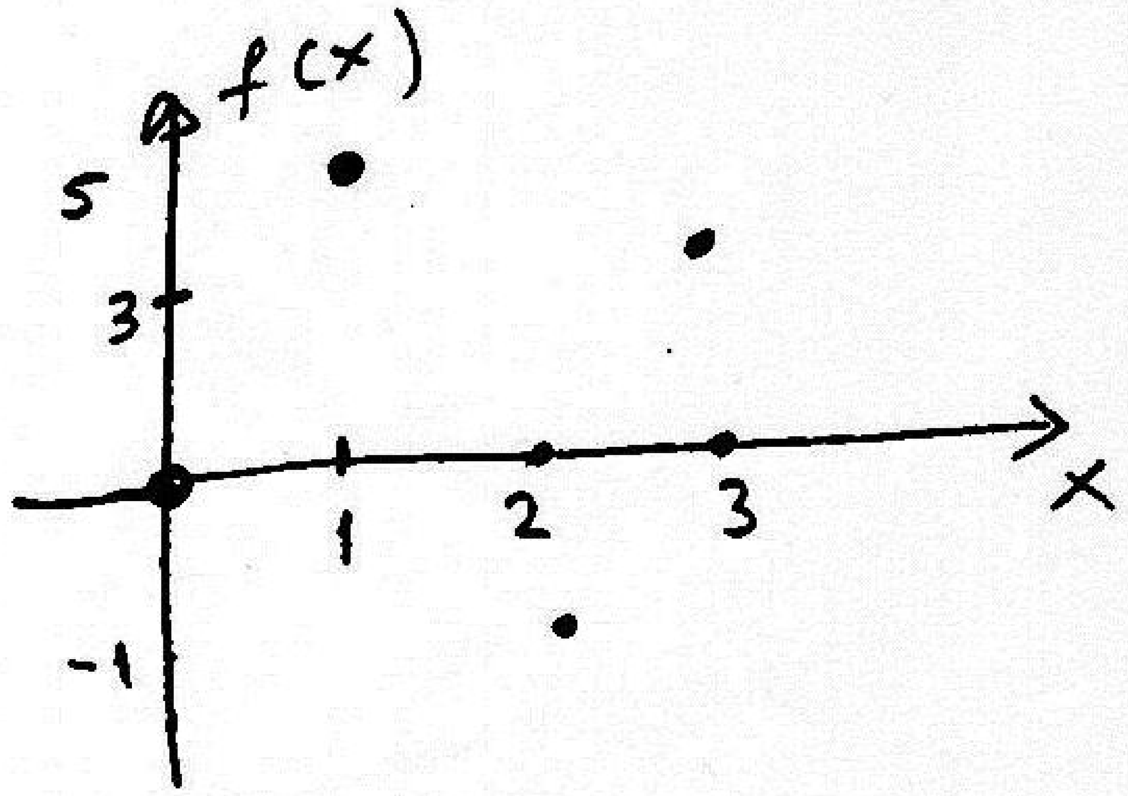
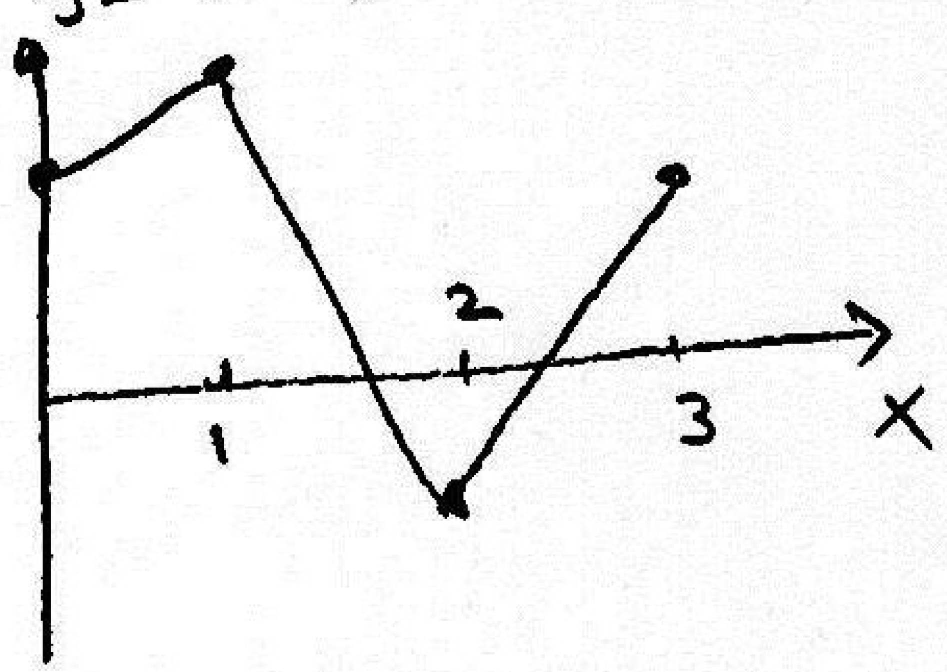
$y = f(x)$ grafiği

1)

x	y = f(x)
0	3
1	5
2	-1
3	4

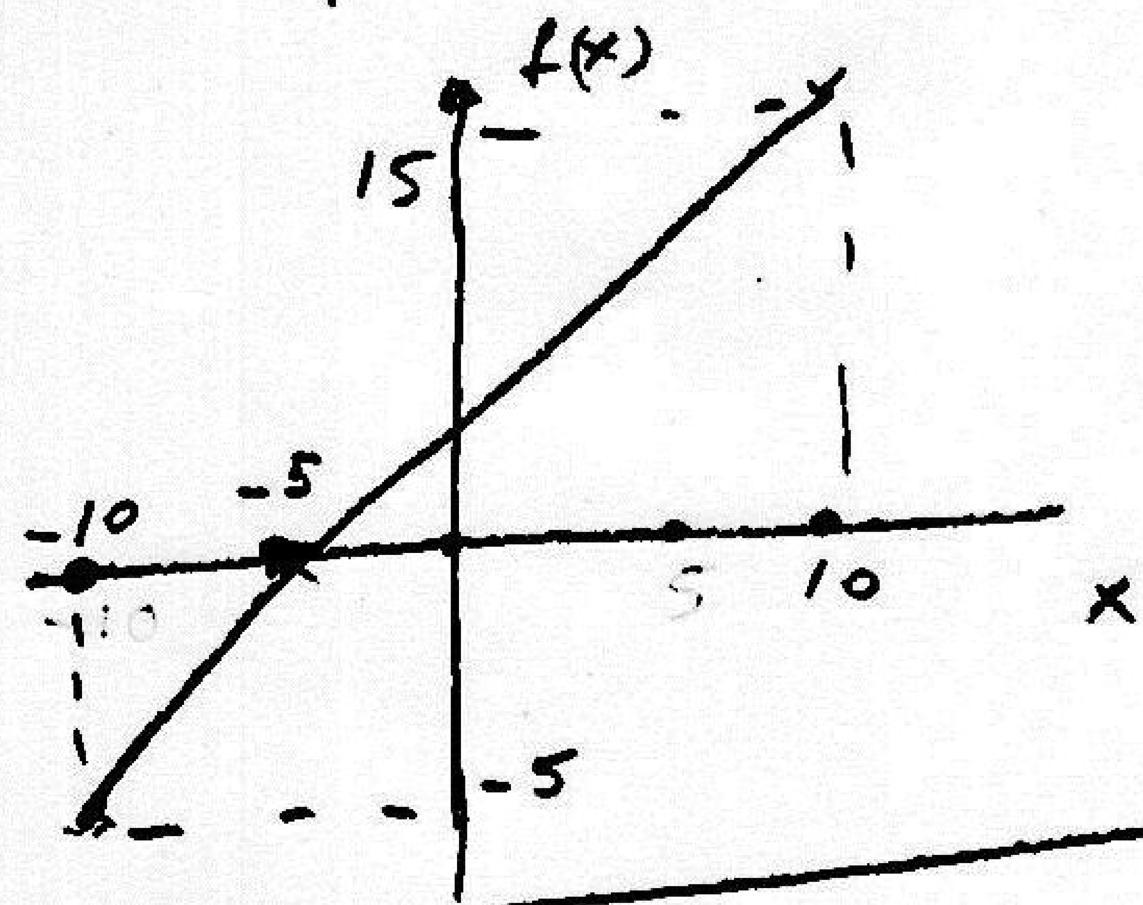


$y = f(x)$



2) $y = f(x) = x + 5$

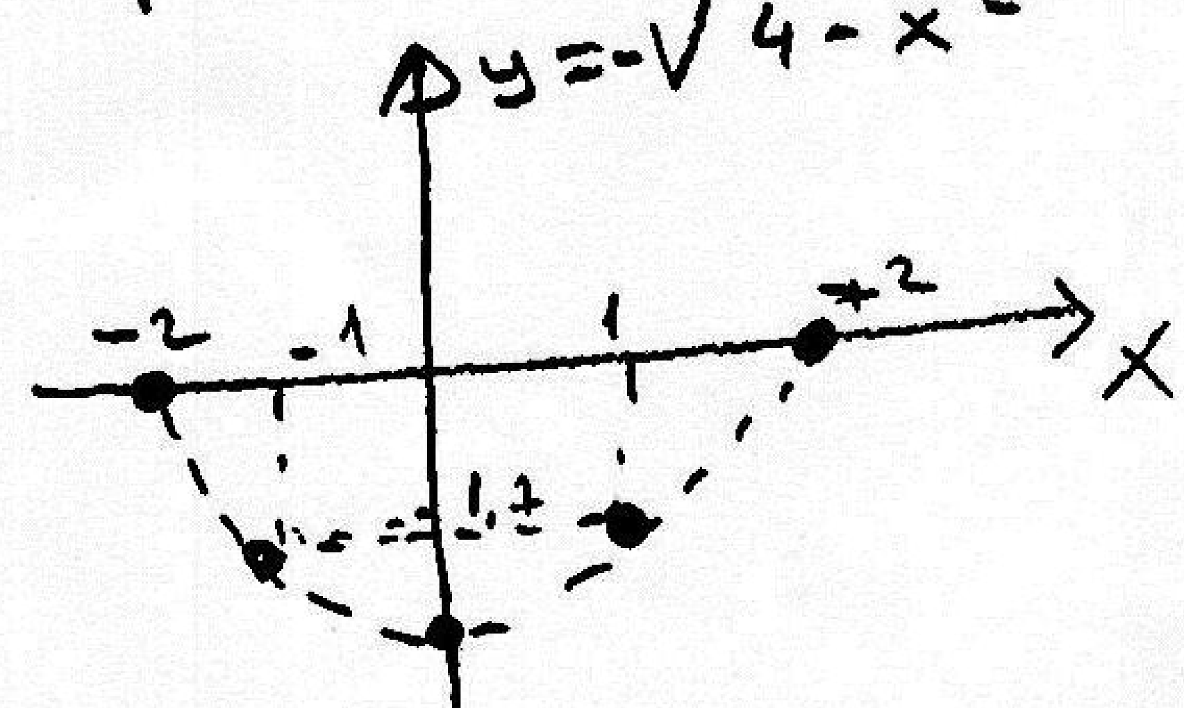
x	-10	-5	0	10
f(x)	-5	0	5	15



3) $y = -\sqrt{4 - x^2}$

fonksiyon $-2 < x < 2$ aralığında tanımlıdır

x	-5	-2	-1	0	1	2	7
y	Tanımsız	0	-1.7	-2	-1.7	0	*



4)

$x^2 + y^2 = 4$

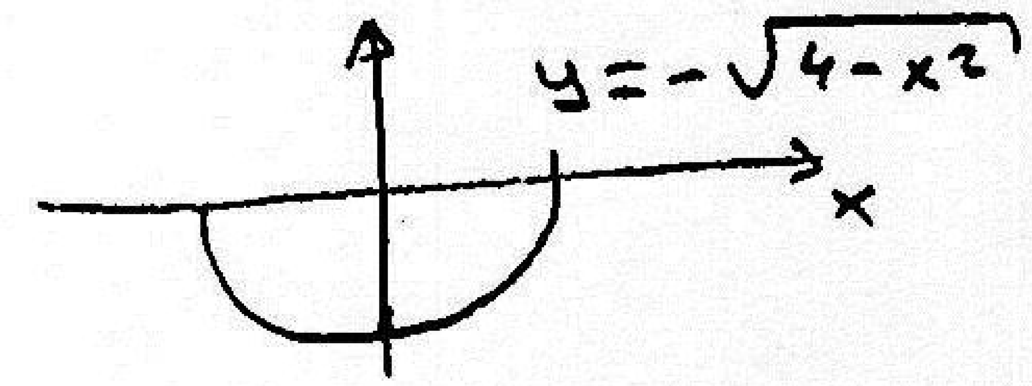
$y^2 = 4 - x^2$

$y = \sqrt{4 - x^2}$ ①

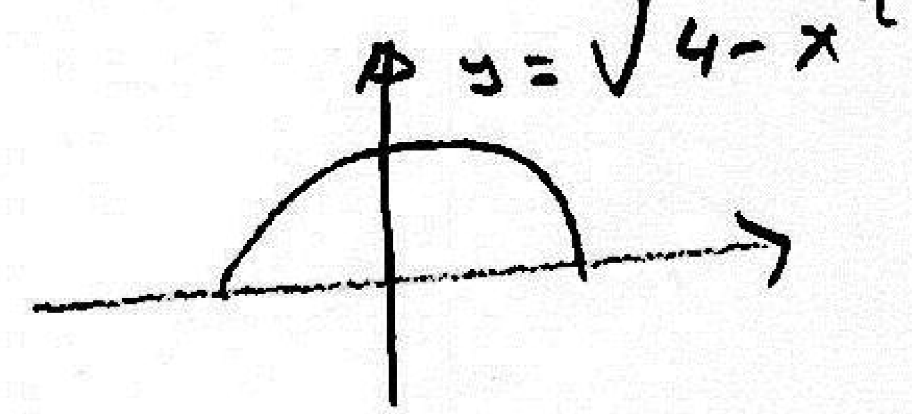
$y = -\sqrt{4 - x^2}$ ②

fonksiyonu 2 ayrı grafik olarak çizeriz sonra birleştiririz.

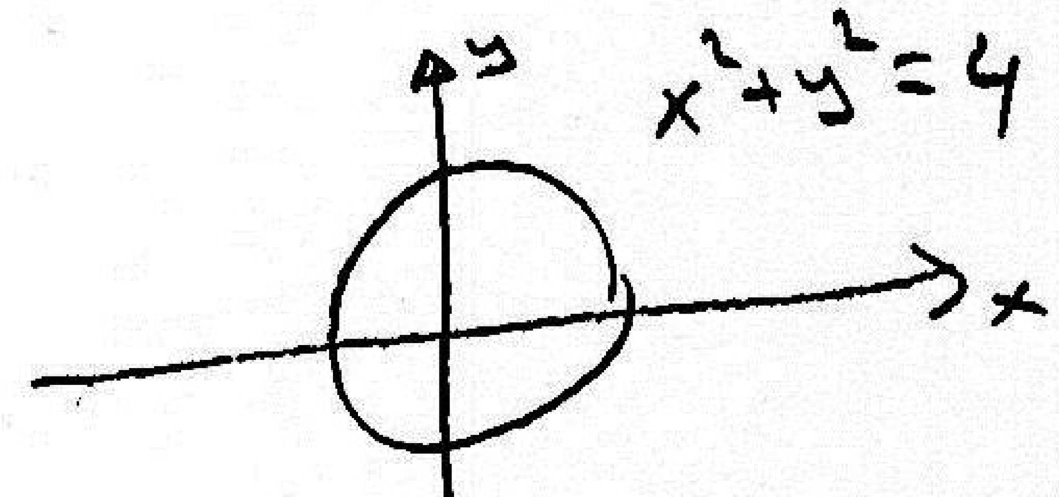
$y = -\sqrt{4 - x^2}$



$y = \sqrt{4 - x^2}$



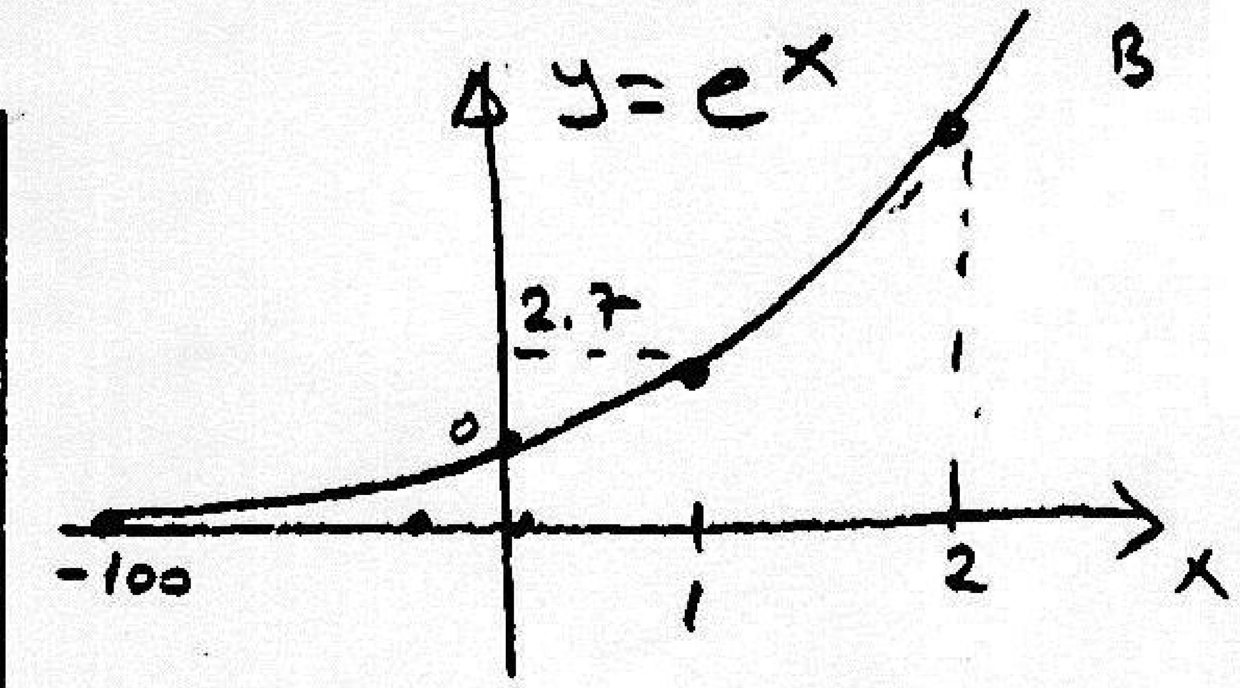
$x^2 + y^2 = 4$



5) $y = e^x$

x	-100	-1	0	1	2
y	~0		1	2.71	

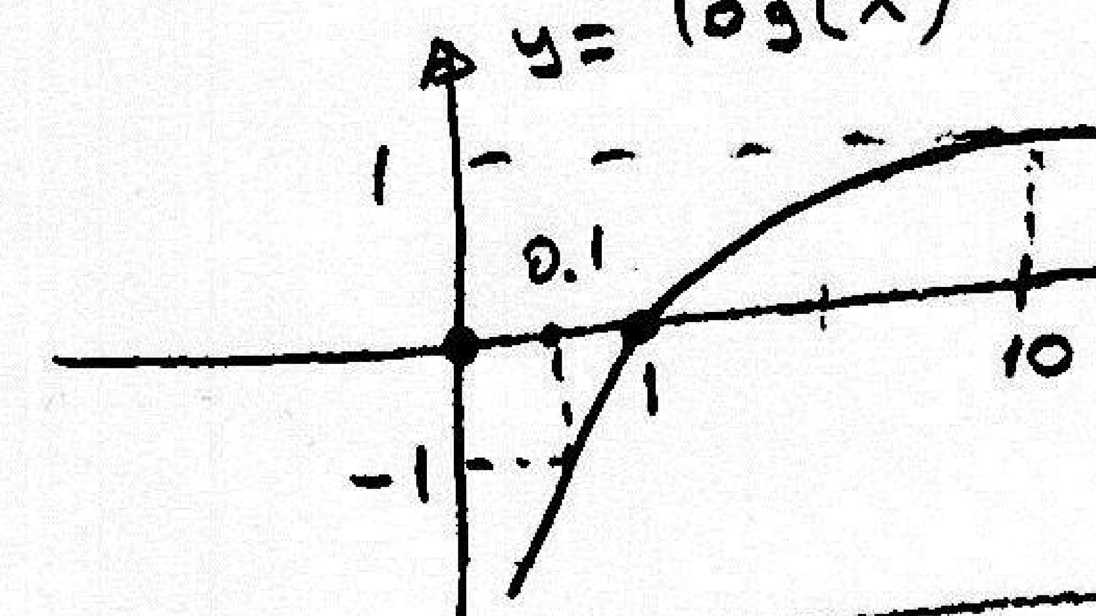
$y = e^x$



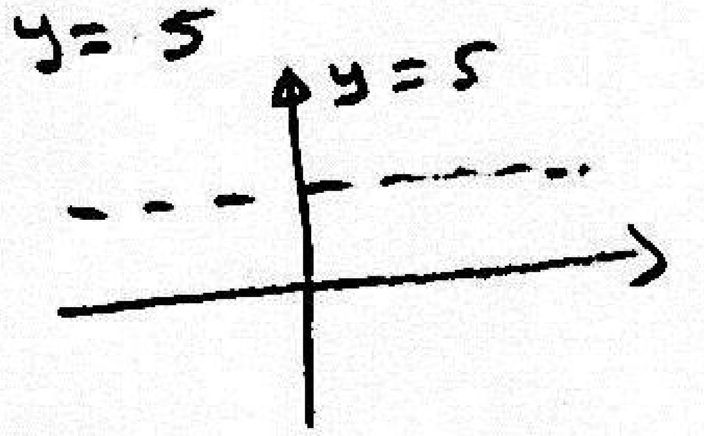
6) $y = \log(x)$

x	-2	0	0.01	0.1	1	10
y	Tanımsız	Tanımsız	-2	-1	0	1

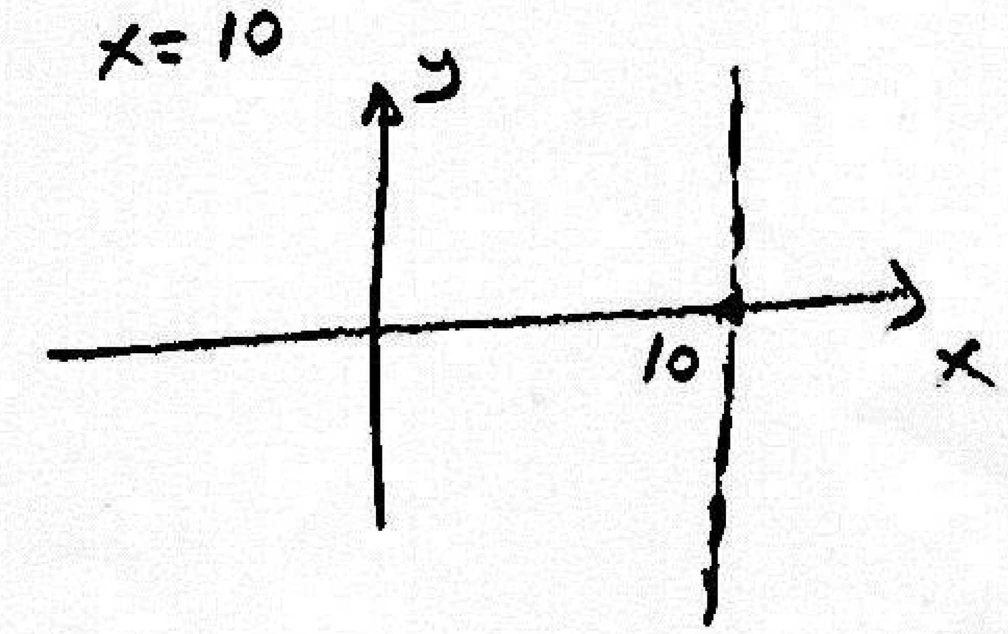
$y = \log(x)$



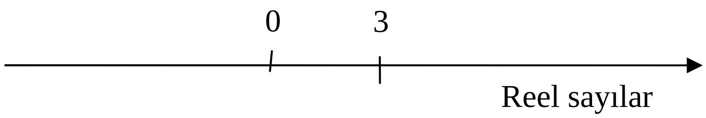
7) $y = 5$



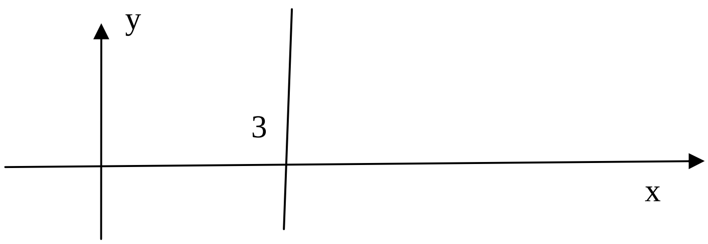
8) $x = 10$



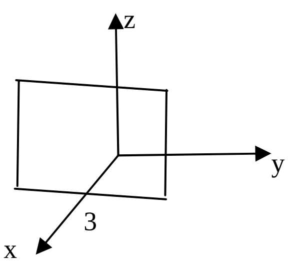
N61)x=3: sayi ekseninde bir nokta,



N62)x=3: x-y duzleminde bir dogru

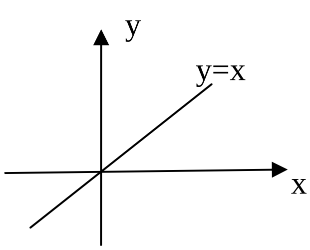


N63)x=3: x-y-z uzayinda bir duzlem belirtir.

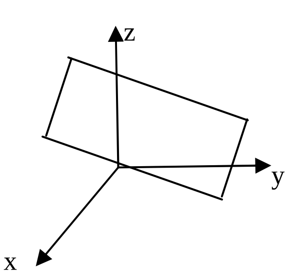


N64)y=g(x): duzlemde bir cizgi grafigi uzayda bir yuzey grafigini temsil eder.

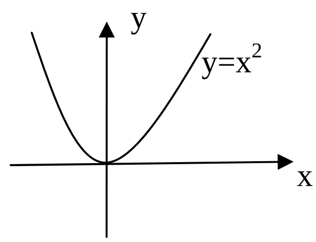
y=x: x-y duzleminde bir dogru



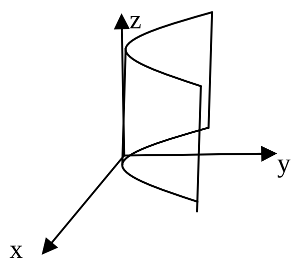
N65)y=x: uzayda bir duzlem beirtir.



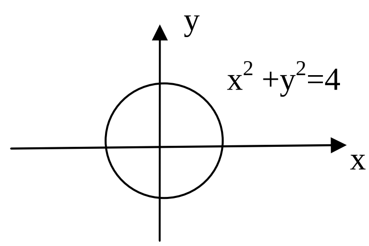
N66)$y=x^2$: x-y duzleminde bir parabol



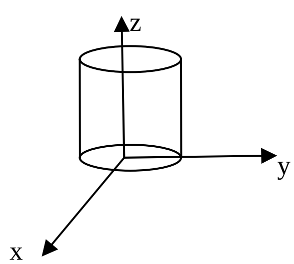
N67)$y=x^2$: uzayda bir parabol yuzeyi belirtir.



N68)$x^2 + y^2 = 4$ duzlemde bir daire

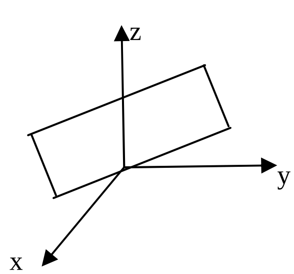


N69)$x^2 + y^2 = 4$ uzayda bir daire yuzeyi(silindir)



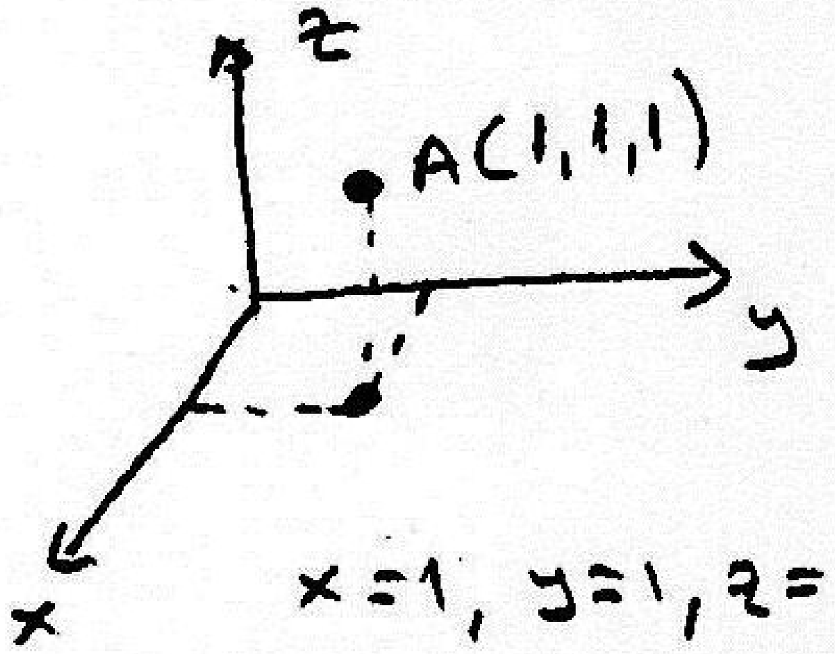
N70)y=f(x) duzlemde bir egri uzayda bir yuzey belirler. y=f(x) fonksiyonu bazan g(x,y)=0 seklinde verilir. g(x,y)=0 duzlemde bir egri uzayda bir yuzey belirtir.

