Lineerlestirme

$L(x) = f(x_0) + f_X(x_0)\,(x-x_0) = f(x_0) + f_X(x_0)\,\Delta x$

$= f(x_0) + \Delta f$

$f(x_0)$: fonksiyonun x_0 daki degeri

$f_X(x_0)$: fonksiyonun turevinin x_0 daki degeri

$\Delta f = f_X(x_0)\,(x-x_0)$ fonksiyonun diferansiyeli

$\Delta x = (x - x_0)$ x_0 civarinda x in degisme miktari

x degeri x_0 civarinda Δx kadar degisirse, fonksiyonun degeri Δf kadar degisir.

P212) $f(x)=x^2$, x=3 civarinda lineerlestirin.

Cevap: $f(3)= 3^2 =9$, $f_X(3)=2\;\;3=6$

$L(x)=f(3) + f_X(3)\,(x-x_0)$

$=3^2 + 2\;\;3(x-3)= 9 +6\,(x-x_0)$

x=3 icin fonksiyonun degeri f(3)=9 dur.

x=3.1 icin:

$\Delta x = (3.1-3)=0.1$

$\Delta f= f_X(3)\,(x-x_0) = 6\;\;0.1=0.6$

Fonksiyonun Yaklasik degeri

3+0.6=3.6

Fonksiyonun Gercek deger: $f(3.1)=3.1^2=9.61$

Hata=9.61-9.6=0.01

P221)a)$f(x)= e^{0.5x}$ fonksiyonunu x=3 civarinda lineerlestiriniz.

c)elde ettiginiz linner denklemlerden faydalanarak fonksiyonun x=3.1 deki degerini hesaplayiniz.

d)buldugunuz degerleri fonksiyonuin gercek degeri ile karsilastirin.

Cozum:

$f(x) = e^{0.5x}$ ----> $f_X= 0.5\; e^{0.5x}$

$L(x)=f(x_0) + f_X\,(x_0)\,(x- x_0)$

$=e^{0.5\;\;3} + 0.5\, e^{0.5\;\;3}\;(x- 3)$

$=4.48+2.24(x-3) = 2.24x-2.24$

b) $L(3.1)= 2.24x-2.24=2.24_x3.1 -2.24=4.7058$

c)$f(3.1)= e^{0.5x} = e^{0.5\;\;3.1} = e^{1.55} =4.7115$

d) f(x)-L(x)=4.7115-4.7058=0.0057

P221)a)$f(x)= e^{0.5x}$ fonksiyonunu x=5 civarinda lineerlestiriniz.

c)elde ettiginiz linner denklemlerden faydalanarak fonksiyonun x=4.9 daki degerini hesaplayiniz.

d)buldugunuz degerleri fonksiyonuin gercek degeri ile karsilastirin.

Cozum:

$f(x) = e^{0.5x}$ ----> $f_X= 0.5\; e^{0.5x}$

$L(x)=f(x_0) + f_X\,(x_0)\,(x- x_0)$

$=e^{0.5\;\;5} + 0.5\, e^{0.5\;\;5}\;(x- 5)$

$=12.18+6.09(x-5) = 6.09\,x-18.27$

b) $L(4.9)= 6.09x-18.27=6.09_x4.9 -18.27=11.5734$

c)$f(4.9)= e^{0.5x} = e^{0.5\;\;4.9} = e^{2.45} =11.5883$

d) f(x)-L(x)= 11.5883-11.5734=0.015

Ozet:

$\mathbf{e^{0.5x}} \approx 2.24x-2.24$ (x=3 civarinda)

$\mathbf{e^{0.5x}} \approx 6.09\,x-18.27$ (x=5 civarinda)

Iki degiskenli fonksiyonlarda Lineerlestirme

Tam diferansiyel

$L(x,y)= f(x_0,y_0) + f_X(x_0,y_0)(x-x_0) + f_Y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$= f(x_0,y_0) + f_X(x_0,y_0)\Delta x + f_Y(x_0,y_0)\Delta y$

$df = f_X\, dx+ f_Y\, dy$ ifadesine $f(x,y)$ nin tam diferansiyeli denir.

$L(x,y)$, $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0,y_0) civarinda lineerlestirilmis halidir. x: Δx kadar, y: Δy kadar degisse (azalsa yada artsa) $f(x,y)$ fonksiyonu yaklasik olarak

$\Delta f= f_X(x_0,y_0)\Delta x + f_Y(x_0,y_0)\Delta y$

kadar artar veya azalir.

p321) $f(x,y)= x^3y+xy^2$ f_x,f_y turevlerini bulun.

