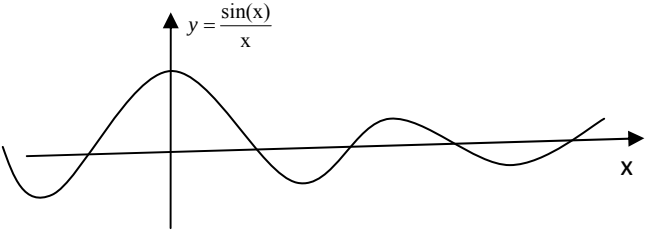


Limit

Ornek 1

$\sin(x)/x$ fonksiyonunu ele alalım. $x=0$ için $0/0$ belirsizliğini alır. Ancak x sıfırdan ξ kadar uzaklaşsa $\sin(x)/x$ değeri bire yakın bir değer alır. Burada ξ çok küçük bir sayı anlamında kullanılır.

X (radyan)	Sin(x) (x:radyan)	Sin(x)/x	
-1.50	-0.997494986604054	0.6649966577	
-1.00	-0.841470984807897	0.8414709848	
-0.50	-0.479425538604203	0.9588510772	
0.10	0.099833416646828	0.9983341664	
-0.05	-0.049979169270678	0.9995833854	
-0.00100	-0.000999999833333	0.9999998333	
-0.00010	-0.000099999999833	0.9999999983	
0	0	0/0 belirsiz	
0.00010	0.000099999999833	0.9999999983	
-0.00100	-0.000999999833333	0.9999998333	
0.05	0.049979169270678	0.9995833854	
0.10	0.099833416646828	0.9983341664	
0.50	0.479425538604203	0.9588510772	
1.00	0.841470984807897	0.8414709848	
1.50	0.997494986604054	0.6649966577	

Burada en muhim nokta x negatif değerlerden sifıra yaklaşıldığında $\sin(x)/x$ bir olduğu gibi, x pozitif değerlerden sifıra yaklaşıldığında da $\sin(x)/x$ 1 olmaktadır. Dolayısıyla $\sin(x)/x$ fonksiyonunun $x=0$ için limiti vardır ve bu değer 1 e esittir.

Ornek 2

Benzer şekilde $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x + 1)}$ fonksiyonunu inceleyelim. Burada görüldüğü gibi $x=1$ için $f(x)$ $0/0$ olmakta fakat x 1 den çok uzaklaşsa $f(x)$ in değeri -2 olmaktadır.

x	$x^3 - 2x^2 - x + 2$	x-1	$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x + 1)}$
0.8	0.432	-0.2	-2.16
0.9	0.209	-0.1	-2.09
0.95	0.102375	-0.05	-2.0475
0.99	0.020099	-0.01	-2.0099
0.99	0.020099	-0.01	-2.0099
0.999	0.002001	-0.001	-2.001
0.9999	0.0002	-0.0001	-2.0001
0.99999	0.000002	-0.00001	-2.00000
1	0	0	0/0 belirsiz
1.00001	-0.00002	0.00001	-2.0000
1.0001	-0.0002	0.0001	-1.9999
1.001	-0.002	0.001	-1.999
1.01	-0.0199	0.01	-1.9899
1.1	-0.189	0.1	-1.89

1.2	-0.352	0.2	-1.76
-----	--------	-----	-------

Burada da $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x+1)}$ fonksiyonunun $x=1$ için limiti vardır ve bu değer -2'ye esittir.

$f(x)$, x_0 civarında açık bir aralıkta tanımlı olsun (x_0 'da tanımlı olmayabilir). x_0 'a yeterince yakın bütün x için $f(x)$ L değerine keyfi derecede (istediğimiz ölçüde L 'ye yakın) yaklaşıyorsa, x x_0 'a yaklaşıırken, f L limitine yaklaşıyor deriz ve " x x_0 'a yaklaşıırken $f(x)$ 'in limiti L dir" diye okunan

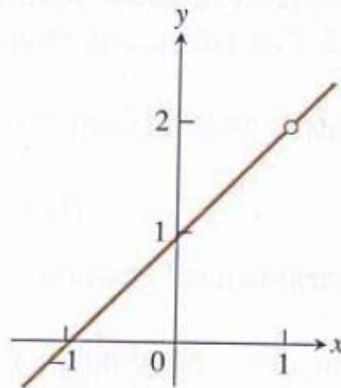
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ÖRNEK 7 $f(x_0)$ 'ı Hesaplayarak Limit Bulmak