N71)z=x +y uzayda bir duzlem

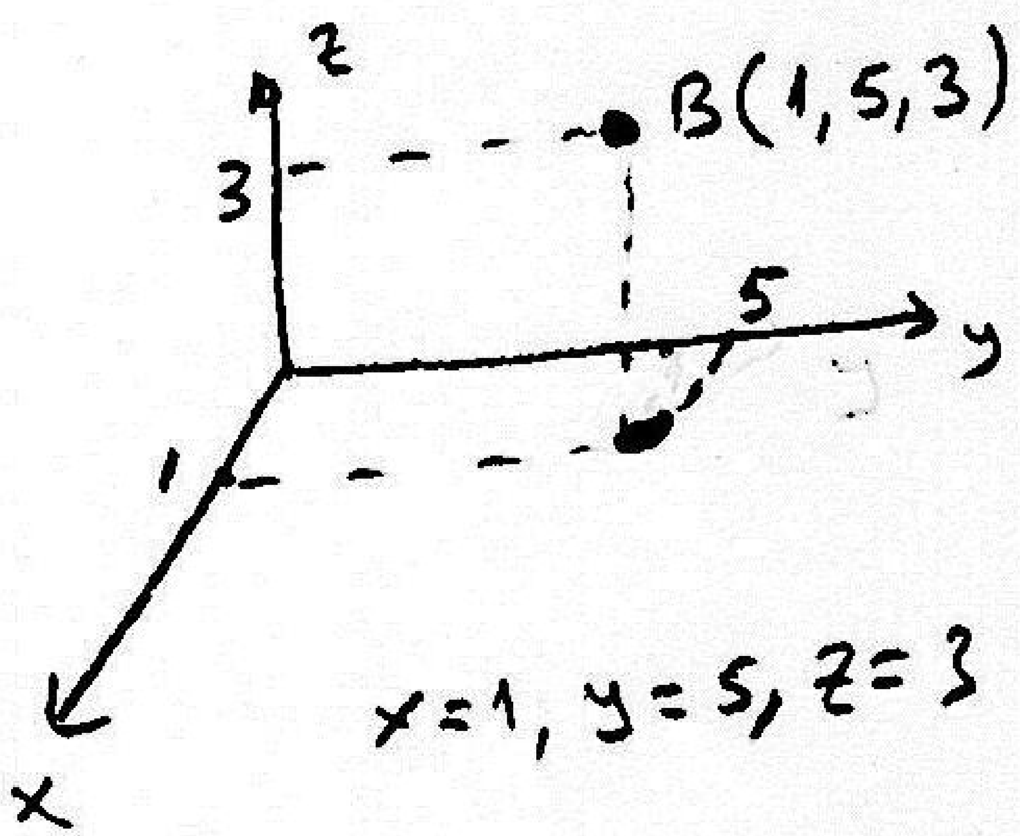


---

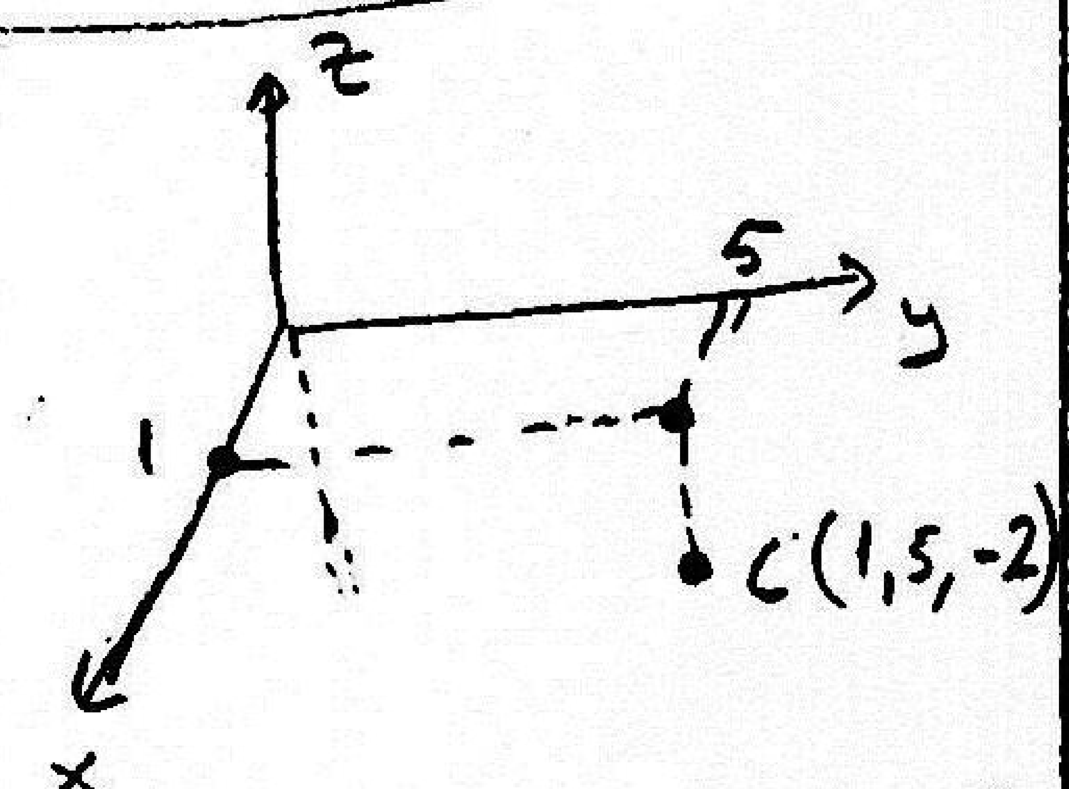
x, y, z ekseninde grafik



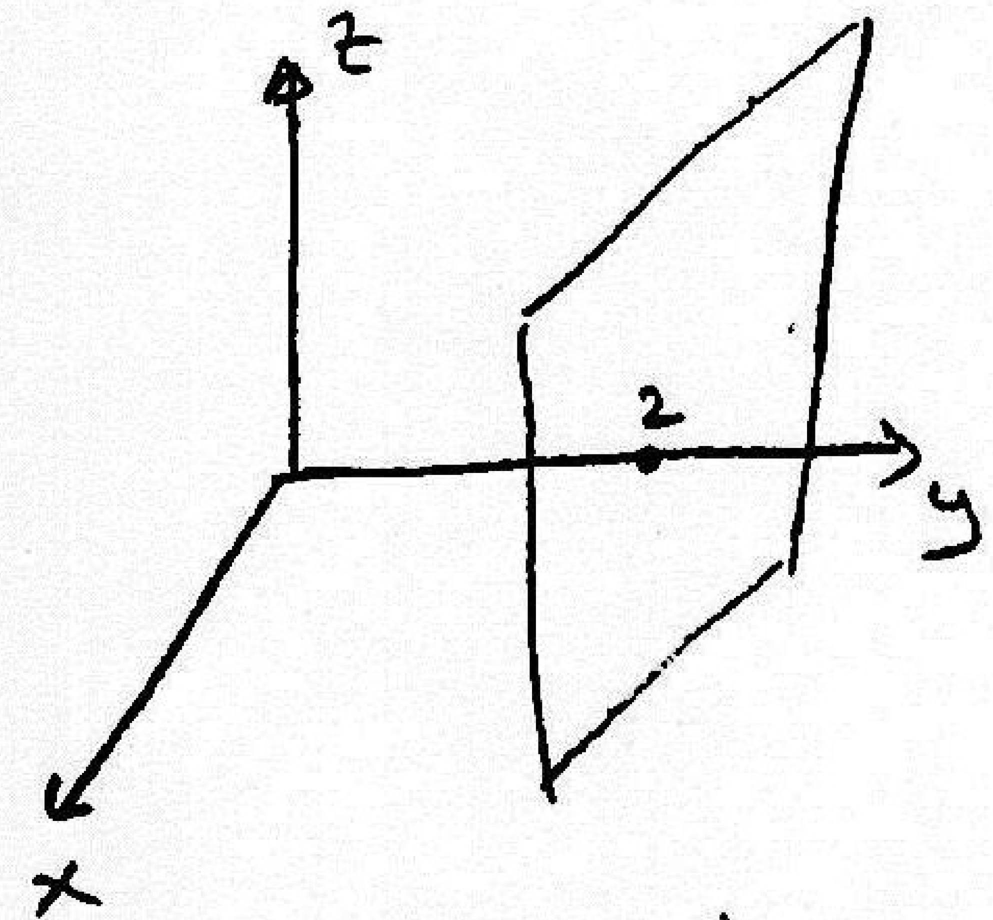
$x=1,\ y=1,\ z=1$



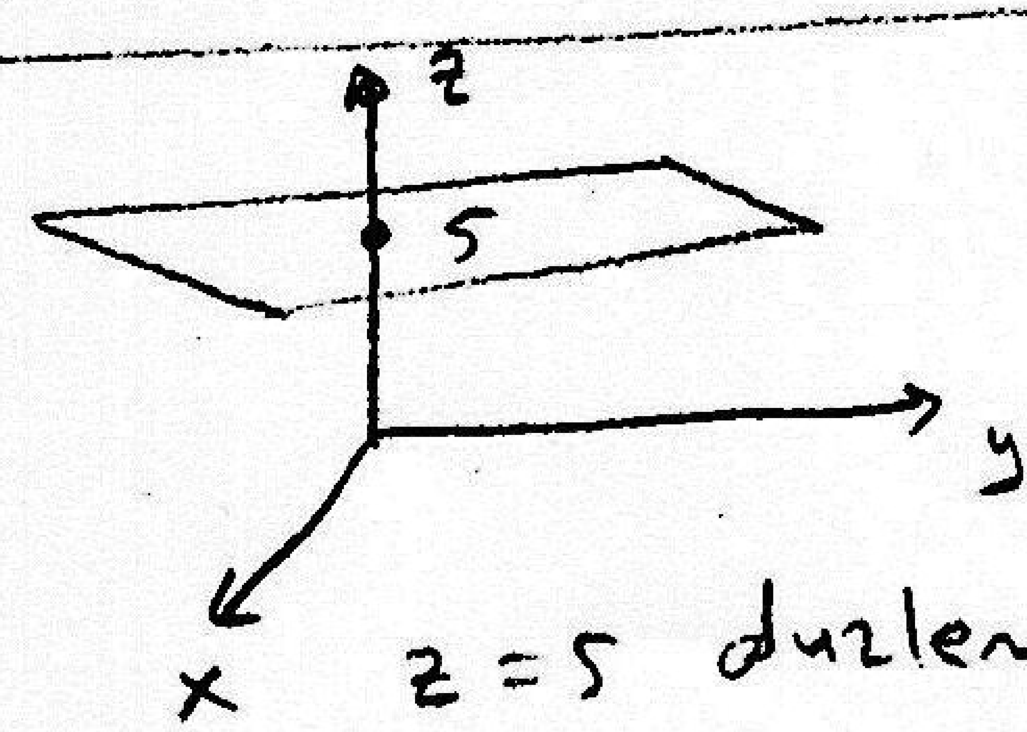
$x=1,\ y=5,\ z=3$



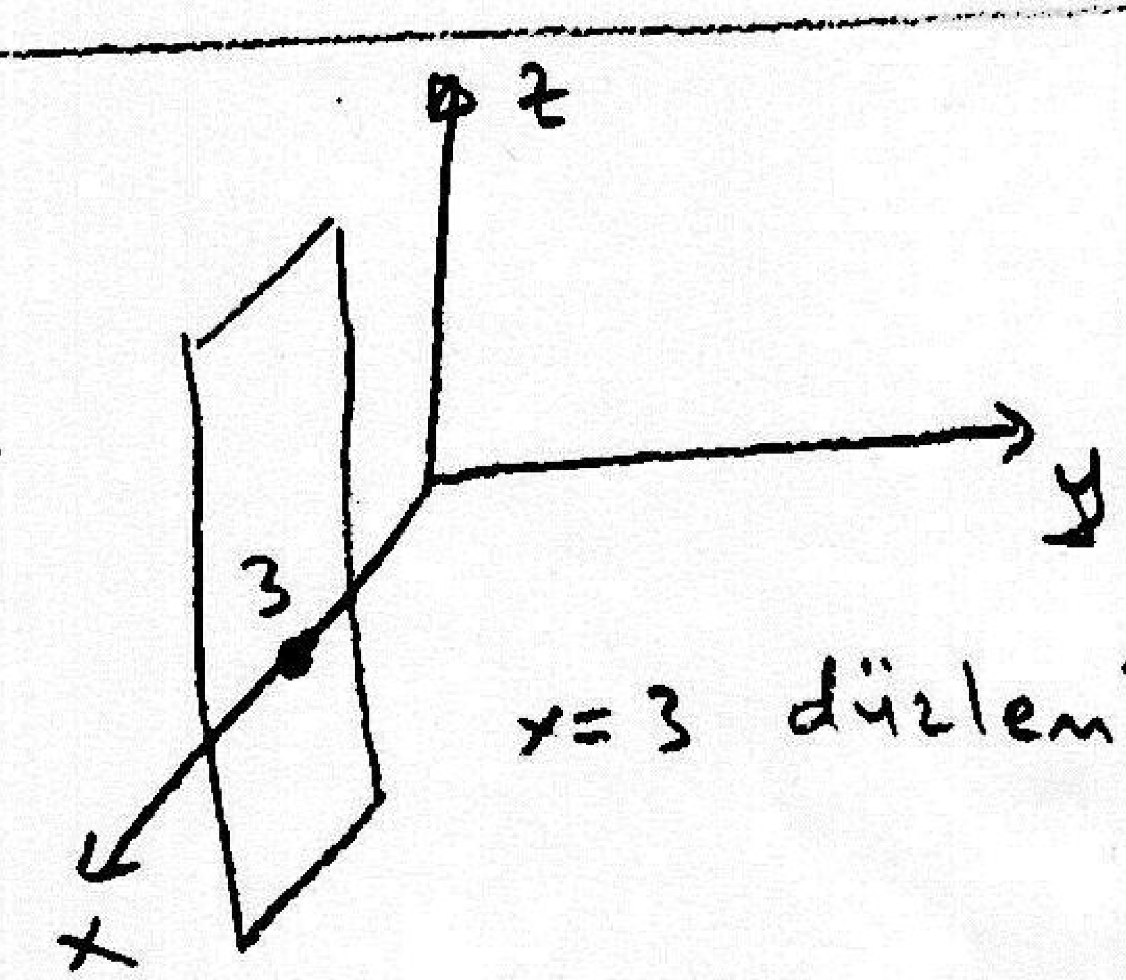
$x=1,\ y=5,\ z=-2$



$y=2$ düzlemi x-z düzlemine paralel dir y eksenini 2 de keser



$z=5$ duzlemi



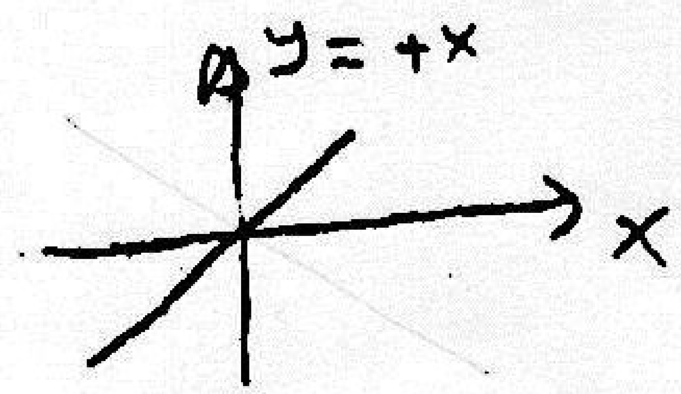
$x=3$ düzlemi

$z=f(x,y)$ grafiği

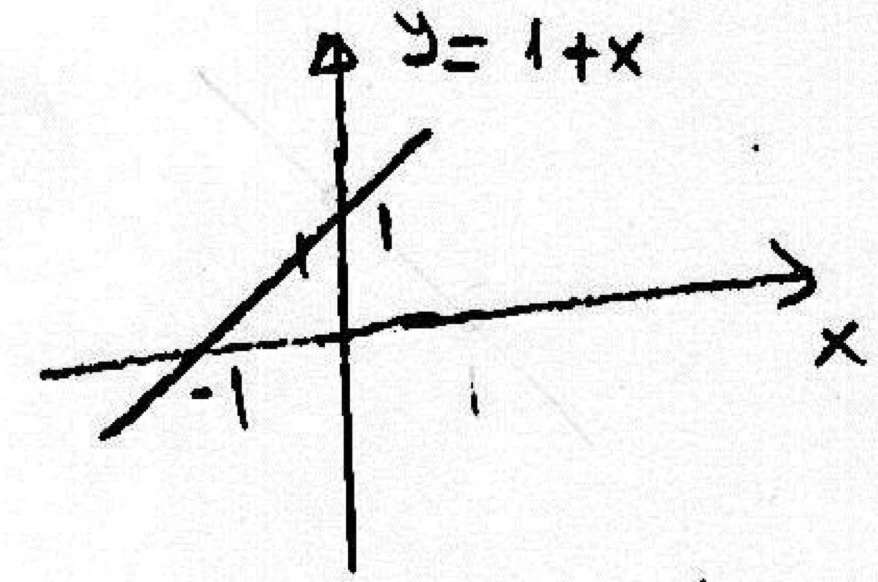
$z=0,\ z=1,\ z=2$ değerler verilir $f(x,y)=0$, $f(x,y)=$ $f(x,y)=2$ eğrileri çizilir. Bu eğriler z eksenine taşınır.

$z=f(x,y)=y-x$

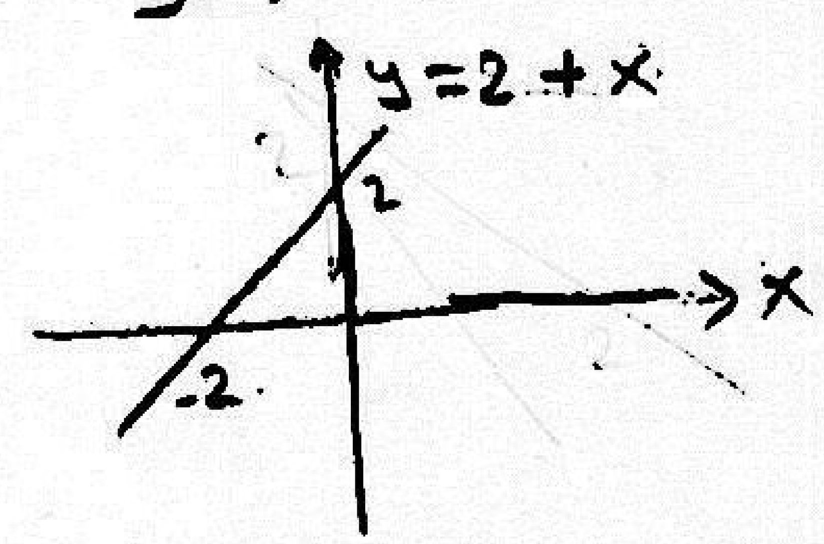
$z=0 \Rightarrow y-x=0 \quad y=x$



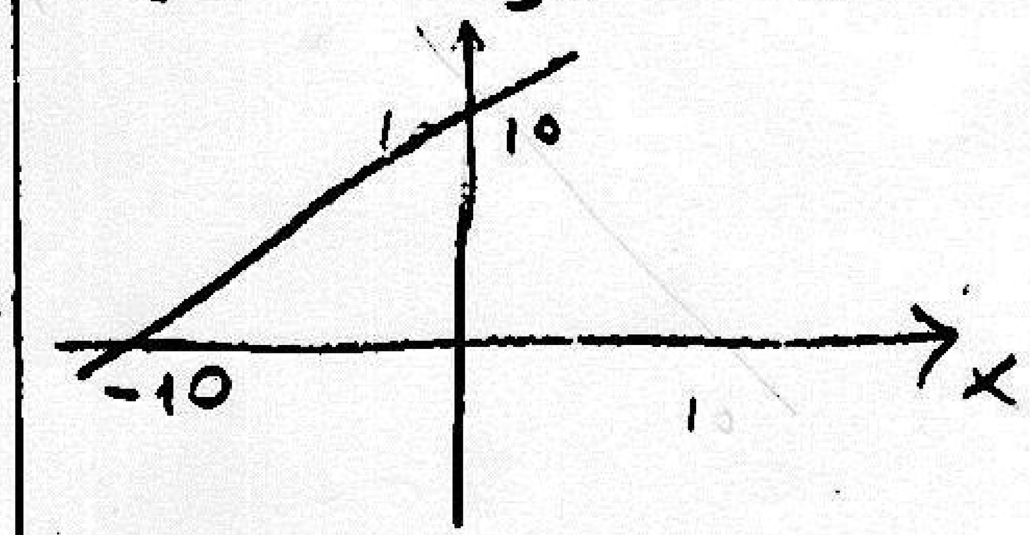
$z=1 \quad y-x=1 \quad y=1+x$

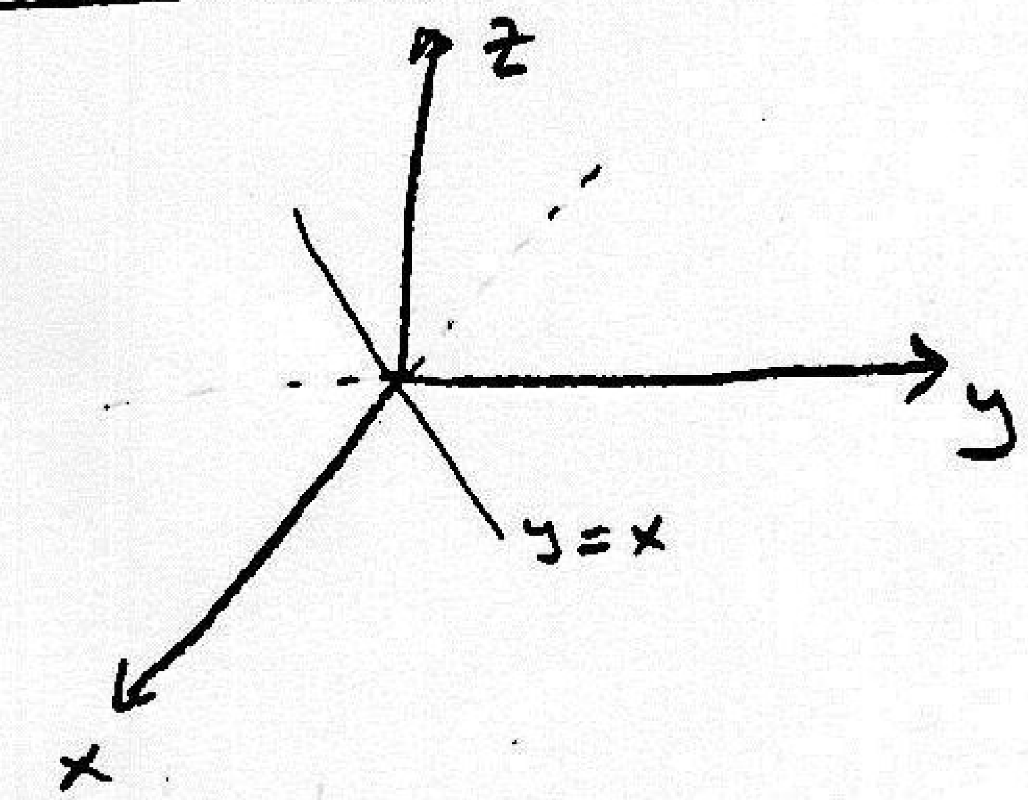


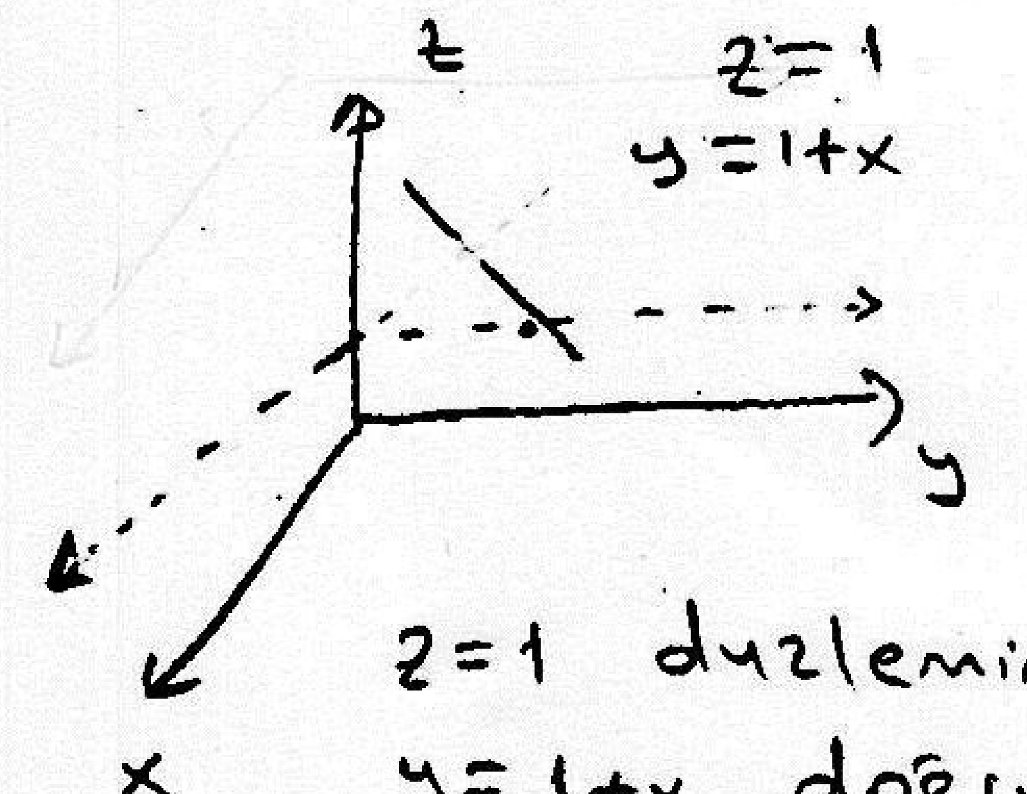
$z=2 \quad y-x=2 \quad y=2+x$



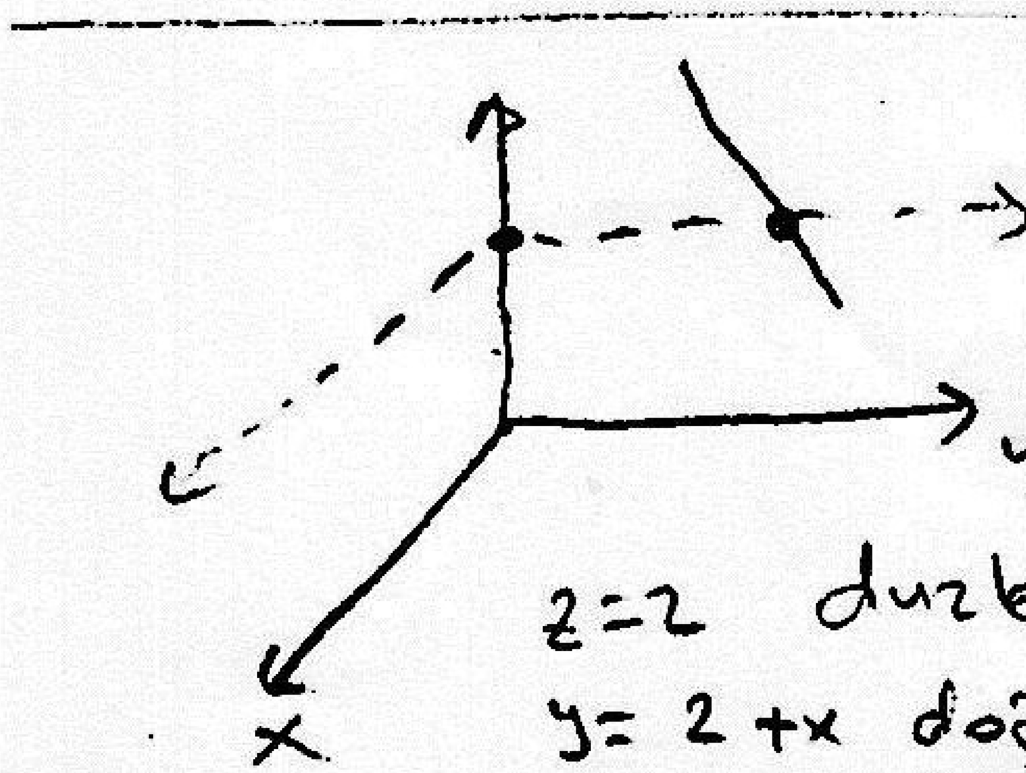
$z=10 \quad y=10+x$







$z=1$ duzleminde $y=1+x$ doğrusu

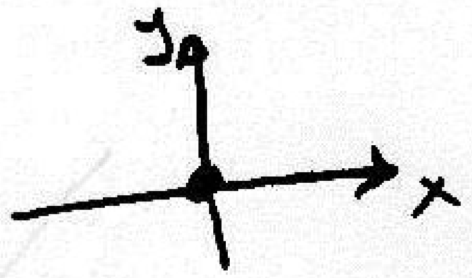


$z=2$ duzleminde $y=2+x$ doğrusu

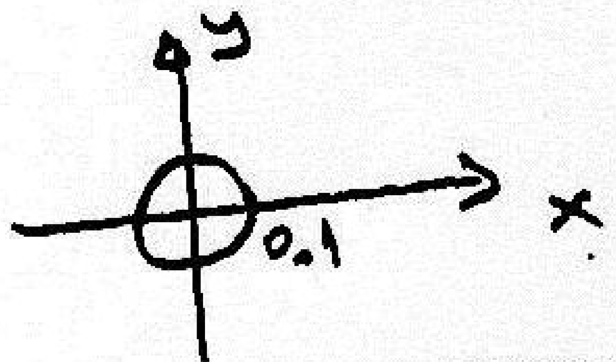
$z = x^2 + y^2$

E

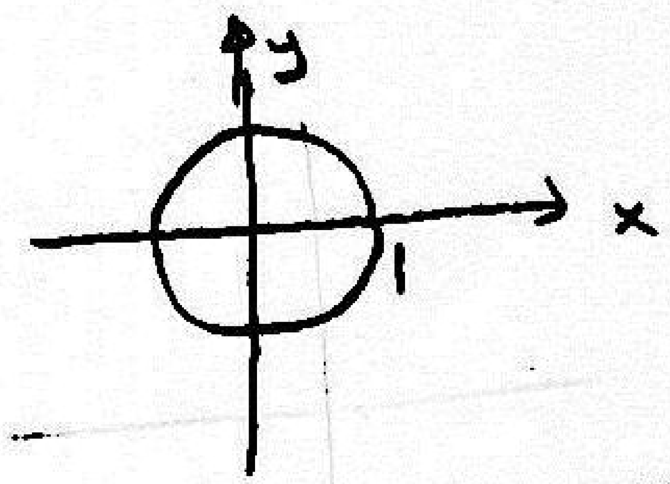
$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$



