

TANIMLAR Mutlak Maksimum, Mutlak Minimum

f , tanım kümesi D olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

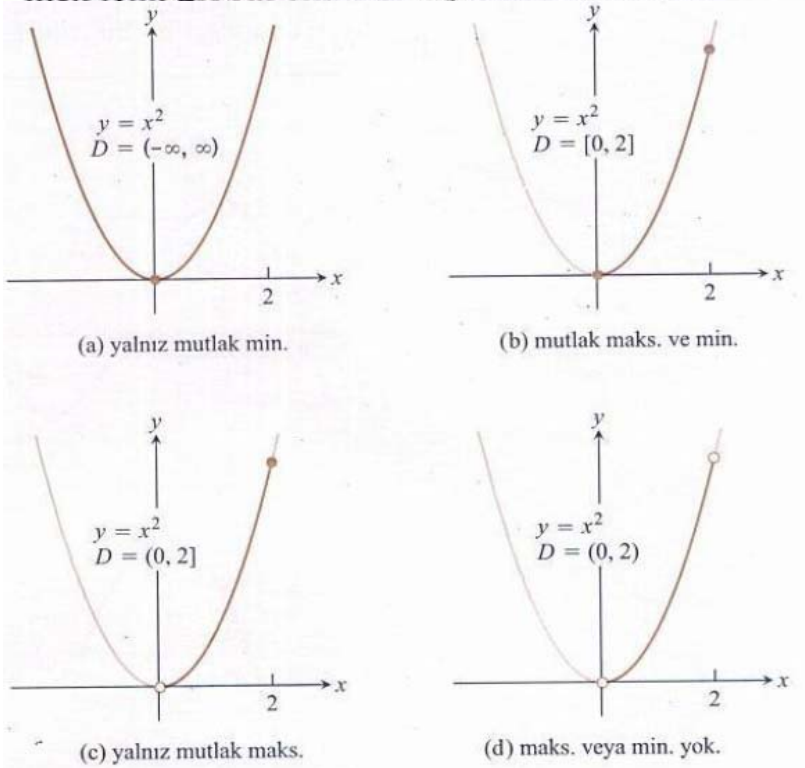
$$D\text{'deki her } x \text{ için} \quad f(x) \leq f(c)$$

ise, f 'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak maksimum** değeri,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \quad f(x) \geq f(c)$$

ise, f 'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak minimum** değeri vardır.

Mutlak maksimum ve minimum değerlere mutlak **ekstrema** (Latince *ekstremum*'un çoğulu) denir. Mutlak ekstremler ayrıca, aşağıda tanımlanan yerel ekstremlerden ayırt etmek için, **global** ekstrem diye de adlandırılır.

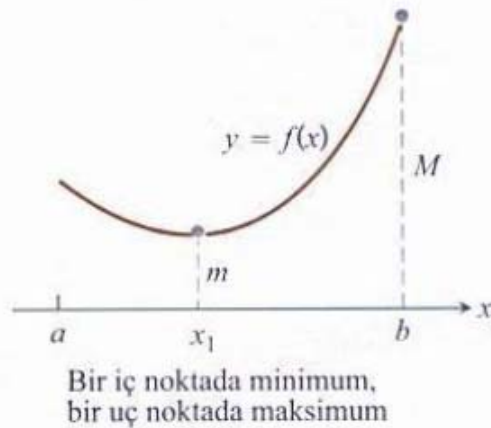
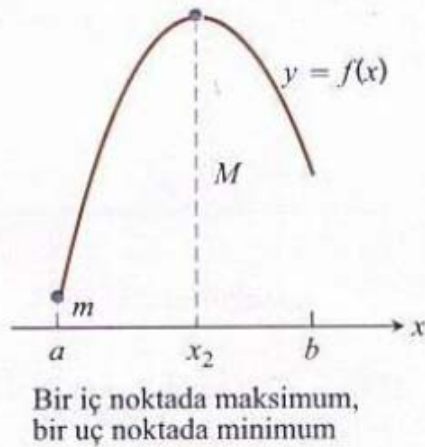
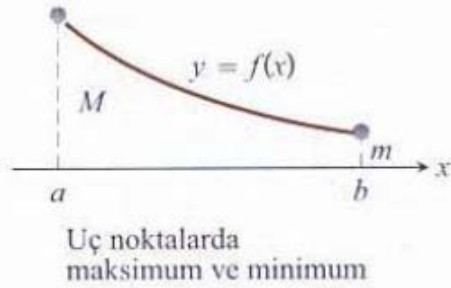
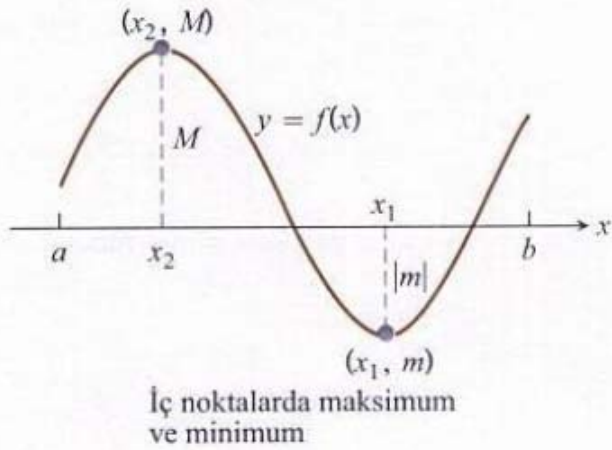


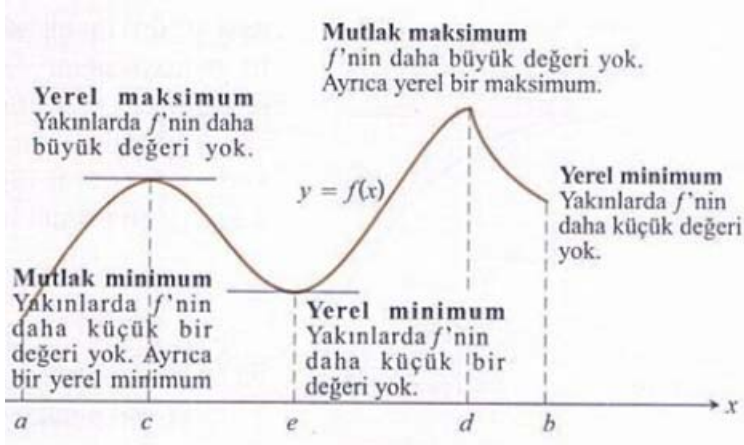
ŞEKİL 4.2 Örnek 1 için grafikler

Fonksiyon kuralı	D Tanım kümesi	D 'deki mutlak ekstremler
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Mutlak maksimum yok. $x = 0$ 'da mutlak minimum 0.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	$x = 2$ 'de mutlak maksimum 4 $x = 0$ 'da mutlak minimum 0
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	$x = 2$ 'de mutlak maksimum 4 Mutlak minimum yok.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Mutlak ekstrem yok.

