur. Buna göre

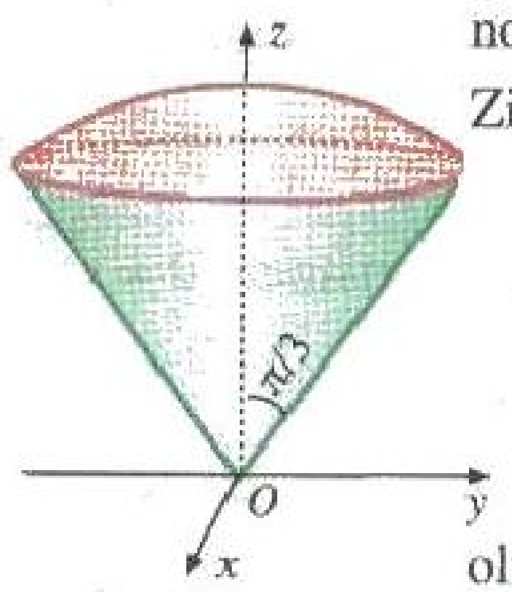
$$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\left|\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi$$

yazılabilir. Burada $F(\rho,\theta,\varphi)$, $f(x,y,z)$ ifadesinde x,y,z yerine ρ,θ,φ cinsinden değerleri yazıldığında elde edilen ifadedir.

ÖRNEK : G integrasyon bölgesi, üstten $x^2+y^2+z^2=1$ küresi, alttan $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/3}$ konisi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G dxdydz$$

integralini hesaplayınız.



Çözüm : İntegrasyon bölgesi yanda gösterilmiştir. Sözkonusu bölge içindeki bir noktanın orijine olan uzaklığı 0 ile 1 arasında değişir. Dolayısıyla $0 \le \rho \le 1$ dir. Zira kürenin küresel koordinatlardaki denklemi $\rho = 1$ dir.

$$z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/3} \Rightarrow 3z^2 = x^2+y^2 \Rightarrow$$

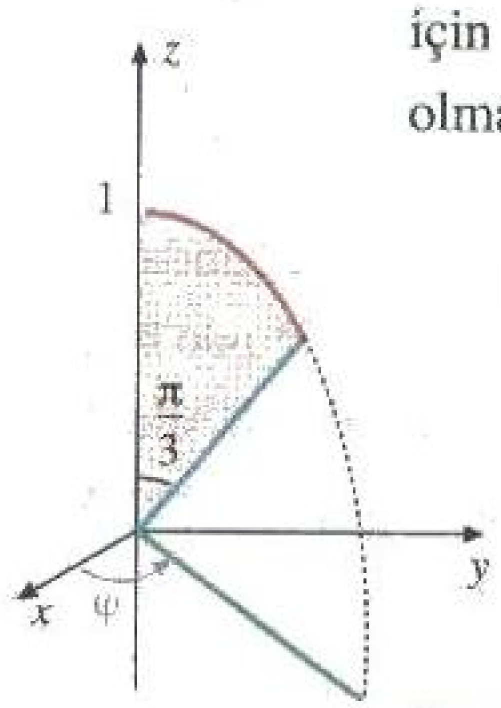
$$3\rho^2\cos^2\theta = (\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi) \Rightarrow$$

$$3\rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

olur. (İntegrasyon bölgesinde $z \ge 0$ dolayısıyla $\cos\theta \ge 0$ olacağına dikkat ediniz). O halde koninin küresel koordinatlardaki denklemi $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ dır.

Buna göre θ nın sınırları $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$ olacaktır.

$\left\{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}\right\}$ bölgesinin integrasyon bölgesini oluşturması için Oz– ekseni etrafında 2π kadar dönmesi gerekir. O halde $0 \le \varphi \le 2\pi$ olmalıdır. Buna göre



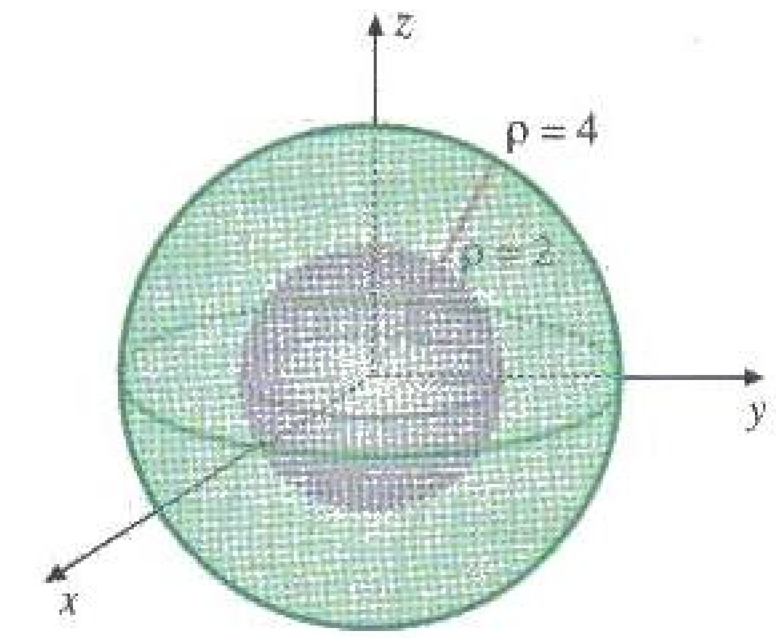
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 \rho^2\left|\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} -\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right)2\pi = \frac{\pi}{3} \qquad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK : G integrasyon bölgesi, $x^2+y^2+z^2=4$ ve $x^2+y^2+z^2=16$ küreleri arasında kalan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint_G \frac{dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

integralini hesaplayınız.