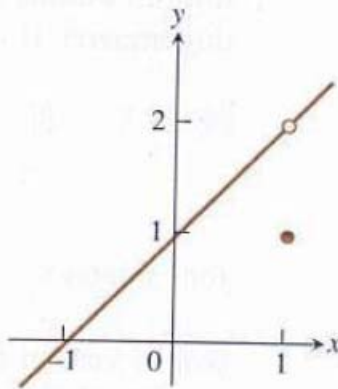
- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -13} (4) = 4$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 4}{x + 5} = \frac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\frac{2}{3}$

ÖRNEK 6 Limit Değeri Fonksiyonun x_0 'da Nasıl Tanımlandığına Bağlı Değildir.

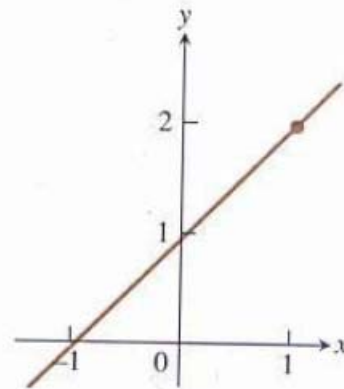
Şekil 2.5'teki f fonksiyonu $x = 1$ 'de f tanımsız olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken limiti 2'dir. $2 \neq g(1)$ olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken, g fonksiyonunun limiti 2'dir. h fonksiyonu, $x \rightarrow 1$ iken



$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

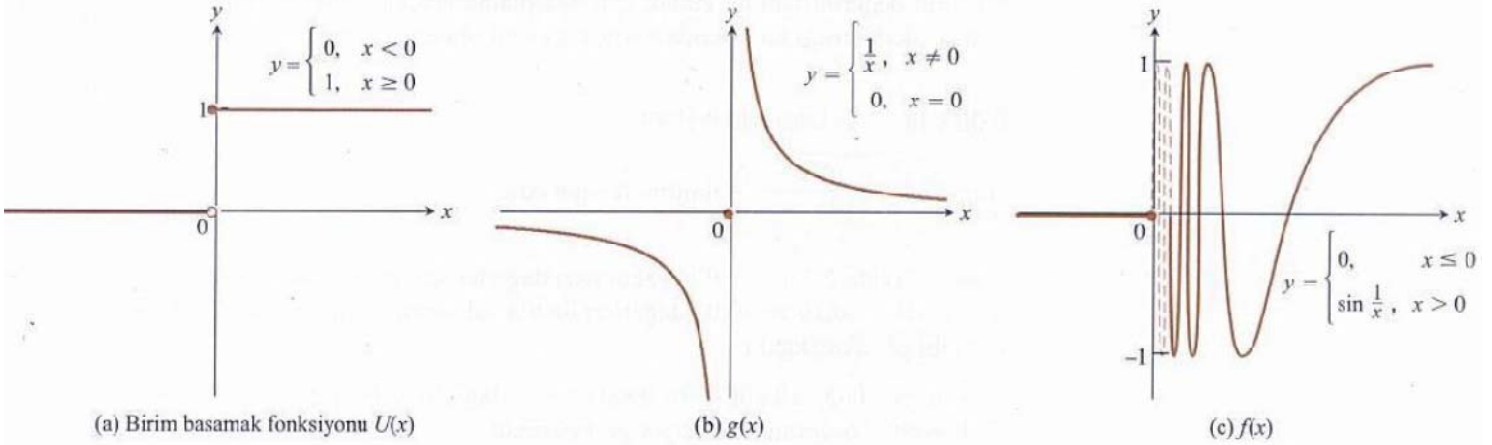


$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



$$(c) h(x) = x + 1$$

Limitin var olmadığı birkaç durum Şekil 2.7’de gösterilmekte ve bir sonraki örnekte incelenmektedir.



ŞEKİL 2.7 $x \rightarrow 0$ ’a yaklaşıırken bu fonksiyonlardan hiç birinin limiti yoktur (Örnek 9).

$x \rightarrow 0$ iken aşağıdaki fonksiyonların davranışlarını inceleyin.