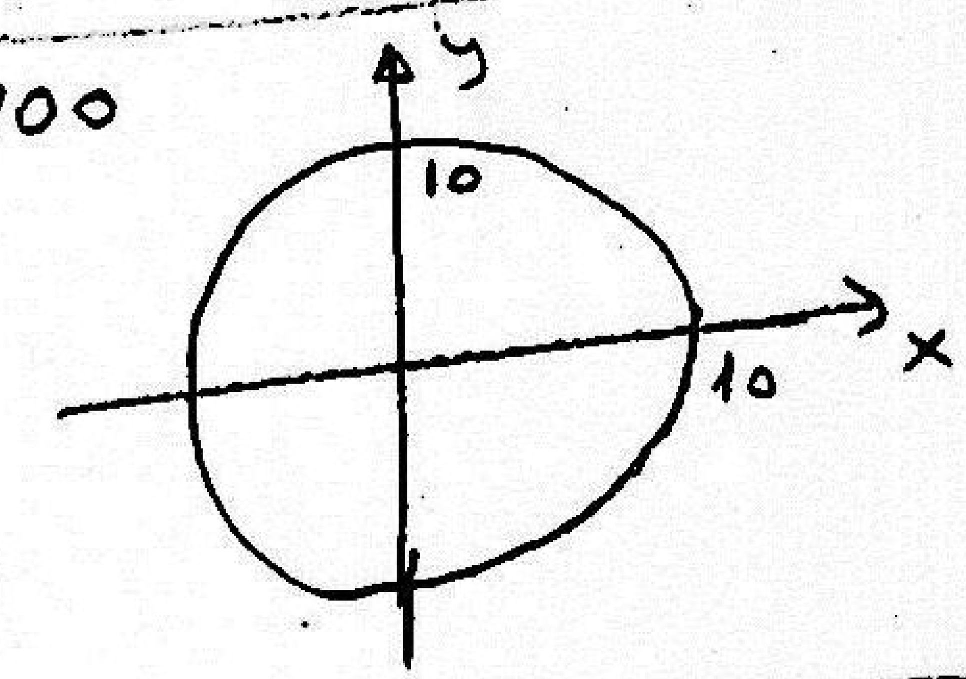
$z = 0.01 \quad x^2 + y^2 = 0.01$

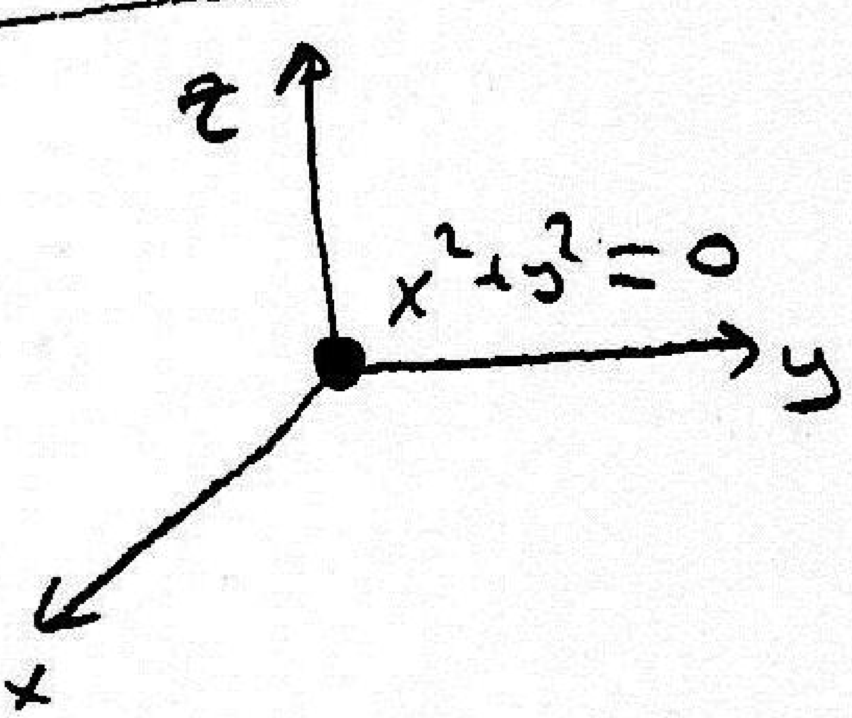


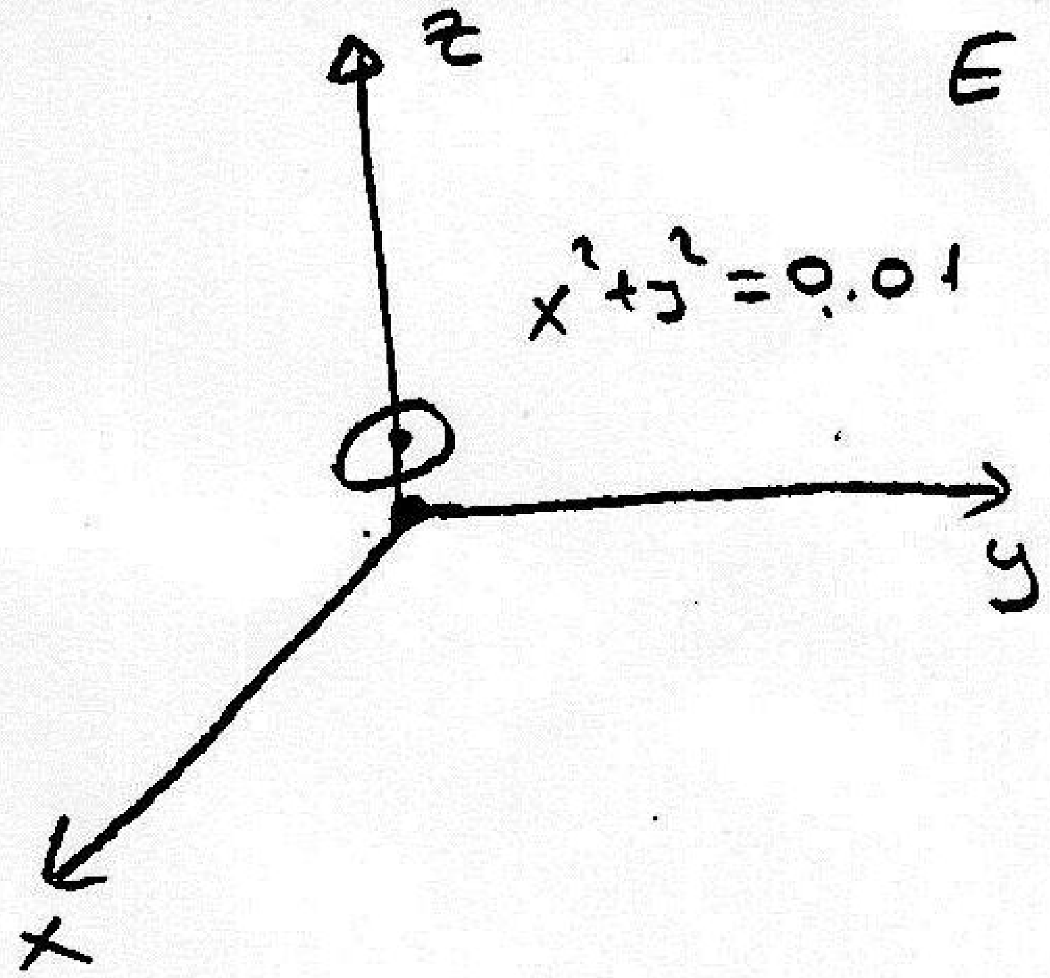
$z = 1 \quad x^2 + y^2 = 1$

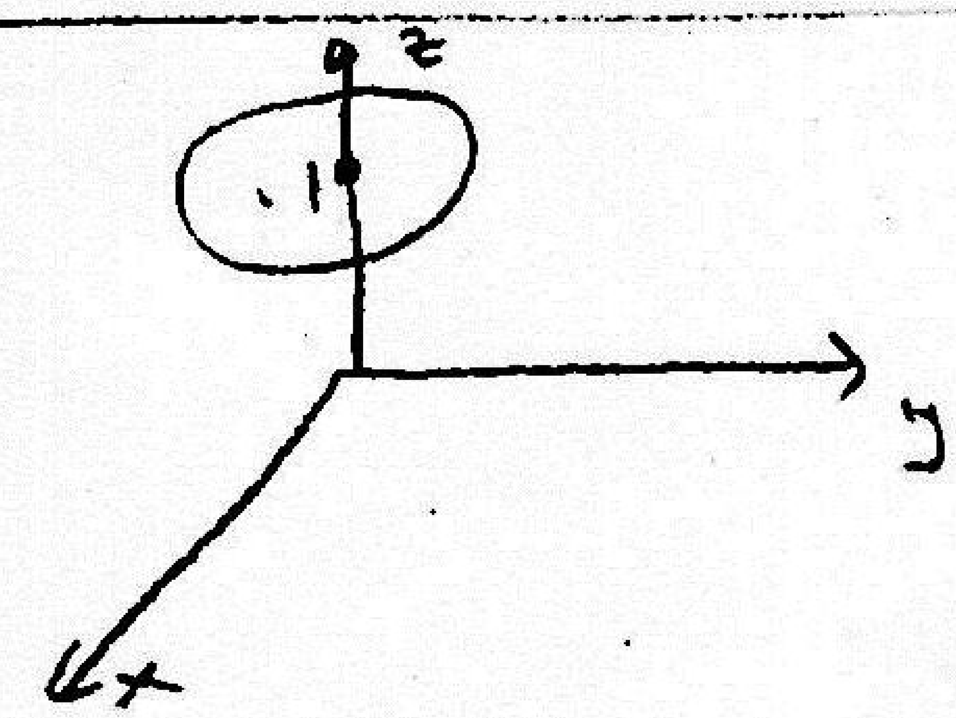


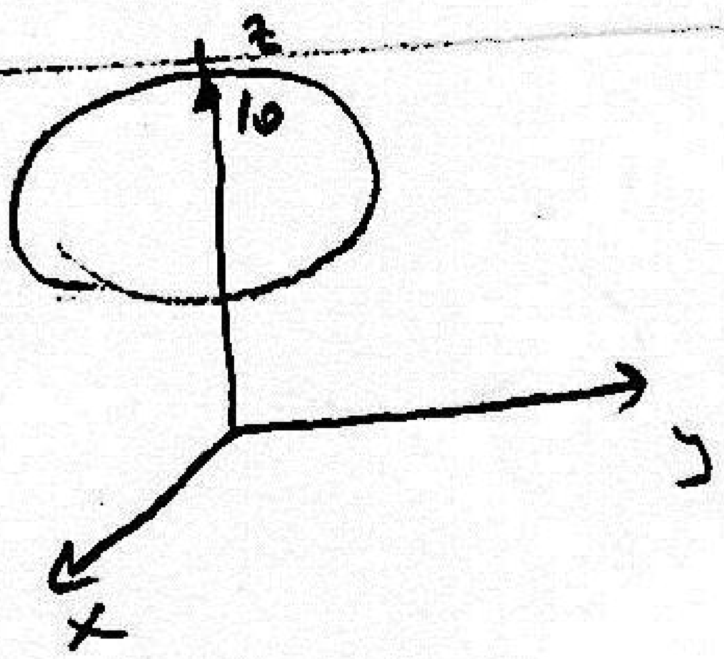
$z = 100$

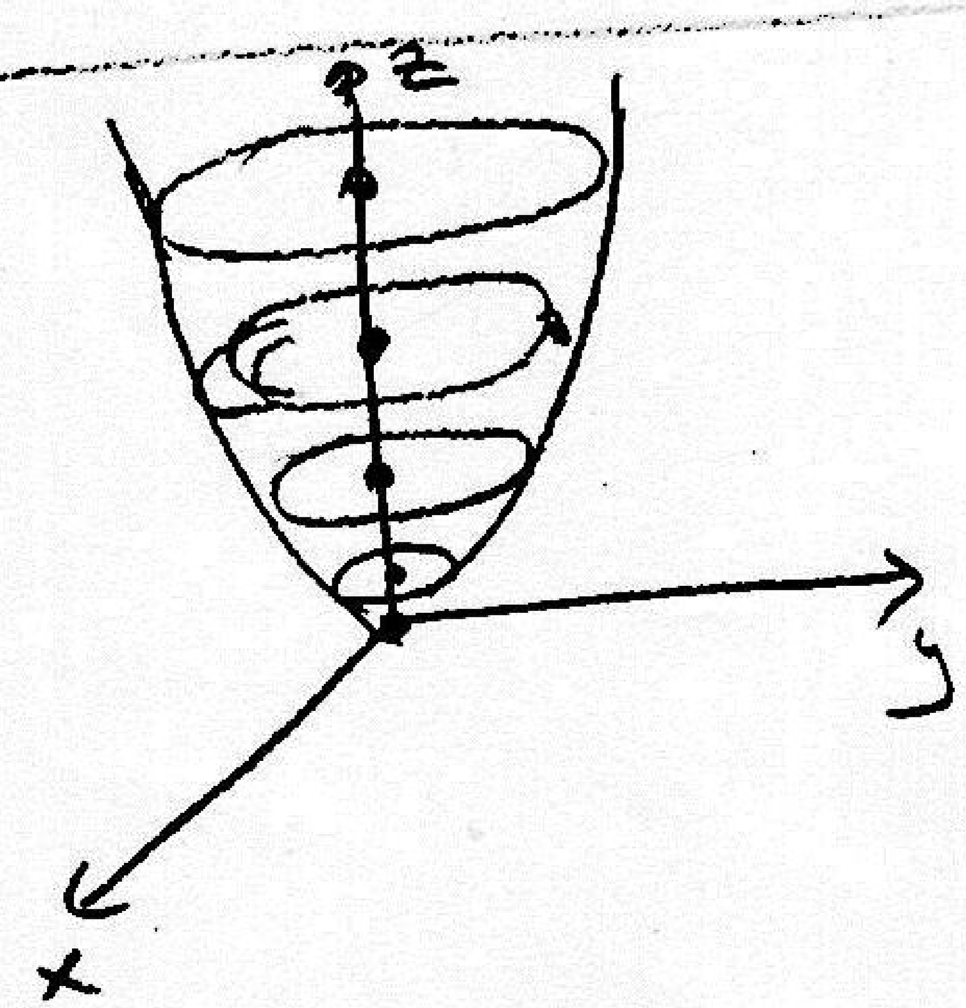










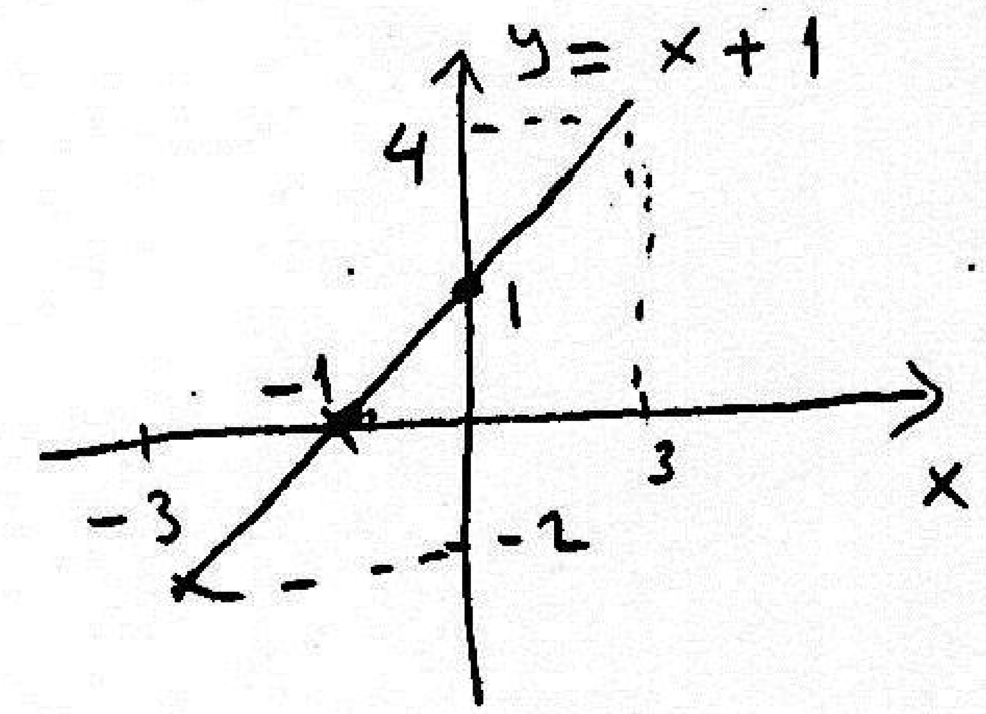


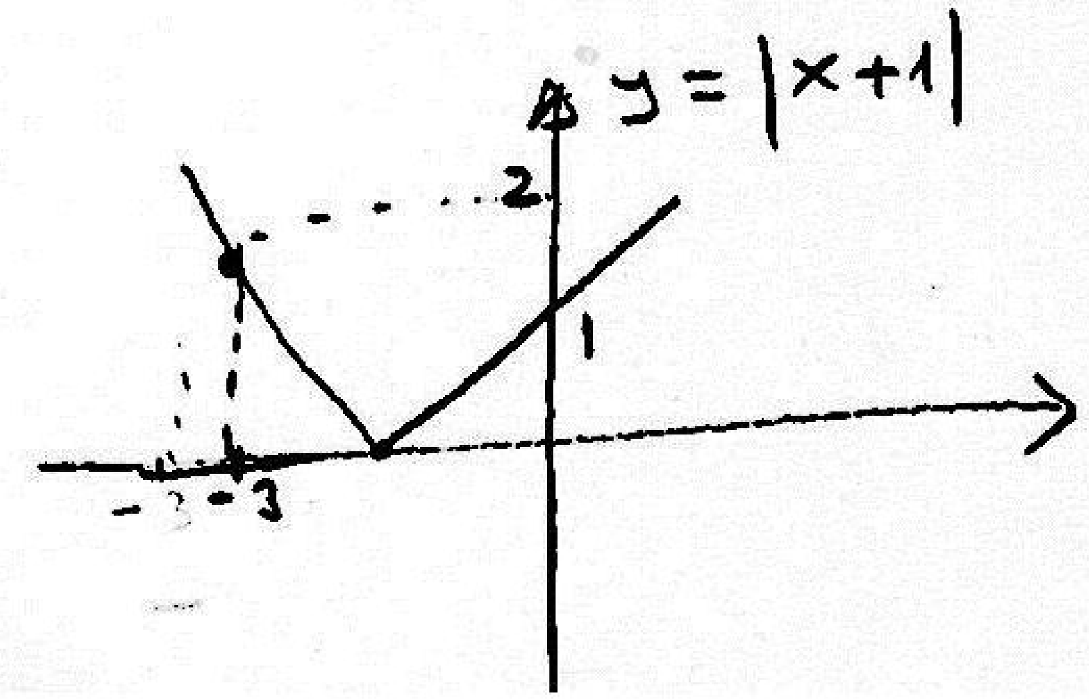
mutlak deger fonk

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) > 0 & f(x) \\ f(x) < 0 & -f(x) \end{cases}$$

11) $y = |x+1|$

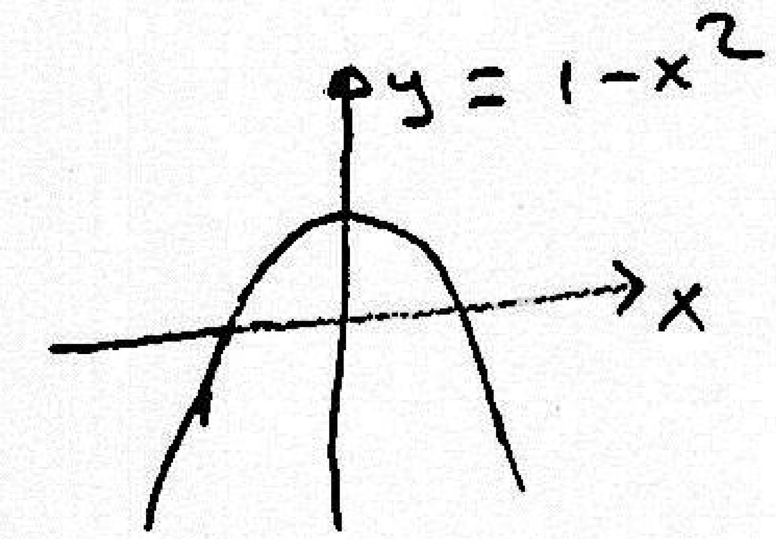
x	$x+1$	$\lvert x+1 \rvert$
−20	−19	+19
−3	−2	+2
−1	0	0
0	1	1
3	4	4
20	21	21

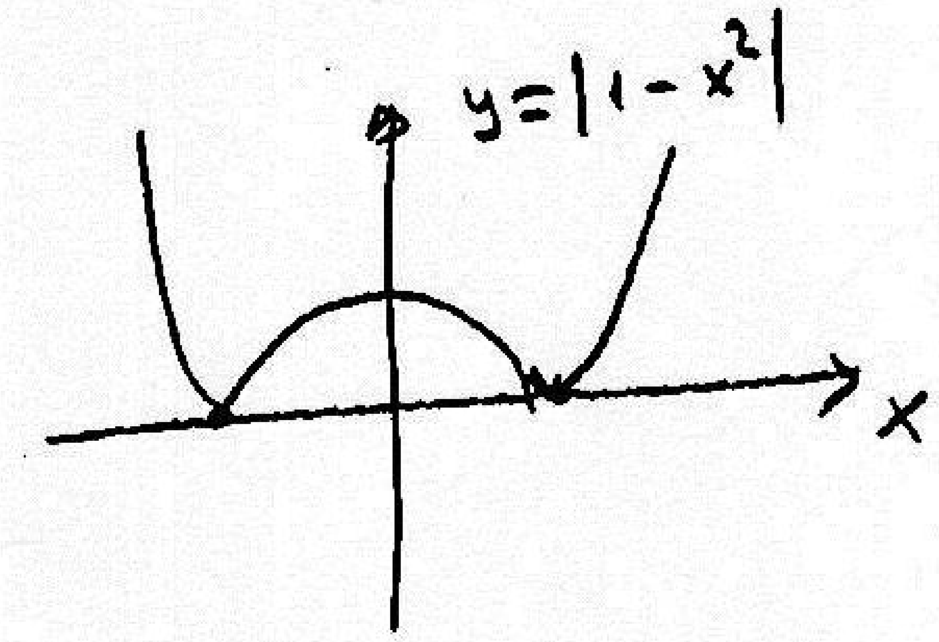




12) $y = |1 - x^2|$

x	$1-x^2$	$\lvert 1-x^2 \rvert$
−3	−8	8
−2	−3	3
−1	0	0
−0.5	0.75	0.75
0	1	1
1		
2	−3	3
3	−8	8





İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

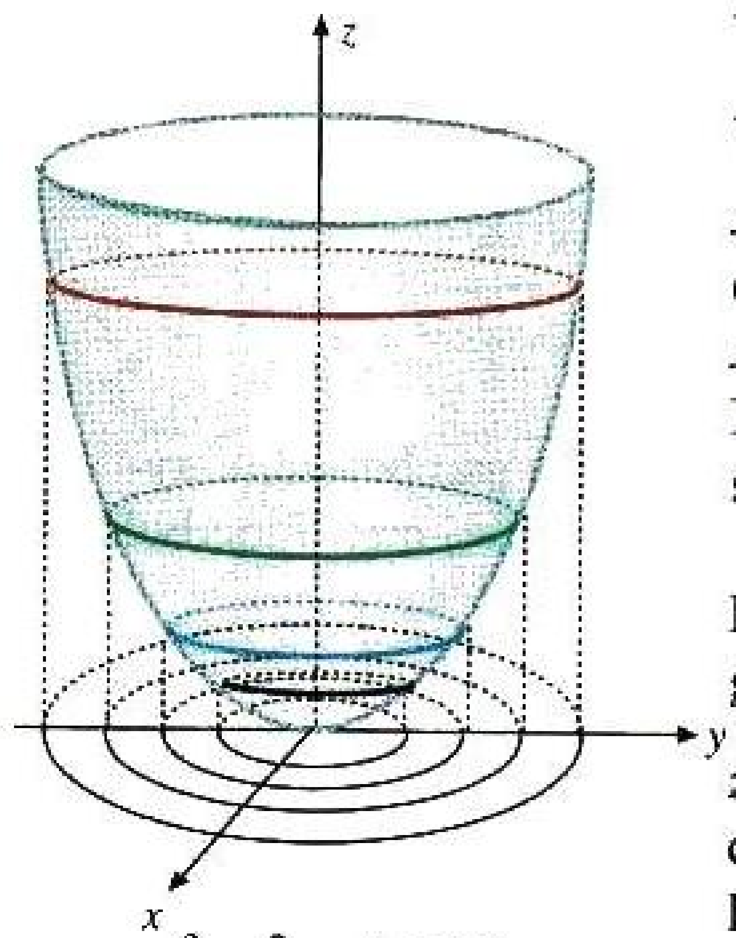
f iki değişkenli bir fonksiyon ise f nin grafiği, (x, y) tanım kümesinin elemanları olmak üzere, $(x, y, f(x, y))$ noktalarının kümesidir. İki değişkenli bir fonksiyonun grafiğinin çizimi için iki temel yol vardır. Bunlardan biri (x, y) noktalarını tanım kümesini taratarak $(x, y\, f(x, y))$ noktalarını uzayda işaretlemek, ikincisi seviye eğrisi denilen eğrilerden yararlanmaktır. Önce bu eğrileri tanımlayalım.

TANIM

$z = f(x, y)$ fonksiyonu verildiğinde xOy düzleminde, fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere f nin **seviye eğrileri** denir.

ÖRNEK : $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun bazı seviye eğrilerini bulunuz. Bundan yararlanarak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM :

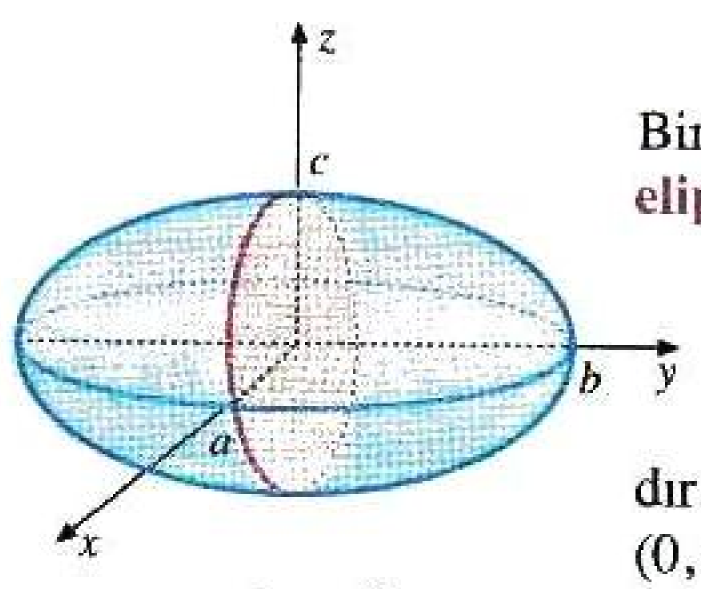


$z = x^2 + y^2$ paraboloidi

$x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki tüm (x, y) noktalarında f fonksiyonu 1 sabit değerini alır. Dolayısıyla $x^2 + y^2 = 1$ çemberi bir seviye eğrisidir. Benzer şekilde $x^2 + y^2 = 2$ çemberinin tüm noktalarında fonksiyon 2 sabit değerini alır. Dolayısıyla $x^2 + y^2 = 2$ çemberi de bir seviye eğrisidir. $c > 0$ olmak üzere tüm seviye eğrileri $x^2 + y^2 = c$ çemberleridir.

Fonksiyonun grafiği $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = c, \quad z = c\}$ noktalarının grafiğidir. Bu grafik yanda verilmiştir. Bu yüzeye **paraboloid** adı verilir.

$z = f(x, y)$ biçiminde tanımlanan fonksiyonların grafikleri, genel olarak, yüzeylerdir. Yüzeyler hakkında geniş bilgi edinmek isteyen okuyucular, bu bilgileri Analitik Geometri kitaplarında bulabilirler. Biz burada onları kısaca tanıtacak, grafiklerini vereceğiz.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoid

Bir elipsin eksenlerinden biri etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye bir **elipsoid** denir. Elipsoid denklemi

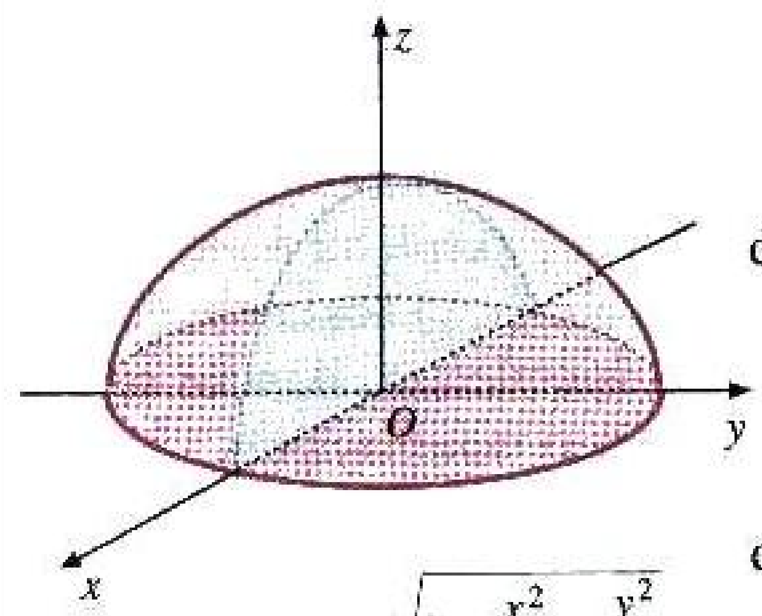
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dır. Bu yüzey koordinat düzlemlerine göre simetrik olup eksenleri $(\pm a, 0, 0,)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ noktalarında keser.

Denklemde z çekilirse

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

bulunur.