Çözüm : Küresel koordinatlara geçilirse

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^4 \frac{\rho^2\left|\sin\theta\right|}{\left(\rho^2\right)^{3/2}} d\rho d\theta d\varphi$$

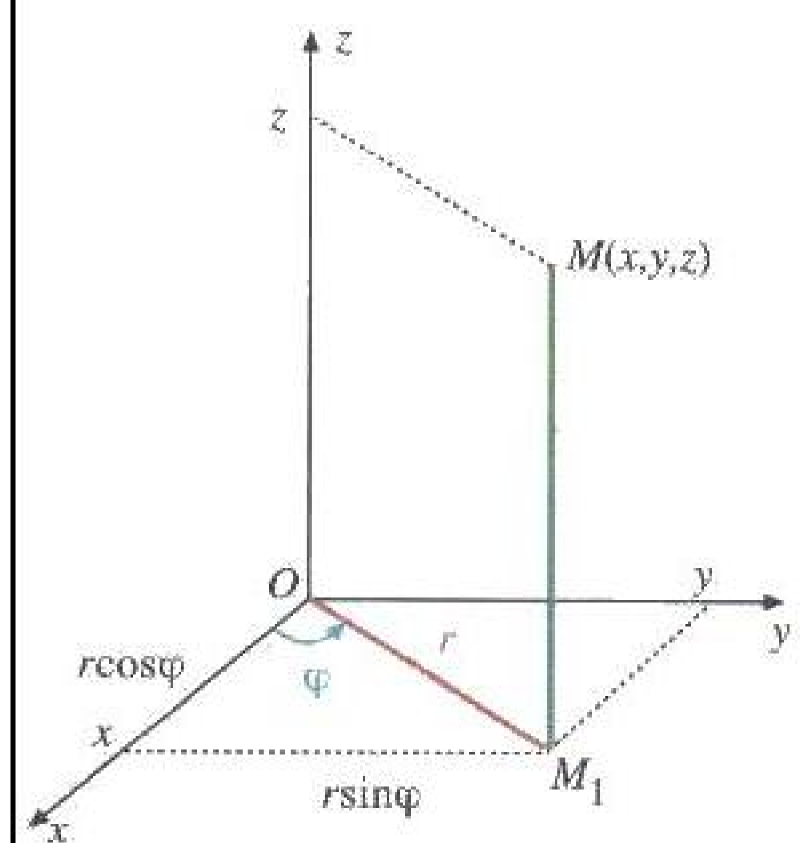
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^4 \sin\theta \frac{1}{\rho} d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \ln\rho \Big|_2^4 d\theta d\varphi = \ln 2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= -\ln 2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \Big|_0^{\pi} d\varphi = 2\ln 2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \ln 2$$

bulunur.

SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR



xyz koordinat sisteminde bir $M(x,y,z)$ noktası alalım. M noktasının xOy düzlemindeki dik izdüşümü M_1 ve M_1 noktasının xOy– düzlemindeki kutupsal koordinatları (r,φ) olsun. Buna göre

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

olur. r,φ,z koordinatlarına M noktasının **silindirik koordinatları** denir.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

olduğundan

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr d\varphi dz$$

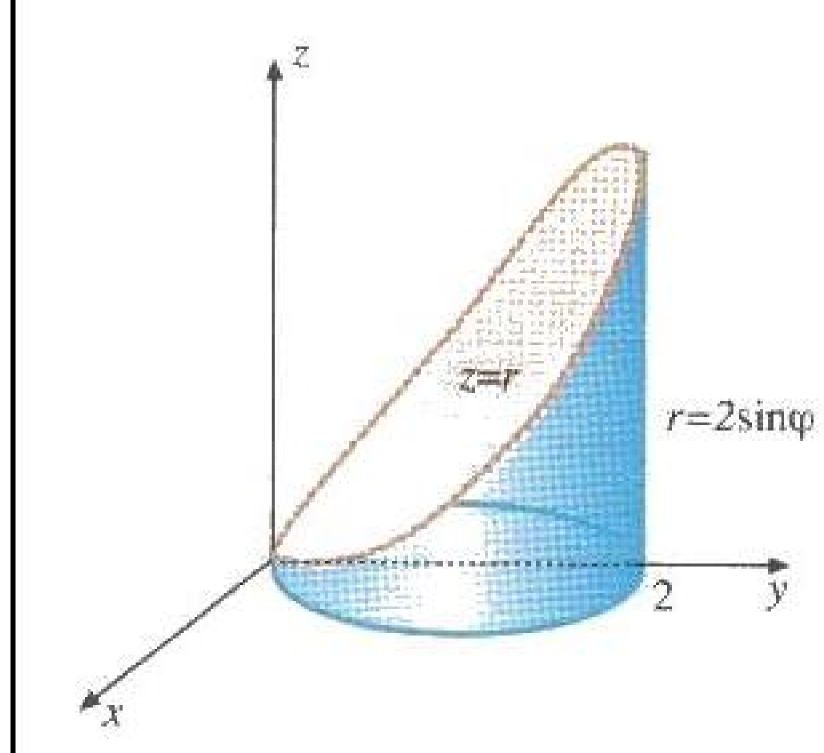
olur.

İntegrasyon bölgesinin bir silindir parçası olması halinde silindirik koordinatları kullanmak yararlıdır.

ÖRNEK : Silindirik koordinatlar yardımıyla

$$I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dzdxdy$$

integralini hesaplayınız.



Çözüm : $z=\sqrt{x^2+y^2}$ koni, $x = \mp\sqrt{2y-y^2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = 1$ dairesel silindir $z=0$, xOy düzlemi olduğundan integrasyon bölgesi, alttan xOy düzlemi, üstten $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi, yandan $x^2+(y-1)^2=1$ silindiri tarafından sınırlanan bölgedir. Bu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ nin silindirik koordinatlardaki denklemi $z=r$, $x^2+(y-1)^2=1$ silindirinin silindirik koordinatlardaki denklemi $r=2\sin\varphi$ dir. Buna göre

$$I=\int_0^{\pi}\int_{r=0}^{2\sin\varphi}\int_{z=0}^{r} zrdzdrd\varphi=\int_0^{\pi}\int_{r=0}^{2\sin\varphi}\frac{z^2}{2}\Big|_0^r rdrd\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi} r^3 drd\varphi$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi} r^4\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=2\int_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi$$

$$=2\int_0^{\pi}\left(\sin^2\varphi\right)^2 d\varphi=2\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi$$