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

- (a) Sıçrar: Birim basamak fonksiyonu $U(x)$ ’in $x \rightarrow 0$ iken limiti yoktur, çünkü değerleri $x = 0$ ’da sıçrama yapar. x ’in sıfıra yakın negatif değerleri için $U(x) = 0$ ’dır. x ’in sıfıra yakın pozitif değerleri içinse $U(x) = 1$ ’dir. $x \rightarrow 0$ iken, $U(x)$ ’in yaklaştığı tek bir L değeri yoktur (Şekil 2.7a).
- (b) Çok büyür: $x \rightarrow 0$ iken $g(x)$ ’in limiti yoktur, çünkü $x \rightarrow 0$ iken g ’nin değerleri mutlak değer olarak çok büyür ve herhangi bir reel sayıya yaklaşmaz (Şekil 2.7b)
- (c) Çok fazla salınır: $x \rightarrow 0$ iken $f(x)$ ’in limiti yoktur, çünkü fonksiyonun değerleri 0 ’ı içeren bütün açık aralıklarda -1 ile $+1$ arasında salınır. $x \rightarrow 0$ iken, değerleri herhangi bir sayının yakınında kalmaz (Şekil 2.7c).

TANIM 1 Limit Kuralları

L , M , c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{ise}$$

1. *Toplama Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$

İki fonksiyonun toplamının limiti limitlerinin toplamıdır.

2. *Fark Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$

İki fonksiyonun farklarının limiti limitlerinin farkıdır.

3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

İki fonksiyonun çarpımının limiti limitlerinin çarpımıdır.

4. *Sabit Çarpım Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Bir fonksiyonun bir sabit katının limiti fonksiyonun limitinin sabit katıdır.

5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölenin limitinin sıfır olmaması koşuluyla, limitlerinin bölümüdür.

6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s ortak çarpanı bulunmayan iki tamsayı ve $s \neq 0$ ise $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla,

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz)

Bir fonksiyonun herhangi bir rasyonel kuvvetinin limiti, bir reel sayı olması koşuluyla, limitin o kuvvetidir.

ÖRNEK 1 Limit Kurallarını Kullanmak

Aşağıdaki limitleri bulmak için $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ ve $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ gözlemlerini (Bölüm 2.1, Örnek 8) ve limit özelliklerini kullanın.

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)$ (b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Çözüm

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3$ Toplam ve Fark Kuralları
 $= c^3 + 4c^2 - 3$ Çarpım ve Sabit Kat Kuralları

(b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)}$ Bölüm Kuralı
 $= \frac{\lim_{x \rightarrow c} x^4 + \lim_{x \rightarrow c} x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 1}{\lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5}$ Toplam ve Fark Kuralları
 $= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ Kuvvet veya Çarpım Kuralları

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 3)}$ $r/s = 1/2$ ile Kuvvet
 $= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 3}$ Fark Kuralı
 $= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ Çarpım ve Sabit Kat Kuralları
 $= \sqrt{16 - 3}$
 $= \sqrt{13}$

ÖRNEK 2 Bir Rasyonel Fonksiyonun Limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

TANIM Bir Fonksiyonun Limiti

$f(x)$, x_0 civarında (x_0 'da tanımlı olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun.
Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

