Notlar: x-y duzleminde iki yon vardir.
1)pozitif x yonu, 2)negatif x yonu
Ornek olarak $y=f(x)=x^2 -4x+20$ fonksiyonu icin $x_0=10$ noktasindan pozitif x yonunde gidersek (x e artan degerler verirsek) fonksiyonun degeri artar, negatif yonde gidersek fonksiyonun degeri azalir.

x	8	9	10	11	12	13
$f(x))=x^2 -4x+20$	52	65	80	97	116	137

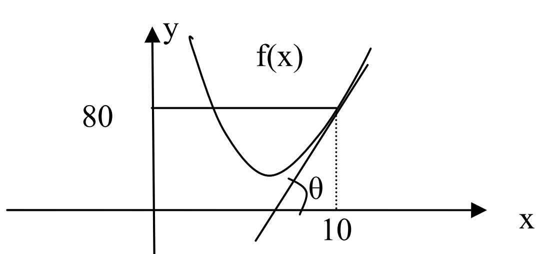
Ayni fonksiyonu $x_0=1$ noktasi icin dusunursek pozitif x yonunde gidersek fonksiyon azalir negatif yonde gidersek fonksiyon artar.

x	0.2	0.5	0.7	1	1.5	2
$f(x))=x^2 -4x+20$	19.2	18.2	17.7	17	16.2	16

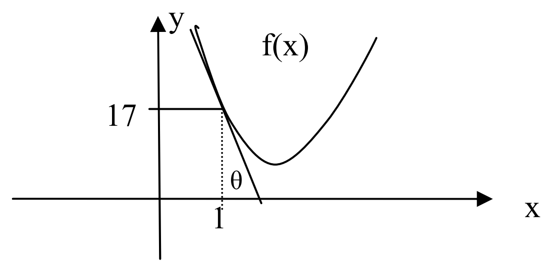
Bu fonksiyon $x_0=10$ noktasinda artan fonksiyon, $x_0=1$ noktasinda azalan bir fonksiyondur.
Bir fonksiyonun artan yada azalan oldugu o noktadaki tegetin egimi ile belirlenir. O noktadaki egim pozitif ise artan negatif ise azalandir.
Tegetin egimi o noktadaki turevin degeridir.
Turev negatif ise fonksiyon azalan turev pozitif ise fonksiyon artandir.

Teget denklemi
$y= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0) x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

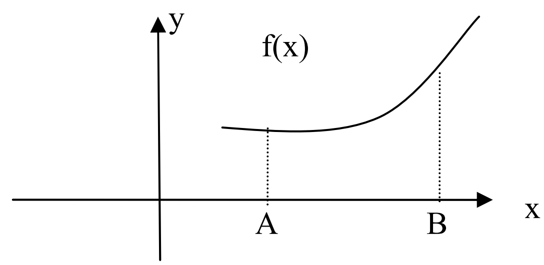
Ornek problem: $y=f(x)=x^2 -4x+20$ ye
a)$x_0=10$ b)$x_0=1$ noktasindan cizilen tegetin denklemini bulun.



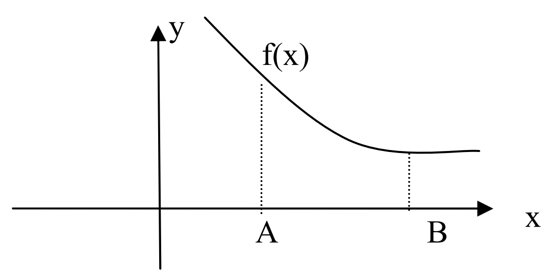
$x_0=10$,
$f(10)=10^2 - 4_x10+20=80$
$f'(x)=2x- 4$
$f'(10)=2_x10 - 4=16$
$y= f'(x_0) x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$
$y= 16 x – 16_x10 + 80$
$y= 16x – 80$ Tegetin egimi 16 dir. $\tan(\theta)=16$
------------------ ---------------------------------
$x_0=1$,
$f(1)=1^2 - 4_x1+20=17$
$f'(x)=2x- 4$
$f'(1)=2_x1 - 4= -2$
$y= f'(x_0) x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$
$y= -2 x – (-2)_x1 + 17$
$y= -2x +19$