$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

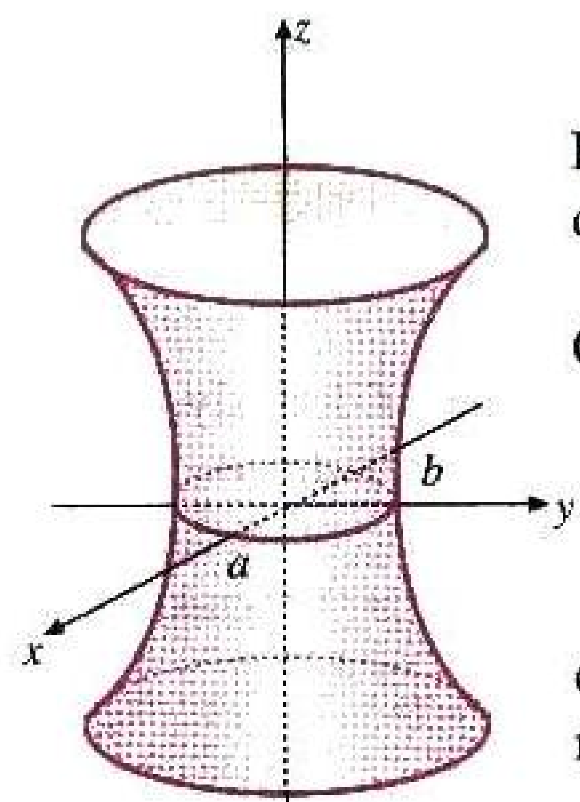
üst yarı elipsoid

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

denklemi üst yarı elipsoidi,

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

de alt yarı elipsoidi gösterir.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

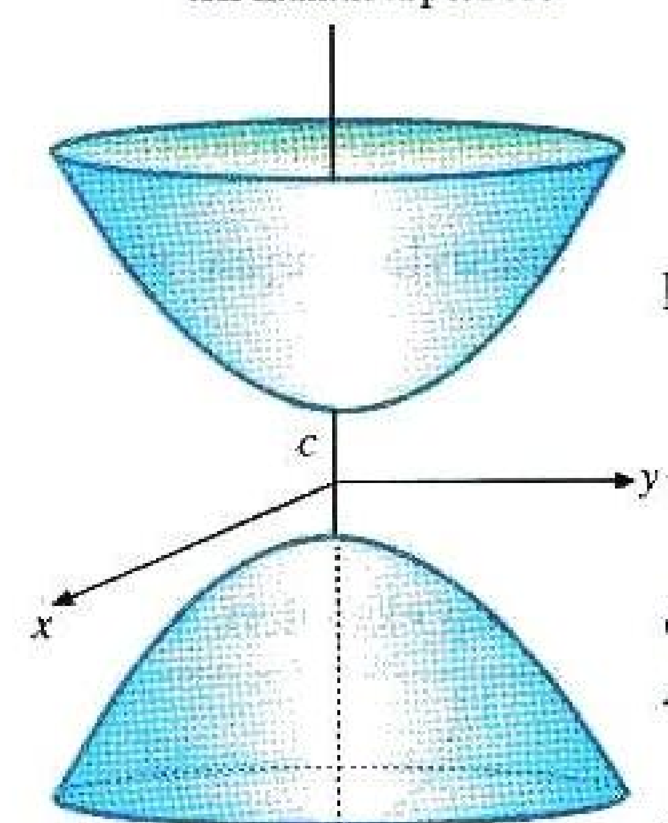
tek kanatlı hiperboloid

Hiperboloidler, genel olarak, hiperbollerin asal eksen veya yedek eksen etrafında döndürülerek elde edilirler.

Grafiği yanda verilen ve denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

olan yüzeye **tek kanatlı hiperboloid** adı verilir. Bu paraboloidin $xy-$ düzlemiyle arakesiti elips, xz ve yz düzlemleriyle arakesitleri birer hiperboldur.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

iki kanatlı hiperboloid

Denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

olan ve grafiği yanda verilen yüzeye **iki kanatlı hiperboloid** denir. Bu yüzeyin xy düzlemiyle arakesiti boş kümedir.

xy düzlemine paralel düzlemlerle ($|k| > |c|$ olmak üzere $z = k$ düzlemleriyle) arakesiti elipslerdir. Bu yüzeyin xz ve yz düzlemleriyle arakesitleri hiperbollerdir.

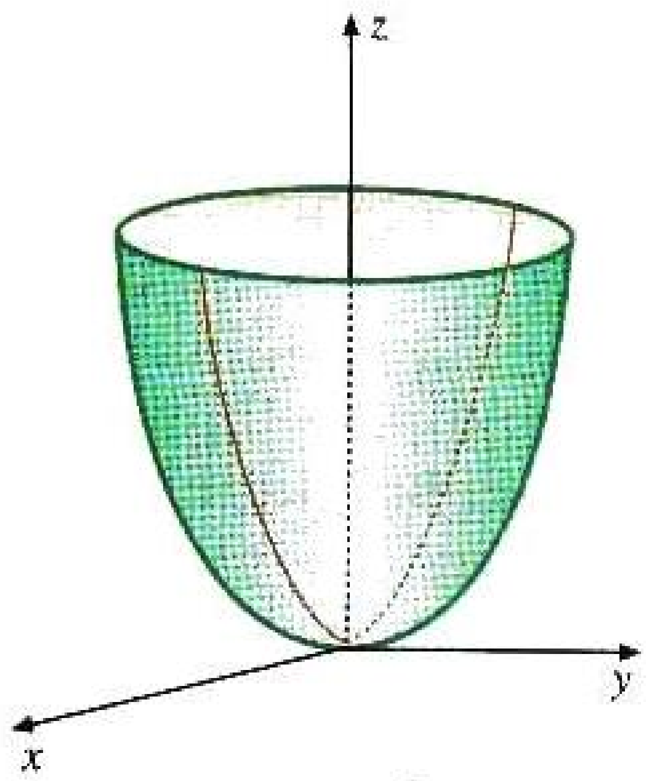
Paraboloidler, genellikle, bir parabolün simetri ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeylerdir.

Denklemi

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

olan ve grafiği yanda verilen yüzeye **eliptik paraboloid** adı verilir. Bu yüzeyin xy ekseniyle arakesiti bir nokta, xy düzlemine paralel düzlemlerle arakesiti elipslerdir.

Bu eliptik paraboloidin xz ve yz düzlemleriyle arakesiti birer paraboldür.

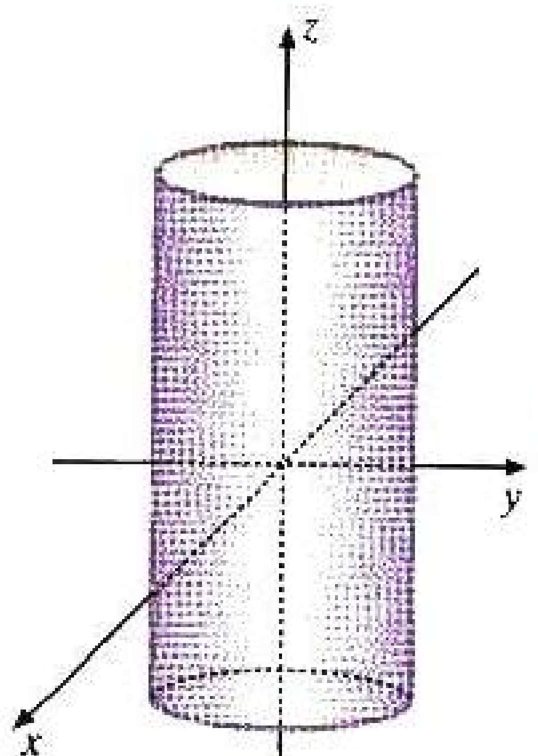


$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

eliptik paraboloid

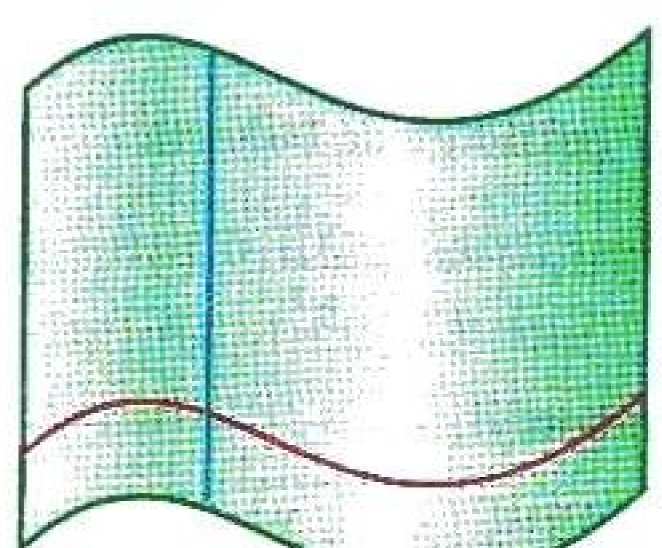
Uzayın herhangi bir doğrusu, uzayın herhangi bir eğrisine dayanarak kendisine paralel hareket ederse oluşturduğu yüzeye **silindir** adı verilir. Silindir kapalı bir yüzey olmak zorunda değildir. Eğer dayanak eğrisi bir çember ise silindire **dairesel silindir**, dayanak eğrisi bir elips ise silindire **eliptik silindir** adı verilir.

Dayanak eğrisi bir doğru olduğunda silindir hangi yüzey olur? Her düzlem bir silindir olarak düşünülebilir mi?

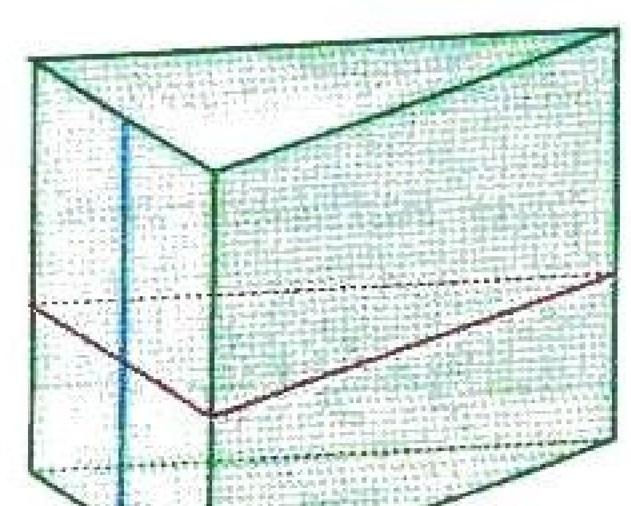


$x^2 + y^2 = a^2$

Dairesel silindir



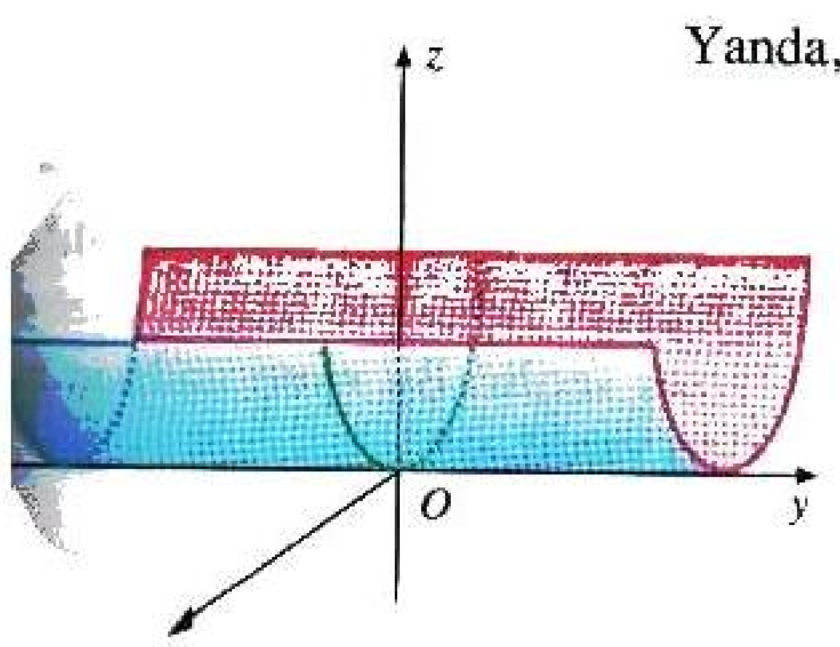
Silindir



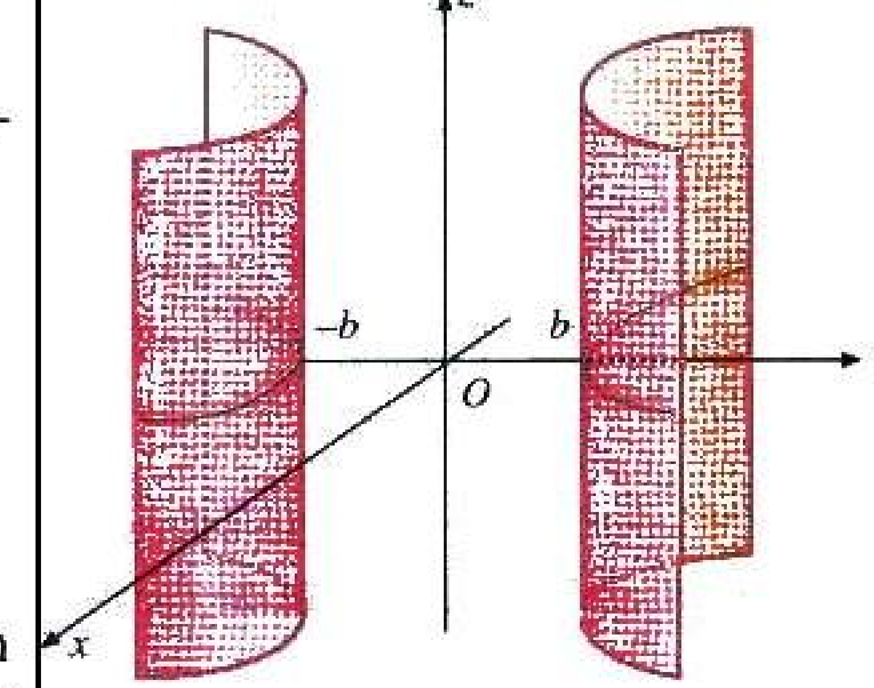
Üçgen Silindir

Silindirin dayanak eğrisi bir parabol ise bu silindire **parabolik silindir** adı verilir.

Yanda, dayanak eğrisi $z = ax^2$ olan silindirin grafiği verilmiştir.



$z = ax^2$



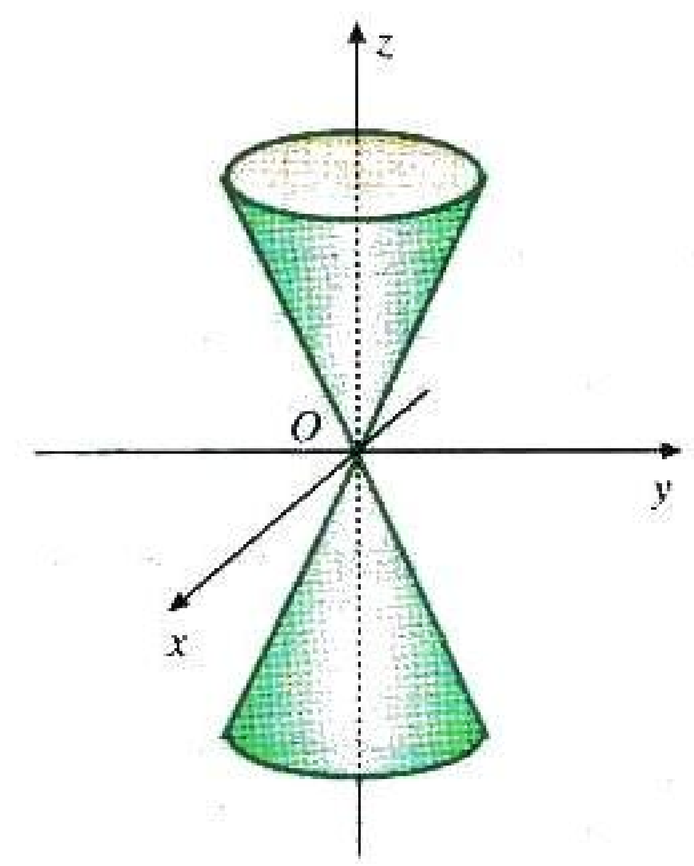
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Hiperbolik silindir

Bir silindir birden fazla yüzey parçasından meydana gelebilir. Örneğin dayanak eğrisi

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

hiperbolü olan silindir, iki yüzey parçasından oluşur. Bu yüzeye **hiperbolik silindir** denir. Bu yüzeyin grafiği yanda çizilmiştir.



$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

koni

Sabit bir T noktasından geçen ve verilen bir eğriyi kesen hareketli bir doğrunun oluşturduğu yüzeye bir koni denir. T noktasına koninin tepe noktası, kestiği eğriye de koninin doğrultman eğrisi adı verilir. Yüzeyi oluşturan hareketli doğruya koninin anadoğrusu denir. Doğrultman eğrisi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipsi olan koninin denklemi

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

olur. z çekildiğinde bulunan

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

üst yarı koniyi,

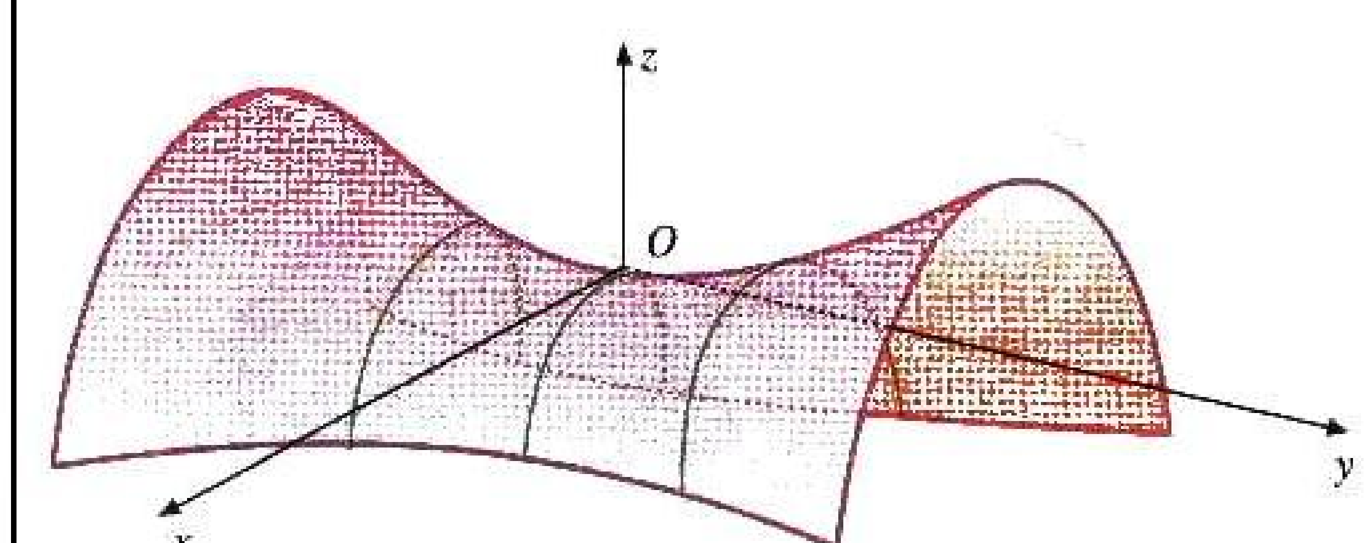
$$z = -c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

denklemi de alt yarı koniyi gösterir.

Birbirine dik iki düzlem içinde bulunan iki parabolden birinin diğeri üzerinde hareket etmesiyle oluşan yüzeye **hiperbolik paraboloid** adı verilir. Bir eyeri andıran bu yüzeyin önemli özellikleri vardır.

Denklemi

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$



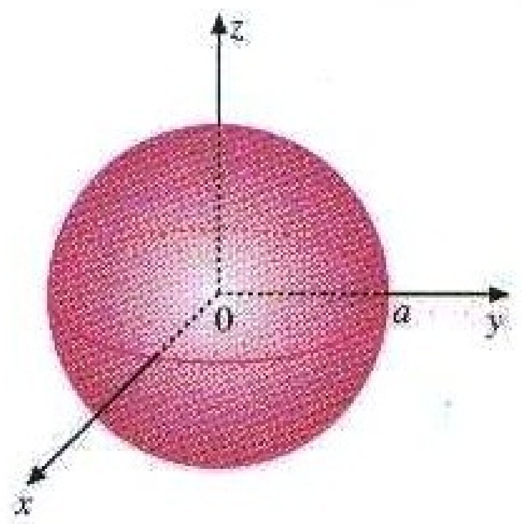
$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad (c > 0)$$

hiperbolik paraboloid

olan hiperbolik paraboloidin grafiği yanda verilmiştir. Bu yüzeyin $x\,O\,y$ düzlemine paralel düzlemlerle arakesitleri birer hiperboldür. "Hiperbolik" adı buradan gelmektedir.

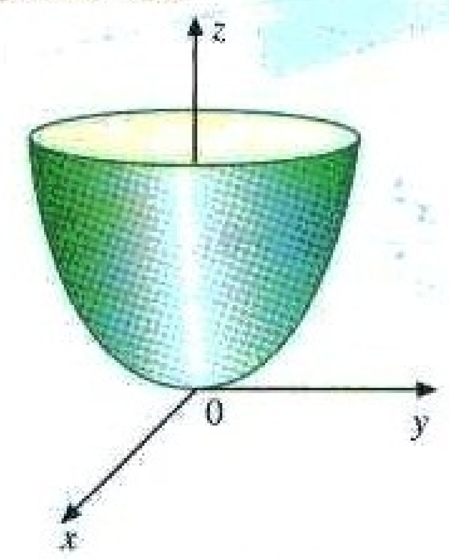
BAZI ÖZEL YÜZEYLER

Küre



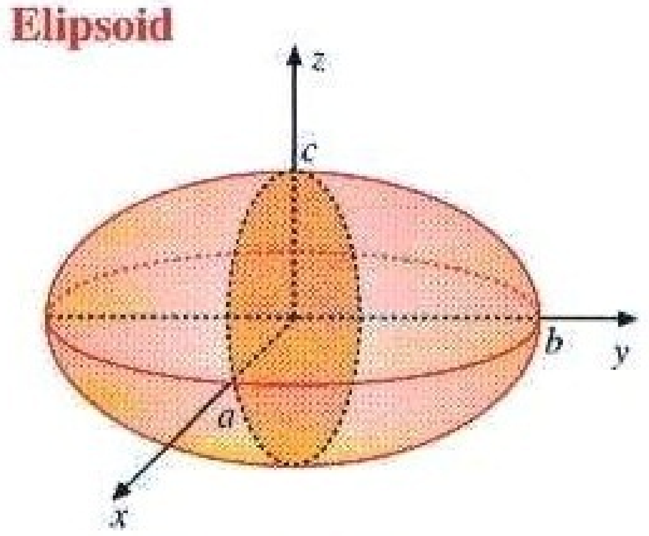
$x^2 + y^2 = z^2 = a^2$

Paraboloid



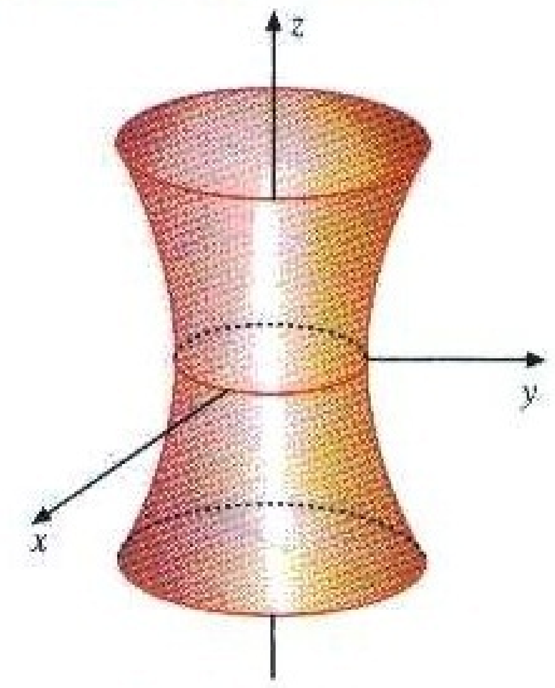
$z = x^2 + y^2$

Elipsoid



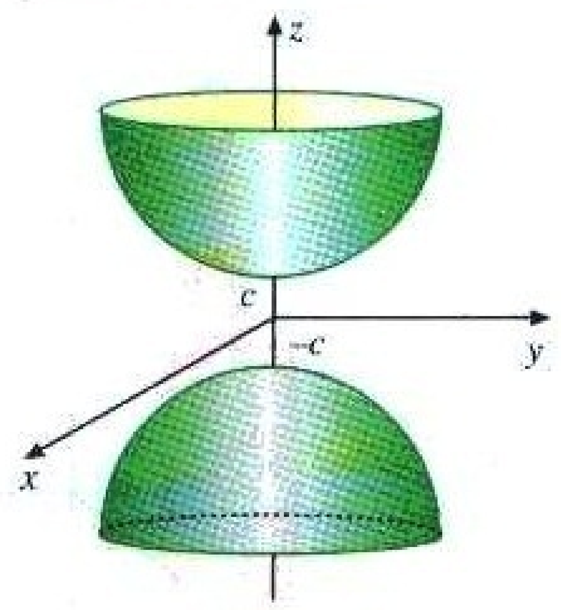
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tek kanatlı hiperboloid



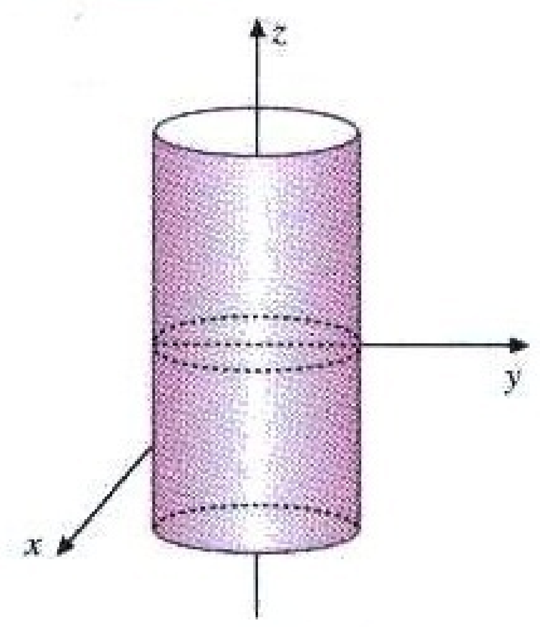
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

İki kanatlı hiperboloid



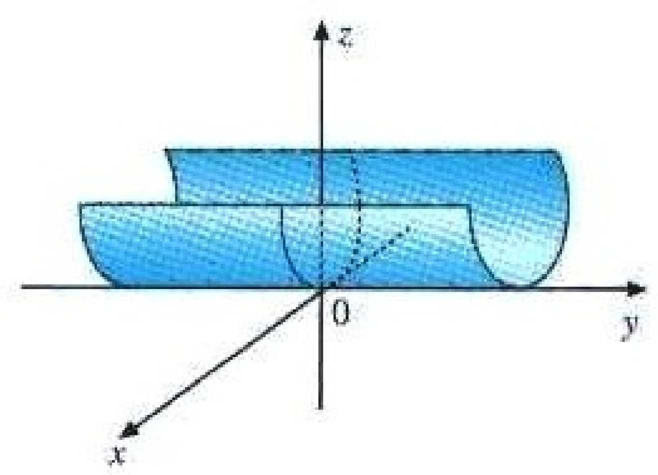
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Dairesel silindir



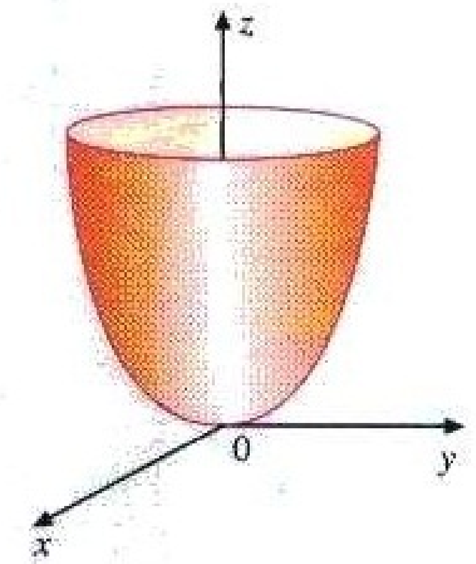
$x^2 + y^2 = a^2$

Parabolik silindir



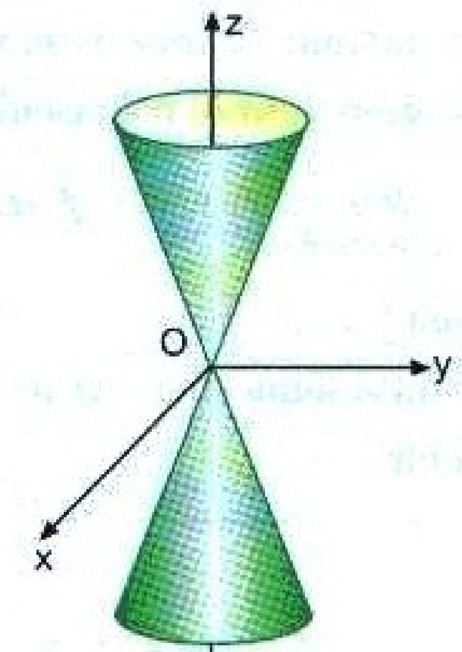
$z = ax^2$

Eliptik paraboloid



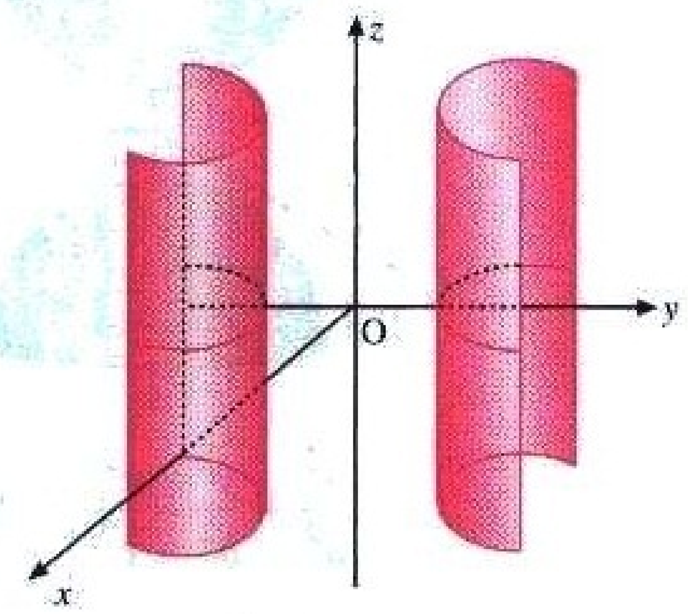
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Koni



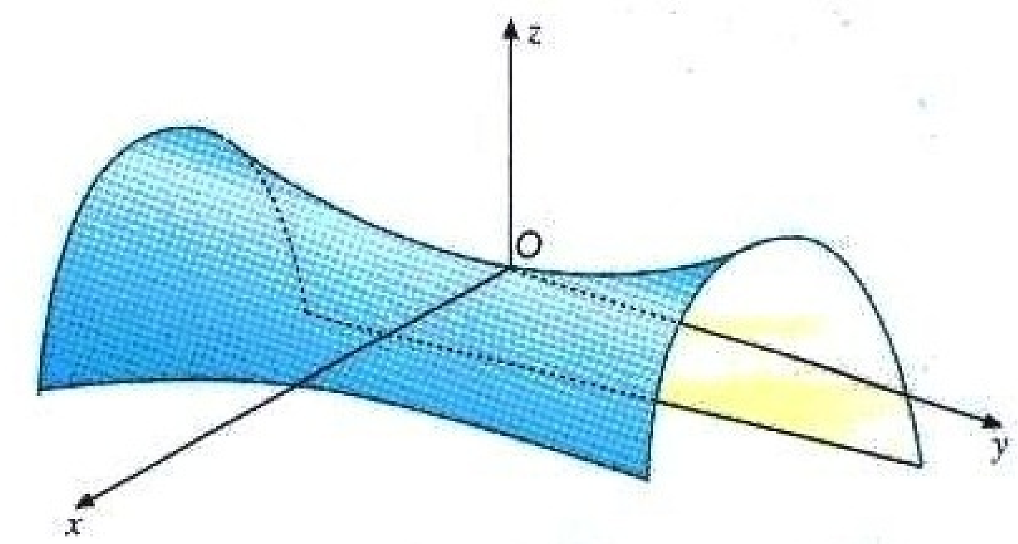
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Hiperbolik silindir



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Hiperbolik paraboloid



$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad (c > 0)$$

$\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ icin tanimli

$\sqrt{2-x}$, $x \leq 2$ icin tanimli

$\sqrt{x^2-1}$, $x^2 \geq 1$ icin tanimli, $x \leq -1$, $x \geq 1$

$\sqrt{4-x^2}$, $x^2 \leq 4$ icin tanimli, $-2 \leq x \leq 2$

$\sqrt{(x-2)(x+3)}$,

x	-∞		- 3		0		2		∞
x-2	-	-		-		-	0	+	
x+3	-	-	0	+		+		+	
(x-2)(x+3)	+	+		-		-		+	

$x \leq -3$, $x \geq 2$ icin tanimli

log(x+1), $x > -1$ icin tanimli

log(x^2+1), butun x ler icin tanimli

$\sqrt{x^2+1}$, butun x ler icin tanimli

sin(x), butun x ler icin tanimli

tan(x), butun x ler icin tanimli

$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, icin tanimli

e^x, butun x ler icin tanimli

$\frac{x-2}{x+1}$, x=-1 haric butun x ler icin tanimli.