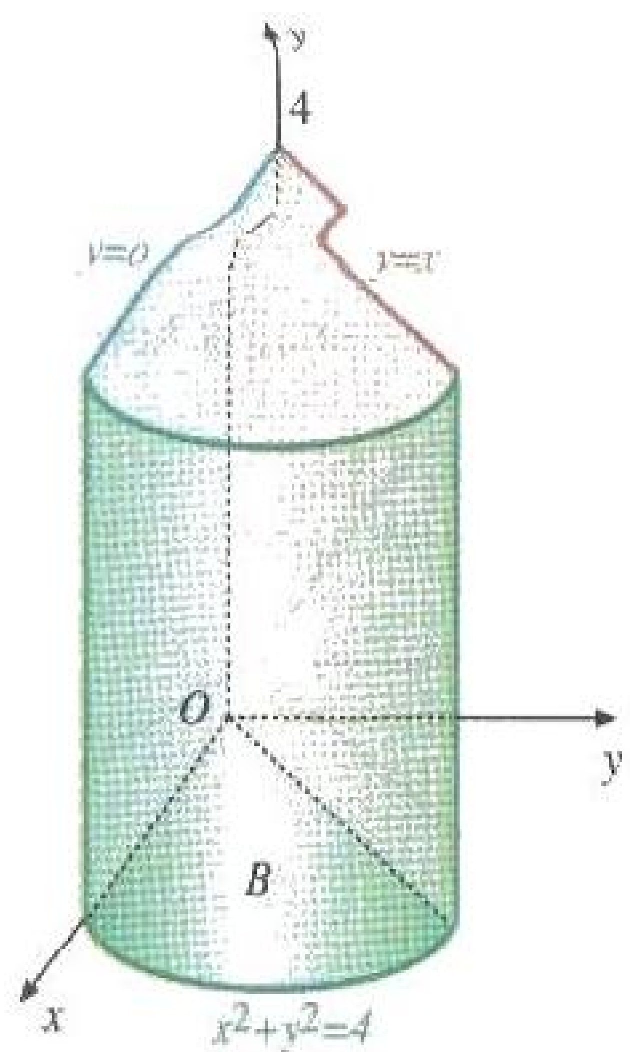
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi$$

olur.

ÖRNEK : Birinci bölgede, $x^2+y^2=4$ silindiri ile $z=0$, $z=4$, $y=0$ ve $y=x$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge üzerinde

$$I=\iiint_G xyz\,dxdydz$$

integralini hesaplayınız.



Çözüm : Sözkonusu bölge yanda verilmiştir.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2}\int_0^{4} r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, z\, r\, dzdrd\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^4 drd\varphi$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi=32\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$=32\,\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=8$$

bulunur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

G bölgesine yerleştirilmiş bir cismin (x,y,z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y,z)$ olsun. İki katlı integrallerdeki düşünceyle, ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_G x\sigma(x,y,z)\,dxdydz,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_G y\sigma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_G z\sigma(x,y,z)\,dxdydz$$

olurlar. Eğer cisim homogen, yani $\sigma(x,y,z)$ sabitse yukarıdaki ifadeler

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_G x\,dxdydz,\quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint_G y\,dxdydz,\quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_G z\,dxdydz$$

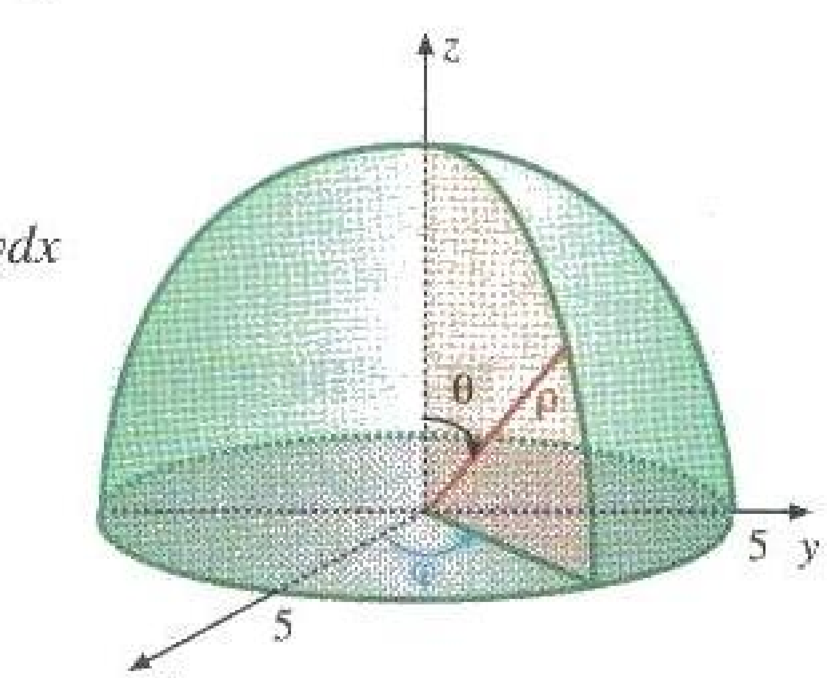
şeklini alırlar.

ÖRNEK : $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ yarı küresiyle $z=0$ düzlemi tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu, her noktada o noktanın küre merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Bu yarı kürenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm :

$$M=\int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{5} k\rho.\rho^2\left|\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi$$



$$= k\cdot\frac{625}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta d\varphi = \frac{625}{4}k\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{625}{4}k\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{625}{2}\pi k$$

olduğundan

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_B zk\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$$

$$= \frac{2}{625\pi k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{5}\rho\cos\theta k\rho\rho^2|\sin\theta|\, d\rho d\theta d\varphi$$

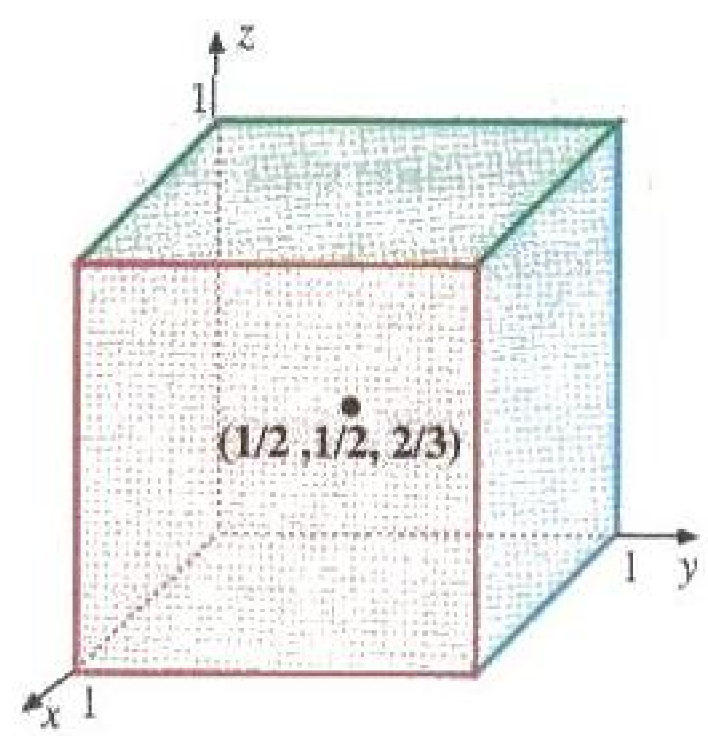
$$= \frac{2}{625\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^5\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2$$

dır. Cisim simetrik olduğundan $\bar{x} = \bar{y} = 0$ dır. O halde cismin ağırlık merkezi $(0, 0, 2)$ noktasıdır.