TEOREM 1 Ekstrem Değer Teoremi

f , kapalı bir $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ise, bir mutlak maksimum değer M 'ye ve bir mutlak minimum değeri m 'ye $[a, b]$ içinde erişir. Yani, $[a, b]$ 'da, $f(x_1) = m$ ve $f(x_2) = M$ olacak şekilde x_1 ve x_2 sayıları vardır ve $[a, b]$ 'daki diğer her bir x için $m \leq f(x) \leq M$ dir (Şekil 4.3).





TANIM Kritik Nokta

Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin, f' 'nin sıfır veya tanımsız olduğu bir iç noktası f 'nin bir **kritik noktasıdır**.

Bir fonksiyonun mutlak Maximum ve Mutlak Minimum noktaları:

- a) Fonksiyonun bir uç noktası olabilir.
- b) Fonksiyonun bir donum noktası olabilir. (Donum noktasında türev sıfırdır.)
- c) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ ise x_0 bir maximum noktasıdır.
 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ ise x_0 bir minimum noktasıdır.
 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ ise bu metod çalışmaz, başka bir metod denemeliyiz.

Kapalı Sonlu Bir Aralıkta Sürekli Bir f Fonksiyonunun Mutlak Ekstremleri Nasıl Bulunur?

1. Bütün kritik ve uç noktalarda f 'yi hesaplayın.
2. Bu değerlerin en büyüğünü ve en küçüğünü alın.

Extremum: maximum veya minimum.

$$y=f(x)$$

$$f'(x)=0 \text{ yapan deger bulunur. } x=x_1$$

$$f''(x_1) > 0 \text{ ise } x=x_1 \text{ noktası bir minimum.}$$

$$f''(x_1) < 0 \text{ ise } x=x_1 \text{ noktası bir maximumdur.}$$

Ornek: 87 $y=f(x)=x^2$ fonksiyonun maximum ve minimumlarını bulun.

Cevap:

$$f'(x)=2x, \quad f''(x)=2$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x_1=0$$

$$f''(x)=2$$

$f''(0)=2 > 0$ olduğundan $x_1=0$ noktası bir minimumdur.

Ornek 88: $y=f(x)=-x^2$ fonksiyonun maximum ve minimumlarını bulun.

Cevap:

$$f'(x)=-2x, \quad f''(x)=-2$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x_1=0$$

$$f''(x)=-2$$

$f''(0)=-2 < 0$ olduğundan $x_1=0$ noktası bir maximumdur.

Ornek 89: $y=f(x)=x^3$ fonksiyonunun mutlak maximum ve mutlak minimum değerlerini bulun.

$$f'(x)=3x^2,$$

$$f''(x)=6x,$$

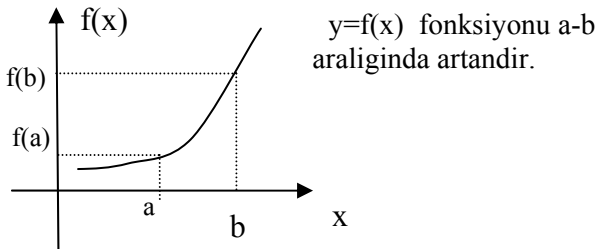
$$y'=f'(x)=3x^2=0 \rightarrow 3x^2=0, \rightarrow x_0=0$$

$$f''(x_0)=6 \cdot 0=0,$$

$$f''(x_0)=0, \text{ olduğundan } x_0=0 \text{ noktası}$$

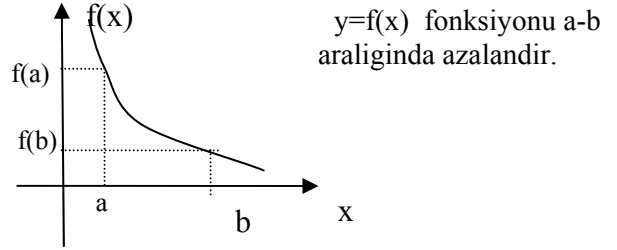
$y=f(x)=x^3$ fonksiyonunun maximum yada minimum noktası olduğunu bu metodla öğrenemeyiz, Baska bir metod kullanmamız gerekir.

Bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı maximum ve minimum deger.



$y=f(x)$ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında artandır.

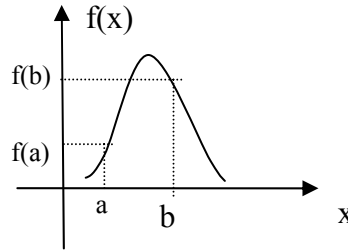
$y=f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta minimum değerini $x=a$ noktasında maksimum değerini $x=b$ noktasında alır.
 $y=f(x)$ fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında turevinin sıfır olduğu bir nokta yoktur.



$y=f(x)$ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında azalandır.

$y=f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta minimum değerini $x=b$ noktasında maksimum değerini $x=a$ noktasında alır.
 $y=f(x)$ fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında turevinin sıfır olduğu bir nokta yoktur.

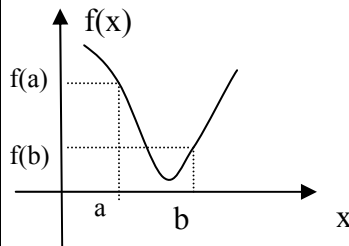
$A < x < B$ aralığında Turevin sıfır olduğu bir nokta yoksa, Bu aralıkta fonksiyon daima artan veya daima azalandır.



$y=f(x)$ fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında artan ve azalan bölgeleri vardır.

$y=f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta minimum değerini $x=a$ noktasında maksimum değerini $a < x < b$ arasında bir noktada alır.

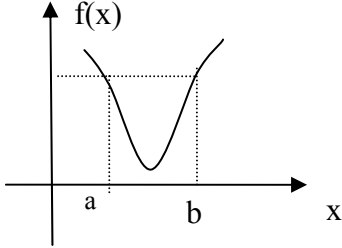
Fonksiyonun maksimum noktasını bulmak için turev alırlar.