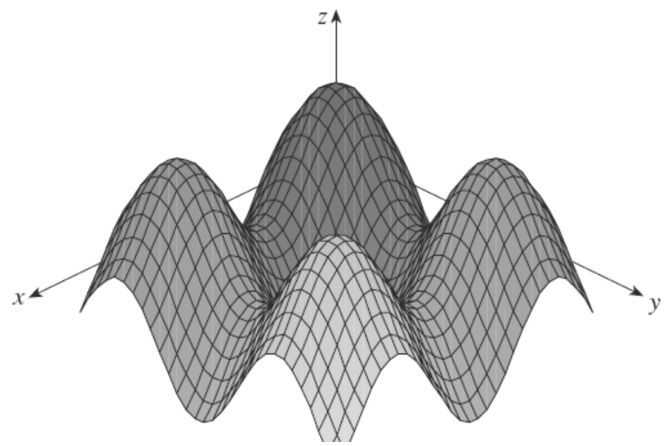
Tegetin egimi -2 dir. $\tan(\theta)=-2$
------------------------ -------
Egim (turevin degeri) yuksek ise fonksiyon cok artandir.



A noktasinda az artan B noktasinda cok artandir.



A noktasinda cok azalan B noktasinda az azalandir.
--------------------- ----------------
x-y-z uzayinda yon coktur. Bu nedenle fonksiyonun artan yada azalan kavramini tarif edebilmek icin gradyan (gradient) kullaniriz.



grad f(x,y,z)= $\nabla f(x,y,z) =$ f_X i+ f_Y j+ f_Z k

$$=\left(\frac{df}{dx}i+\frac{df}{dy}j+\frac{df}{dz}k\right)$$

u birim vektor yonundeki turev

Du=$\nabla f(x,y,z)$ u

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0}\cdot\mathbf{u},$$

-- ---------

p351) f(x,y,z)= x^2y^2+xyz ise grad f i hesaplayin.

$\nabla f(x,y,z) =$ **?**

Cozum:

$\nabla f(x,y,z) =$ f_X i+ f_Y j+ f_Z k

$\nabla f(x,y,z) =$ ($2xy^2$+yz)i+($2x^2$y+xz)j +(xy)k

p352) f(x,y,z)=x^2+y^2-4 ise, $\nabla f(x,y,z) =$ **?**

Cozum:

$\nabla f(x,y,z) =$ 2xi+ 2yj +0k=2xi+ 2yj

p353) f(x,y,z)= x^2y^2+xyz ise

a)f nin V=3i+4j+6k yonundeki turevini hesaplayin.

b)Bu turevin P(1,2,7) noktasindaki degerini hesaplayin.

Cozum:

a)

$\nabla f(x,y,z) =$ ($2xy^2$+yz)i+($2x^2$y+xz)j +(xy)k

u birim vektor yonundeki turev

Du=$\nabla f(x,y,z)$ u

V=3i+4j+6k vektorunun birim vektoru

$$v=\frac{3i+4j+6k}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}}=\frac{3i+4j+6k}{7.81}= 0.38i+0.51j+0.76k$$

Du =$\nabla f(x,y,z)$ u

Du= [($2xy^2$+yz)i+($2x^2$y+xz)j +(xy)k] $\frac{3i+4j+6k}{7.81}$

Du = [0.38($2xy^2$+yz)+0.51($2x^2$y+xz) +0.76(xy)]

b)

Du f(P)= [0.38($2_x1_x2^2$+2_x7)+0.51($2_x1^2{}_x2$+1_x7) +0.76(1_x2)]

Du f(P)= [0.38*(2*x*y^2+y*z)
+ 0.51*(2*x^2*y+x*z) +0.76*(x*y)]
=15.62

Yonlu turev bir skalardir (sabit bir sayi) vektor degildir. Fonksiyonun o yondeki artis yada azalis hizini verir.

p352) f(x,y,z)= x^2 -y ise, fonksiyonun x=2, y=4 noktasinda a)x ekseni b) y ekseni c)z ekseni yonundeki artisi nedir.