ÖRNEK : $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan küp içine yerleştirilen bir cismin her noktadaki yoğunluğu o noktanın $x\,O\,y$ düzlemine olan uzaklığıyla orantılıdır. Bu cismin ağırlık merkezini bulunuz.



Çözüm :

$$M = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 kz\, dzdydx = k\int_0^1\int_0^1\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 dydx$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^1\int_0^1 dydx = \frac{k}{2}\int_0^1 y\Big|_0^1 dx = \frac{k}{2}$$

olur.

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_B x\,\sigma(x,y,z)\, dxdydz = \frac{2}{k}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\, kzdydx$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 xdydx = \int_0^1\int_0^1 xdydx = \frac{1}{2}$$

bulunur. Benzer şekilde $\bar{y} = \frac{1}{2}$ olduğu gösterilebilir.

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_B z\, kz\, dzdydx = \frac{2}{k}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 kz^2\, dzdydx$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1\frac{z^3}{3}\Big|_0^1 dydx = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 dydx = \frac{2}{3}$$

olur. O halde cismin ağırlık merkezi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ noktasıdır.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

(x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ olan bir cismin koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\,\sigma(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\,\sigma(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\,\sigma(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

orijine göre eylemsizlik momenti

$$I_O = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\,\sigma(x, y, z)\, dxdydz$$

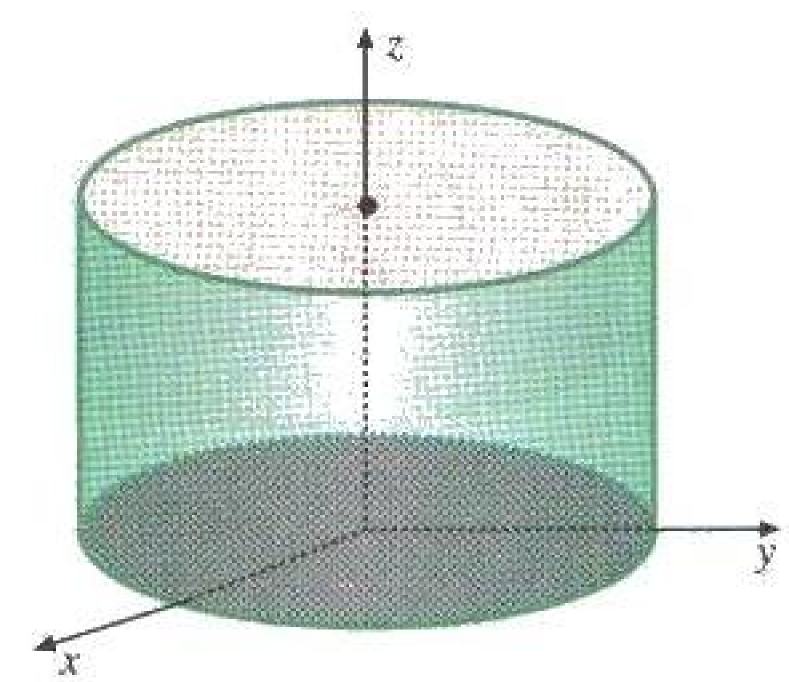
olacaktır. Çünkü bir $A(x, y, z)$ noktasının Ox– eksenine olan uzaklığının karesi $y^2 + z^2$, Oy– eksenine olan uzaklığının karesi $x^2 + z^2$, Oz– eksenine olan uzaklığının karesi $x^2 + y^2$ ve orijine olan uzaklığının karesi $x^2 + y^2 + z^2$ dir.

Eksenlere göre tanımlanan eylemsizlik momentlerine benzer olarak, koordinat düzlemlerine göre de eylemsizlik momenti tanımlanabilir. Bir $A(x, y, z)$ noktasının xOy– düzlemine olan uzaklığı $|z|$, $x\,O\,z$– düzlemine olan uzaklığı $|y|$, $y\,O\,z$– düzlemine olan uzaklığı $|x|$ olduğundan, sözkonusu düzlemlere göre eylemsizlik momentleri sırasıyla

$$I_{xy} = \iiint_G z^2\,\sigma(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2\,\sigma(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2\,\sigma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$



olacaktır.

ÖRNEK : Taban yarıçapı 4, yüksekliği 3 birim olan bir dik dairesel silindirin, taban düzleminde bulunan ve tabanın merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız. Cisim homogen olup $\delta(x, y, z) = 1$ dir.

Çözüm : Silindirin ekseni olarak Oz– eksenini ve tabanın merkezinden geçen eksen olarak da Ox– eksenini seçelim. Problem sözkonusu silindirin Ox– eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplamaya indirgenir. Buna göre

$$I_x = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{0}^{3} \left(y^2+z^2\right) dzdydx$$

olur. Silindirik koordinatlara geçilirse

$$I_x = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^3 \left(r^2\sin^2\varphi + z^2\right) r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(3r^3\sin^2\varphi + 9r\right) dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}r^4\sin^2\varphi + \frac{9}{2}r^2 \Big|_0^4 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(192\sin^2\varphi + 72\right) d\varphi$$