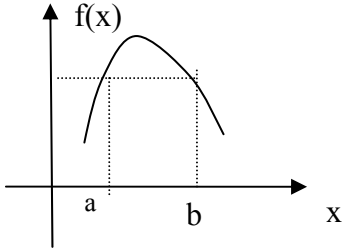
$y=f(x)$ fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında artan ve azalan bölgeleri vardır.

$y=f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta maksimum değerini $x=a$ noktasında minimum değerini $a < x < b$ arasında bir noktada alır.

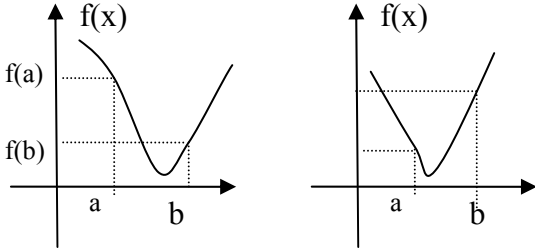
Fonksiyonun minimum noktasını bulmak için türev alırız.



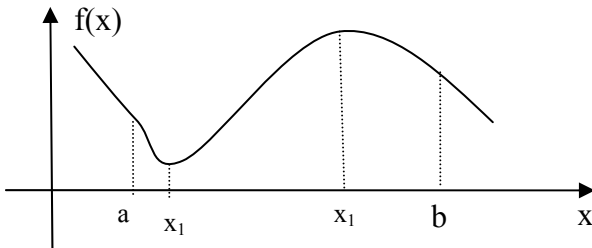
$f(a) = f(b)$ ve $a < x < b$ aralığında minimum var



$f(a) = f(b)$ ve $a < x < b$ aralığında maksimum var

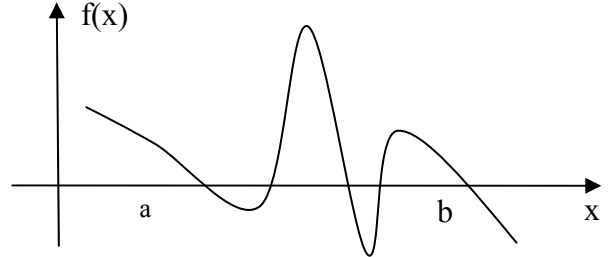


Birinci fonksiyonda $x=a$ da maksimum var.
İkinci fonksiyonda $x=b$ de maksimum var.



$a < x < b$ aralığında $f(x_1)$ minimum, $f(x_2)$ maximumdur. $f(a)$, $f(b)$ ne maksimumdur. ne minimumdur.

Herhangibir fonksiyonun $a < x < b$ aralığında maksimum ve minimumlarını bulun denildiğinde ne yapmalıyız.



1) $x=a$, ve $x=b$ noktalarındaki fonksiyonun değerini hesaplarız.

2) Fonksiyonun türevini alırız.

2.1) $a < x < b$ aralığında türev sıfır olmuyorsa, fonksiyon ya sürekli azalan ya da sürekli artandır. Maksimum ve minimum değerlerini $f(a)$ ve $f(b)$ den buluruz.

2.2) $a < x < b$ aralığında türev sıfır oluyorsa, türevin sıfır olduğu tüm noktalara bakarız. Bir liste yaparız. maksimum ve minimumu bu listeden buluruz.

341) $y = x^2 - 4x + 10$ fonksiyonunun $x=1$, ve $x=5$ aralığında aldığı maksimum ve minimum değerleri bulun.

Cevap:

$$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 10 = 7$$

$$f(5) = 15$$

$$f'_x = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = 0, x = 2$$

$$f(2) = 6$$

x	1	5	2	
f(x)	7	15	6	

Görüldüğü gibi fonksiyon $1 < x < 5$ aralığında minimum değerini $x=2$ noktasında maksimum değeri $x=5$ noktasında almaktadır. $1 < x < 5$ aralığından başka değerlere bakmaya gerek yok. $1 < x < 5$ aralığında x 'e ne verirse verelim. fonksiyonun değeri 6 ile 15 arasında kalır.

343) $y = x^2 - 4x + 10$ fonksiyonunun $x=10$, ve $x=20$ aralığında aldığı maksimum ve minimum değerleri bulun.

Cevap:

$$f(10) = 70$$

$$f(20) = 330$$

$$f'_x = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = 0, x = 2$$

$$f(2) = 6$$

x	10	20	2	
f(x)	70	330	6	

Goruldugu gibi fonksiyon $10 < x < 20$ araliginda minimum degerini $x=10$ noktasinda maksimum degerini $x=20$ noktasinda almaktadır.

345) $y=2x^3 - 9x^2 + 12x + 10$ fonksiyonunun $x=0$, ve $x=10$ araliginda aldigi maksimum ve minimum degerleri bulun.

Cevap:

$$f(0)=10$$

$$f(10)=1230$$

$$f_x = 6x^2 - 18x + 12 \rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0, x_1=1, x_2=2,$$

$$f(1)=15$$

$$f(2)=14$$

x	0	10	1	2
f(x)	10	1230	15	14

Goruldugu gibi fonksiyon $0 < x < 10$ araliginda minimum degerini $x=0$ noktasinda maksimum degerini $x=10$ noktasinda almaktadır.

347) $y=2x^3 - 9x^2 + 12x + 10$ fonksiyonunun $x=0.5$, ve $x=1.5$ araliginda aldigi maksimum ve minimum degerleri bulun.

Cevap:

$$f(0.5)=14$$

$$f(1.5)=14.5$$

$$f_x = 6x^2 - 18x + 12 \rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0, x_1=1, x_2=2,$$

$$f(1)=15$$

$$f(2)=14$$

x	0.5	1.5	1	2
f(x)	14	14.5	15	14

Goruldugu gibi fonksiyon $0.5 < x < 1.5$ araliginda minimum degerini $x=0$ ve $x=2$ noktalarinda maksimum degerini $x=1$ noktasinda almaktadır.

P541(t249)

$f(x) = x^2$ 'nin $[-2, 1]$ aralığında mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlenebilirdir, dolayısıyla tek kritik nokta $f'(x) = 2x = 0$ olduğu $x = 0$ noktasıdır. $x = 0$ ve $x = -2$ ile $x = 1$ uç noktalarında fonksiyonun değerlerini kontrol etmemiz gerekir.

$$\text{Kritik nokta değeri: } f(0) = 0$$

$$\text{Uç nokta değerleri: } f(-2) = 4$$

$$f(1) = 1$$

Fonksiyonun $x = -2$ 'de değeri 4 olan bir mutlak maksimumu ve $x = 0$ 'da değeri 0 olan bir mutlak minimumu vardır.