Cozum:

$\nabla f(x,y,z) =$ 2xi- yj +0k=2xi- yj

a)x ekseni yonunde birim vektor. v=i+0j+0k=i

Dv=$\nabla f(x,y,z)$ v =(2xi- yj) (i)= 2x

Dv f(P)=2_x2=4

b)y ekseni yonunde birim vektor. v=0i+j+0k

Dv=$\nabla f(x,y,z)$ v =(2xi- yj) (j)= -y

Dv f(P)= -y = -4

b)z ekseni yonunde birim vektor. v=0i+0j+zk

Dv=$\nabla f(x,y,z)$ v =(2xi- yj) (z)= 0

Dv f(P)=0

Turevin maximum deger aldigi yon

Dv =∇f v =| ∇f | | v | cos α

cos α en fazla 1 olabilir. cos α =1 --> α=0

Dv =∇f v = nin alabilecegi en yuksek deger

cos α =1 oldugu durum yani α=0 durumudur

maximum deger =| ∇f | | v |

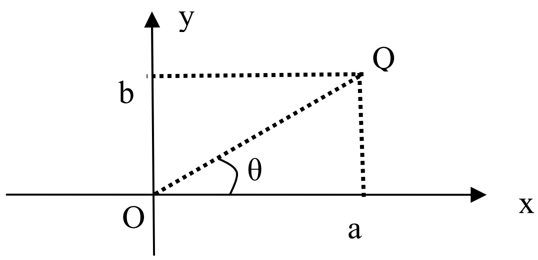
Dv =∇f v = nin alabilecegi en dusuk deger

cos α =-1 oldugu durum yani α=180^0 durumudur

maximum deger = -| ∇f | | v |

Turevin alabilecegi maximum deger gradyan vektor yonundedir.
Turevin alabilecegi minimum deger deger gradyan vektorun zıddı yonundedir.

Hatirlatma: Vektorler

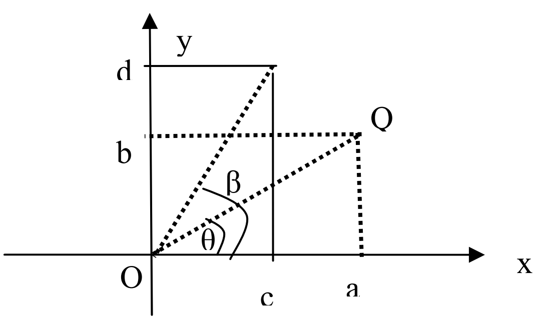


$z=a+ib$, $|z|=r=\overline{OQ}=\sqrt{a^2+b^2}$, $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$

$\sin\theta=\frac{b}{r}$, $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\tan\theta=\frac{b}{a}$,

Iki vektorun skalar carpimi. $u=ai+bj$, $v=di+ej$
$u.v=ad+be$ (scalar carpimin sonucu bir scalardir sayidir vektor degildir)
Gosterilebilir ki
$u.v=|u|\ |v|\cos\alpha$.
|| vektorun genligi
α:iki vektor arasindaki acidir.

$u=ai+bj=3i+4j$, $v=ci+dj=2i+8j$



$u.v=3_x 2+4_x 8=38$
ayni sonucu $u.v=|u|\ |v|\cos\alpha$. bagintisi ile bulmaya calisalim.

$|u|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\tan\theta=\frac{4}{3}=53.13$,

$|v|=\sqrt{2^2+8^2}=8.24$, $\tan\beta=\frac{4}{3}=75.96$,

$\alpha=\beta-\theta=22.83$

$|u|\ |v|\cos\alpha=5_x\ 8.24_x\ 0.9217=38$
------------------------------------ ---
α=0 icin cos α=1 dir o halde iki vektorun carpiminin en buyuk olmasi icin vektorler arasindaki aci sifir olmali, (vektorler ayni yonde olmalidir.)

α=180 icin cos α=-1 dir o halde iki vektorun carpiminin en kucuk olmasi icin vektorler arasindaki aci 180 derece olmali, (vektorler zit yonde olmalidir.)

α=90, α=270, icin cos α=0 dir o halde iki vektorun carpiminin sifir olmasi icin vektorler arasindaki aci 90 derece veya 270 derece olmali, (vektorler birbirine dik olmalidir.)

$f(x, y)=(x^2/2)+(y^2/2)$'nin

(a) (1, 1) noktasında en hızlı arttığı,
(b) (1, 1) noktasında en hızlı azaldığı yönleri bulun.
(c) (1, 1)'de f'nin sıfır değişim yönleri nelerdir?

Çözüm

(a) Fonksiyon (1, 1)'de en hızlı olarak ∇f yönünde artar. Gradiyent

$$(\nabla f)_{(1,1)}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})_{(1,1)}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

olarak bulunur. Yönü ise,

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

yönündedir.