$\frac{x-2}{\log(x+1)}$, x=0 haric, x> -1 icin tanimli.

$\frac{x-2}{\log(x^2+1)}$, x=0 haric, butun x ler icin tanimli

$\frac{\log(x^2+1)}{x-2}$, butun x ler icin tanimli

-- ----

$\sqrt{x-y}$, $x \geq y$ icin tanimli

$\sqrt{y-2x}$, $y \geq 2x$ icin tanimli

$\sqrt{x^2-y}$, $x^2 \geq y$ icin tanimli, $x \leq -\sqrt{y}$, $x \geq \sqrt{y}$

$\sqrt{y^2-x^2}$, $y^2 \geq x^2$ icin tanimli,

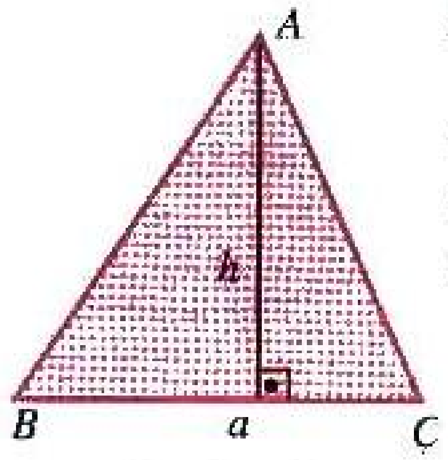
$\sqrt{\frac{y-x}{x+y^2}}$, $\frac{y-x}{x+y^2} \geq 0$ icin tanimli,

13.1 ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Şimdiye kadar gördüğümüz tüm fonksiyonların tanım kümeleri $\boldsymbol{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesiydi. Görüntü kümesi reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olduğunda bu tip fonksiyonlara reel değerli fonksiyonlar adını vermiştik. Görüntü kümesi bir vektör kümesi ise o tip fonksiyonlara da vektör değerli fonksiyonlar demiştik. Eğer tanım kümesi bir düzlemsel bölge ise, düzlemdeki her P noktasının kartezyen koordinatları (x, y) biçiminde olacağından, fonksiyon iki değişkenli fonksiyon adını alır. Benzer, şekilde, tanım kümesi uzayın bir alt bölgesi ise, uzayın her bir noktası (x, y, z) gibi bir sıralı üçlü ile gösterilebildiğinden fonksiyon üç değişkenli olur. Buraya kadar anlatılanlar bir tanımla şöyle toparlanabilir:

TANIM

D düzlemin bir bölgesi, f de D nin her bir (x, y) noktasına bir $f(x, y)$ reel sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir **iki değişkenli fonksiyon** adı verilir. B uzayın bir bölgesi, f de B nin her bir (x, y, z) noktasına bir $f(x, y, z)$ sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir **üç değişkenli fonksiyon** denir. Daha çok değişkenli fonksiyonlar benzer şekilde tanımlanır.



$S = \frac{1}{2}\, a.\, h$

Günlük hayatta kullanılan fonksiyonların bir çoğu birden fazla değişkene bağlıdır. Örneğin bir üçgenin alanı, taban uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşitir. A lira % t faiz oranı ile n yıl bankaya yatırıldığında getireceği faiz

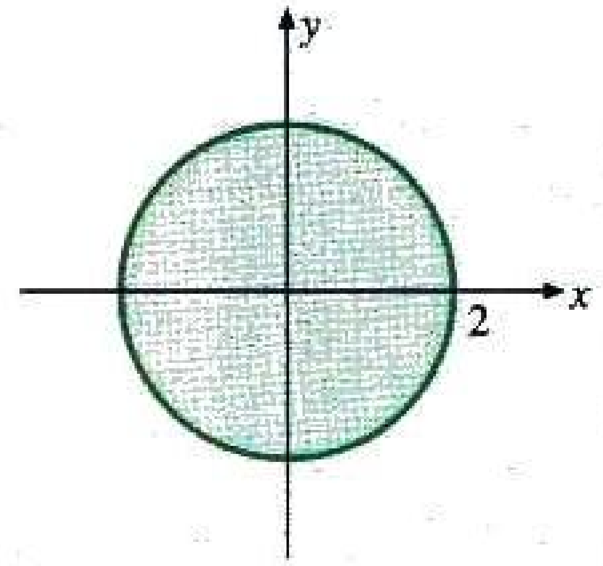
$$f = \frac{A.n.t}{100}$$

liradır. Görüldüğü gibi f faizi, yatırılan paraya (A'ya), faiz yüzdesine (t'ye) ve zamana (n'ye) bağlıdır. Yani üç değişkenli bir fonksiyondur.

Bu nedenle çok değişkenli fonksiyonların kullanım alanları, tek değişkenli fonksiyonların kullanım alanlarına nazaran daha geniştir. Olasılık, istatistik, akışkanlar dinamiği, iktisat ve mühendislik alanlarında sıkça kullanılırlar.

fonksiyonlar için de geçerlidir.

ÖRNEK : $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ eşitliğiyle tanımlanan f reel değerli fonksiyonunun tanım kümesini analitik düzlemde gösteriniz.



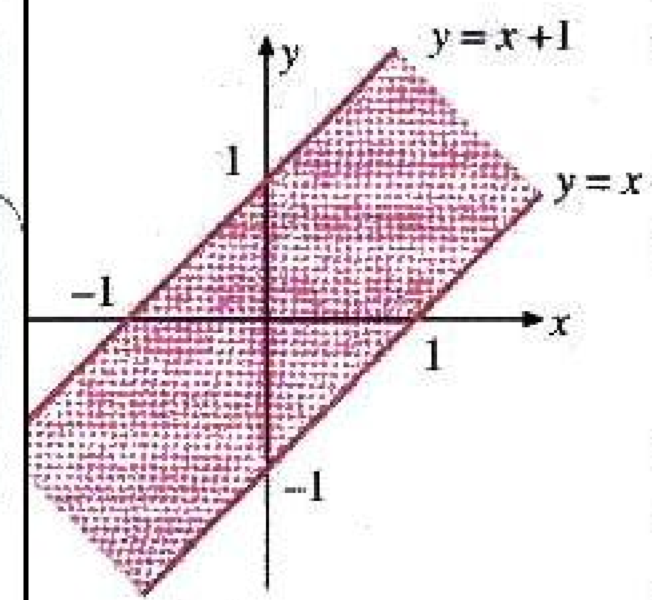
ÇÖZÜM : Karekökün reel değerli olması için kök içinin negatif olmaması gerekir. Bunun için

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

olmalıdır. Şu halde tanım kümesi, yarıçapı 2 birim olan merkezil çember ve iç bölgesidir.

ÖRNEK : $f(x, y) = \arccos(x - y)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM : Arkkosinüs fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından $[0, \pi]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olduğundan, tanım kümesi



$$-1 \leq x - y \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir.

$$-1 \leq x - y \Rightarrow y \leq x + 1 \quad \text{ve} \quad x - y \leq 1 \Rightarrow y \geq x - 1$$

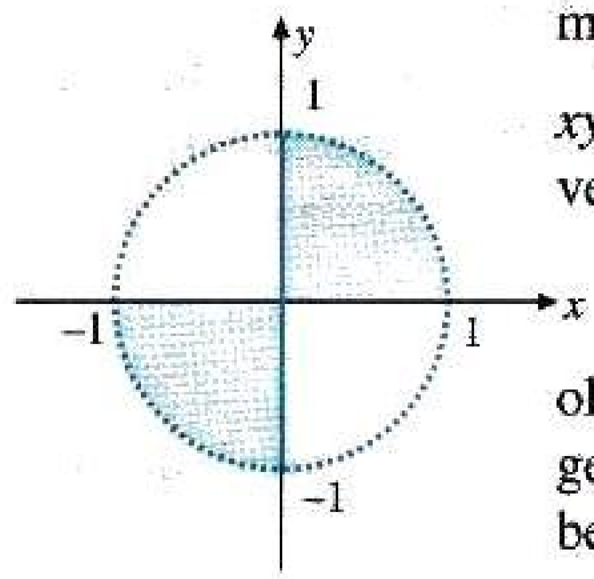
olacağından, tanım kümesi $y = x + 1$ doğrusunun alt tarafında, $y = x - 1$ doğrusunun üst tarafında bulunan noktaların kümesidir. Sözkonusu bölge yanda gösterilmiştir.

ÖRNEK :

$$f(x,y) = \sqrt{xy} + \log(1 - x^2 - y^2)$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

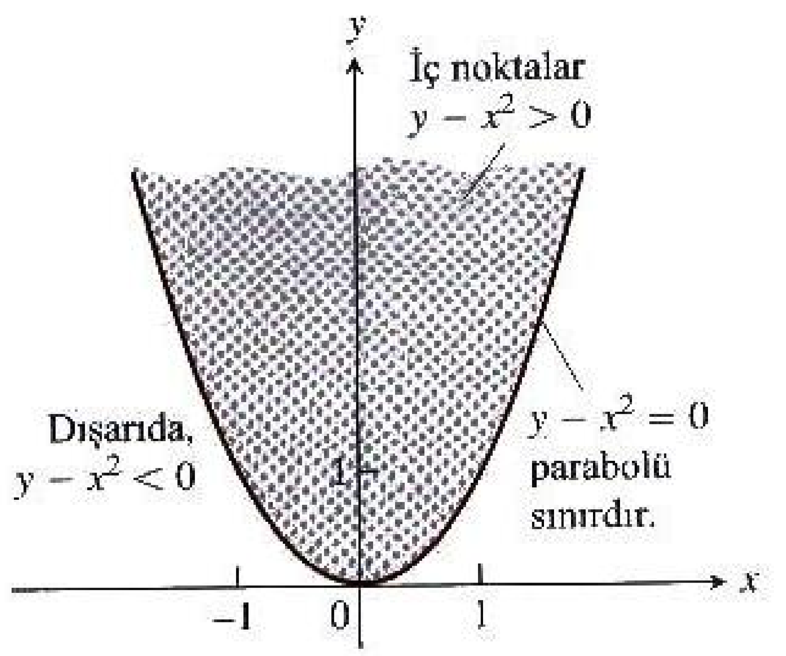
ÇÖZÜM : Kareköklü ifadenin reel olması için kök içinin negatif olmaması, logaritma fonksiyonunun tanımlı olması için logaritması alınan ifadenin pozitif olması gerekir.



$xy \geq 0$ olması için x ve y aynı işarette olmalıdır. Bunun için de (x, y) noktaları I. veya III. bölgede ya da eksenler üzerinde bulunmalıdır.

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$$

olur. Bu eşitsizliği sağlayan (x, y) noktaları merkezil birim çemberin iç bölgesinde bulunurlar. O halde tanım kümesi, birinci ve üçüncü bölgede birim çemberin içinde kalan noktaların kümesidir. Bu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir.



ŞEKİL 14.3 $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$'nin tanım kümesi renkli bölge ve sınırlayıcı parabol $y = x^2$'den oluşur (Örnek 3).

ÖRNEK 3 İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Tanım Kümesini Belirlemek

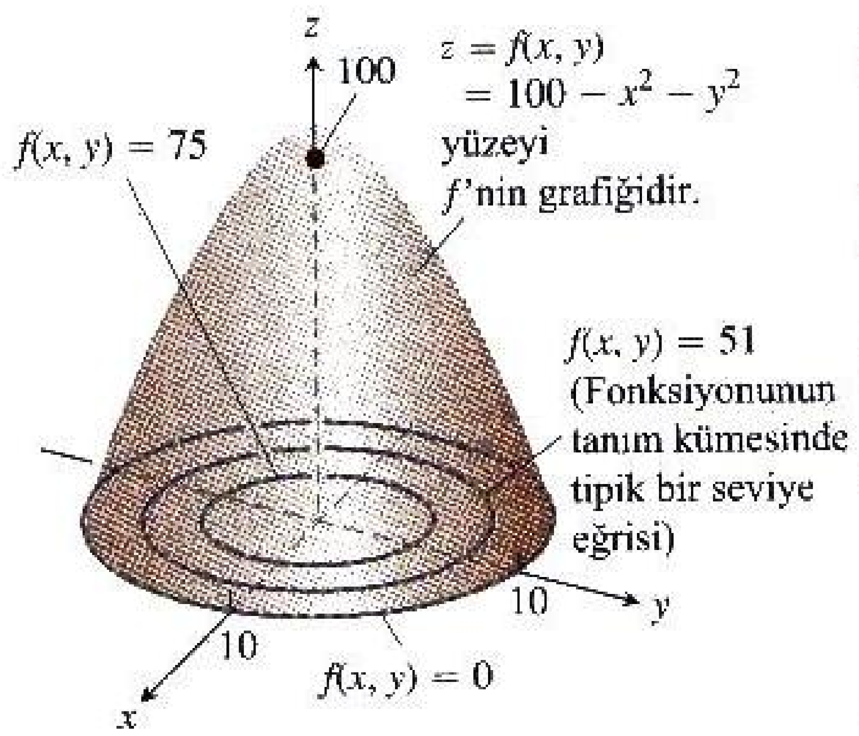
$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirleyin.

Çözüm f fonksiyonu sadece $y - x^2 \geq 0$ olduğu yerlerde tanımlı olduğundan, tanım kümesi Şekil 14.3'te gösterilen kapalı, sınırlı olmayan bölgedir. $y - x^2$ parabolü tanım kümesinin sınırıdır. Parabolün üst tarafındaki noktalar tanım kümesinin içini oluşturur.

İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikler, Seviye Eğrileri ve Kontur Çizgileri

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerlerini resimlemenin iki standart yolu vardır. Biri, tanım kümesinde f'nin sabit bir değer aldığı eğrileri çizip isimlendirmektir. Diğeri ise, uzayda $z = f(x, y)$ yüzeyini çizmektir.

> **TANIMLAR Seviye Eğrisi, Grafik, Yüzey**
>
> Düzlemde, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $f(x, y) = c$ gibi sabit bir değer aldığı noktalar kümesine f'nin bir **seviye eğrisi** denir. (x, y) noktası f'nin tanım aralığında olmak üzere, bütün $(x, y, f(x, y))$ noktalarının kümesine f'nin **grafiği** denir. f'nin grafiğine ayrıca $z = f(x, y)$ **yüzeyi** de denir.



ŞEKİL 14.4 $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği ve seçilmiş seviye eğrileri (Örnek 4).

ÖRNEK 4 İki Değişkenli Bir Fonksiyonu Çizmek

$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$'nin grafiğini çizin ve f'nin düzlemdeki tanım kümesinde $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrilerini işaretleyin.

Çözüm f'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemidir ve f'nin değer kümesi 100'e eşit veya 100'den küçük reel sayıların kümesidir. Grafiği, Şekil 14.4'te bir kısmı gösterilen $z = 100 - x^2 - y^2$ paraboloidi dir.

$f(x, y) = 0$ seviye eğrisi, xy-düzleminde

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{veya} \quad x^2 + y^2 = 100$$

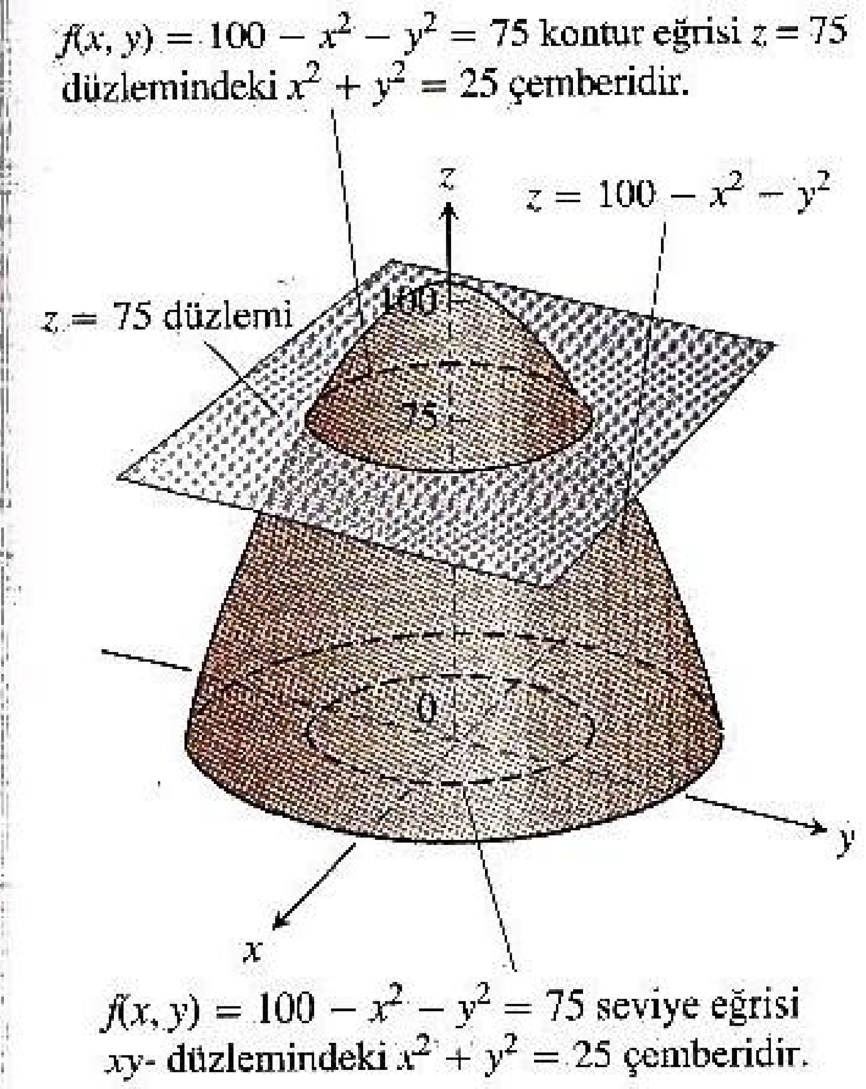
koşulunu sağlayan noktalar kümesidir ki, o da merkezi orijinde olan 10 yarıçaplı çemberdir. Benzer şekilde, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrileri (Şekil 14.4)

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 49$$

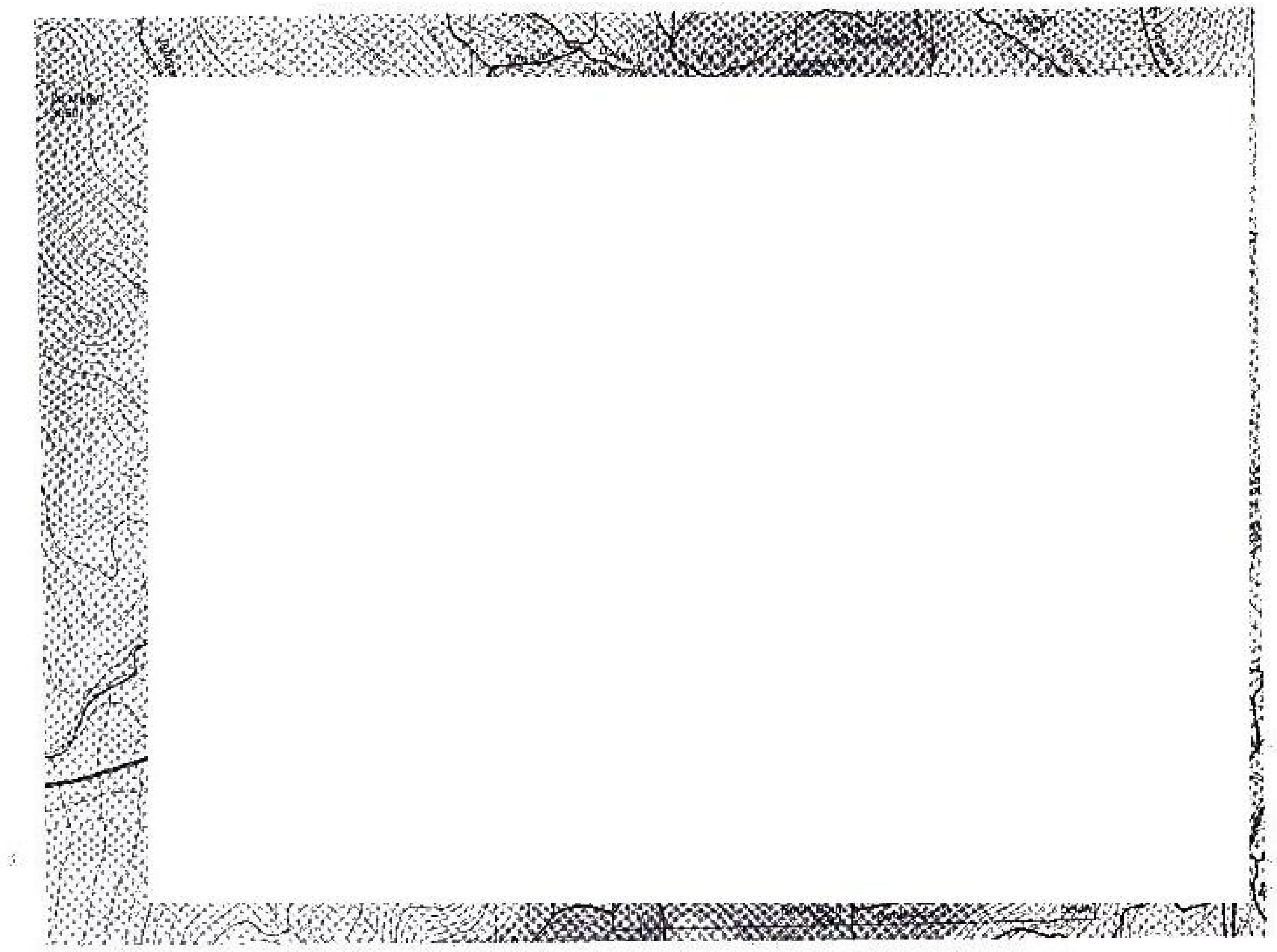
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

çemberleridir. $f(x, y) = 100$ seviye eğrisi sadece orijinden oluşur (Yine de bir seviye eğrisidir).

Uzayda $z = c$ düzleminin bir $z = f(x, y)$ yüzeyini kestiği eğri, $f(x, y) = c$ fonksiyon değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna, f'nin tanım kümesindeki $f(x, y) = c$ seviye eğrisinden ayırt etmek için, $f(x, y) = c$ kontur eğrisi denir. Şekil 14.5, $z = 100 - x^2 - y^2$ yüzeyi üzerinde $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonuyla tanımlanan $f(x, y) = 75$ kontur çizgisini göstermektedir. Kontur eğrisi, fonksiyonun tanım kümesindeki $f(x, y) = 75$ seviye eğrisi olan $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin yukarısında bulunmaktadır.
Ancak herkes bu ayrımı yapmaz ve iki eğriyi de aynı isimle adlandırmak isteyebilir ve aklınızda hangisinin bulunduğunu bildiğinize güvenebilirsiniz. Örneğin, çoğu haritalarda sabit yükseklikleri (deniz seviyesinden yükseklik) temsil eden eğrilere seviye eğrileri değil, kontür denir (Şekil 14.6).



ŞEKİL 14.5 xy-düzlemine paralel ve $z = f(x,y)$ yüzeyini kesen bir $z = c$ düzlemi bir kontur çizgisi üretir.



ŞEKİL 14.6 New Hampshire'deki Mt. Washington'un konturları (Appalachian Mountain Club'ın izniyle yeniden üretilmiştir).

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Düzlemde, iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir eğri oluşturur. Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir yüzey oluşturur.

> **TANIM Seviye Yüzeyi**
>
> Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu (x, y, z) noktaları f'nin bir **seviye yüzeyini** oluştururlar.

Üç değişkenli bir fonksiyonların grafikleri, dört boyutlu bir uzayda bulunan $(x, y, z, f(x, y, z))$ noktalarından oluştuğu için, bunları üç-boyutlu referans çerçevemizde etkili olarak çizemeyiz. Ancak, üç-boyutlu seviye yüzeylerine bakarak, fonksiyonun nasıl davrandığını görebiliriz.

ÖRNEK 5 Üç Değişkenli Bir Fonksiyonun Seviye Yüzeylerini Belirlemek

Aşağıdaki fonksiyonun seviye yüzeylerini tanımlayın:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ tanım bölgesini bulun.

Çözüm.

$\frac{x-y}{x+y} > 0$ olmalıdır.

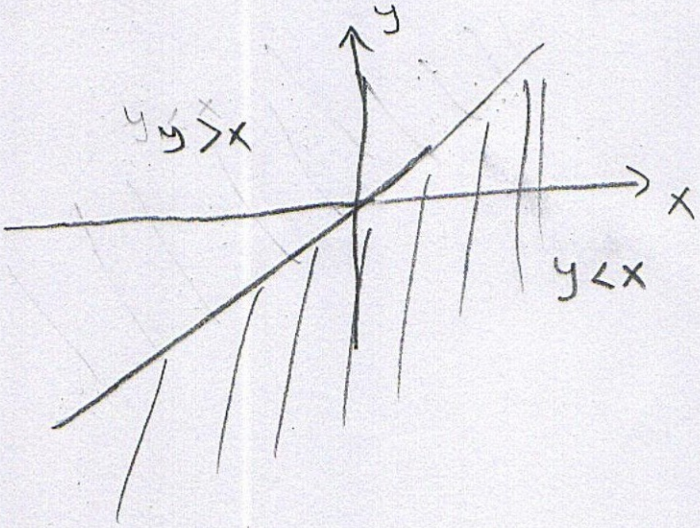
O halde 2 ihtimal var

a) $x-y>0 \quad x+y>0$

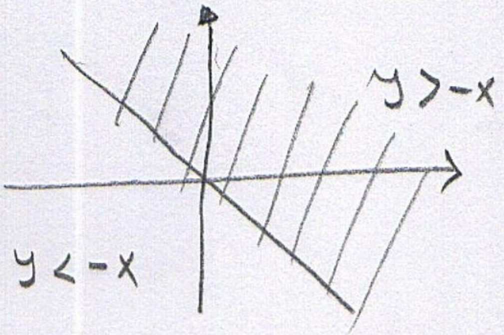
b) $x-y<0 \quad x+y<0$

a) şıkkını ele alalım.