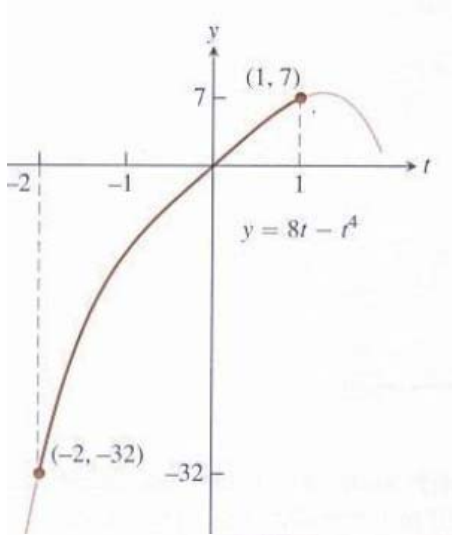
P542(t249)

$g(t) = 8t - t^4$ 'ün $[-2, 1]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlidir, dolayısıyla kritik noktalar sadece $g'(t) = 0$ olduğu yerlerde bulunur. Bu denklemi çözersek,

$$8 - 4t^3 = 0 \quad \text{veya} \quad t = \sqrt[3]{2} > 1$$

verilen tanım kümesinde bulunmayan bir nokta buluruz. Dolayısıyla, fonksiyonun mutlak ekstremleri uç noktalardadır: $g(-2) = -32$ (mutlak minimum) ve $g(1) = 7$ (mutlak maksimum) Şekil 4. 7'ye bakın.



$f(x) = x^{2/3}$ 'ün $[-2, 3]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

Çözüm Fonksiyonu kritik noktalarda ve uç noktalarda hesaplarız ve değerlerin en büyüğü ile en küçüğünü alırız.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

birinci türevinin sıfırları yoktur, fakat $x = 0$ 'da tanımsızdır. f 'nin bu kritik noktadaki ve uç noktalarındaki değerleri

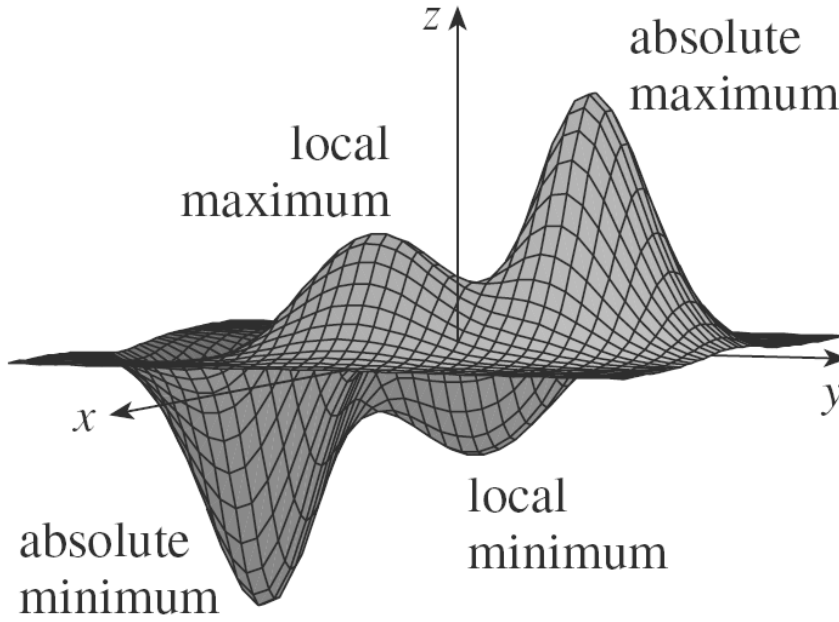
Kritik nokta değeri: $f(0) = 0$

Uç nokta değerleri: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

dur.

COK DEGISKENLI FONKSIYONLAR MAXIMUM,MINIMUM VE EYER NOKTASI



TEOREM 7.9

$z = f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

olsun.

- 1) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$ ise (a, b) eyer noktasıdır.
- 2) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ ve $f_{xx}(a, b) > 0$ ise (a, b) noktası yerel minimum noktasıdır.
- 3) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ ve $f_{xx}(a, b) < 0$ ise (a, b) noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

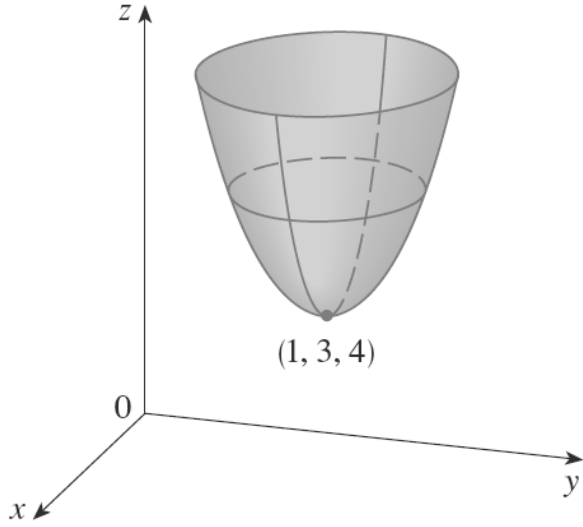
Ornek 761: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ fonksiyonunun maximum ve minimum eyer noktalarını bulun.
 $f_x = 2x - 2$, $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_y = 2y - 6$, $f_{yy} = 2$,

$$f_x = 0, \rightarrow 2x - 2 = 0, x_0 = 1,$$

$$f_y = 0, \rightarrow 2y - 6 = 0, y_0 = 3,$$

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4$$

Sonuc: $f_{XX} f_{YY} - (f_{XY})^2 > 0$, ve $f_{XX} > 0$, olduğundan $x_0=1, y_0=3$ noktası bir minimum noktasıdır. Fonksiyonun bu noktadaki değeri $z=f(x,y)=f(1,3) = 1^2+3^2-2(1) - 6(3) + 14=4$.