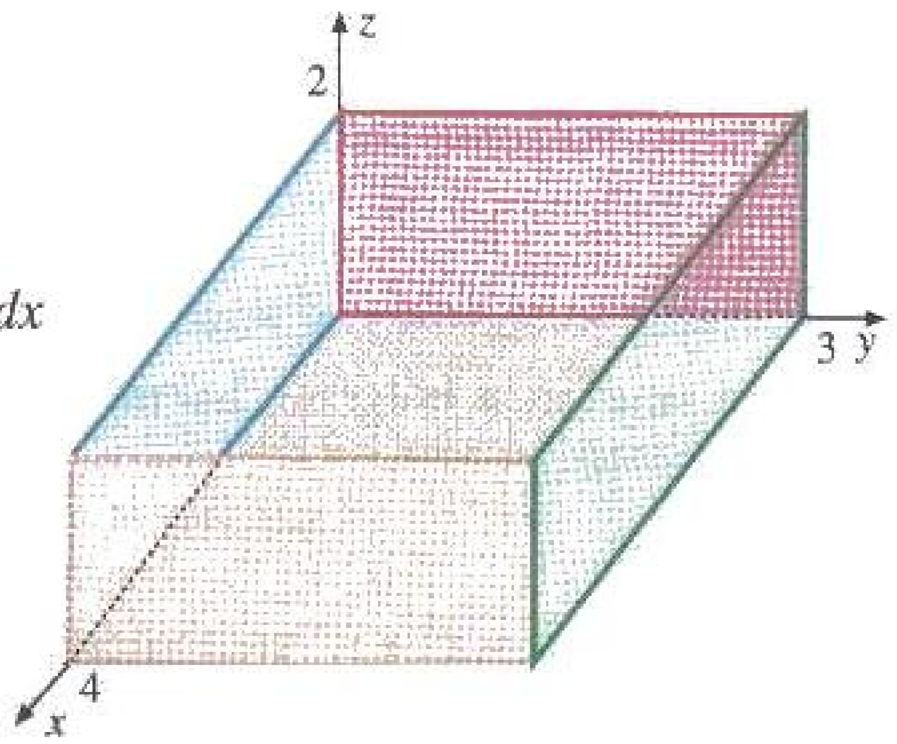
$$= \int_0^{2}\left(192\frac{1-\cos 2\varphi}{2} + 72\right) d\varphi = 96\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + 72\varphi \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 192\pi + 144\pi = 336\pi$$

olur.

ÖRNEK : $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=3,\ z=0$ ve $z=2$ düzlemleri tarafından sınırlanan dikdörtgenler prizmasının her (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = z$ dir. Bu cismin orijine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

Çözüm :



$$I_O = \int_0^4\int_0^3\int_0^2 \left(x^2+y^2+z^2\right) z dz dy dx$$

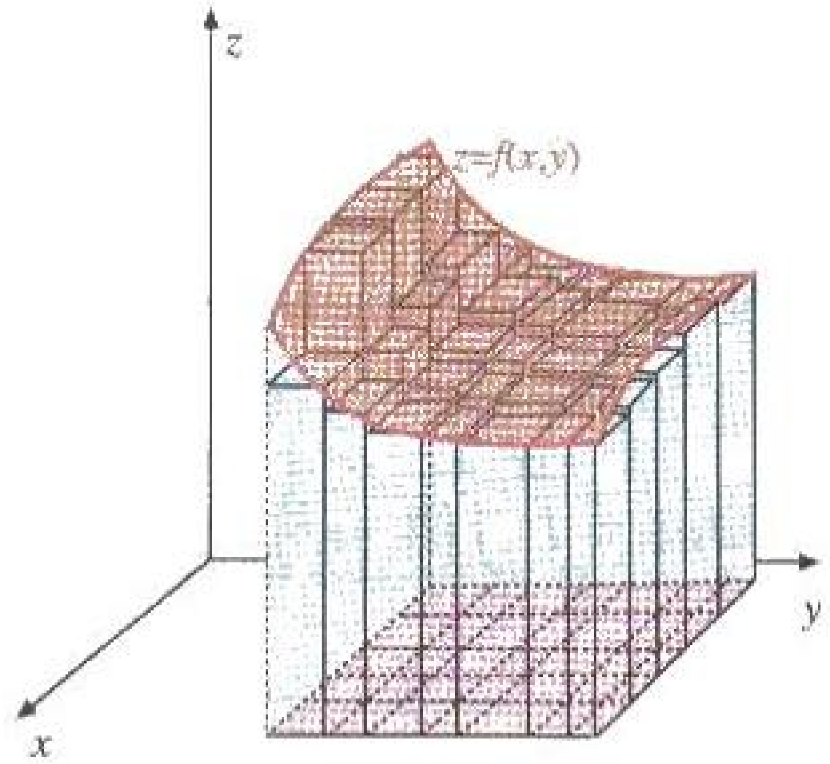
$$= \int_0^4\int_0^3 \left[\left(x^2+y^2\right)\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right]\Big|_0^2 dydx$$

$$= \int_0^4\int_0^3 \left[2\left(x^2+y^2\right) + 4\right] dydx$$

$$= \int_0^4 \left(2x^2y + \frac{2}{3}y^3 + 4y\right)\Big|_0^3 dx$$

$$= \int_0^4 \left(6x^2+30\right) dx = \left(2x^3+30x\right)\Big|_0^4$$

$= 248$ olur.



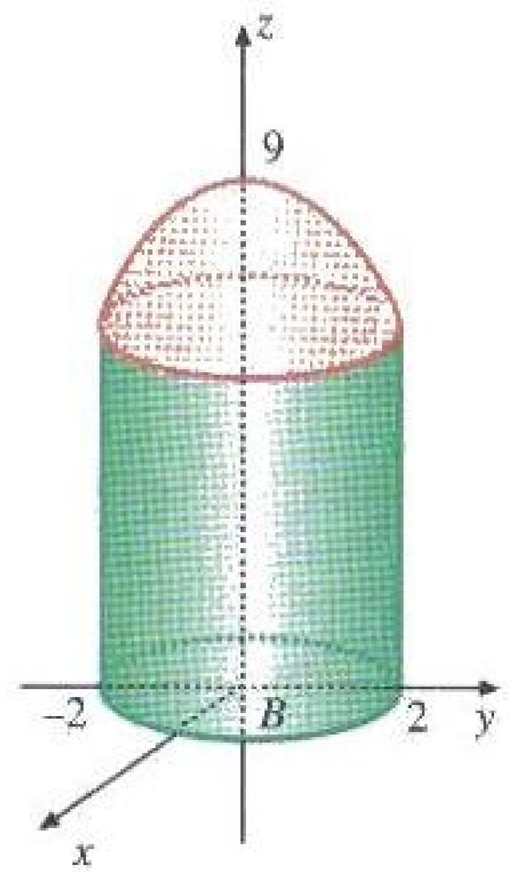
f fonksiyonu B bölgesinde sürekli ve pozitif tanımlı ise

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\ \Delta A_k$$

ifadesi, taban alanı ΔA_k, yüksekliği $f(x_k^*, y_k^*)$ olan dik pirizmaların hacimler toplamıdır. Eğer B bölgesi parçalanmanın normu sıfıra gidecek şekilde parçalanırsa bu hacimlerin toplamı, $z = f(x, y)$ denklemli yüzey, B bölgesi ve B bölgesini taban kabul eden dik silindir arasında kalan bölgenin V hacmine eşit olur. Şu halde,

$$V = \iint_B f(x, y)\, dxdy \qquad (14.4)$$

olur.