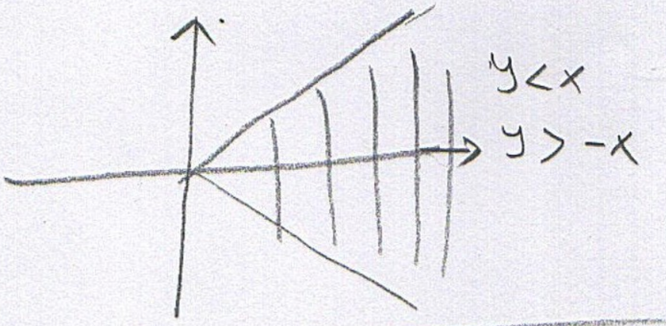
$x-y>0 \Rightarrow y<x$



$x+y>0 \quad y>-x$



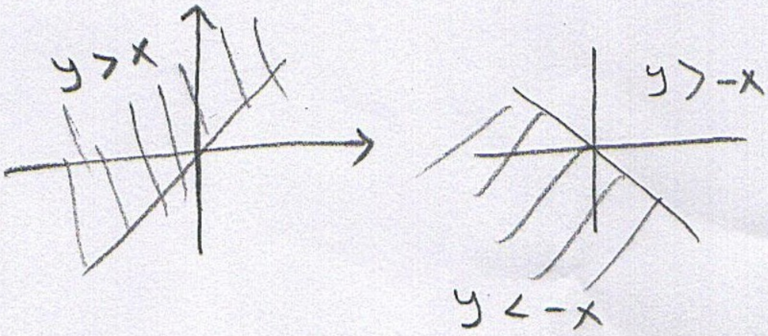
iki şeklin ortak olduğu yerler



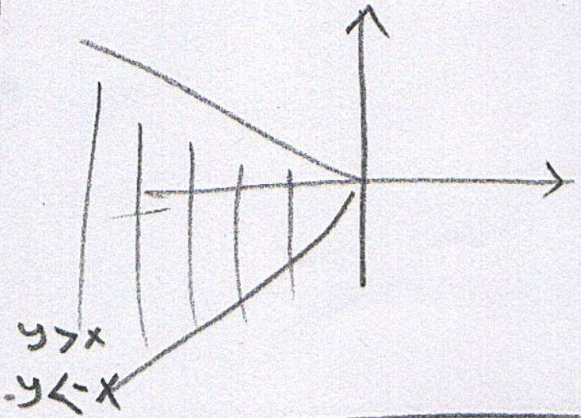
b) şıkkı

$x-y<0 \rightarrow y>x$

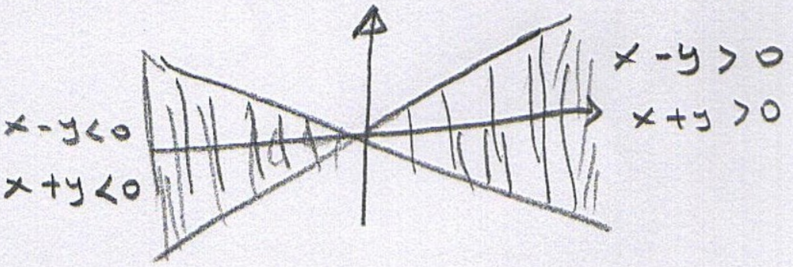
$x+y<0 \rightarrow y<-x$



iki şeklin ortak yerleri



a ve b şıklarında birleştir



Vektörler ve Parametrik denklemler

$x = t+1, \quad y = 2t+3$

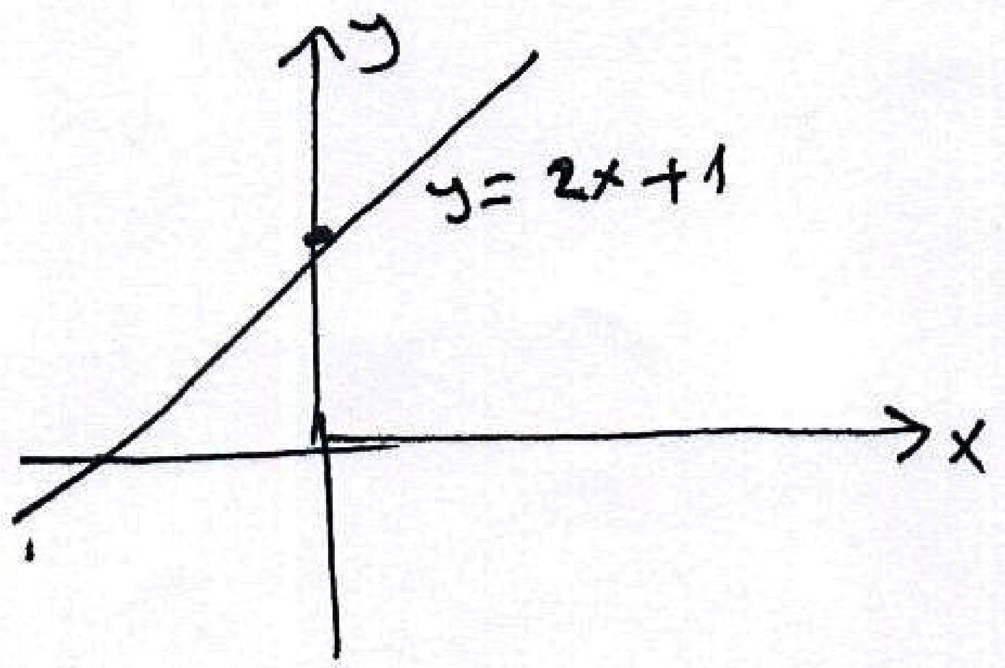
$\downarrow$

$t = x-1$

$y = 2t+3 = 2(x-1)+3$

$\quad = 2x+1$

$y = 2x+1$



Bu doğru denklemi Parametrik ifadelerle

$r(t) = (t+1)\,i + (2t+3)\,j$

şeklinde ifade edilir.

t	x	y	$r(t)$
0	1	3	$i+3j$
1	2	5	$2i+5j$
5	6	13	$5i+13j$
-1	0	1	$0i+j$
-1.5	-0.5	0	$-0.5i+0j$
100	101	203	$100i+203j$

$r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$

şeklindeki vector genelde düzlemde bir eğri belirler.

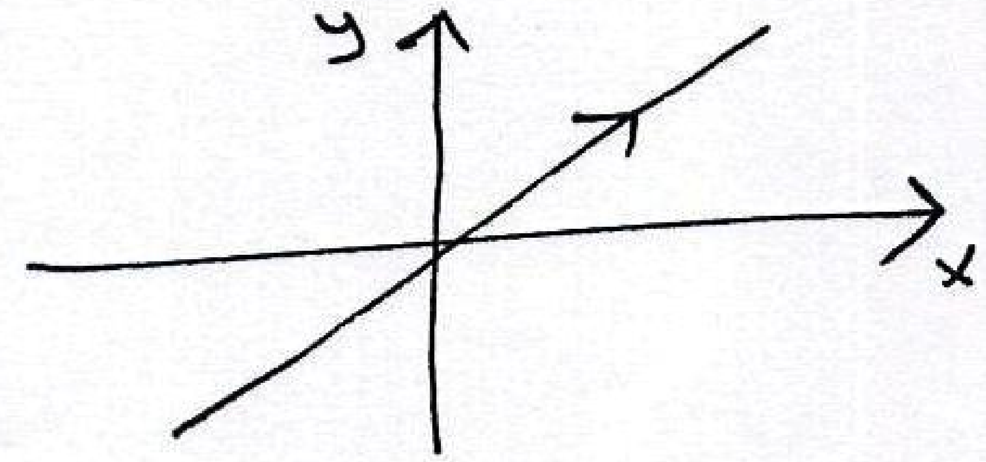
Eğer $x(t)$ ve $y(t)$ sadece t li terimler içeriyorsa bu bir doğru denklemidir

$r(t) = (t+8)\,i + (10t+20)\,j$ doğru

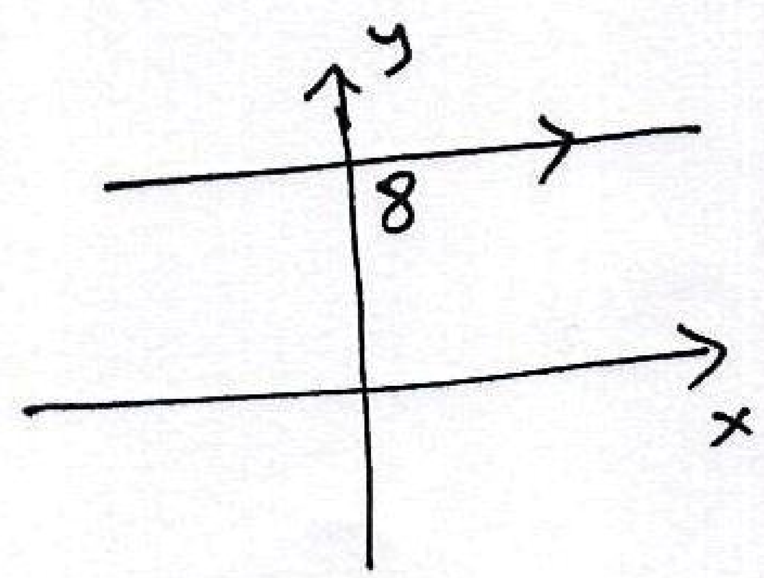
$r(t) = t\,i + t^2\,j \rightarrow$ eğri

Örnekler

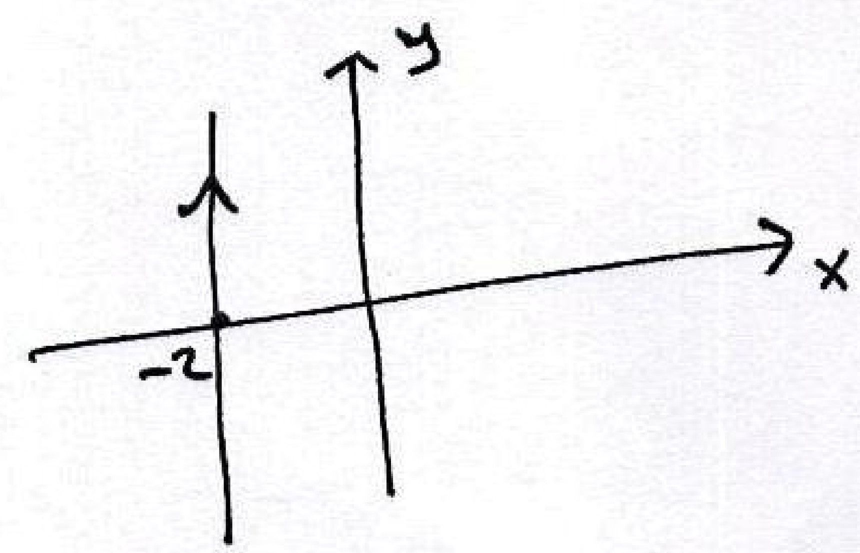
$r(t) = t\,i + t\,j$



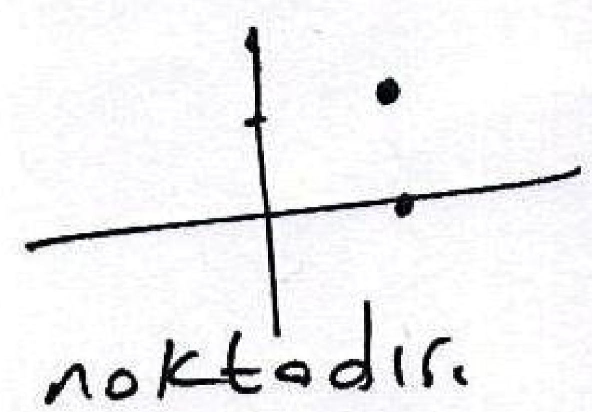
$r(t) = t\,i + 8\,j$



$r(t) = -2i + t\,j$

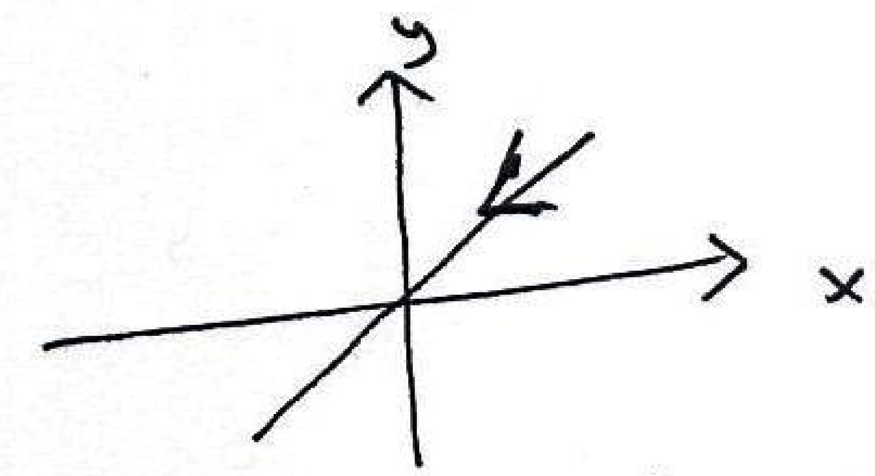


$r(t) = 3i + 4j$



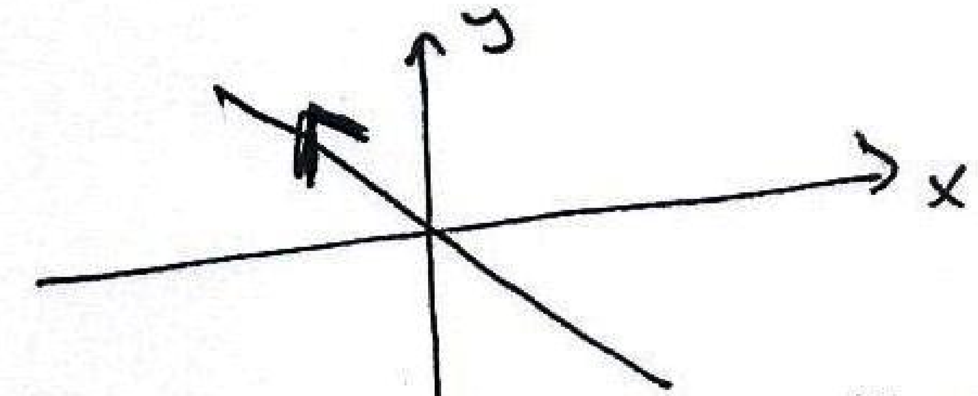
Bir noktadır.

$r(t) = -t\,i - t\,j$



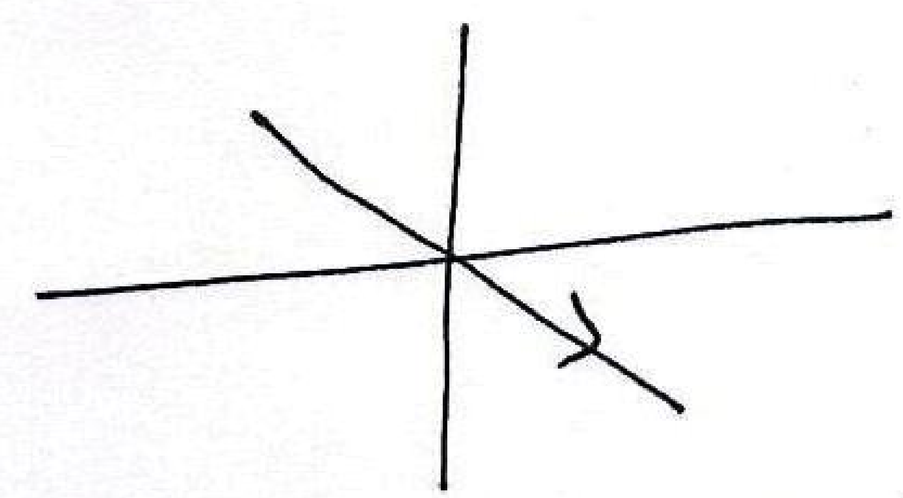
t artarken x azalır y azalır

$r(t) = -t\,i + t\,j$



t artarken x azalır y artar

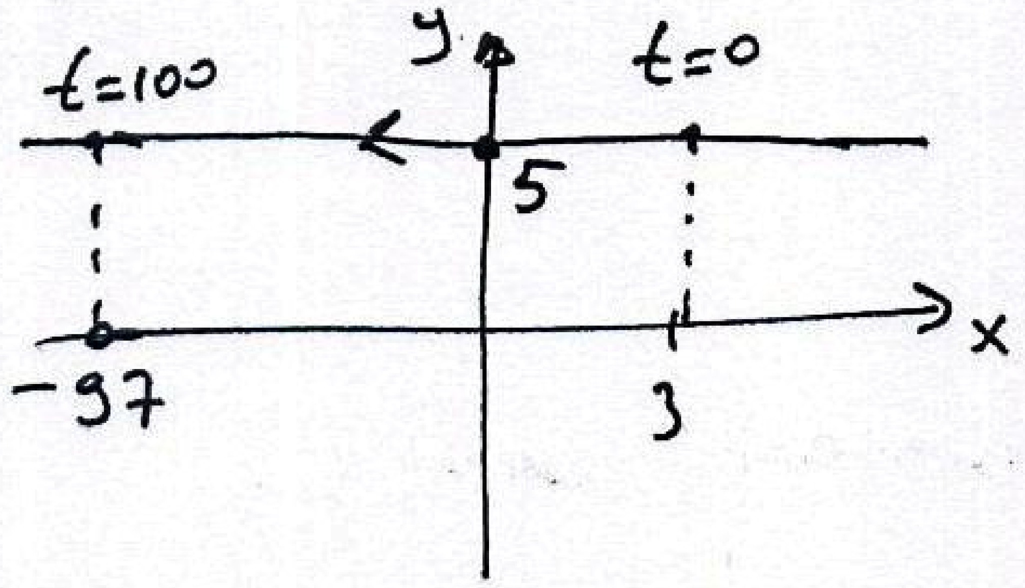
$r(t) = t\,i - t\,j$



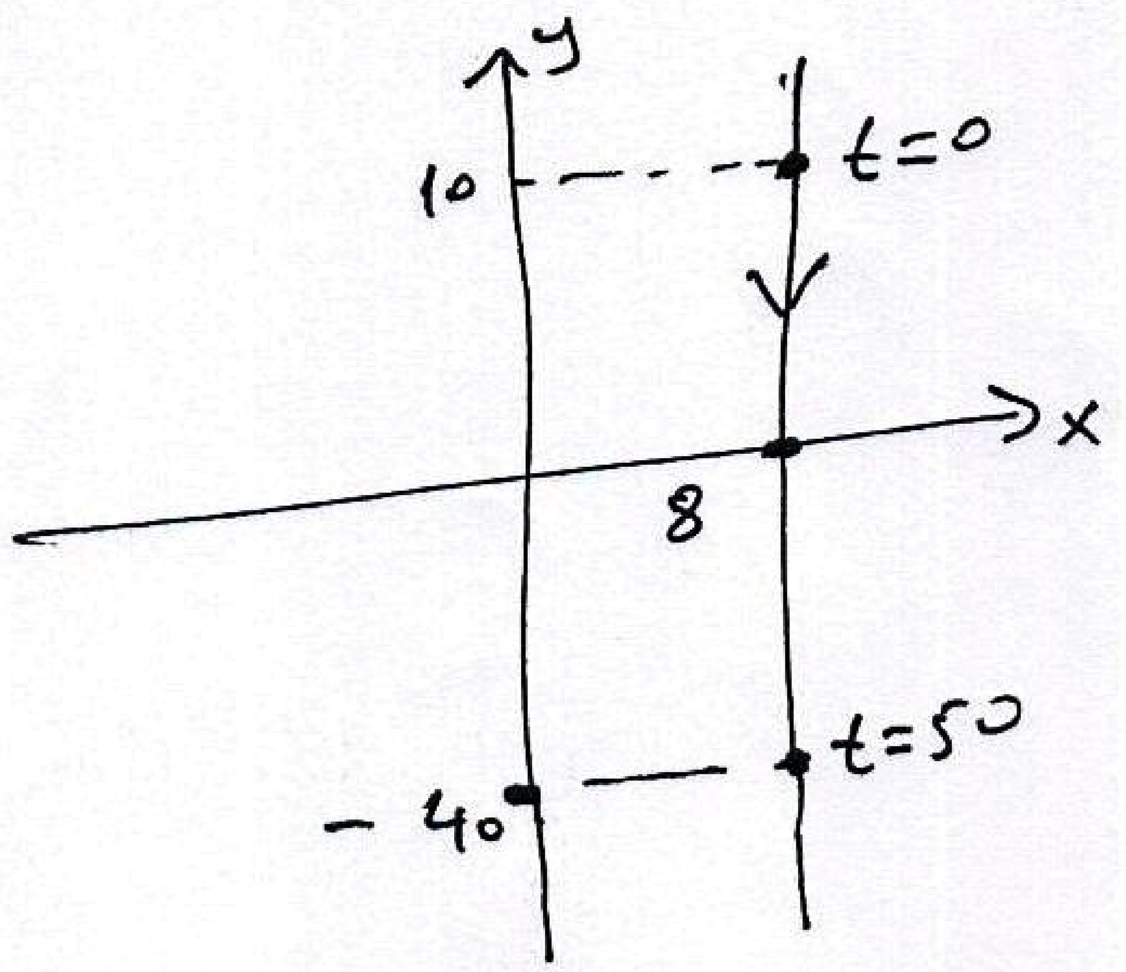
t artarken x artar y azalır

t	x	y	$r(t)$
0	0	0	0
1	1	-1	$i-j$
2	2	-2	$2i-2j$
3	3	-3	$3i-3j$

$r(t) = (3-t)\,i + 5\,j$

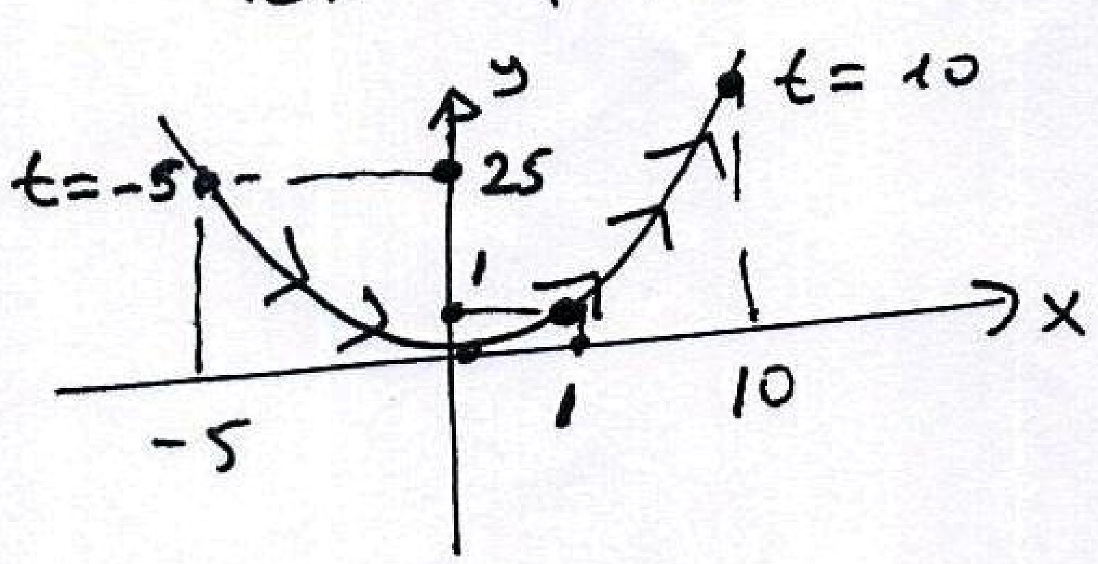


$r(t) = 8\,i + (10-t)\,j$

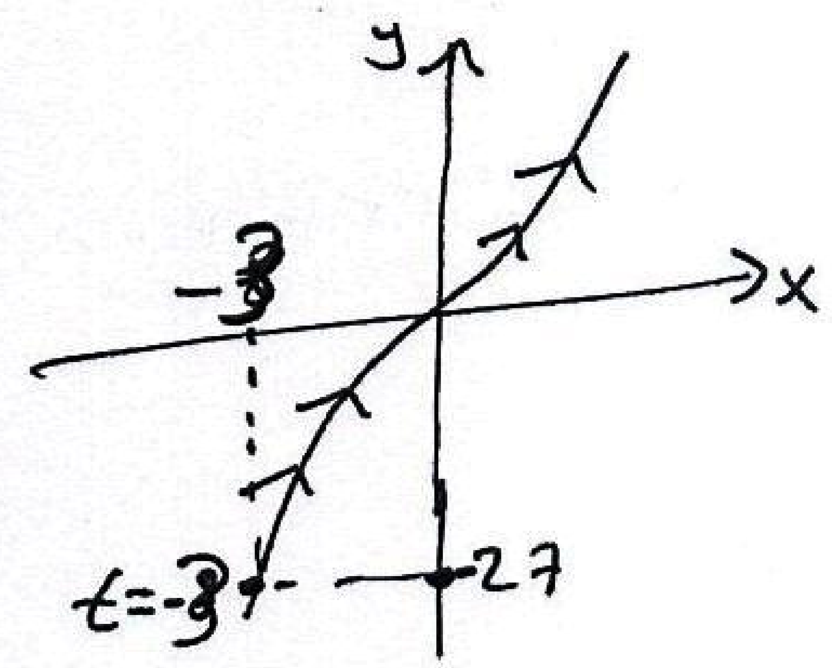


$r(t) = t\,i + t^2\,j \quad (y=x^2)$

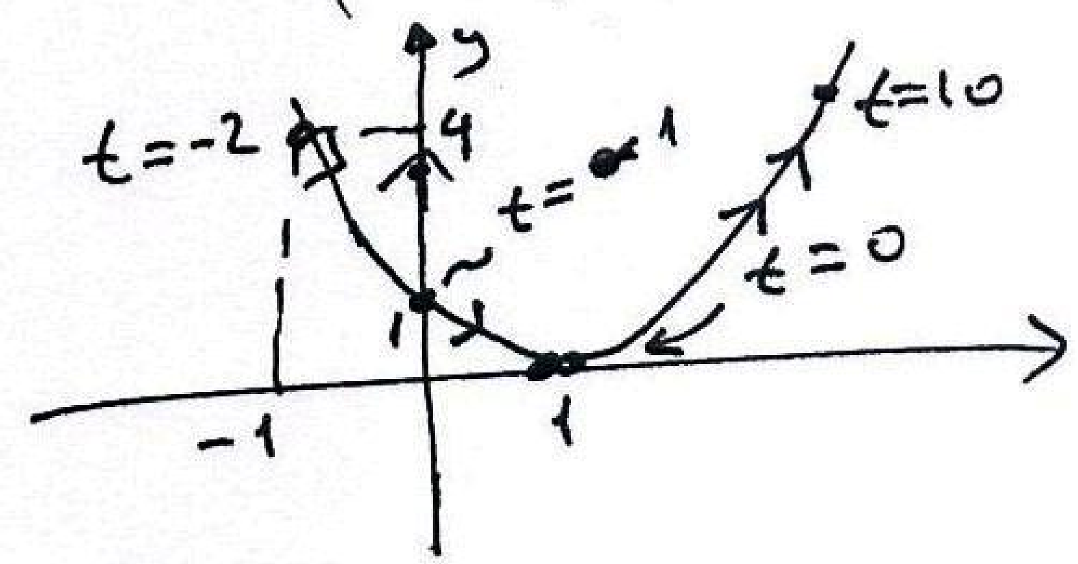
Bir parabol dür



$r(t) = t\,i + t^3\,j$



$r(t) = (t+1)\,i + t^2\,j$



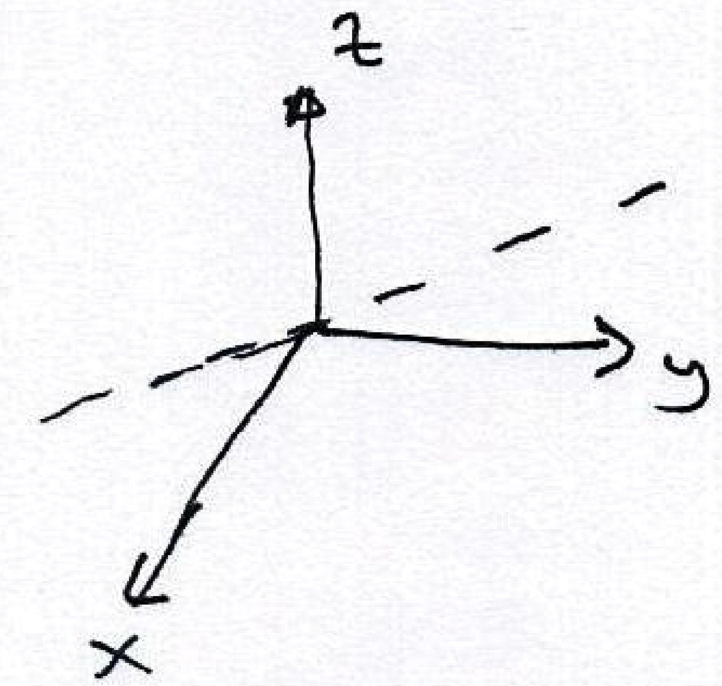
t	x: $t+1$	y: t^2	$r(t)$
-2	-1	4	$-1i+4j$
-1	0	1	$0+j$
0	1	0	$i+0$
1	2	1	$2i+j$
5	6	25	$6i+25j$

$r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,K$

Uzayda bir eğridir

$r(t) = t\,i + t\,j + t\,K$

Bir doğrudur



$r(t) = t\,i + t^2\,j + t\,K$

Bir parabol dür

$$|r(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

olarak tanımlanır.

Örnek

$r(t) = t\,i + (2t+1)\,j + 8\,K$

$$|r(t)| = \sqrt{t^2 + (2t+1)^2 + 8^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = r' = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}K$$

$r(t) = 8t^2\,i + (t+8)\,j + 12t^2\,K$

$r' = 16t\,i + j + 24t\,K$

$$|r'| = \sqrt{(16t)^2 + 1^2 + (24t)^2}$$

Örnek problem

$r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j$

$r'(t) = ?$ $\quad |r(t)| = ?$ $\quad |r'(t)| = ?$

$r(t)$ yi çizin.

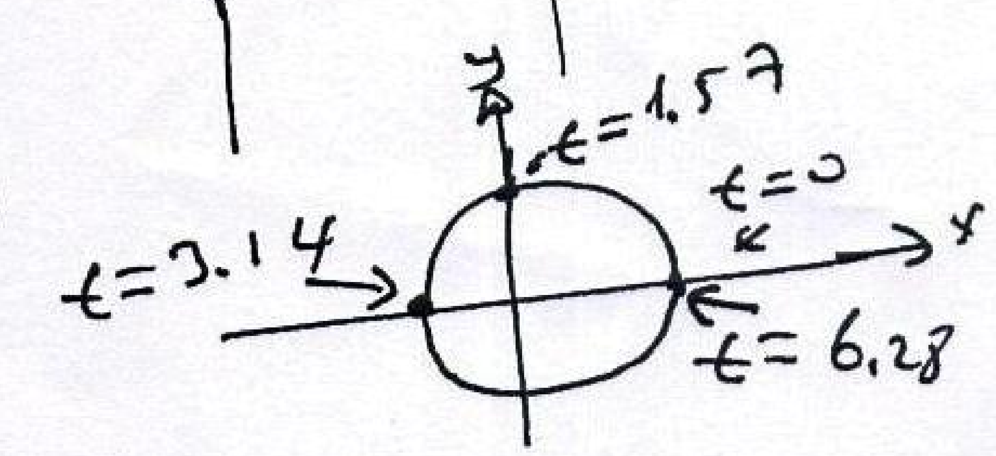
Çözüm

$r'(t) = -\sin t\,i + \cos t\,j$

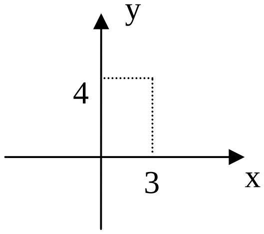
$|r(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

$r'(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

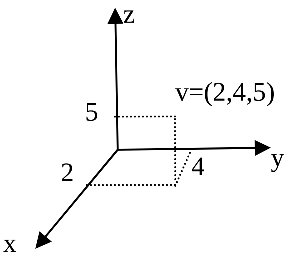
t	x: $\cos t$	y: $\sin t$	$r(t)$
0	1	0	$i+0$
0,5		1	$0+j$
1,57	0		
⋮			

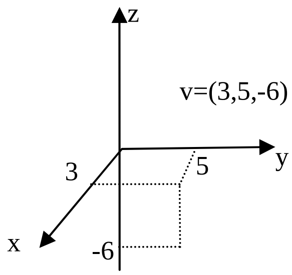


N75) r(t)=ai+bj   duzlemde bir nokta
r(t)=3i+4j bir nokta.