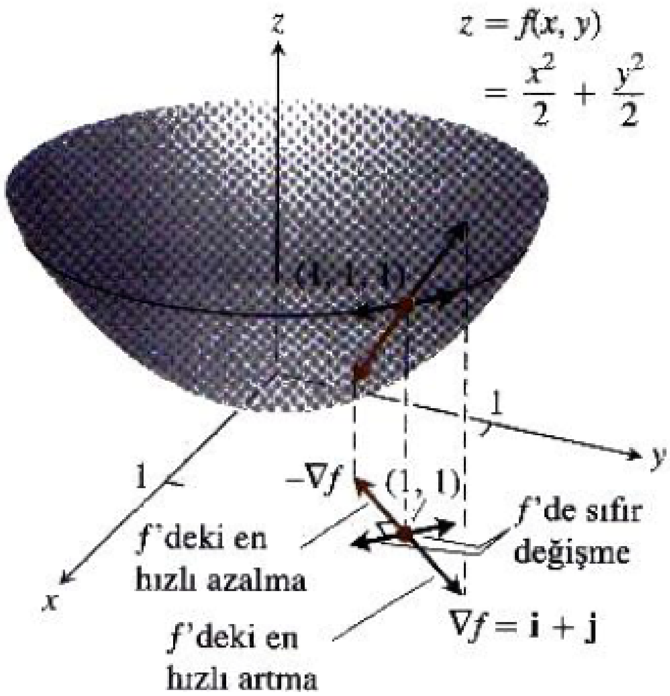
(b) Fonksiyon (1, 1)'de en hızlı olarak $-\nabla f$ yönünde azalır:

$$-\mathbf{u}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

(c) (1, 1)'de sıfır değişim yönleri ∇f'ye ortogonal yönlerdir·

$$\mathbf{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$-\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$



ŞEKİL 14.27 $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$'nin $(1, 1)$'de en hızlı arttığı yön $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ yönüdür. Bu yön yüzey üzerinde (1, 1, 1) de en dik yükselme yönüdür (Örnek 3).

------------------------- ---------------------

df=Du f(P) ds

f fonksiyonu uzerinde u vektoru dogrultusunda ds kadar gidildiginde fonksiyonun degeri df kadar artar (veya azalir).

p351)

ÖRNEK : $P(x, y, z)$ noktası $P_0\,(1, 0, 2)$ noktasından $\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 6\,\boldsymbol{k}$ vektörü yönünde $ds = 0{,}1$ birim hareket ettiğinde

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

fonksiyonunun değerinde ne kadarlık bir değişme olur.

Çözüm : $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $\nabla f = (y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + z)\,\boldsymbol{j} + (x + y)\,\boldsymbol{k}$ olduğundan

$$\nabla f \,.\, \boldsymbol{u} = \frac{2}{7}(y + z) + \frac{3}{7}(x + z) + \frac{6}{7}(x + y)$$

dır. Bunun $P_0\,(1, 0, 2)$ noktasındaki değeri

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \,.\, \boldsymbol{u} = \frac{4}{7} + \frac{9}{7} + \frac{6}{7} = \frac{19}{7}$$

bulunur. O halde fonksiyon değerindeki değişme

$$df \cong D_u f(P) \,.\, ds = \frac{19}{7}\,0{,}1 = \frac{19}{70} \approx 0{,}27$$

olur.

Vektorel Zincir Kurali

r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k

f(x,y,z)=f(r(t)) seklinde gosterilir.

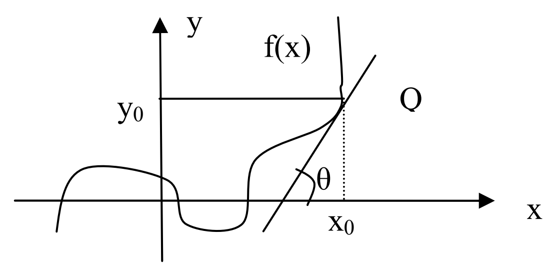
fonksiyonun t ye gore turevi

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}$$

$$= \left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\right) = \nabla f\,(r(t))\,\frac{dr}{dt}$$

------------------------------------- -------------

Tegetler ve Teget Duzlemler



$x=x_0$ da cizilen tegetin egimi $f'(x_0)$ dir.

yani $\tan\theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0} = f'(x_0)$

Tegetin denklemini bulmak icin bir noktasi ve egimi bilinen dogru denklemi formulunu kullaniriz.