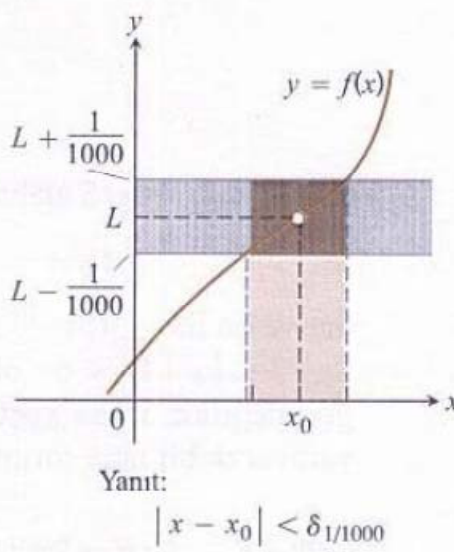
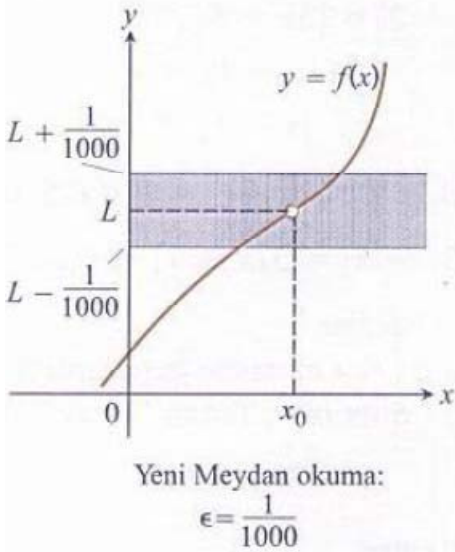
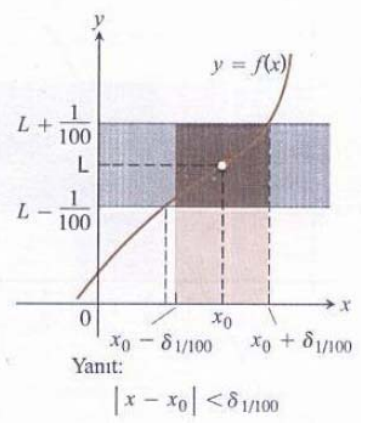
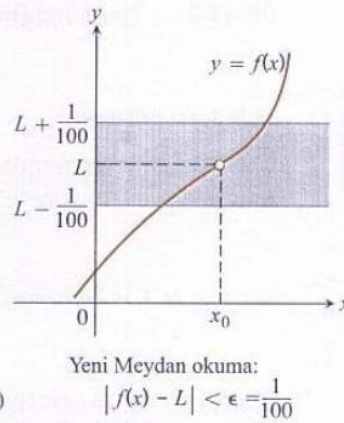
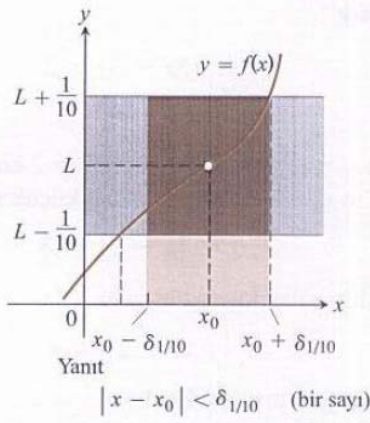
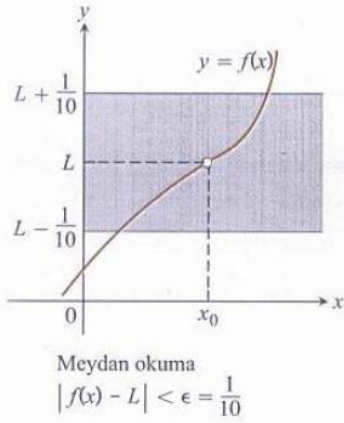
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşıırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor der ve

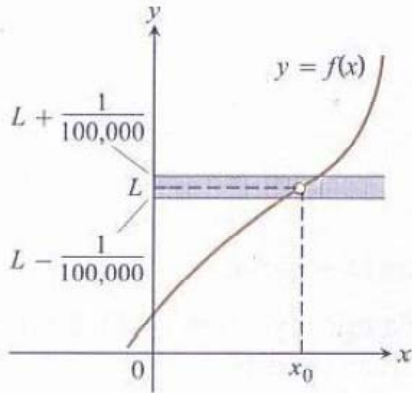
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

Bana bir ξ verdiğinde ben sana bir δ vermeyi taahhud ediyorum.

Vereceğim δ siniri içinde kalırsan, yani fonksiyonda x yerine $(x_0 - \delta)$, $(x_0 + \delta)$ arasında bir değer verirsen, fonksiyonun değeri kesinlikle $L - \xi$ ile $L + \xi$ arasında kalır.

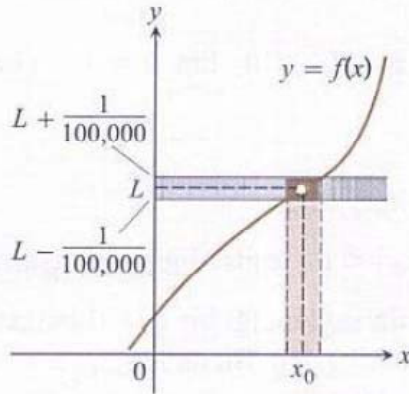
Sen istediğin kadar küçük ξ ver, ben sana δ vereceğim. ξ u dilediğin kadar (sonsuz küçük) yapabilirsin.