N76)r(t)=ai+bj+ck uzayda bir nokta
r(t)=2i+4j+5k   bir nokta
r(t)=3i+5j-6k   bir nokta



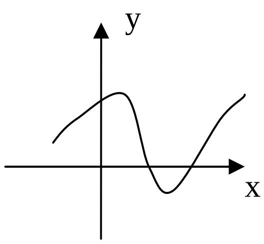


--- -------------

N81)r(t)= a(t)i+b(t)j duzlemde bir cizgisel yorunge(egri)
r(t)=(2t+5)i+(sin(t)+4t)j
x= 2t+5, y= sin(t)+4t

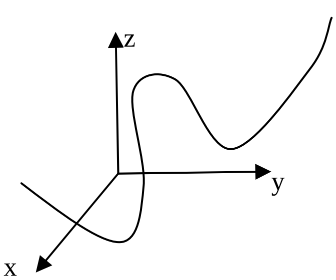
$$t = \frac{x-5}{2},\ \ y = \sin\left(\frac{x-5}{2}\right) + 4\frac{x-5}{2}$$

y=sin(0.5x-2.5)+2(x-5)



-- ------------------

N82) z=a(t), y=b(t), z=c(t), uc denklem   uzayda bir cizgisel yorunge(egri) belirtir.   Bu durum
r(t)= a(t)i+b(t)j+c(t)k
seklinde belirtilir.



r(t)= (t2+5)i+(sin(t)+4t)j+(t+8)k bir egri
r(t)=(t-1)i+(2t+1)j+(5t+3)k bir dogru

x=t, y= t^2, z=t+5   ==>   r(t)= ti+ t^2j+(t+5)k
uzayda bir parabol denklemi belirtir. (parabol yuzeyi degil, parabol egrisini belirtir.)

x=2t, y=3t+1, z=t-1   ==>   r(t)= 2ti+ (3t+1)j+(t-1)k
bir dogru denklemi

N86) z=a(t), y=b(t), z=c(t), ifadelerinde t parametresi yok edilerek. 3 esitlik 2 esitlige dusurulur.
x=t+3, y= t^2+1, z=t+1
t=x-3,   y= $(x-3)^2$+1,   z=(x-3)+1

y= x^2-6x+10,   z=x-2

N87) g(x,y)=0, f(y,z)=0 ikisi birlikte uzayda cizgisel bir yorunge (bir egri) belirtir.
x=y+1,   z=x+8,   bir dogru denklemi
y=x+1,   z=x^2+2x   bir parabol denklemi

N91) g(x,y,z)=0 uzayda bir yuzey
$x^2+y^2+z^2=4$ bir kure yuzeyi
z= x^2+y^2 bir paraboloid yuzeyi

F= P(x,y,z)i+ Q(x,y,z)j+ R(x,y,z)k uzayda bir vektor alani
F= P(x,y)i+ Q(x,y)j duzlemde bir vektor alani

Uzayda Dogru denklemi

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarindan gecen dogru denklemi

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$$

Dogru denklemi ha liyle

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

olarak da yazilabilir.

Ornek 231

A(1,2,3) ve B(5,3, 7) noktalarindan gecen dogru denklemini yazin.

$$\frac{x-1}{1-5} = \frac{y-2}{2-3} = \frac{z-3}{3-7}$$

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

Ornek 232

A(0,0,0) ve B(1,1, 1) noktalarindan gecen dogru denklemini yazin.

$$\frac{x-0}{0-1} = \frac{y-0}{0-1} = \frac{z-0}{0-1}$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}, \qquad x=y=z,$$

Ornek 241

A(1,2,3) ve B(5,3, 7) noktalarindan gecen dogrunun parametrik denklemini yazin. Ornek 231 den dogrunun kartezyen denklemi

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

seklinde verilmisti.

Burada x=t konulursa

$$\frac{t-1}{4} = \frac{y-2}{1}, \; \Rightarrow \; y=2+\frac{t-1}{4} = 0.25t+1.75$$

$$\frac{t-1}{4} = \frac{z-3}{4}, \quad z-3=t-1 \quad z= t+2$$

r(t)=t **i**+ (0.25t+1.75) **j** + (t+2) **k**

Not: Ayni denklemi degisik parametrik denklemlerle de ifade edebiliriz.

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

Burada x=4t+1 konulursa

$$\frac{4t+1-1}{4} = \frac{y-2}{1}, \; \Rightarrow \; y=2+\frac{4t}{4} = t+2$$

$$\frac{4t+1-1}{4} = \frac{z-3}{4}, \quad \frac{4t}{4} = \frac{z-3}{4}, \quad z-3=4t, \; z=4t+3$$

r(t)=(4t+1) **i**+ (t+2) **j** + (4t+3) **k**

-------------------------- -------------

Ornek 321

r(t) = (at+b) **i**+ (ct+d) **j** + (et+f) **k**

denklemini kartezyen koordinatlarda ifade edin.

Cozum:

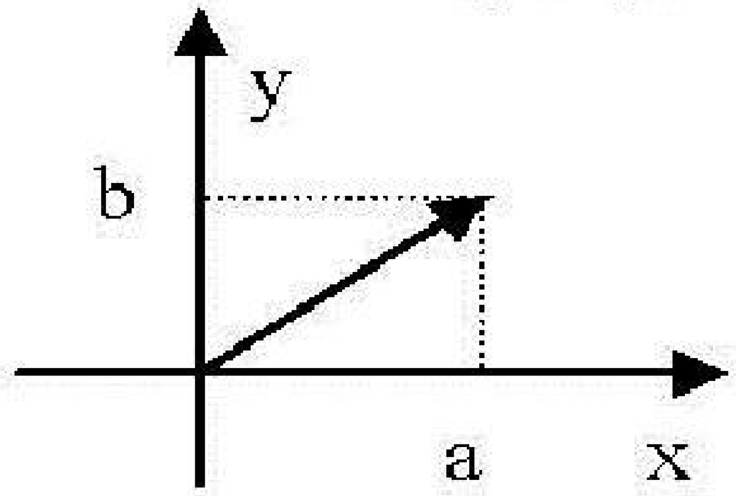
r(t) = x **i**+ y **j** + z **k**

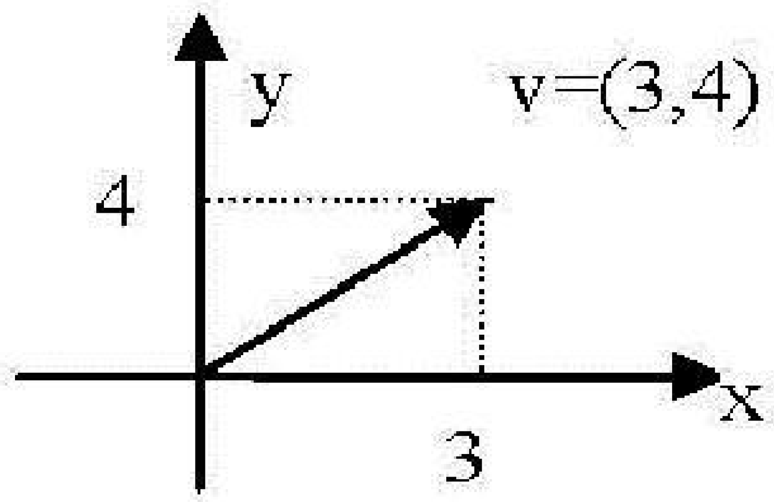
x = at+b, y= ct+d, z=et+f

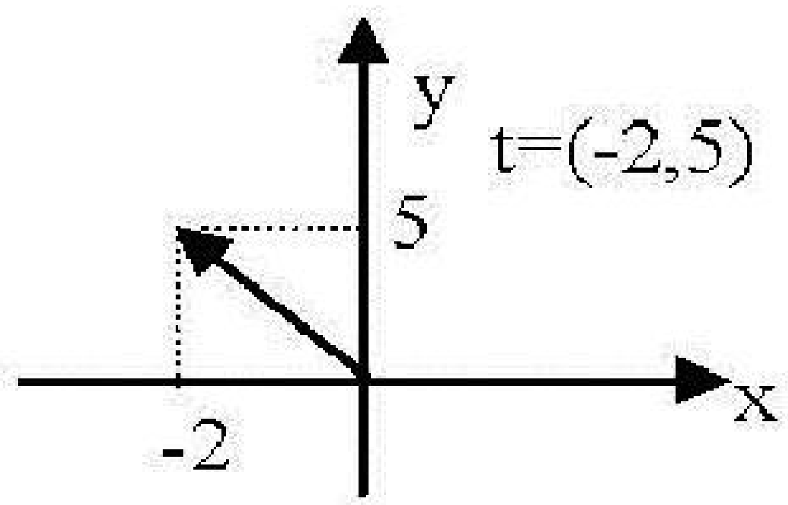
$$t = \frac{x-b}{a}, \qquad t = \frac{y-d}{c}, \qquad t = \frac{z-f}{e}$$

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y-d}{c} = \frac{z-f}{e}$$

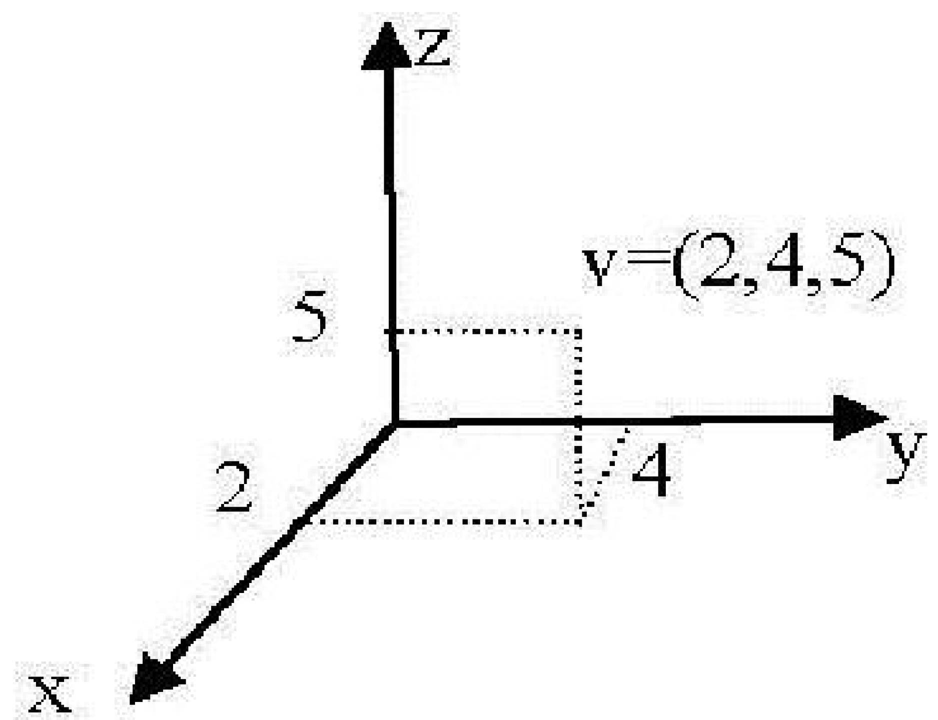
Vektorler v=(a,b), seklinde tanimlanir.

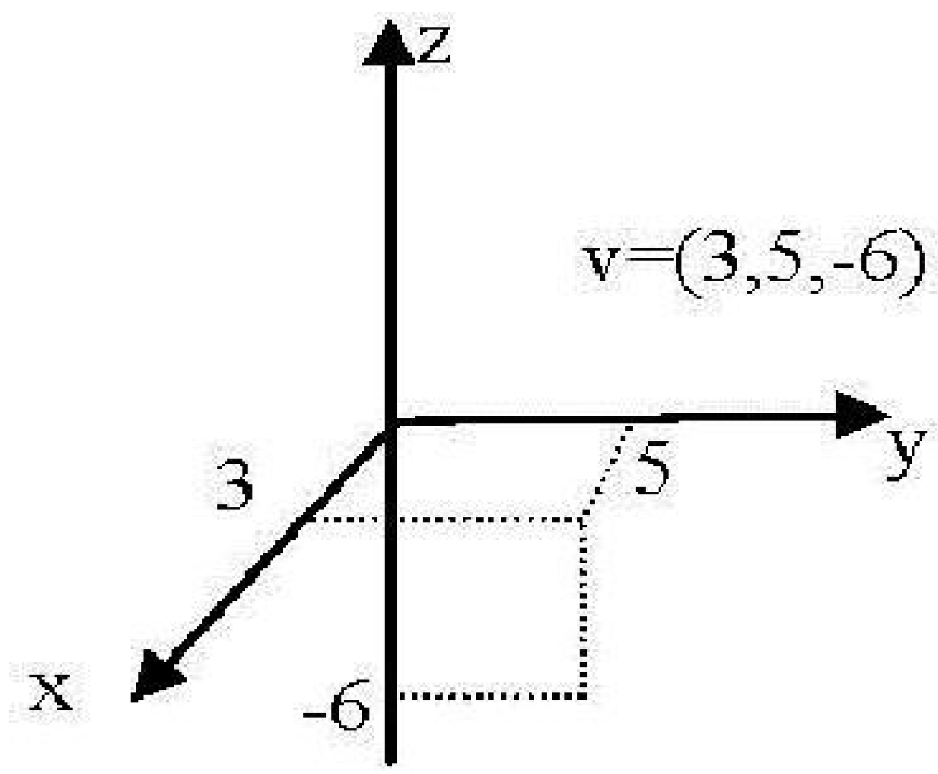






Uc boyutlu uzayda benzeri sekilde tanimlanir





Vektorlerin toplanmasi:

u=(1,4,5), v=(3,-2,-10)

p=u+v=1+3, 4-2, 5-10)=(4,2,-5)

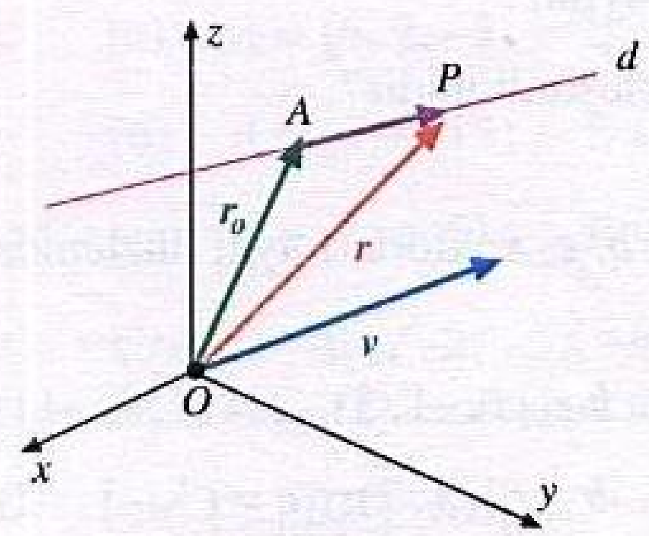
Vektorlerin scalar carpimi

u=(1,4,5), v=(3,-2,-10)

q=u.v=(1,4,5).(3,-2,-10)=1 x 3+4x(-2) +5x(-10)=-55

11.10 UZAYDA DOĞRU DENKLEMİ

Verilen Bir Noktadan Geçen ve Verilen Bir Vektöre Paralel Olan Doğrunun Denklemi



Verilen bir $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $v = (a, b, c)$ vektörüne paralel olan d doğrusunun denklemini bulalım. Doğrunun bir değişken noktası $P(x, y, z)$ olsun. Doğrunun denklemini yazmak demek x, y, z koordinatları arasında bir bağıntı bulmak demektir.

$\boldsymbol{AP}$ vektörü v vektörüne paralel olduğundan

$$\boldsymbol{AP} = tv$$

olacak şekilde bir t reel sayısı vardır. $r_0 + \boldsymbol{AP} = r$ eşitliğinden, d doğrusunun **vektörel denklemi** olarak

$$r = r_0 + tv$$

bulunur. Burada $r_0 = \boldsymbol{OA}$ bir sabit vektördür. v ise doğrunun paralel olduğu vektördür. Bu v vektörüne, doğrunun **doğrultman vektörü** adı verilir.

$r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $v = (a, b, c)$, $r = (x, y, z)$ vektörleri bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a, b, c)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sisteme doğrunun **parametrik denklemi** denir. Bu sistemde t çekilirse

$$\frac{x - x_0}{a} = t, \quad \frac{y - y_0}{b} = t, \quad \frac{z - z_0}{c} = t$$

bulunur. Buradan, doğrunun **kartezyen denklemi** denilen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

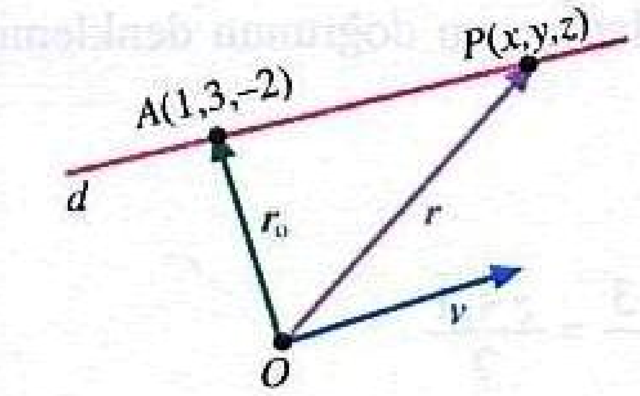
bağıntısı elde edilir. Buradaki a, b, c sayılarına **doğrultman parametreleri** adı verilir. Eğer doğrultman parametrelerinden biri, örneğin b sıfır ise doğru $y-$ eksenine dik demektir. Bu doğrunun parametrik denklemi

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0, \quad z = z_0 + tc$$

olacaktır. Dolayısıyla, bu doğrunun kartezyen denklemi

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \quad y = y_0$$

olur.



ÖRNEK : $A(1, 3, -2)$ noktasından geçen ve $v = (1, -3, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : Doğrunun değişken bir noktası $P(x, y, z)$ olsun.

$OP = OA + AP \Rightarrow r_0 + tv \Rightarrow (x, y, z) = (1, 3, -2) + t\,(1, -3, 5) \Rightarrow$

$(x, y, z) = (1 + t, 3 - 3t, -2 + 5t) \Rightarrow x = 1 + t\,,\ y = 3 - 3t\,,\ z = -2 + 5t$

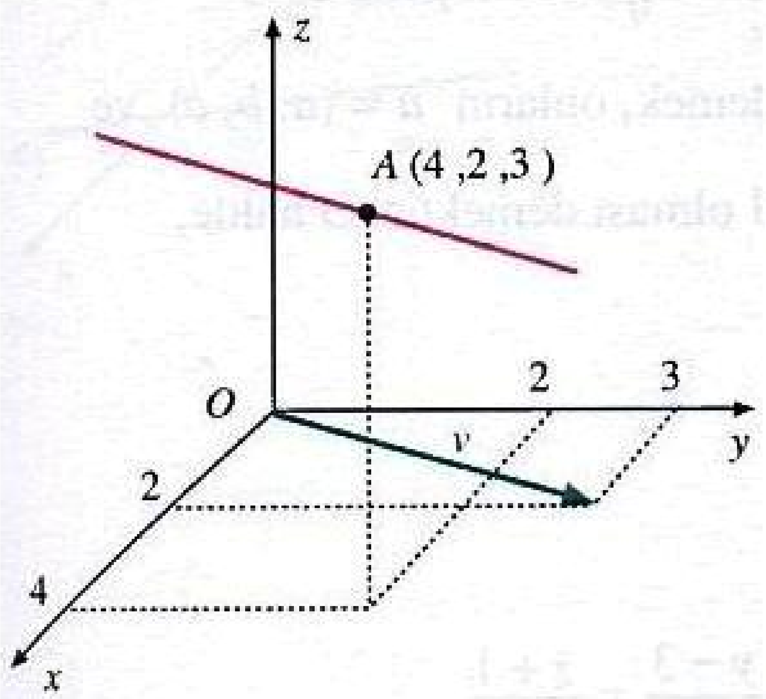
parametrik denklemi elde edilir. Buradan

$$x - 1 = t\,,\quad \frac{y-3}{-3} = t\,,\quad \frac{z+2}{5} = t$$

yazılabilir. O halde doğrunun kartezyen denklemi

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{5}$$

olur.



ÖRNEK : $A(4, 2, 3)$ noktasından geçen ve $v = (2, 3, 0)$ vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm : Doğrultman vektörünün üçüncü bileşeni sıfır olduğundan doğrunun kartezyen denklemi

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3}\,,\ z = 3$$

olur. Yandaki şekilden de görüldüğü gibi, söz konusu doğru xOy– düzlemine paralel (Oz– eksenine dik) bir doğrudur.

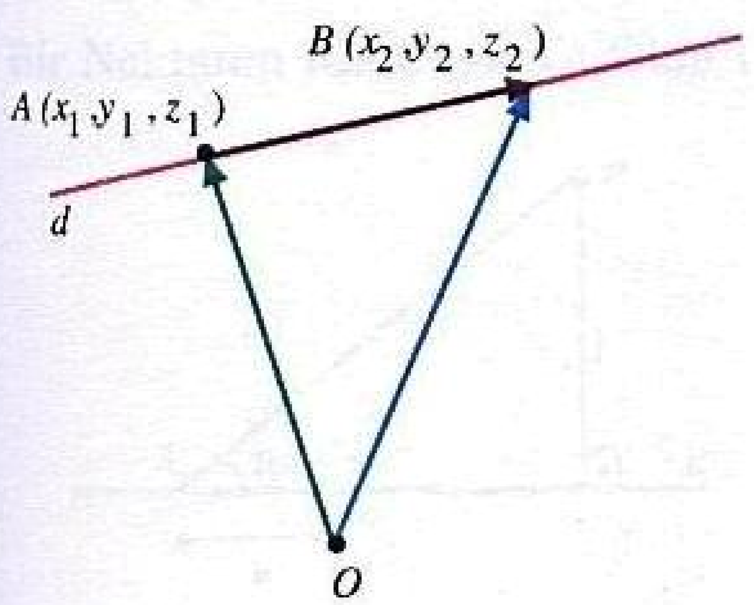
ÖRNEK : m nin hangi değeri için $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z-3}{-8}$ denklemli doğru $u = (2, m, -4)$ vektörüne paralel olur?

Çözüm : Doğrunun bir doğrultman vektörü $v = (4, -6, -8)$ olacağından $u \,//\, v$ olmalıdır. Bunun için de

$$\frac{2}{4} = \frac{m}{-6} = \frac{-4}{-8}$$

olmalıdır. Buradan $4m = -12 \Rightarrow m = -3$ bulunur.

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi



$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazmak için, v doğrultman vektörü yerine AB vektörünü almak yeterdir.

$$AB = (x_2 - x_1\,,\ y_2 - y_1\,,\ z_2 - z_1)$$

olduğundan, A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

olur.

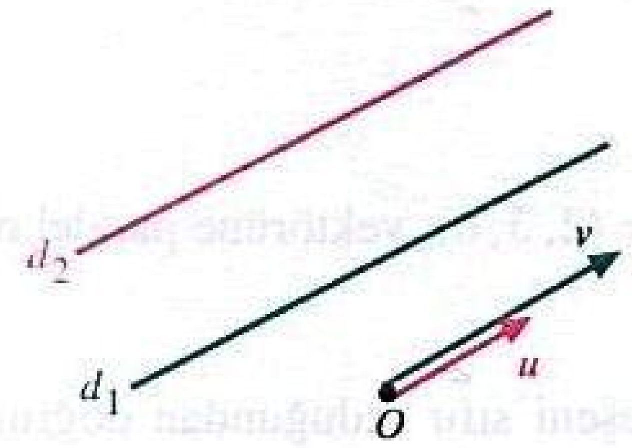
ÖRNEK : $A(1, 3, -1)$, $B(3, 5, 6)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm : İstenen doğru denklemi

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{5-3} = \frac{z+1}{6+1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{7}$$

olur.

İki Doğrunun Paralel Olma Şartı



Denklemleri

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad \text{ve} \quad \frac{x-x_2}{p} = \frac{y-y_2}{q} = \frac{z-z_2}{r}$$

olan d_1 ve d_2 doğrularının paralel olması demek, onların $u = (a, b, c)$ ve $v = (p, q, r)$ doğrultman vektörlerinin paralel olması demektir. O halde,

$$d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

olur.

ÖRNEK : Denklemleri

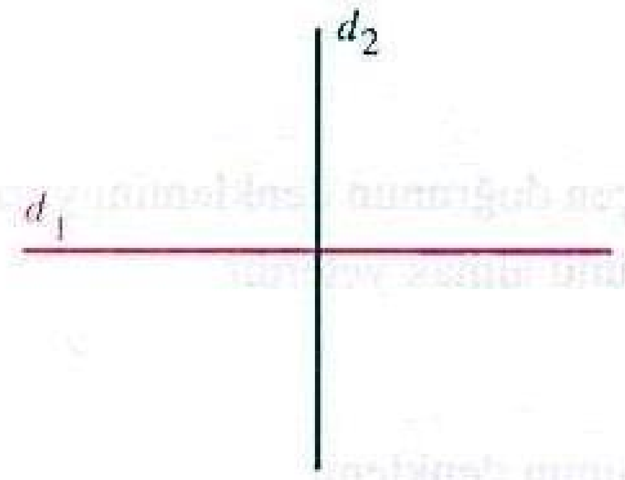
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-3}{4} \quad \text{ve} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+1}{n}$$

olan doğruların paralel olması için m ve n ne olmalıdır?

Çözüm :

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{m}{8} = \dfrac{4}{n} \Rightarrow 6m = 24$ ve $3n = 24 \Rightarrow m = 4$ ve $n = 8$ olmalıdır.

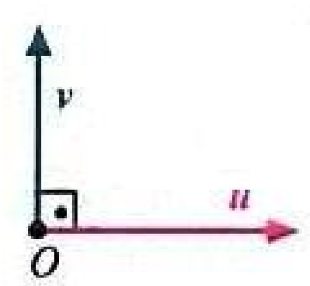
İki Doğrunun Dik Olma Şartı



İki doğrunun dik olması demek, onların doğrultman vektörlerinin dik olması demektir. İki vektör dik olduğunda onların skalar çarpımı sıfır olacağından

$$d_1 \ldots \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

$$d_2 \ldots \frac{x-x_2}{p} = \frac{y-y_2}{q} = \frac{z-z_2}{r}$$



doğruları için

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow ap + bq + cr = 0$$

önermesi doğrudur.

$X = ai + bj$

$Y = ci + dj$

scoler çarpım

$X \cdot Y = ac + bd$

Kartezyen çarpım

$X \times Y = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = adi - bcj$

$f = ai + bj + cK$

$G = di + ej + fK$

$f \cdot G = ad + be + cf$

$f \times G = \begin{vmatrix} i & j & K \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

$= i\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + K\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$= (bc - ec)i - (af - dc)j + \boxed{(ae - bd)K}$

Örnek:

$F = 3i + 5j$

$G = 8i + 9j$

$f \cdot G = ?$ $\quad f \times G = ?$

$f \cdot G = 3 \times 8 + 5 \times 9 = 24 + 45 = 69$

$f \times G = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \times 9 i - 5 \cdot 8 j$

$= 27i - 40j$

$f = 2i + 4j + 5K$

$G = 6i + 7j + 8K$

$f \cdot G = 12i + 28j + 40K$

$f \times G = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} K$

$= (32 - 35)i - (16 - 30)j + (14 - 24)K$

$= -3i + 14j - 10K$

$f = ai + bj + cK$

$||f|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

f nin normu denir

$f = 3i + 4j$

$||f|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$f = 2i + 3j + 4K$

$||f|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = 5.38$

$f \cdot G = 0$ ise f ve G birbirine dikdir denir (dik = ortagonal)

$f = 3i + 4j$

$G = 5i - 3.75j$

$f \cdot G = 3 \times 5 - 4 \times 3.75 = 0$

f ve G dikdır.

$f = 3i + 4j + 5K$

$G = 6i + 7j - \frac{46}{5}K$

$f \cdot G = 18 + 28 - 46 = 0$

f ve G dik dir.

İkinci mertebeden bir determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

sayısıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.(-2) = 3 + 8 = 11$$

olur. Üçüncü mertebeden bir determinantın açılımı

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ÖRNEK : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (12 + 5) - 2(0 - 10) + 3(0 - 8) = 13.$

Üçüncü mertebeden determinantlar **Sarrus kuralı** denilen yöntemle de hesaplanabilir. Bunun için birinci ve ikinci kolondaki sayılar determinantın sağına yazılır. Aşağıda belirtilen şekilde hesaplanır.

$$\begin{array}{ccc} c_1b_2a_3 & c_2b_3a_1 & c_3b_1a_2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1b_2c_3 & a_2b_3c_1 & a_3b_1c_2 \end{array}$$

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2).$$

ÖRNEK : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (0 + 4 + 12) - (0 + 1 + 30) = 16 - 31 = -15.$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i(u_2v_3 - u_3v_2) - j(u_1v_3 - u_3v_1) + k(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\,i + (u_3v_1 - u_1v_3)\,j + (u_1v_2 - u_2v_1)\,k$$

(a) $u = (1, -2, 5)$, $v = (-3, 1, 2)$ vektörleri için $u \times v$ vektörünü bulunuz.

Çözüm :

(a) $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 5)\,i - (2 + 15)\,j + (1 - 6)\,k$

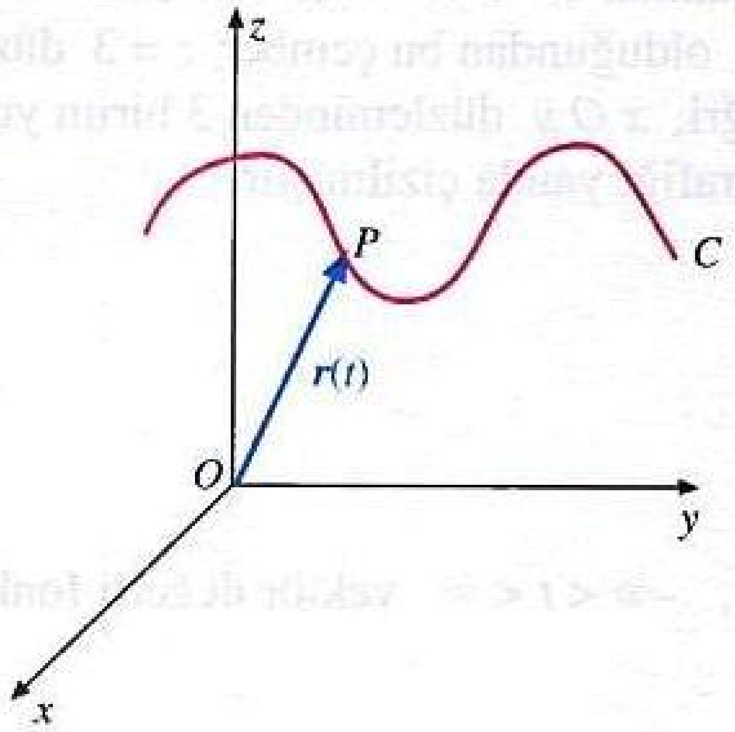
$= -9i - 17j - 5k$

olur.

TEOREM

$u \times v$ vektörü hem u, hem v vektörüne diktir.