ÖRNEK : $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidi, xOy düzlemi ve $x^2 + y^2 = 4$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

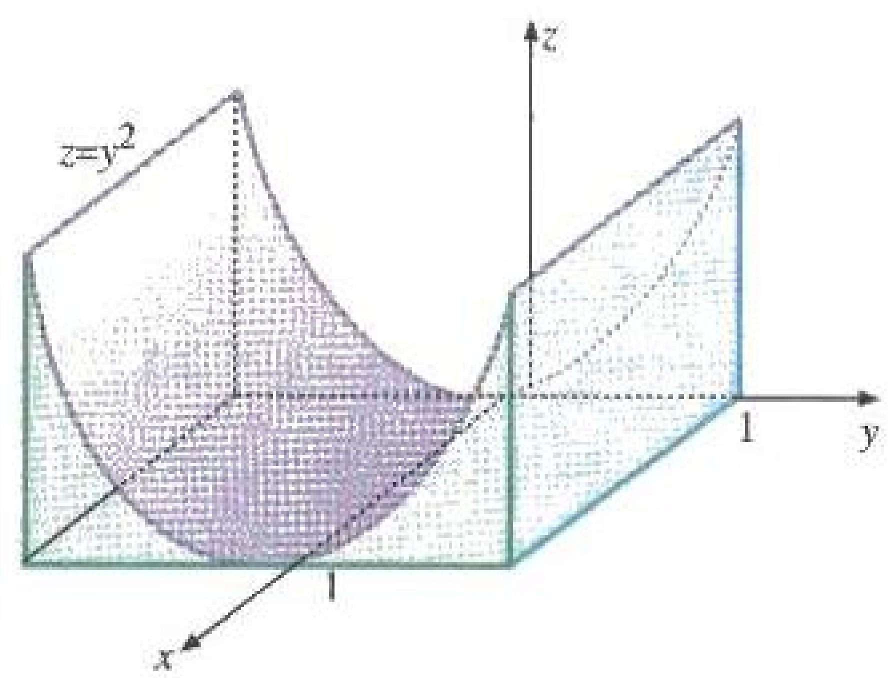
Çözüm : Söz konusu bölge yanda gösterilmiştir. B integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 \le 4$ dairesidir.

$$V = \iint_B f(x, y)\, dxdy = \iint_B (9 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (9-r^2) r dr d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 (9r - r^3) dr d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^2 d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 14 d\varphi = 56\,\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= 28\pi$ birimküp.



ÖRNEK : $z = y^2$ silindiri ile $x=0,\ z=0,\ y=-1,\ y=1$ ve $x=1$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : B bölgesi, $x=0$, $x=1$, $y=-1$ ve $y=1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgedir. Buna göre,

$$V = \iint_B f(x,y)\, dxdy = \int_0^1\int_{-1}^1 y^2 dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^1 dx = \frac{2}{3}\int_0^1 dx$$

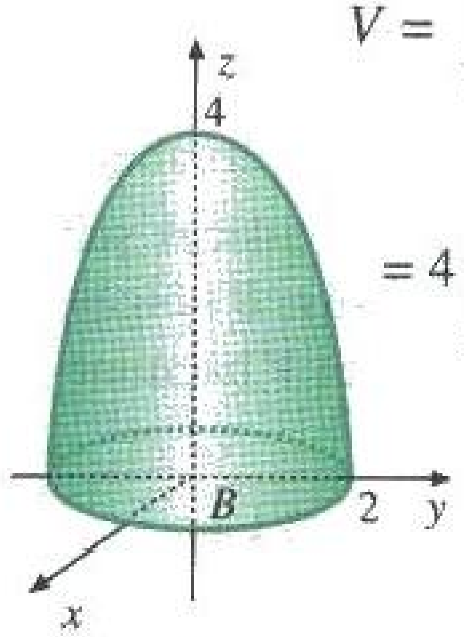
$$= \frac{2}{3}$$

birimküp olur.

ÖRNEK : $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile xOy düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm : Verilen paraboloidin xOy düzlemiyle arakesiti $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir ($z = 4 - x^2 - y^2$ denkleminde $z = 0$ konularak bulunur).

O halde integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 = 4$ çemberi tarafından sınırlanan dairesel bölgedir. Buna göre



$$V = \iint_B z\, dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(4 - x^2 - y^2\right) dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \left(4 - r^2\right) r\, drd\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \left(4r - r^3\right) drd\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right) \Big|_0^2 d\varphi = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 8\pi \text{ br}^3$$

bulunur.

ÖRNEK : $z = e^{-x^2-y^2}$ yüzeyi ile xOy düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