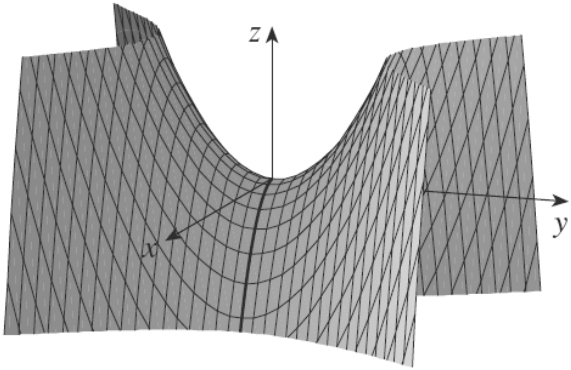
Örnek 762: $f(x,y) = y^2 - x^2$ fonksiyonunun maximum ve minimum eyer noktalarını bulun.
 $f_X = -2x$, $f_{XX} = -2$, $f_{XY} = 0$, $f_Y = 2y$, $f_{YY} = 2$,

$$f_X = 0, \longrightarrow x_0 = 0,$$

$$f_Y = 0, \longrightarrow y_0 = 0,$$

$$f_{XX} f_{YY} - (f_{XY})^2 = -2 \cdot 2 - 0^2 = -4$$

Sonuc: $f_{XX} f_{YY} - (f_{XY})^2 < 0$, olduğundan $x_0=0, y_0=0$ noktası bir maximum veya bir minimum noktası değildir bir eyer noktasıdır.



EXAMPLE 3 Find the local maximum and minimum values and saddle points of $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUTION We first locate the critical points:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Setting these partial derivatives equal to 0, we obtain the equations

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{and} \qquad y^3 - x = 0$$

To solve these equations we substitute $y = x^3$ from the first equation into the second one. This gives

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

so there are three real roots: $x = 0, 1, -1$. The three critical points are $(0, 0)$, $(1, 1)$, and $(-1, -1)$.

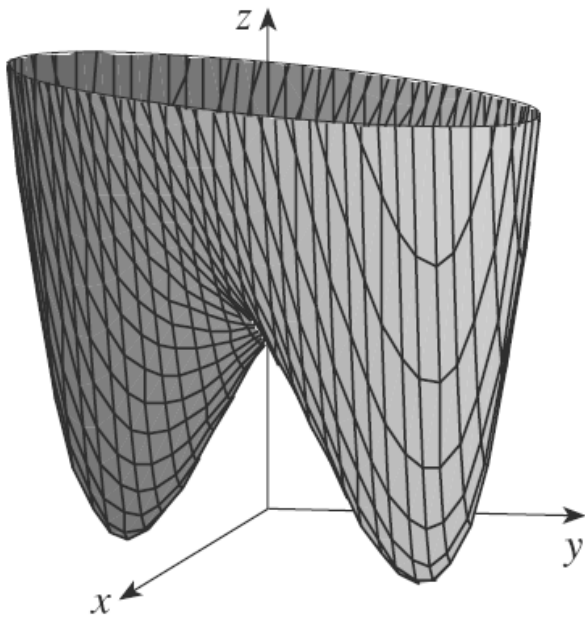
Next we calculate the second partial derivatives and $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Since $D(0, 0) = -16 < 0$, it follows from case (c) of the Second Derivatives Test that the origin is a saddle point; that is, f has no local maximum or minimum at $(0, 0)$.

Since $D(1, 1) = 128 > 0$ and $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, we see from case (a) of the test that $f(1, 1) = -1$ is a local minimum. Similarly, we have $D(-1, -1) = 128 > 0$ and $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, so $f(-1, -1) = -1$ is also a local minimum.



EXAMPLE 4 Find and classify the critical points of the function

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Also find the highest point on the graph of f .

SOLUTION The first-order partial derivatives are

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \quad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

So to find the critical points we need to solve the equations

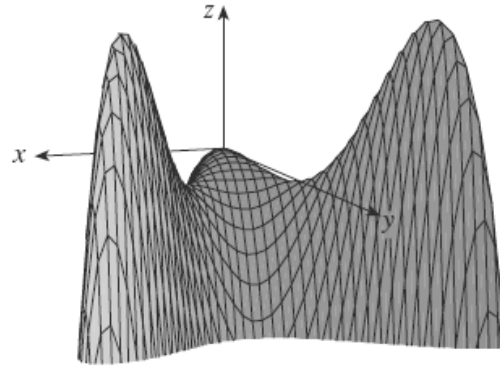
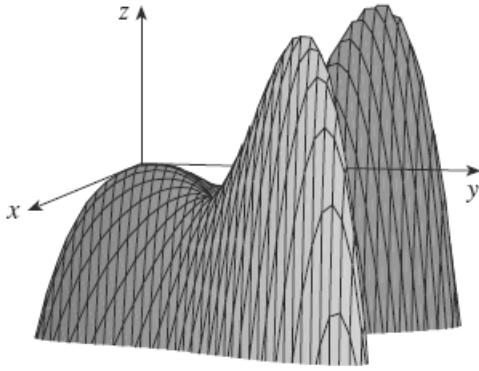
$$4 \quad 2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$5 \quad 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

$x=0, y=0$ bir cozumdur. Diger cozumler ancak bilgisayar yardimiyla bulunabilir. Diger kokler $(x=-2.64, y=1.9), (x=2.64, y=1.9), (x=-0.86, y=0.65), (x=0.86, y=0.65)$

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

Critical point	Value of f	f_{xx}	D	Conclusion
$(0, 0)$	0.00	-10.00	80.00	local maximum
$(\pm 2.64, 1.90)$	8.50	-55.93	2488.71	local maximum
$(\pm 0.86, 0.65)$	-1.48	-5.87	-187.64	saddle point



ÖRNEK

$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 6x = 0 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 - 6y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x(x+2) &= 0 \\ 3y(y-2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \vee x = -2 \\ y &= 0 \vee y = 2 \end{aligned}$$

bulunur. O halde kritik noktalar $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 0)$, $D(-2, 2)$ noktalarıdır.

$f_{xx} = 6x + 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y - 6$ olduğundan $A(0, 0)$ noktasında

$$f_{xx}(0, 0) = 6, \quad f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = -6$$

olacağından

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6 \cdot (-6) - 0 = -36 < 0$$

dır. O halde $A(0, 0)$ bir eyer noktasıdır.

$B(0, 2)$ noktasında

$$f_{xx} = 6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6$$

olacağından

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6 \cdot 6 - 0 = 36 > 0 \quad \text{ve} \quad f_{xx} = 6 > 0$$

dır. O halde $B(0, 2)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır. Yerel minimum değeri

$$f_{min} = f(0, 2) = 8 - 12 - 8 = -12$$

olur.

