

sin fonksiyonunu hesaplarken radyan olarak hesaplanmistir.

$$x=-1, y=-1 \text{ için } f(x,y)=\sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)=\sin((-1)^2+(-1)^2)/((-1)^2+(-1)^2)=\sin(2)/2=0.909/2=0.455$$

$$x=-1, y=-0.5 \text{ için } f(x,y)=\sin((-1)^2+(-0.5)^2)/((-1)^2+(-0.5)^2)=\sin(1.25)/1.25=0.759$$

$$x=-1, y=-0.2 \text{ için } f(x,y)=\sin((-1)^2+(-0.2)^2)/((-1)^2+(-0.2)^2)=\sin(1.04)/1.04=0.829$$

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

$$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \text{mevcut degil}$$

TANIMLAR İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Limiti

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, f 'nin tanım kümesine ait (x, y) noktaları için,

$$0 > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ iken } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı karşılık getirilebiliyorsa, (x, y) noktası (x_0, y_0) 'a yaklaşırken f fonksiyonu L **limitine** yaklaşır der ve şu şekilde yazarız.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k \quad (\text{Herhangi bir } k)$$

ÖRNEK 1 Limitleri Hesaplamak

$$(a) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$(b) \lim_{(x, y) \rightarrow (3, -4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Varsa $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$ 'yi bulun.

Çözüm a). Önce, $x = 0$, doğrusu boyunca $y \neq 0$ iken fonksiyonun daima 0 değerini aldığını gözlemleriz. Benzer şekilde y doğrusu boyunca, $x \neq 0$ olması koşulu ile fonksiyonun değeri yine 0 dir. $y=mx$ koyarak da benzeri sonucu bulabiliriz.

$$\frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{4x(mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{4xm^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{4m^2x^3}{(1+m^2)x^2} = \frac{4m^2x}{1+m^2}$$

Soru: $(0,0)$ noktasına değişik noktalardan yaklaştık ne demektir?

Cevap:

$$\frac{4m^2x}{1+m^2}$$

ifadesinde m yi değiştirdiğimizde ifadenin $(0,0)$ noktasında alacağı değeri hesaplamak demektir.

$$\frac{4m^2x}{1+m^2}$$

ifadesi $x=0$ için, m ne olursa olsun, daima sıfırdır,

Dolayısıyla, $(0, 0)$ noktasına yaklaşıırken limit varsa bu limit değeri 0 olmalıdır.

Çözüm b). Limit tanımını kullanarak limitin varlığını gösterelim.

$|f(x, y) - L| < \epsilon$, olacak şekilde $|x| < \delta, |y| < \delta$ veya $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ şartlarını sağlayan bir δ bulabilirsek $f(x, y)$ fonksiyonunun limiti vardır ve tekdir.

$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - L \right| < \varepsilon$, L değeri sıfırdır. limit sıfıra yaklaşılmaktadır.

$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$, olacak şekilde bir $|x| < \delta$ ve $|y| < \delta$ bulmaya çalışıyoruz.

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| < 4|x| \quad \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| < 4|x|$$

$4|x|$ ifadesi $\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right|$ ifadesinden daha büyüktür. Büyük olan $4|x|$ ifadesi sıfıra yaklaşırsa ondan daha küçük

$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right|$ ifadesi de mutlaka sıfıra yaklaşıp.

O halde $\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$ yerine $4|x| < \varepsilon$ yazabiliriz. $|x|$ yerine δ yazarsak. $4\delta < \varepsilon$, $\delta < \varepsilon/4$, bulunur.

Mesela limit değere ($L=0$) 0.01 kadar yaklaşabilirmiyim deneyelim. Yani $\varepsilon=0.01$.

$$\delta = \varepsilon/4 = 0.01/4 = 0.0025$$

fonksiyonda $x=y=\delta=0.0025$ koyalım.

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{4\delta\delta^2}{\delta^2+\delta^2} \right| = \left| \frac{4\delta^3}{2\delta^2} \right| = 2\delta = 2 \cdot 0.0025 = 0.0050 \text{ evet } L \text{ noktasına verilen } \varepsilon=0.01 \text{ değerinden daha da fazla yaklaştım.}$$

ε ne verilirse verilsin x ve y yerine kayacağım değerlerle verilen ε değerinden daha da fazla L noktasına yaklaşabilirim. O halde limit vardır.

ÖRNEK 3 Limit Tanımını Uygulamak

Varsa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$ yi bulun.

Çözüm Önce, $x=0$ doğrusu boyunca $y \neq 0$ iken fonksiyonun daima 0 değerini aldığını gözlemleriz. Benzer şekilde doğrusu boyunca, $x \neq 0$ olması koşulu ile fonksiyonun değeri yine 0 dır. Dolayısıyla, (x,y) noktası $(0,0)$ noktasına yaklaşırken limit varsa bu limit değeri 0 olmalıdır. Bunun doğru olup olmadığını görmek için limit tanımını uyguluyoruz.

Bir $\varepsilon > 0$ değeri keyfî olarak verilmiş olsun. Bir $\delta > 0$ değeri bulmak istiyoruz. Öyle ki,

$$\text{her ne zaman} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ iken} \quad \left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

veya

$$\text{her ne zaman} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ iken} \quad \frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon$$

olsun. $y^2 \leq x^2+y^2$ olduğundan

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

elde ederiz.