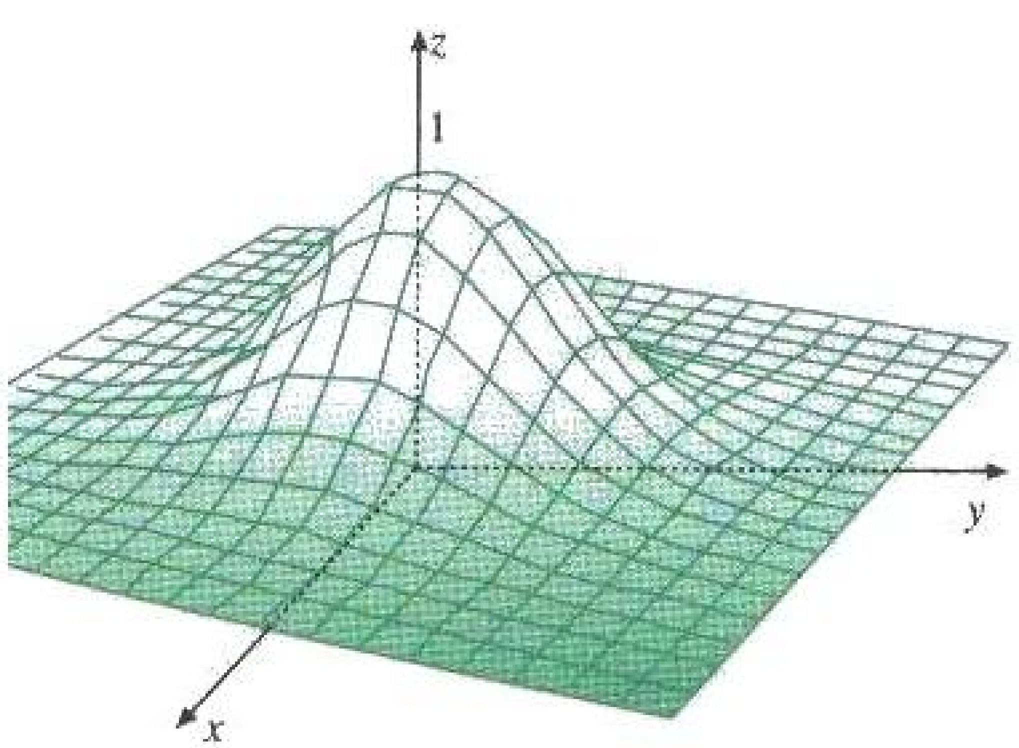
Çözüm : İstenen bölgenin hacmi

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

genelleştirilmiş integralidir.

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dydx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \left(2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$



$$= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, drd\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

birimküp olur.

$$= \frac{1}{2k\pi} k \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \cos\varphi\, drd\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + \cos^3\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos\varphi + (1 + \cos 2\varphi) + \left(1 - \sin^2\varphi\right) \cos\varphi \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\sin\varphi + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}$$

bulunur.

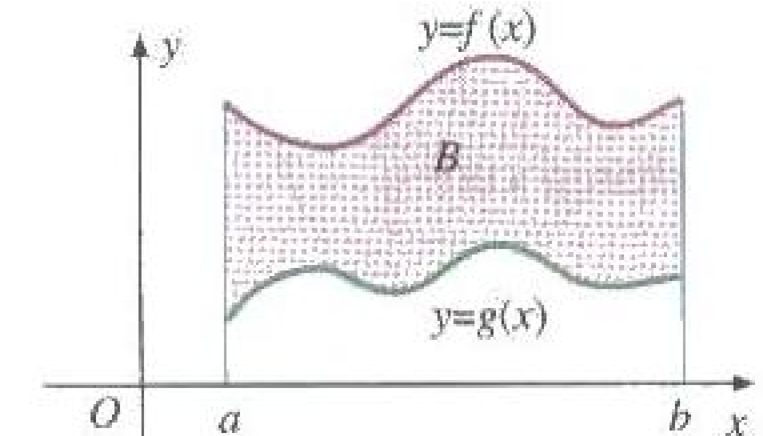
$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint y\, \sigma(x,y)\, dxdy = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \sin\varphi \frac{k}{r} r\, drd\varphi$$

$$= \frac{k}{2k\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \frac{(1 + \cos\varphi)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0$$

olacağından, ağırlık merkezi $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasıdır.

DÖNEL CİSİMLERİN HACMİ

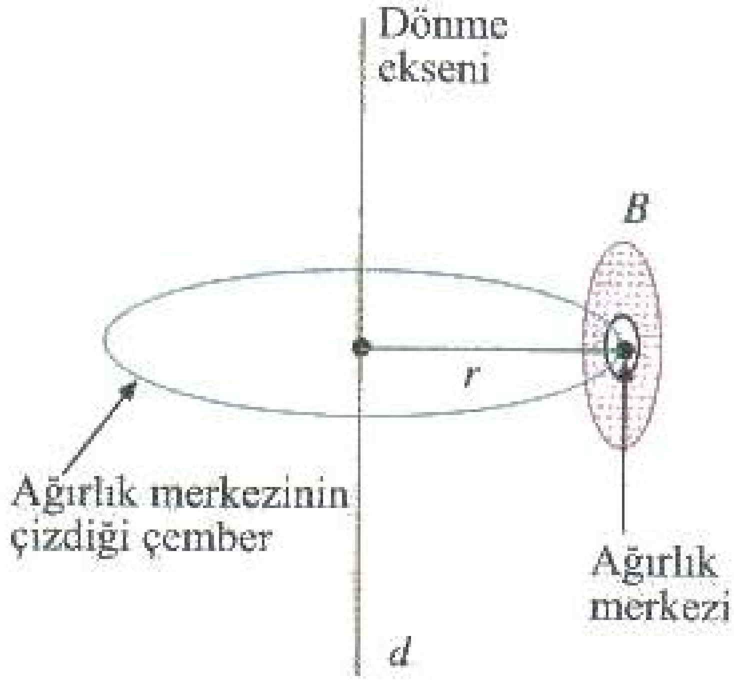


Şimdi $B = \{ (x, y) : a \le x \le b\ ,\ g(x) \le y \le f(x) \}$ bölgesine yerleştirilmiş bir homogen levhanın bu bölgeyi kesmeyen bir d doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi ile bu bölgenin ağırlık merkezinin koordinatları arasındaki bağıntıyı bulmaya çalışalım. B bölgesinin alanı A olsun. Dönme ekseni olarak $y-$ eksenini seçelim. Silindirik tabakalar yöntemine göre, B bölgesinin $y-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = \int_a^b 2\pi x \left[f(x) - g(x) \right] dx = 2\pi \int_a^b x \left(\int_{g(x)}^{f(x)} dy \right) dx$$

$$= 2\pi \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} x\, dydx = 2\pi \iint_B x\, dydx = 2\pi \bar{x} A$$

olur. $2\pi\bar{x}$ ifadesi, B bölgesinin ağırlık merkezinin çizmiş olduğu çemberin çevre uzunluğu ve A, bölgenin alanı olduğundan, şu teoremin bir özel durumu ispatlanmıştır.