$f_x =3x^2y+y^2$, $f_y=x^3+2xy$

p322) $f(x,y)= x^3y+xy^2$ tam diferansiyelini bulun. x=3, y=4 civarinda dx=0.01, dy=0.05 icin Δf i bulun

Cozum: $df= f_x\, dx+ f_y\, dy$

$=(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy$

dx=0.01, dy=0.05

$\Delta f =df = (3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy$

$\Delta f=df =(3 \times 3^2 \times 4 + 4^2)0.01+(3^3+2 \times 3 \times 4)0.05=3.79$

p323) $f(x,y)= x^3y+xy^2$ fonksiyonunda

a) f(3,4) u hesaplayin.

b) f(3.01,4.05)degerini hesaplayin

c) f(x,y) fonksiyonunun tam diferansiyelini hesaplayin

d) f(3.01,4.05) degerini tam diferansiyel formulu ile hesaplayin

e) c) ve d) arasindaki hata payini bulun

Cozum

a) $f(3,4)= 3^3 \times 4 + 3 \times 4^2=156$

b) $f(3.01,4.05)= 3.01^3 \times 4.05 + 3.01 \times 4.05^2=159.81$

c) $df = (3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy$

d) dx=3.01-3=0.01

dy=4.05-4=0.05

$\Delta f =df = (3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy$

$\Delta f=df =(3 \times 3^2 \times 4 + 4^2)0.01+(3^3+2 \times 3 \times 4)0.05=3.79$

$f(3.01,4.05) \approx f(3,4)+ \Delta f=156+3.79=159.79$

e) 159.81-159.79=0.02

p324)a) $f(x,y)= x^3y+xy^2$, x=3,y=4 icin lineerlestirin.

b) f(3,4)degerini hesaplayin.

c) f(3,4)degerini L(x,y) lineer esdeger fonksiyon yardimiyla hesaplayin.

d) b) ve c) deki sonuclari karsilastirin.

e)x=3.01, y=4.05, icin f(x,y) degerini hesaplayin.

f)x=3.01, y=4.05, icin L(x,y) degerini hesaplayin.

g) e) ve f) de buldugunuz degerleri karsilastirin hata nedir.

Cozum: a)

$L(x,y)= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$= f(3.4) + f_x(3.4)(x-3)+f_y(3.4)(y-4)$

$=(3^3 \times 4 +3 \times 4^2)+(3 \times 3^2 \times 4 +4^2)(x-4)$

$+ (3^3+2 \times 3 \times 4)(y-4)$

$=156+124(x-3)+51(y-4)$

$=-420+124x+51y$

b) $f(3,4)= 3^3 \times 4 + 3 \times 4^2=156$

c) $L(3,4)=-420+124 \times 3+51 \times 4=156$

d)$f(3,4)-L(3,4)=156-156=0$. lineerlestirilen noktada fonksiyon ve lineerlestirlmis fonksiyon birbirine esittir.

e) $f(3.01,4.05)= 3.01^3 \times 4.05 + 3.01 \times 4.05^2=159.81$

f) $L(3.01,4.05)= -420+124 \times 3.01+51 \times 4.05 =159.79$

g) $159.81-159.79=0.02$

Tam diferansiyel ve lineerlestirme ayni denklemden turetildikleri icin her iki durumda ayni sonucu verecektir.

p326)a) $f(x,y)= x^3y+xy^2$, x=3,y=4 icin lineerlestirin. x=3, x=3.01, y=4, y=4.05 dikdortgeninde lineer denklemle hesaplanacak degerler ile gercek fonksiyonun degerleri arasindaki hata icin bir ust sinir belirtin.

Cozum:

Onceki problemden $L(x,y)=-420+124x+51y$

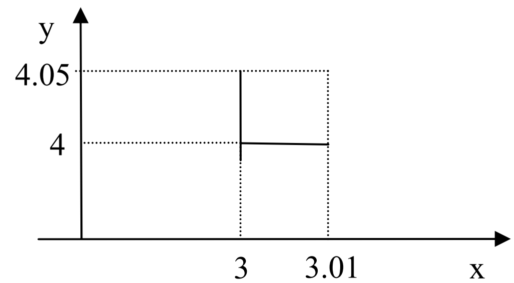
$|E(x,y)| \leq 0.5\, M\ (|x-x_0| + |y-y_0|)^2$

M : $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$,fonksiyonlarinin belirtilen bolgedeki maximum degeri.