Şu halde $\delta = \epsilon/4$ seçer ve $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, alırsak

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

elde ederiz. Tanımdan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

sonucu elde edilir.

ÖRNEK : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ limitini hesaplayınız.

Tahminler yurutecegiz. limit varmi bilmiyoruz. En basit hesap olan $x \rightarrow 0$, veya $y \rightarrow 0$ boyunca limitlere bakalim.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right) = 0 \text{ olduğundan } L = 0 \text{ olabilir.}$$

Tabi olmayabilir de. Biz basit hesap yolu olarak $x=0$ boyunca ne olur ona bakariz. Bu bir deneme yanilma idi. $L=0$ kabulü ile yolumuza devam edelim.

ϵ sayısına bağlı öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki $0 \leq |x| < \delta$ ve

$0 < |y| < \delta$ olduğunda $|f(x,y) - 0| < \epsilon$ kalsın.

Bu noktadan itibaren yapacağımız şey, matematiksel işlemlerle $|f(\delta_x, \delta_y) - L| < \xi$ bağıntısını kullanarak δ_x, δ_y ve ξ arasında $|f(\delta_x, \delta_y) - L| < \xi$ şeklinde makul bir bağıntı elde etmek. Burada bazı matematiksel bağıntıları sezgisel olarak kullanmamız lazım.

mesela $|x| + |y| \geq |x+y|$, $|x| |y| |z| \geq |xyz|$, $|x| + 1 > |x|$, $|5x| > |x|$,

$$\frac{x}{x^2 + 1} < 1, \quad \frac{x}{x + 1} < 1, \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < 1,$$

$$\left| \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4|x| |y| \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 4|x| |y| < 4 \cdot \delta \cdot \delta \cdot 1 = 4\delta^2 \leq \epsilon$$

$\Rightarrow \delta \leq \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon}$ olmalı. Yani $|x| < \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon}$ olmalı. O halde $|x| < \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon}$, $|y| < \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon}$

olduğunda $|f(x,y) - 0| < \epsilon$ kalır. Şu halde

basda yaptığımız $L=0$ kabulü doğru bir kabuldur. Yani

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

Bir Limitin Var Olmaması İçin İki-Yol Testi

(x, y) noktası (x_0, y_0) 'a yaklaşırken bir $f(x, y)$ fonksiyonunun iki farklı yol boyunca farklı limitleri varsa, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ yoktur.

ÖRNEK : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ limitini hesaplayınız.

ÇÖZÜM : (x, y) noktasını önce Ox - eksenine, sonra Oy - eksenine paralel olarak $(0, 0)$ noktasına yaklaştıralım:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

bulunur. Şimde (x, y) noktasını $y = 2x$ doğrusu boyunca $(0,0)$ noktasına yaklaştıralım.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 2x}{x^2 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

elde edilir. Bunun anlamı şudur: (x, y) noktası yerine $y = 2x$ doğrusu üzerinde bulunan $(x, 2x)$ noktaları alındığında ve x yeter derece sıfıra yakın değerler aldığında $f(x, y)$ ifadesi $\frac{4}{5}$ sayısına yaklaşır. Gerçekten $x = 0,001$ ve $y = 2x = 0,002$ değerleri için

$$f(0,001, 0,002) = \frac{2(0,001) \cdot 2(0,001)}{(0,000001) + 4(0,000001)} = \frac{4}{5}$$

olur.

Şu halde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ limiti yoktur.

Çünkü (x, y) noktasının $(0, 0)$ noktasına yaklaşma yoluna göre limit değişmektedir.

ÖRNEK 5 İki-Yol Testini Uygulamak

(x, y) noktası $(0, 0)$ 'a yaklaşırken

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

fonksiyonunun (Şekil 14.12) limitinin olmadığını gösterin.

Çözüm Doğrudan yerine yazmakla limiti bulamayız. $0/0$ belirsiz formu ortaya çıkar. f 'nin değerlerini $(0, 0)$ 'da sona eren yollar boyunca inceleriz. $y = kx^2$, $x \neq 0$ eğrisi boyunca, fonksiyonun değeri sabittir:

$$f(x, y) \Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = kx^2 \text{ boyunca}}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[f(x, y) \Big|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1 + k^2}$$

olur. Bu limit yola göre değişir. Örneğin, (x, y) noktası $(0, 0)$ 'a $y = x^2$ parabolü üzerinden yaklaşırsa, $k = 1$ olur ve limit 1'dir. (x, y) noktası $(0, 0)$ 'a x -ekseni üzerinden yaklaşırsa, $k = 0$ 'dır ve limit 0 olur. İki yol testine göre, (x, y) noktası $(0, 0)$ 'a yaklaşırken f 'nin limiti yoktur.

Buradaki ifade çelişkili gözükabilir. “ (x, y) orijine yaklaşırken f 'nin limiti yoktur demekle neyi kastediyorsunuz—bir sürü limiti var” diyebilirsiniz. Ama sorun da budur.

Yoldan bağımsız tek bir limit yoktur ve dolayısıyla, tanıma göre, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ yoktur. ■

Sonuc: Limitin kesin var olduğunun isbatı ξ, δ ilişkisi ile isbatlanabilir.

Limitin kesin yok olduğunun isbatı, değişik yollardan farklı limit çıkması ile isbatlanabilir.

TANIM İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında **sürekli**dir:

1. $f(x_0, y_0)$ 'da tanımlıdır,
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ vardır,
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.