12.3 EĞRİLER



$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b \tag{12.1}$$

biçiminde sürekli bir vektör değerli fonksiyon verildiğinde, $[a, b]$ aralığındaki her bir t için üç boyutlu uzayda bir $P(x(t), y(t), z(t))$ noktası karşılık gelir.

t parametresi $[a, b]$ aralığını taradığında P noktası da bir C eğrisi oluşturur. Bu nedenle (12.1) biçimindeki bir ifadeye C eğrisinin bir **parametrik gösterimi** denir. (12.1) deki gösterim

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

biçiminde de yazılabilir. Bir uzay eğrisi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad a \le x \le b \tag{12.2}$$

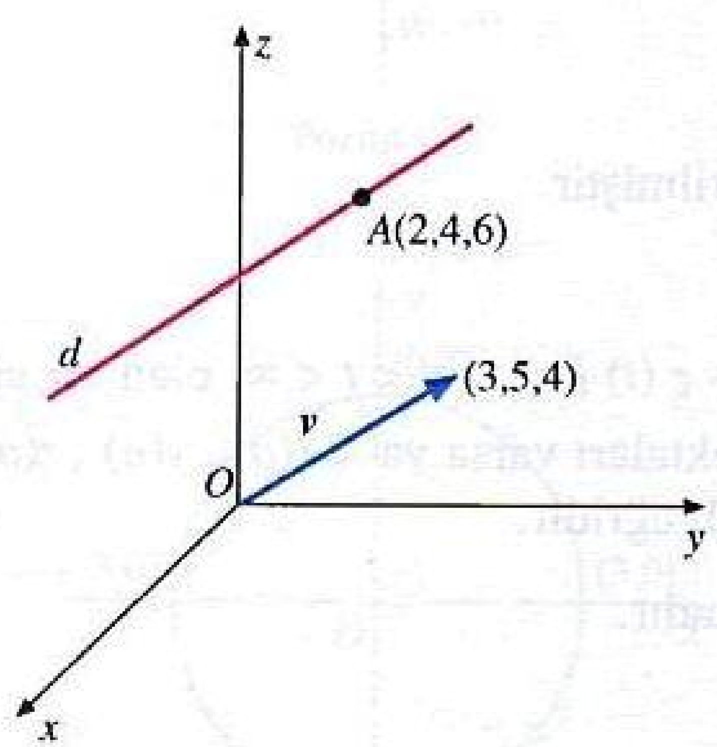
veya

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{12.3}$$

biçiminde de temsil edilebilir. Gerçekten (12.2) de $x = t$ denirse $y = f(t)$ ve $z = g(t)$ olur. Bu gösterim

$$\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + f(t)\,\boldsymbol{j} + g(t)\,\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

biçiminde, yani (12.1) formunda yazılabilir. (12.3) deki herbir denklem bir yüzey gösterir. Sözkonusu eğri bu iki yüzeyin arakesiti olan eğridir.

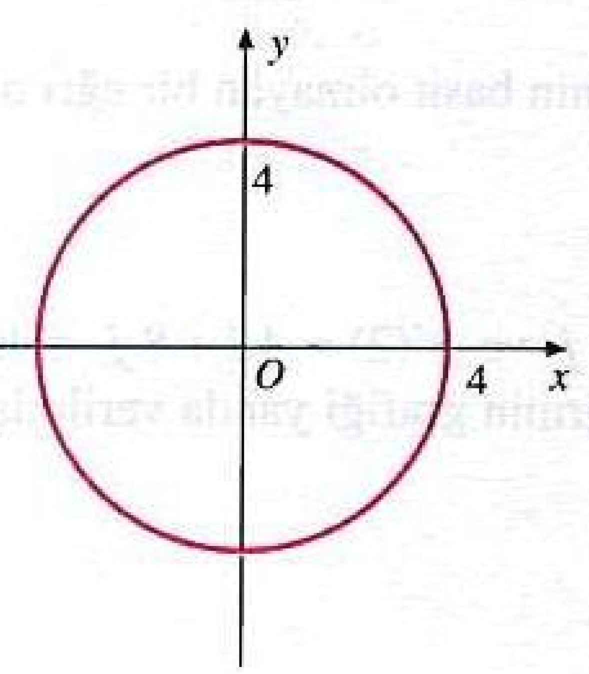


ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = (2 + 3t)\,\boldsymbol{i} + (4 + 5t)\,\boldsymbol{j} + (6 + 4t)\,\boldsymbol{k}$ denklemli eğrisinin cinsini belirtip grafiğini çiziniz.

Çözüm : Verilen denklem

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = t \\ \dfrac{y-4}{5} = t \\ \dfrac{z-6}{4} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{4}$$

biçiminde yazılabileceğinden verilen denklem $A(2, 4, 6)$ noktasından geçen ve $\boldsymbol{v} = (3, 5, 4)$ vektörüne paralel olan bir doğrudur. Bu doğrunun grafiği yanda çizilmiştir.



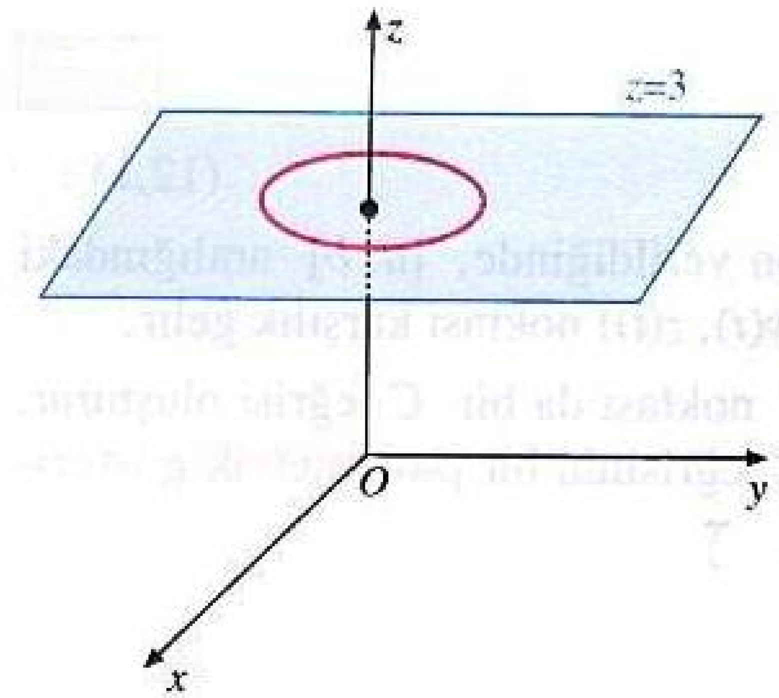
ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\,\boldsymbol{i} + 4\sin t\,\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm : $\boldsymbol{k}$ vektörünün katsayısı sıfır olduğundan, eğri $x\,O\,y$ düzleminde bir eğridir.

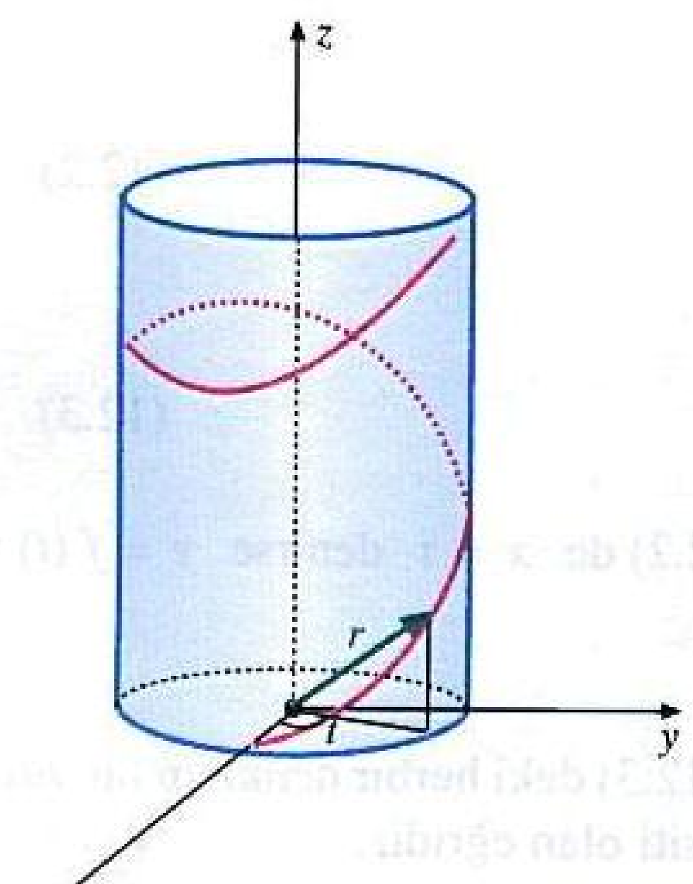
$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

olacağından verilen eğri bir merkezil çemberdir.



ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm : $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 3$ olduğundan $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olur. Bu yarıçapı 1 olan bir çemberdir. $z = 3$ olduğundan bu çember $z = 3$ düzlemi üzerindedir. O halde denklemi verilen eğri, $x\,O\,y$ düzleminden 3 birim yukarıda bulunan bir çemberdir. Bu çemberin grafiği yanda çizilmiştir.



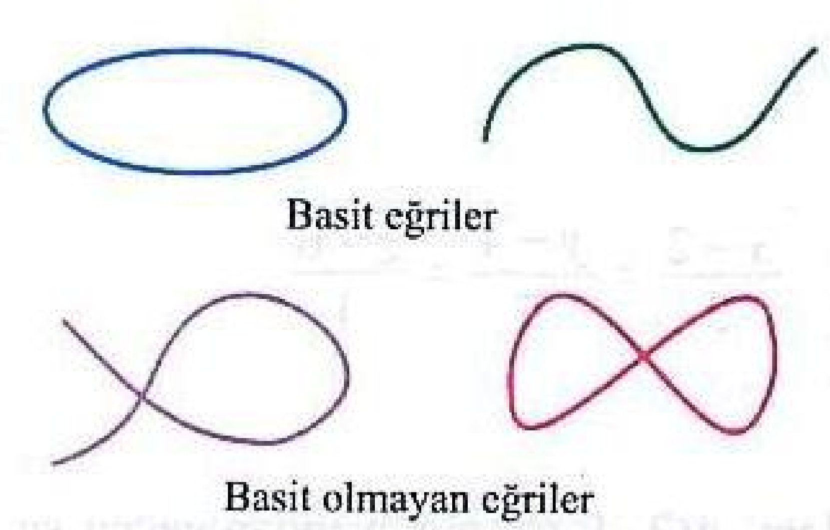
ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + 4\,t\,\boldsymbol{k}, \quad -\infty < t < \infty$ vektör değerli fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

olduğundan eğrinin $x\,O\,y$– düzlemindeki izdüşümü bir çemberdir. $z = 4t$ olduğundan t büyüdükçe z büyür. Bu eğri yandaki şekilde gösterilmiştir. İzdüşüm bir çember olduğundan bu eğriye bir **dairesel helis** adı verilir.

TANIM

Bir eğri kendi kendisini kestiğinde, arakesit noktalarına eğrinin **katlı noktaları** denir. Kendini kesmeyen eğrilere **basit eğriler** denir.

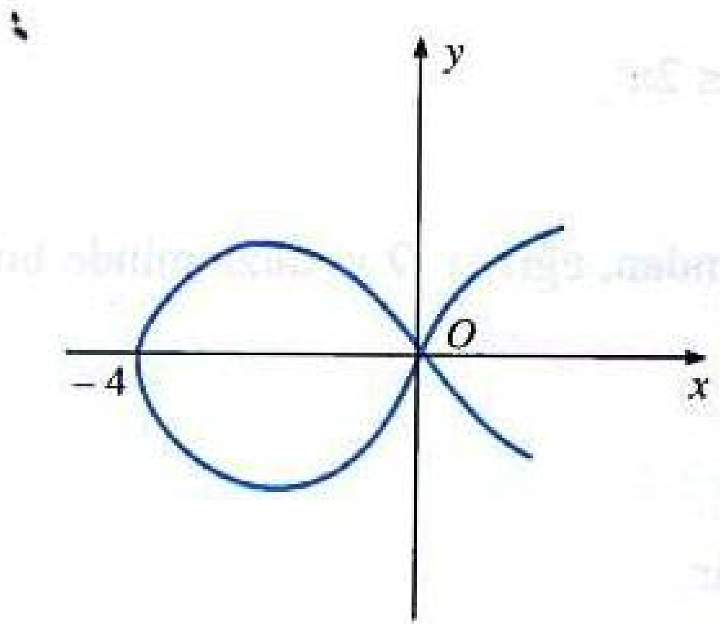

Basit eğriler

Basit olmayan eğriler

Yanda bazı basit ve basit olmayan eğriler verilmiştir.

Parametrik denklemi $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}, \ -\infty < t < \infty$ olan bir eğri için $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$ olacak şekilde a ve b noktaları varsa ya $(x(a), y(a), z(a))$ noktası bir katlı noktadır, ya da eğri bir kapalı eğridir.

Ayrıca $r'(a) \ne r'(b)$ ise nokta bir katlı noktadır.

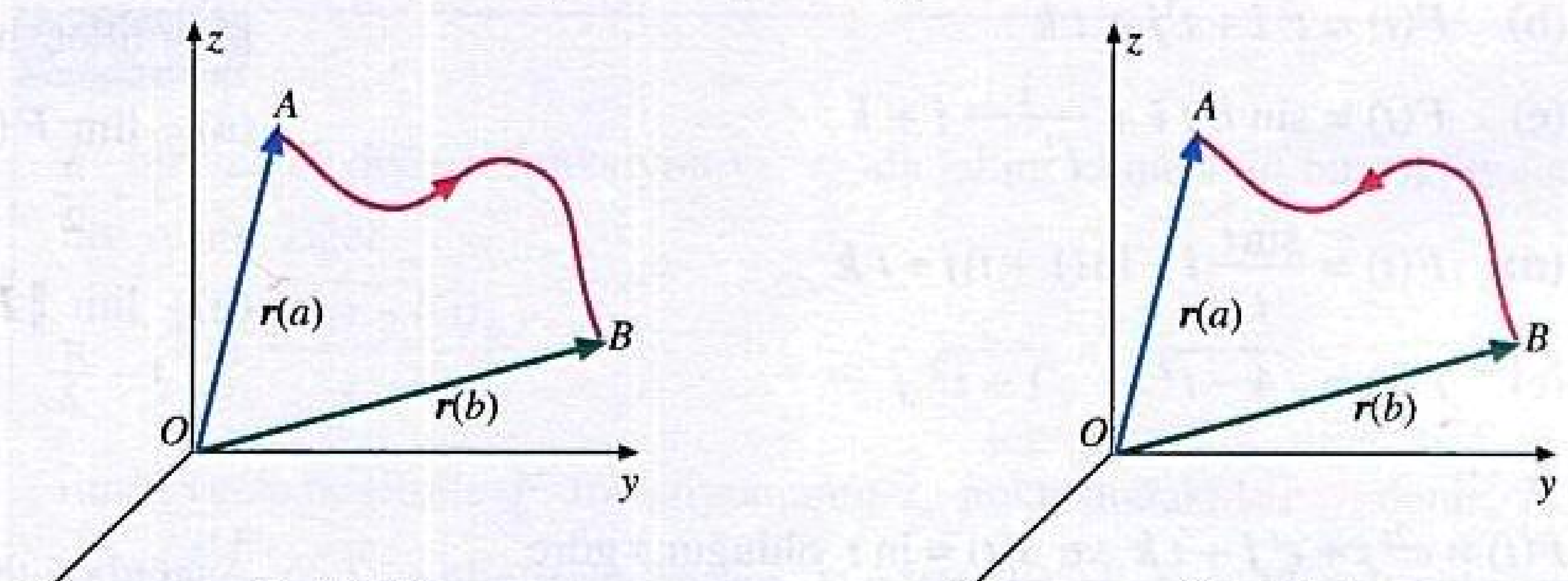


ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 4)\,\boldsymbol{i} + (t^3 - 4t)\,\boldsymbol{j}$ eğrisinin basit olmayan bir eğri olduğunu gösterip katlı noktalarını bulunuz.

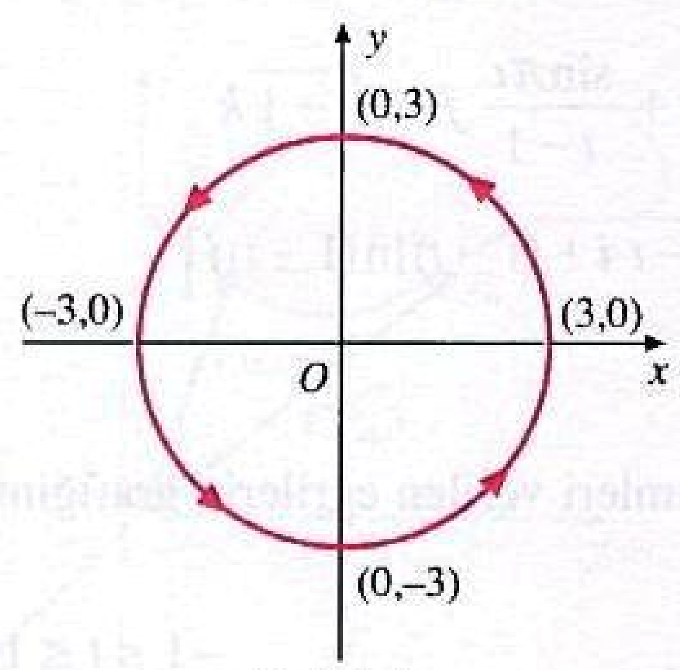
Çözüm : $r(-2) = r(2) = 0$, $r'(-2) = -4\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$ ve $r'(2) = 4\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$ olduğundan $O(0,0)$ noktası eğrinin bir katlı noktasıdır. Eğrinin grafiği yanda verilmiştir.

Denklemi $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$

olan eğri üzerinde iki türlü yön tanımlanabilir. $t = a$ değerine karşılık gelen nokta A, $t = b$ değerine karşılık gelen nokta B olsun. t parametresine a dan b ye kadar değerler verildiğinde A dan B ye doğru eğrinin noktaları elde edilir. A dan B ye doğru olan yöne **pozitif yön**, B den A ya doğru olan yöne de **negatif yön** adı verilir. Sözkonusu yönler yandaki şekilde gösterilmiştir.



ÖRNEK : $\boldsymbol{r}(t) = 3\cos t\,\boldsymbol{i} + 3\sin t\,\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ eğrisinin grafiğini çizip yönünü belirtiniz.



Pozitif yön

Çözüm : Eğrinin merkezil çember olduğu açıktır; zira

$$x^2 + y^2 = (3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 9$$

dur.

$$t = 0 \quad \text{için} \quad \boldsymbol{r}(0) = 3\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} = (3, 0)$$

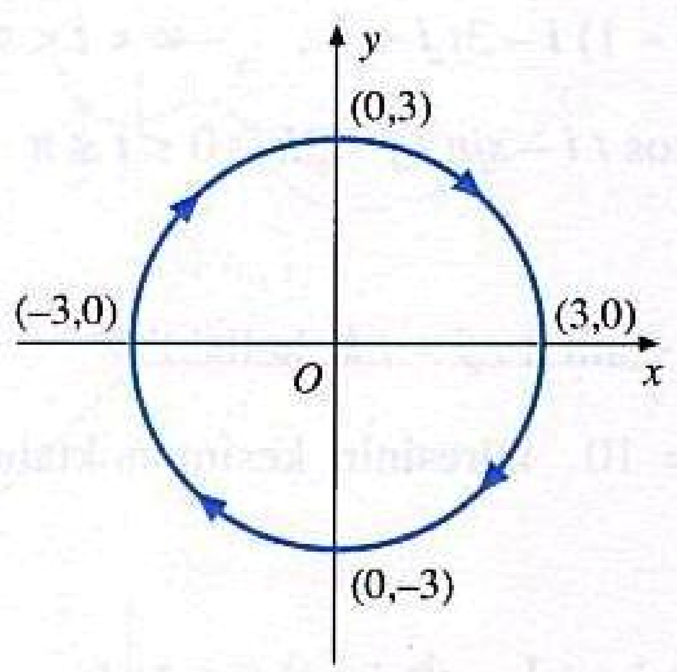
$$t = \frac{\pi}{2} \quad \text{için} \quad \boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} = (0, 3)$$

$$t = \pi \quad \text{için} \quad \boldsymbol{r}(\pi) = -3\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} = (-3, 0)$$

$$t = \frac{3\pi}{2} \quad \text{için} \quad \boldsymbol{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} = (0, -3)$$

$$t = 2\pi \quad \text{için} \quad \boldsymbol{r}(2\pi) = 3\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} = (3, 0)$$

olduğundan, çember üzerinde (3, 0) noktasından başlayarak (0, 3), (–3, 0), (0, –3), (3, 0) noktalarına doğru olan yön pozitif yöndür. Bu yön saatin dönme yönünün tersidir. Çember üzerinde bu yönün tersine, yani saatin dönme yönünde olan yön negatif yöndür. □



Negatif yön

Bir uzay eğrisinin parametrik gösterimi tek değildir. Aynı eğrinin sonsuz çoklukta parametrik gösterimi vardır. Örneğin $\boldsymbol{r}(t) = \cos\theta\,\boldsymbol{i} - \sin\theta\,\boldsymbol{j}$ de birim çemberin bir parametrik gösterimidir.

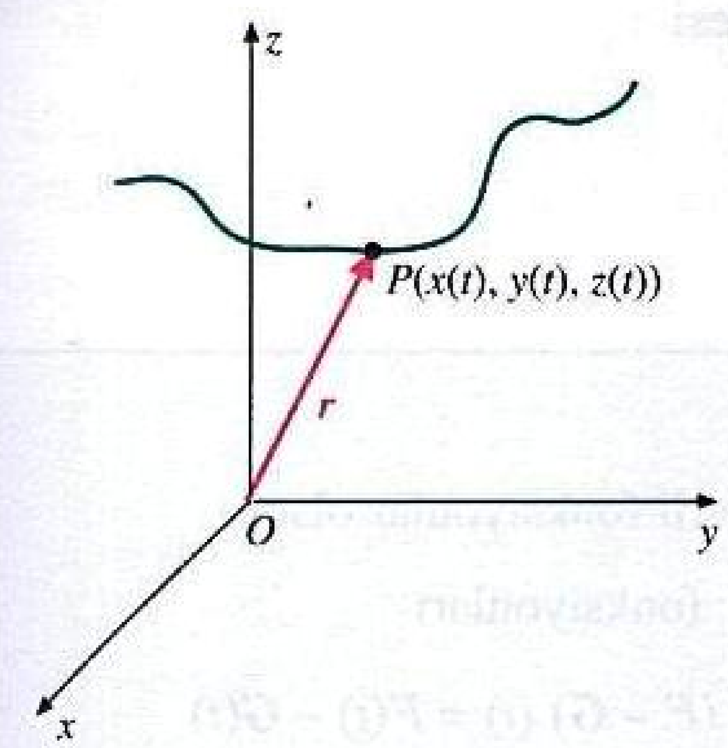
TANIM

C eğrisi **kapalıdır** $\Leftrightarrow$ C eğrisinin tanım kümesi $[a, b]$ olan ve $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$ eşitliğini sağlayan bir $\boldsymbol{r}(t)$ parametrik gösterimi vardır.

Yukardaki tanıma göre, kapalı eğriler, başlangıç ve bitim noktaları aynı olan eğrilerdir. Buna göre daha önce gördüğümüz çember ve elips birer kapalı eğri, doğru ve dairesel helis birer kapalı olmayan eğridir.

12 VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

12.1 VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR



Buraya kadar olan bölümlerde hep reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarla ilgilendik. Yani $A \subset R$ olmak üzere, $f : A \to R$ biçimindeki fonksiyonları inceledik. Uzayda hareket eden bir parçacığın bulunduğu yer, t zamanının bir fonksiyonudur. Başka bir deyişle parçacığın x, y, z koordinatları t parametresinin (zamanının) birer fonksiyonudur.

Parçacığın, t anındaki koordinatları

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

ise, yer vektörü

$$\boldsymbol{r} = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$$

olur. t parametresi bir I aralığını taradığında $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ noktaları bir eğri oluşturur. Bu eğriye parçacığın **yörüngesi** adı verilir.

TANIM

$I \subset R$ bir aralık, V bir vektör kümesi olsun. Tanım kümesi I, değer kümesi V olan fonksiyonlara **vektör değerli fonksiyonlar** adı verilir.

Bu bölümde V olarak çoğu kez, E^3 üç boyutlu Öklit uzayını alacağız. Dolayısıyla

$$\boldsymbol{F} : \mathrm{I} \to E^3$$

biçimindeki fonksiyonları inceleyeceğiz. Buna göre her bir $t \in \mathrm{I}$ sayısına bir

$$\boldsymbol{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$$

vektörü karşılık gelecektir. Buradaki reel değerli f, g, h fonksiyonlarına vektör değerli $\boldsymbol{F}$ fonksiyonunun **bileşen fonksiyonları** adı verilir. Vektör değerli fonksiyonlar ya $\boldsymbol{F}$ şeklinde koyu yazılarak, ya da $\vec{F}$ biçiminde, üstüne ok konularak gösterilir. Biz bu kitapta vektörleri ve vektör değerli fonksiyonları koyu yazarak $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{r}, \ldots$ biçiminde göstereceğiz.

Tanım kümesi belirtilmediğinde

$$F(t)=f(t)\,\boldsymbol{i}+g(t)\,\boldsymbol{j}+h(t)\,\boldsymbol{k}$$

biçiminde verilen F fonksiyonunun tanım kümesi, f, g ve h fonksiyonlarını tanımlı kılan t parametrelerinin kümesidir. Örneğin f, g, h fonksiyonlarının (en geniş) tanım kümeleri, sırasıyla, A, B, C ise F fonksiyonunun tanım kümesi $T=A\cap B\cap C$ kümesidir.

ÖRNEK : $F(t)=(t+1)\,\boldsymbol{i}+\ln(1-t)\,\boldsymbol{j}+\sqrt{4-t^2}\,\boldsymbol{k}$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm : $f(t)=t+1$ fonksiyonunun tanım kümesi $A=(-\infty,\infty)$,

$g(t)=\ln(1-t)$ fonksiyonunun tanım kümesi $B=(-\infty,1)$ ve

$h(t)=\sqrt{4-t^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $C=[-2,2]$ aralığıdır.

O halde verilen F fonksiyonunun tanım kümesi

$$T=A\cap B\cap C=[-2,1)$$

aralığıdır.

TANIM

F ile G vektör değerli, f ile g de reel değerli fonksiyonlar olsun.

$F+G,\ F-G,\ fF,\ F\,.\,G,\ F\times G$ ve Fog fonksiyonları

(a) $(F+G)(t)=F(t)+G(t)$ (b) $(F-G)(t)=F(t)-G(t)$

(c) $(F\cdot G)(t)=F(t)\cdot G(t)$ (d) $(F\times G)(t)=F(t)\times G(t)$

(e) $(fF)(t)=f(t)\,F(t)$ (f) $(Fog)(t)=F(g(t))$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonların tanım kümeleri, sağdaki ifadeleri tanımlı kılan t parametrelerinin kümesidir. Bu fonksiyonlardan $F\,.\,G$ reel değerli, diğerleri vektör değerli fonksiyonlardır.

ÖRNEK : $F(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$, $G(t)=(1-t)\,\boldsymbol{i}+(1+t^2)\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$

$f(t)=t+1$, $g(t)=t-2$ biçiminde tanımlanan F, G, f, g fonksiyonları için

$(F+G)(t)$, $(F-G)(t)$, $(F\,.\,G)(t)$, $(F\times G)(t)$, $(fF)(t)$ ve $(Fog)(t)$

ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm : $(F+G)(t)=F(t)+G(t)=\boldsymbol{i}+(1+2t^2)\,\boldsymbol{j}+(t^3+t)\,\boldsymbol{k}$,

$(F-G)(t)=F(t)-G(t)=(2t-1)\,\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+(t^3-t)\,\boldsymbol{k}$,

$(F\cdot G)(t)=F(t)\cdot G(t)=t-t^2+t^2+t^4+t^4=2t^4+t$,

$$(F\times G)(t)=F(t)\times G(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ t&t^2&t^3\\ 1-t&1+t^2&t\end{vmatrix}$$

$$=-t^5\,\boldsymbol{i}+(-t^4+t^3-t^2)\,\boldsymbol{j}+(2t^3-t^2+t)\,\boldsymbol{k}\,,$$

$(fF)(t)=f(t)\,F(t)=(t^2+t)\,\boldsymbol{i}+(t^3+t^2)\,\boldsymbol{j}+(t^4+t^3)\,\boldsymbol{k}$,

$(Fog)(t)=F(g(t))=(t-2)\,\boldsymbol{i}+(t-2)^2\boldsymbol{j}+(t-2)^3\,\boldsymbol{k}$

olur.

TANIM

F ve G, I aralığı üzerinde tanımlı vektör değerli fonksiyonlar olsun.

F ile G, I üzerinde **ortogonaldir (diktir)** $\Leftrightarrow\ \forall t\in \mathrm{I}$ için $F(t)\cdot G(t)=0$.

ÖRNEK :

$F(t)=(t+t^2)\,\boldsymbol{i}+2t\,\boldsymbol{j}-4t\,\boldsymbol{k}$ ve $G(t)=(2+4t)\,\boldsymbol{i}+(1-3t)\,\boldsymbol{j}+(1+t^2)\,\boldsymbol{k}$

biçiminde tanımlanan F ile G fonksiyonlarının ortogonal (dik) olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $F(t)\,.\,G(t)=(t+t^2)(2+4t)+2t\,(1-3t)-4t\,(1+t^2)$

$$=2t+4t^2+2t^2+4t^3+2t-6t^2-4t-4t^3=0$$

olduğundan F ile G ortogonaldir.

TANIM

$F(t)=f(t)\,\boldsymbol{i}+g(t)\,\boldsymbol{j}+h(t)\,\boldsymbol{k}$ fonksiyonu verildiğinde

$$\|F(t)\|=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2+[h(t)]^2}$$

biçiminde tanımlanan $\|F\|$ fonksiyonu bir reel değerli fonksiyondur. Bu fonksiyona F fonksiyonunun **normu** veya **büyüklüğü** denir.

ÖRNEK : $F(t)=2\cos t\,\boldsymbol{i}+2\sin t\,\boldsymbol{j}+3\,t\,\boldsymbol{k}$ fonksiyonunun büyüklüğünü (normunu) hesaplayınız.

Çözüm : $\|F(t)\|=\sqrt{(2\cos t)^2+(2\sin t)^2+9t^2}=\sqrt{4+9t^2}$

olur.