$C(-2, 0)$ noktasında

$$f_{xx} = -6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -6$$

olacağından

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-6)(-6) - 0 = 36 > 0 \quad \text{ve} \quad f_{xx} = -6 < 0$$

dır. Bu $C(-2, 0)$ noktasının bir yerel maksimum noktası olduğunu gösterir. Yerel maksimum değeri

$$f_{maks.} = f(-2, 0) = -8 + 12 - 8 = -4 \quad \text{olur.}$$

$D(-2, 2)$ noktasında

$$f_{xx} = -6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6$$

olacağından

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0$$

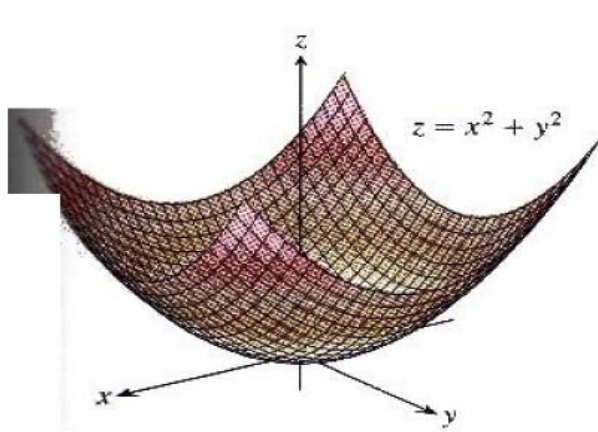
bulunur. Bu $D(-2, 2)$ noktasının bir eyer noktası olduğunu gösterir.

$f(x, y) = x^2 + y^2$ 'nin yerel ekstremum değerlerini bulun.

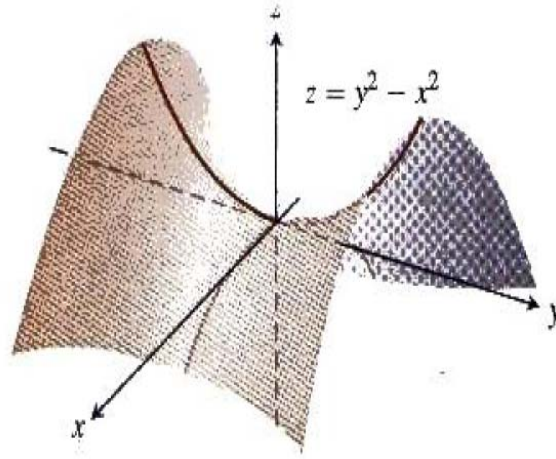
Çözüm f 'nin tanım kümesi bütün düzlemdir (yani sınır noktası yoktur) ve $f_x = 2x$ ile $f_y = 2y$ kısmi türevleri her yerde tanımlıdır. Dolayısıyla, yerel ekstremum değerler sadece

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{ve} \quad f_y = 2y = 0$$

olan yerlerde bulunabilir. Tek olasılık f 'nin değerinin sıfır olduğu orijindir. f asla negatif olmadığı için, orijinin bir yerel minimum verdiğini görürüz (Şekil 14.41). ■



ŞEKİL 14.41 $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği $z = x^2 + y^2$ paraboloididir. Fonksiyonun orijinde, değeri 0 olan bir yerel minimumu vardır (Örnek 1).



ŞEKİL 14.42 Orijin, $f(x, y) = y^2 - x^2$ fonksiyonunun bir eyer noktasıdır. Yerel ekstremum değerler yoktur (Örnek 2).

p342)t1029

$f(x, y) = y^2 - x^2$ ekstremum değerlerini (varsa) bulun.

Çözüm f 'nin tanım kümesi bütün düzlemdir (yani sınır noktası yoktur) ve $f_x = -2x$ ile $f_y = 2y$ kısmi türevleri her yerde tanımlıdır. Dolayısıyla, yerel ekstremum değerler sadece orijinde, $(0, 0)$ 'da bulunabilir. Ancak, pozitif x -ekseni boyunca f 'nin değeri $f(x, 0) = -x^2 < 0$ 'dır; pozitif y -ekseni boyunca f 'nin değeri $f(0, y) = 2y > 0$ 'dır. Dolayısıyla xy -düzleminde merkezi $(0, 0)$ 'da olan her açık daire, hem fonksiyonun pozitif olduğu noktalar ve hem de fonksiyonun negatif olduğu noktalar içerir. Fonksiyonun orijinde bir yerel ekstremum değeri yerine bir eyer noktası vardır (Şekil 14.42). Fonksiyonun hiç yerel ekstremum değerinin olmadığı sonucuna varırız. ■

TEOREM 7.9

$z = f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

olsun.

- 1) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$ ise (a, b) eyer noktasıdır.
- 2) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ ve $f_{xx}(a, b) > 0$ ise (a, b) noktası yerel minimum noktasıdır.
- 3) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ ve $f_{xx}(a, b) < 0$ ise (a, b) noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

ornek balci 117

TEOREM 11 Yerel Ekstrem Değerler İçin İkinci Türev Testi

(a, b) merkezli bir dairede $f(x, y)$ ile birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli olduklarını ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

- i. (a, b) 'de $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, f 'nin (a, b) 'de bir **yerel maksimumu** vardır.
- ii. (a, b) 'de $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, f 'nin (a, b) 'de bir **yerel minimumu** vardır.
- iii. (a, b) 'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ise, f 'nin (a, b) 'de bir **eyer noktası** vardır.
- iv. (a, b) 'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ise, **test sonuçsuzdur**. Bu durumda, f 'nin (a, b) 'deki davranışını belirlemek için başka bir yol bulmak gerekir.

ÖRNEK 3 Yerel Ekstremum Değerler Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonun yerel ekstremum değerlerini bulun.

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

Çözüm Fonksiyon her x ve y için tanımlı ve türetililebilirdir ve tanım kümesinin sınır noktası yoktur. Dolayısıyla fonksiyonun sadece f_x ile f_y 'nin aynı anda sıfır oldukları yerde ekstremum değerleri vardır. Bu

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

veya

$$x = y = -2$$

verir. Dolayısıyla, $(-2, -2)$ noktası f 'nin bir ekstremum değeri alabileceği tek noktadır. Bir ekstremum değeri var olup olmadığını anlamak için,

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1$$

kısmi türevlerini hesaplarız. f 'nin $(a, b) = (-2, -2)$ 'deki diskriminantını

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

olarak buluruz.

$$f_{xx} < 0 \quad \text{ve} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

birleşimi bize f 'nin $(-2, -2)$ 'de bir yerel maksimum değerinin var olduğunu söyler. f 'nin bu noktadaki değeri $f(-2, -2) = 8$ 'dir. ■

ÖRNEK 4 Yerel Ekstremum Değerleri Aramak

$f(x, y) = xy$ 'nin yerel ekstrem değerlerini bulun.

