f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

serisine, f fonksiyonu tarafından a noktasında üretilen **Taylor Serisi** adı verilir.

Taylor Serisi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

P221)a) f(x)= $e^{0.5X}$ fonksiyonunu x=3 civarinda Taylor serisine aciniz.

Cozum

f '(x)= 0.5 $e^{0.5X}$

f ''(x)= $0.5_x 0.5$ $e^{0.5X}$ =0.25 $e^{0.5X}$

f '''(x)= $0.5_x 0.5_x 0.5$ $e^{0.5X}$ =0.125 $e^{0.5X}$

f $^{(4)}$(x)= $0.5_x 0.5_x 0.5_x 0.5$ $e^{0.5X}$ =0625 $e^{0.5X}$

f(3)= 0.5 $e^{0.5\ 3}$=0.5 $e^{1.5}$ =4.4817

f '(3)= 0.25 $e^{0.5\ 3}$=2.24

f ''(3)= 0.125 $e^{0.5\ 3}$=1.12

f ''' (3)= 0.56

$$f(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2$$

$$= \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 + \frac{f^{(4)}(3)}{4!}(x-3)^4 + \ldots\ldots..$$

f(x)=4.48+2.24(x-3)+ $\frac{1.12}{2}$ (x-3)^2+ $\frac{0.56}{6}$ (x-3)^3+..

--------------------------------- -----------------------

Example CT13- Obtain a linear approximation for the function f(x)=sin(x) around x_0=0.8.

Solution

f(x)= sin(x)   f (x_0)= sin(0.8) =0.71735

f '(x)=cos(x)   f '(x_0)= cos(0.8)=0.69670

f ''(x)=-sin(x)   f ''(x_0)=-sin(0.8)=-0.7173

f '''(x)=cos(x)   f '''(x_0)=-cos(0.8)=-0.69670

f $^{(4)}$(x)=sin(x)   f $^{(4)}$(x_0)=sin(0.8)=0.7173

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

f(x)=0.717+0.696(x-0.8)+(-0.717/2) (x-0.8)^2
+ (0.696/6)(x-0.8)^3+(0.717/24)(x-0.8)^4

Maclauren Serisi

x0=0 alinirsa Taylor serisi Maclauren serisi olarak adlandirilir ve fonksiyonlarin hesabinda kullanilir.

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

P321) f(x)= e^x fonksiyonunu Maclauren serisine acin.

Cozum

f(x)= e^x, f '(x)=e^x, f ''(x)= e^x, f '''(x)= **e^x ....**

f (0) = e^0=1

f '(0)= e^0=1

f ''(0)= e^0 =1

f '''(0)= 1

f $^{(n)}$(x)= 1

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

P321) f(x)=sin(x) fonksiyonunu Maclauren serisine acin.

Cozum

f(x)=sin(x), f '(x)=cos(x), f ''(x)=-sin(x),

f '''(x)=**-cos(x) ....**

f (0) = sin(0)=0

f '(0)= cos(0)=1

f ''(0)= -sin(0)=0

f '''(0)= -cos(0)=-1

....

$$f(x) = \sin(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

Iki degiskenli fonksiyonlarda

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$

$$= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \ldots$$

serisine f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki **Taylor serisi** denir.