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y = m(x-x_0) + y_0 = mx - mx_0 + y_0$

$\quad = f'(x_0)\,x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

eld edilir.

$y-y_0=m(x-x_0)$

denkleminin baska bir yoldan elde edilmesi

$y-y_0=(x-x_0)$

$$y - y0 = \frac{dy}{dx}(x - x0)$$

F(x,y,z)=0 yuzeyine $P_0(x_0,y_0,x_0)$ noktasinda cizilen teget duzlemin denklemi

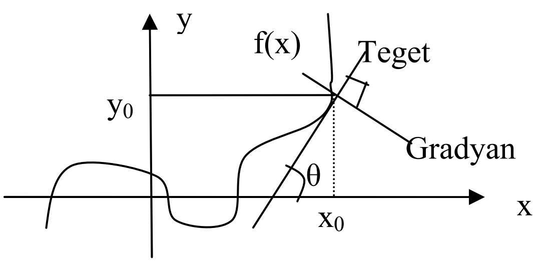
$$\frac{dF}{dx}(P_0)(x-x_0)+\frac{dF}{dy}(P_0)(y-y_0)+\frac{dF}{dz}(P_0)(z-z_0)=0$$

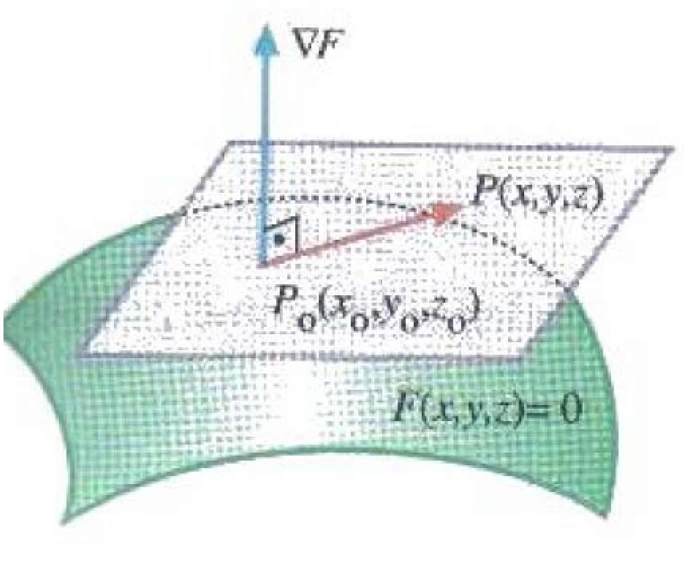
$\frac{dF}{dx}(P_0)$ F nin x e gore turevinin (P_0) daki degeri demektir.

Bu teget duzleme **$P_0(x_0,y_0,x_0)$** noktasindan cizilen normal (dik dogru) denklemi.

$x=x_0+\frac{dF}{dx}(P_0)t,\quad y=y_0+\frac{dF}{dy}(P_0)t,\quad z=z_0+\frac{dF}{dz}(P_0)t,$

Gradyan vektor normal dogrultusundadir.
Gradyan vektor tegete (turev vektorune) diktir.
Gradyan vektor tegete diktir.





$\nabla F(P_0)$ gradiyent vektörü $r'(t_0)$ teğet vektörüne dik olur.

Ornek (balci 110)

-- --------------

Duzlemde Teget dogrusunun denkleminin baska sekilde elde edilmesi

y=f(x)

F(x,y) = y - f(x)=0

$$\frac{dF}{dx}(x-x_0)+\frac{dF}{dy}(y-y_0)=0, \quad (F45)$$

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d(y-f(x))}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{df(x)}{dx}=0-\frac{df(x)}{dx}=-\frac{df(x)}{dx},$$

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d(y-f(x))}{dy}=\frac{dy}{dy}-\frac{df(x)}{dy}=1-0=1$$

Bu degerler F45 de yerine konulursa

$$-\frac{df}{dx}(x-x_0)+1(y-y_0)=0$$

$m=\frac{df}{dx}$ tanimi yapilirsa

$(y-y_0)=m(x-x_0)$ eld edilir.