$f_{xx}=6xy$, $f_{xy}=3x^2+2y$, $f_{yy}=2x$, $f_{yx}=3x^2+2y$,

Not: $f_{xy} = f_{yx}$ olmak zorundadir. neden?)

Belirtilen bolge bir dikdortgendir. f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, nin bul bolgede alabilecegi en buyuk degeri bulmak cogu zaman imkansizdir. Bu problem icin ise tahmin yapabiliriz.



f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, turevlerinin hepsi x,y arttikca artan d egerlere sahiptir. o halde en yuksek degerlerini de x ve y nin en fazla oldugu zaman alacaklardir. Sekildeki dikdortgenden bu degerin x=3.01 ve y=4.05 icin oldugunu soyleyebiliriz.

O halde

$f_{xx}(3.01, 4.01)=6 \times 3.01 \times 4.05=73.14$

$f_{xy}(3.01, 4.01)=3x^2+2y=35.28$

$f_{yy}(3.01, 4.01)=2x=6.02$

M=73.14 alinabilir.

$E(x,y)| \leq 0.5 \times 73.14 \times (|3.01-3| + |4.05-4|)^2 =0.13$

Notlar: $f(x,y) \approx L(x.y)$, yani

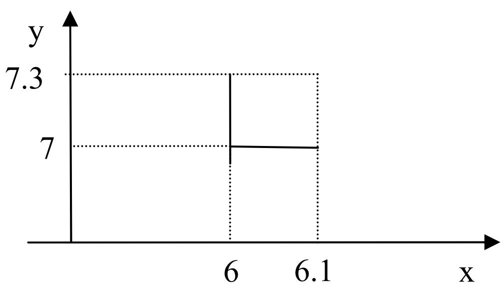
$x^3y+xy^2 \approx -420+124x+51y$

yaklasimi x=3, y=4 civarinda gecerlidir.

x={3,3.01}, y={4,4.05}, arasinda herhangibir deger icin $|f(x,y)-L(x,y)|$ farki kesinlikle 0.13 den kucuktur.

p327)Bir f(x,y) fonksiyonu x=6, y=7 civarinda linnerlestiriliyor. x=6.1, y=7.3 icin L(x,y)=33 bulunuyor. Bu fonksiyona ait ikinci turevler asagida verilmistir. f(x,y) nin gercek degerleri hangi sinirlar icinde olabilir.

$$f_{xx} = \frac{100}{6xy}, \quad f_{xy} = \frac{100}{3x^2 + 2xy}, \quad f_{xx} = \frac{100}{2x},$$



f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, turevlerinin hepsi x,y arttikca azalan bir ozellige sahiptir. Dolayisiyla f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, turevleri en buyuk degerlerini x ve y nin en kucuk oldugu zaman alacaklardir. Yani x=6 ve y=7 icin f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} maximum (en buyuk olur)

x=6, y=7 icin

$f_{xx}=0.37$, $f_{xy}=0.79$, $f_{yy}=8.1$

$|E(x,y)| \leq 0.5\ M\ (|x-x_0| + |y-y_0|)^2$

$|E(x,y)| \leq 0.5\ \ 8.1\ (|6.1-6| + |7.3-7|)^2$

$|E(x,y)| \leq 0.64$

O halde gercek f(6.1,7.3) degeri 33-0.64 ile 33+0.64 arasinda olacaktir. yani 32.36 ile 33.64 arasinda olacaktir.

p331) f(x,y) nin gercek degerleri hangi sinirlar icinde olabilir.

$f_{xx}=3\cos(xy)$, $f_{xy}=2\sin(xy^2)$, $f_{yy}=5$

Cozum:

sin ve cos fonksiyonlari en fazla 1 degerini alabilir. Dolayisiyla f_{xx}, f_{xy}, degerleri de en fazla 3 ve 2 olabilir. f_{yy} ise 5 olarak sabit. O halde M=5 alabiliriz.

$|E(x,y)| \leq 0.5\ M\ (|x-x_0| + |y-y_0|)^2$

$|E(x,y)| \leq 0.5\ \ 5\ (|6.1-6| + |7.3-7|)^2$

$|E(x,y)| \leq 0.4$