ÇÖZÜM f her yerde türetilebilir olduğundan (Şekil 14.43), ekstremum değerleri sadece

$$f_x = y = 0 \quad \text{ve} \quad f_y = x = 0$$

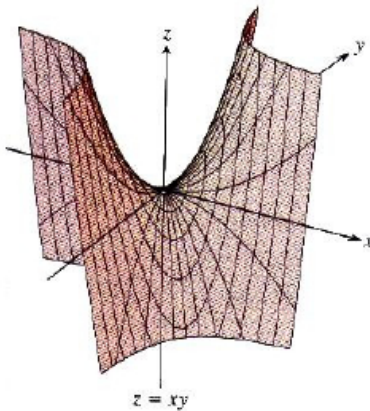
olan noktalarda olabilir. Yani, orijin f 'nin bir ekstrem değerinin olabileceği tek noktadır. Burada ne olduğunu görmek için,

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 1$$

kısmi türevlerini hesaplarız.

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

negatiftir. Dolayısıyla, $(0, 0)$ 'da fonksiyonun bir eyer noktası vardır. $f(x, y) = xy$ 'nin yerel ekstrem değerleri bulunmadığı sonucuna varırız. ■



ŞEKİL 14.43 $z = xy$ yüzeyinin orijinde bir eyer noktası vardır (Örnek 4).

P346)ORNEK

$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 3x^2 + 6x = 0 \\ f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x(x+2) = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \vee x=-2 \\ y=0 \vee y=2 \end{array}$$

bulunur. O halde kritik noktalar $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 0)$, $D(-2, 2)$ noktalarıdır.

$f_{xx} = 6x + 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y - 6$ olduğundan $A(0, 0)$ noktasında

$$f_{xx}(0, 0) = 6, \quad f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = -6$$

117

olacağından

$$f_{min} = f(0, 2) = 8 - 12 - 8 = -12$$

$C(-2, 0)$ noktasında

$$f_{xx} = -6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -6$$

olacağından

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-6)(-6) - 0 = 36 > 0 \text{ ve } f_{xx} = -6 < 0$$

dır. Bu $C(-2, 0)$ noktasının bir yerel maksimum noktası olduğunu gösterir. Yerel maksimum değeri

$$f_{maks.} = f(-2, 0) = -8 + 12 - 8 = -4 \text{ olur.}$$

$D(-2, 2)$ noktasında

$$f_{xx} = -6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0$$

$D(-2, 2)$ noktasının bir eyer noktası olduğunu gösterir.

Kapalı Sınırlı Bölgelerde Mutlak Maksimum ve Minimumlar

Kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını aramayı üç adımda düzenleriz.

1. R 'de, f 'nin yerel maksimum veya minimumlarının bulunabileceği iç noktaları listeyin ve bu noktalarda f 'yi hesaplayın. Bunlar f 'nin kritik noktalarıdır.
2. R 'de, f 'nin yerel maksimum veya minimumlarının bulunduğu sınır noktalarını listeyin ve bu noktalarda f 'yi hesaplayın. Bunun nasıl yapılacağını kısaca göstereceğiz.
3. Listelerden f 'nin maksimum ve minimum değerlerini bulun. Bunlar f 'nin R üzerindeki mutlak maksimum ve minimum değerleridir. Mutlak maksimum ve minimumlar aynı zamanda yerel maksimum ve minimumlar olduğu için, f 'nin mutlak minimum ve maksimum değerleri Adım 1 ve 2'de yapılan listelerde bulunmalıdır.

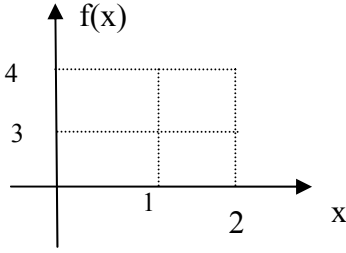
Baska bir tarif şekli

- (1) Bölgenin içindeki kritik noktalar bulunur. Bu noktalardaki fonksiyon değerleri hesaplanır.
- (2) B bölgesinin C sınır eğrisi üzerindeki kritik noktalar bulunur. Bu noktalardaki fonksiyon değerleri hesaplanır.
- (3) 1. ve 2. adımlarda bulunan fonksiyon değerleri karşılaştırılır. Bulunan değerlerin en büyüğü fonksiyonun aldığı en büyük değer (mutlak maksimum), en küçüğü de fonksiyonun aldığı en küçük değer (mutlak minimum) dir.

İki değişkenli fonksiyonun bir aralıkta aldığı maksimum ve minimum değer.

fonksiyon hem x hem de y ye göre değiştiği için maksimum ve minimumları verilen bölge içinde aramalıyız.

347) $z=f(x,y)=y^2-2x^2$ fonksiyonunun $1<x<2$, ve $3<y<4$, aralığında aldığı maksimum ve minimum değerleri bulun.



Sorulan bölge bir dikdörtgendir.

Cevap:

Sınırlar $x=1$ doğrusu, $x=2$ doğrusu, $y=3$ doğrusu, $y=4$ doğrusu.

Eğer dikdörtgen içinde türevi sıfır yapan bir değer yoksa, maksimum yada minimumlar bu sınırlar üzerinde olacaktır.

Sınırlar üzerinde fonksiyonun alacağı maksimum ve minimumları hesaplayalım.

a) $y=3$ doğrusu.

$$f(x,y)=y^2-2x^2=3^2-2x^2=9-2x^2$$

Görüldüğü gibi fonksiyon x nin fonksiyonu haline geldi. $g(x)=9-2x^2$

fonksiyonunun maksimum ve minimumlarını bulmamız lazım.

$$g(x)=9-2x^2 \rightarrow g_x(x)=-4x, \quad -4x=0, \quad x=0$$

$x=0$ noktası $1<x<2$ aralığının dışında. $x=0$ noktasını dikkate almamıza gerek yok.