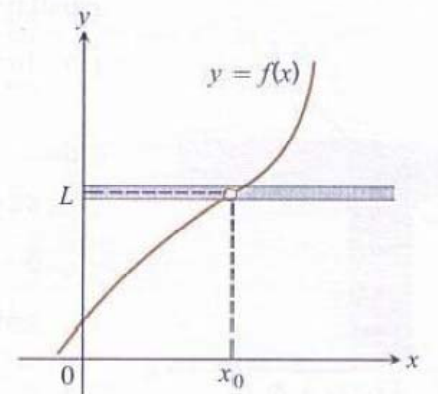
Yeni Meydan okuma:

$$\epsilon = \frac{1}{100,000}$$



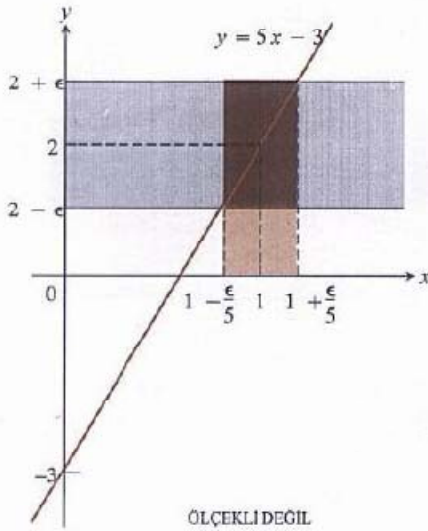
Yanıt:

$$|x - x_0| < \delta_{1/100,000}$$



Yeni Meydan okuma:

$$\epsilon = \dots$$



ÖLÇEKLİ DEĞİL

ŞEKİL 2.15 $f(x) = 5x - 3$ ise,
 $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ olması
 $|f(x) - 2| < \epsilon$ olmasını garantiler
 (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Tanımı Test Etmek

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$

olduğunu gösterin.

Çözüm Limit tanımında $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ ve $L = 2$ koyun. Verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ için, $x \neq 1$ ve $\delta > 0$ ve x 'in $x_0 = 1$ 'e uzaklığı δ 'dan küçük ise, yani

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

ise $f(x)$ 'in $L = 2$ 'ye uzaklığı ϵ 'dan küçüktür, yani

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

ifadesinin doğru olacağı uygun bir δ bulmalıyız.

δ 'yı ϵ -eşitsizliğinden geriye doğru giderek buluruz:

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \epsilon/5.$$

Böylece, $\delta = \epsilon/5$ alabiliriz (Şekil 2.15). $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$ ise,

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

dur ve bu $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ olduğunu ispatlar.

$0 < |x - 1| < \delta$ olmasının $|5x - 5| < \epsilon$ olmasını gerektirdiği tek değer $\delta = \epsilon/5$ değeri değildir. Daha küçük herhangi bir δ da olur. Tanım “en iyi” pozitif δ sormuyor, işe yarayacak bir tane soruyor.

$$L=2, \quad x_0=1;$$

$\delta = \xi/5$, yani bana vereceğin ξ değerini beşe bol. istedinigin δ budur.

$\xi = 0.01$ verilsin. iddia: yani ben oyle bir x_0 bulabilirmiyim ki $f(x_0)$ ile 2 ile arasındaki fark $\xi = 0.01$ den küçük olsun. Böyle bir x_0 değeri varmidir.

Cevap: $\delta = \xi/5 = 0.01/5 = 0.002$ yani x_0 yerine $1 - 0.002$ ile $1 + 0.002$ arasında değerler verirsene $f(x_0)$ kesinlikle $2 - 0.01$ ile $2 + 0.01$ arasında bir değer olur, $2 - 0.01$ ile $2 + 0.01$ dışına çıkmaz. Ben bunu garanti ediyorum.

$$1 - 0.002 = 0.998, \quad 1 + 0.002 = 1.002$$

$$2 - 0.01 = 1.99, \quad 2 + 0.01 = 2.01$$

Deneme: 0.998 ile 1.002 arasında bir değer olarak 0.9985 veriyorum.

$$f(x_0) = 5x_0 - 3 = 5 \cdot 0.9985 - 3 = 1.9925$$

1.9925 sayısı 1.99 ile 2.01 arasında midir.

evet oyledir.

.....

$\xi=0.00000000000000000001$ olmasını istiyorum. Buna uygun bir x_0 bulabilir misin.

Tamam $\delta = \xi / 5 = 0.000000000000000000002$ x_0 yerine $|1 - \delta|$ olacak şekilde bir deger koy. Sonuc kesinlikle istedigini gibi olacaktır.

[illegible][illegible]

Sonuc:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$