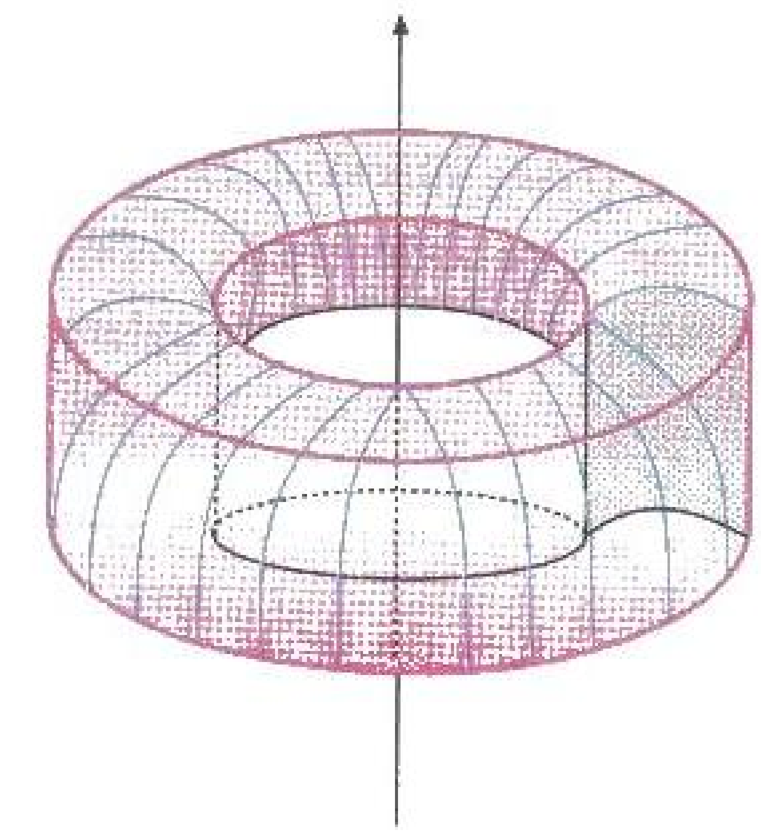


TEOREM (Birinci Pappus Teoremi)

Düzlemsel bir B bölgesi, kendisiyle aynı düzlem içinde bulunan ve B nin içinden geçmeyen bir eksen etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel cismin V hacmi, B bölgesinin alanı ile B bölgesinin ağırlık merkezinin çizmiş olduğu çemberin çevre uzunluğunun çarpımına eşittir. Buna göre B bölgesinin alanı A, ağırlık merkezinin dönme eksenine olan uzaklığı r ise

$$V = 2\pi r \, . \, A$$

olur.



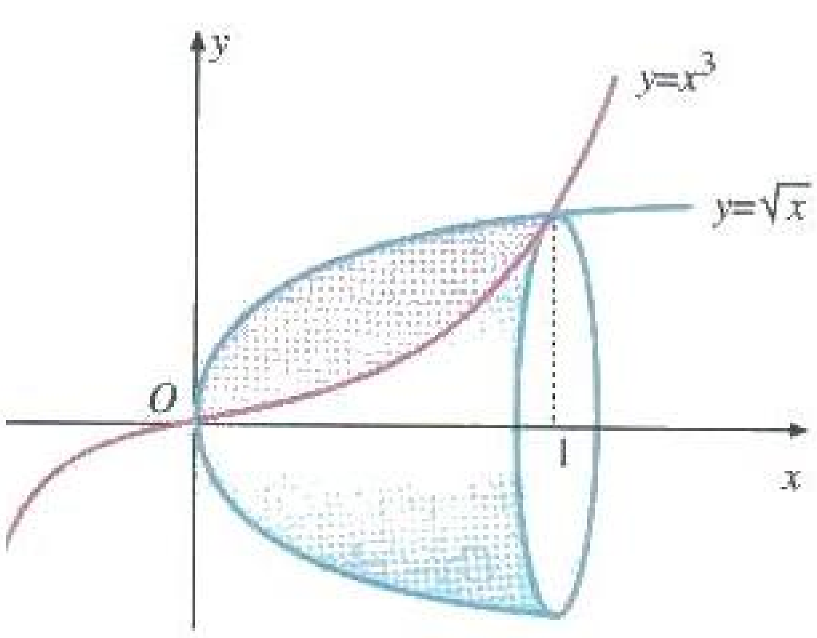
Eğer dönme ekseni $y-$ ekseni ise $r = \bar{x}$ olacağından

$$V = 2\pi \bar{x} \, . \, A$$

olur. Eğer dönme ekseni $x-$ ekseni ise $r = \bar{y}$ olur. Dolayısıyla

$$V = 2\pi \bar{y} \, . \, A$$

yazılabilir.



ÖRNEK : $y = x^3$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin $x-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

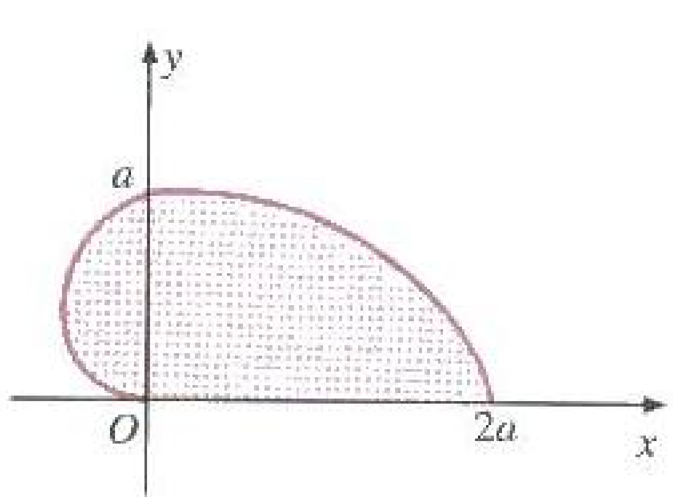
Çözüm : $V = 2\pi \bar{y} A = 2\pi \, . \, \dfrac{A}{A} \iint\limits_B y \; dx\, dy$

$$= 2\pi \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y \; dydx = \pi \int_0^1 y^2 \Big|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \pi \int_0^1 (x - x^6)\, dx = \frac{5\pi}{14} \text{ br}^3$$

olur.

ÖRNEK : $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısı ile $x-$ ekseni arasında kalan bölgenin $x-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmını bulunuz.

Çözüm : Söz konusu bölge yanda gösterilmiştir.



$$V = 2\pi \iint\limits_B y \; dxdy = 2\pi \iint\limits_B r \sin\varphi\, r dr d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin\varphi\, dr d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3 \Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2\pi a^3}{3.4} (1+\cos\varphi)^4 \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3$$

bulunur.