$y=3$ doğrusu üzerinde sınırlara bakmamız yeterli.

$$g(1)=9-2 \cdot 1^2=7 \rightarrow f(3,1)=7$$

$$g(2)=9-2 \cdot 2^2=1 \rightarrow f(3,2)=1$$

b) $y=4$ doğrusu.

$$f(x,y)=y^2-2x^2=4^2-2x^2=16-2x^2$$

$$g(x)=16-2x^2$$

fonksiyonunun maksimum ve minimumlarını bulmamız lazım.

$$g(x)=16-2x^2 \rightarrow g_x(x)=-4x, \quad -4x=0, \quad x=0$$

$$g(1)=16-2 \cdot 1^2=14 \rightarrow f(4,1)=14$$

$$g(2)=16-2 \cdot 2^2=8 \rightarrow f(4,2)=8$$

c) $x=1$ doğrusu. $x=2$ verelim

$$f(x,y)=y^2-2 \cdot 1^2=y^2-2=h(y)$$

$$h'(y)=0 \rightarrow y_1=0$$

$y=0$, noktası $3<y<4$ un dışında olduğundan dikkate almamıza gerek yok.

$$h(3)=y^2-2=7 \rightarrow f(1,3)=7$$

$$h(4)=14 \rightarrow f(1,4)=14$$

d) $x=2$ doğrusu

benzer sonuçlar elde edilecektir.

x,y	$x=1,$ $y=3$	$x=1,$ $y=4$	$x=2$ $y=3$	$x=2$ $y=4$
$f(x)$	7	14	1	8

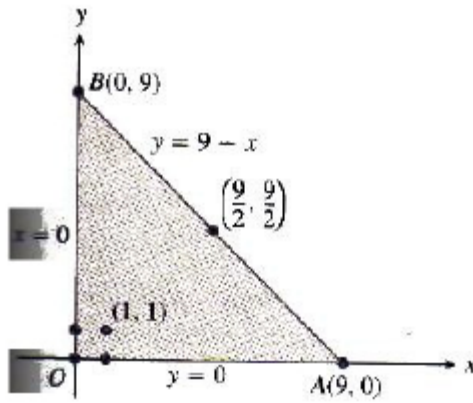
Sonuç minimum $x=2, y=3$ noktasında maksimum $x=1, y=4$ noktasıdır.

ÖRNEK 5 Mutlak Ekstremumlar Bulmak

Birinci dörtte bir bölgede, $x=0$, $y=0$, $y=9-x$ doğruları ile çevrili üçgensel bölgede

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.



Çözüm f diferansiyellenebilir olduğundan, f 'nin bu değerleri alabileceği yegane yerler üçgenin (Şekil 14.44) içinde $f_x = f_y = 0$ olan noktalar ve sınır üzerindeki noktalardır.

(a) **İç noktalar.** Bunlar için,

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0$$

buluruz ve bu da $(x, y) = (1, 1)$ noktasını verir. f 'nin oradaki değeri

$$f(1, 1) = 4$$

(b) **Sınır noktaları.** Her seferinde üçgenin bir kenarını ele alırız:

(i) OA doğru parçası üzerinde, $y = 0$ 'dır.

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

fonksiyonuna artık x 'in $0 \leq x \leq 9$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyonu olarak bakabiliriz. Ekstremum değerleri (Bölüm 4'ten biliyoruz)

$$f(0, 0) = 2 \quad \text{olan } x = 0$$

$$f(9, 0) = 2 + 18 - 81 = -61 \quad \text{olan } x = 9$$

uç noktalarında ve $f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$ olan iç noktalarda olabilir. $f'(x, 0) = 0$ olan tek nokta $x = 1$ 'dir ve burada

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3$$

bulunur.

(ii) OB doğru parçası üzerinde, $x = 0$ 'dır ve

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$$

olur. f 'nin x ve y 'ye göre simetrisinden ve demin yaptığımız analizden bu doğru parçasındaki adayların

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(0, 1) = 3$$

olduğunu biliyoruz.

(iii) AB 'nin uç noktalarında f 'nin değerlerini zaten bulduk, dolayısıyla sadece AB 'nin iç noktalarına bakmamız yeterlidir. $y = 9 - x$ ile,

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -61 + 18x - 2x^2$$

elde ederiz. $f'(x, 9 - x) = 18 - 4x = 0$ almak,

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

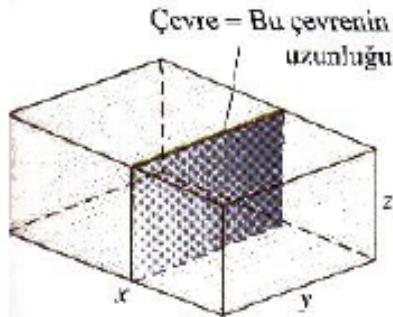
verir. Bu x değerinde,

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{ve} \quad f(x, y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$$

Özet Bütün adayları sıralarız: 4, 2, -61, 3, $-(41/2)$. Maksimum, f 'nin (1, 1)'de aldığı 4 değeridir. Minimum, f 'nin (0, 9) ve (9, 0)'da aldığı -61 değeridir. ■

ÖRNEK 6 Bir Hacim Problemini Bir Kısıt İle Çözmek

Bir kargo şirketi, sadece uzunluğunun ve çevresinin (bir dik-kesitinin çevresi) toplamı 108 inç'i geçmeyen, dikdörtgensel kutuları kabul etmektedir. En büyük hacimli, kabul edilebilir kutunun boyutlarını bulun.



Çözüm x , y ve z dikdörtgensel kutunun sırasıyla uzunluğunu, genişliğini ve yüksekliğini gösterebilir. Çevre $2y + 2z$ 'dir. Kutunun (Şekil 14.45) $V = xyz$ hacmini $x + 2y + 2z = 108$

(kargo şirketinin kabul ettiği en büyük kutu) bağıntısı ile maksimize etmek istiyoruz. Böylece, kutunun hacmini iki değişkenli bir fonksiyon olarak yazabiliriz.

$$x + 2y + 2z = 108 \implies x = 108 - 2y - 2z$$

$$V = xyz = xy(108 - 2y - 2z)$$

$$V(y, z) = (108 - 2y - 2z)yz$$

$$= 108yz - 2y^2z - 2yz^2$$

$$V = xyz \text{ ve}$$

$$x = 108 - 2y - 2z$$

Birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlemek,

$$V_y(y, z) = 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0$$

$$V_z(y, z) = 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0,$$

(0, 0), (0, 54), (54, 0) ve (18, 18) kritik noktalarını verir. (0, 0), (0, 54) ve (54, 0) da hacim sıfırdır ve maksimum değildir. (18, 18) noktasında İkinci Türev Testini (Teorem 11) uygulayız:

$$V_{yy} = -4z, \quad V_{zz} = -4y, \quad V_{yz} = 108 - 4y - 4z$$

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2$$

buluruz. Böylece

$$V_{yy}(18, 18) = -4(18) < 0$$

ve

$$[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2]_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

olması (18, 18)'in maksimum değeri vermesini gerektirir. Paketin boyutları, $x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$ inç, $y = 18$ inç ve $z = 18$ inç. Maksimum hacim $V = (36)(18)(18) = 11,664$ inç³ veya 6.75 ft³'dir.