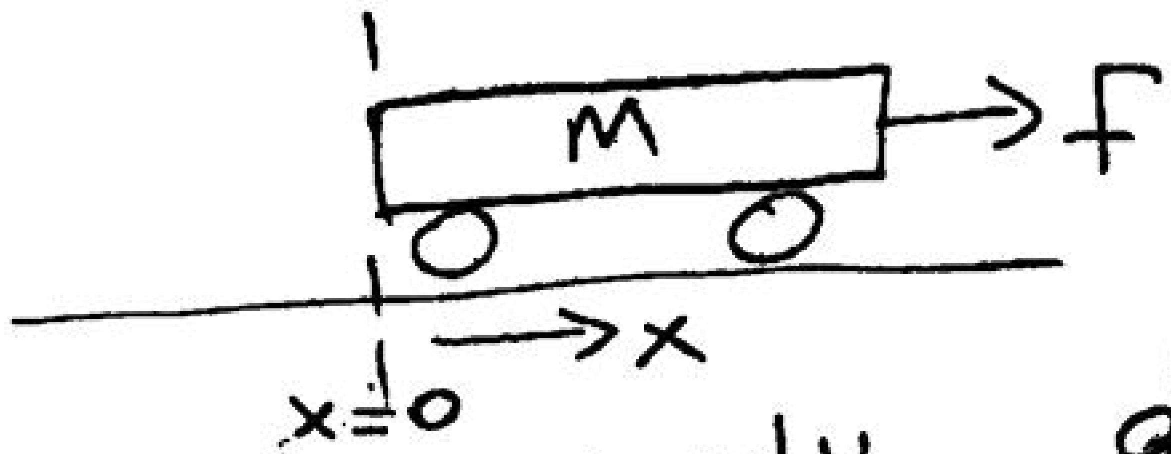
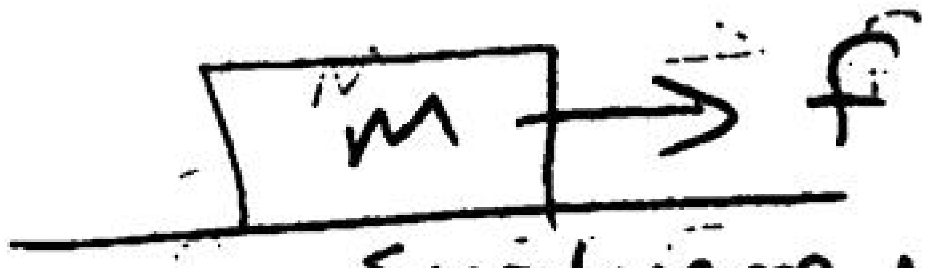
Dif denklemler



$$f = m.a = m.\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

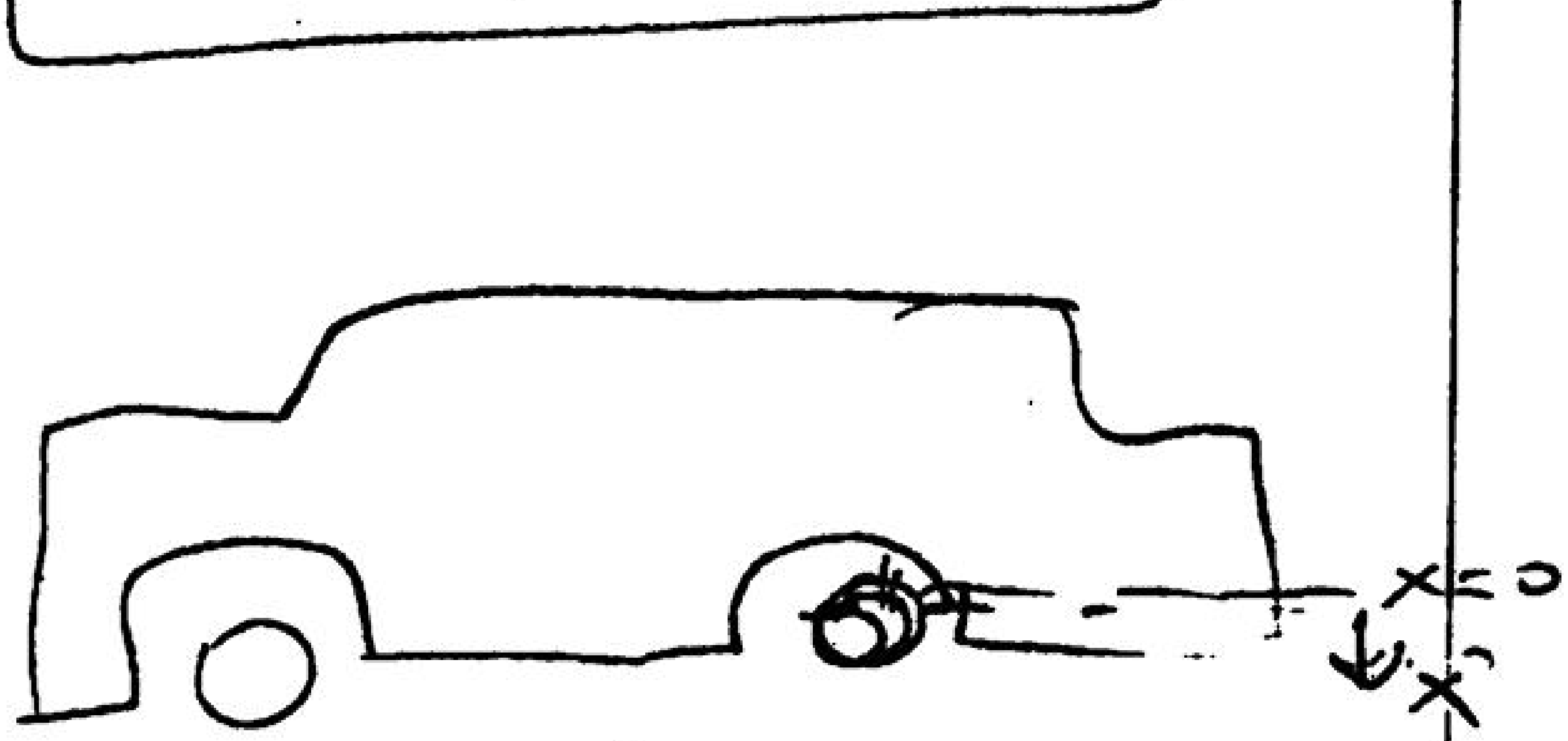
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = f}$$



Surtunme var

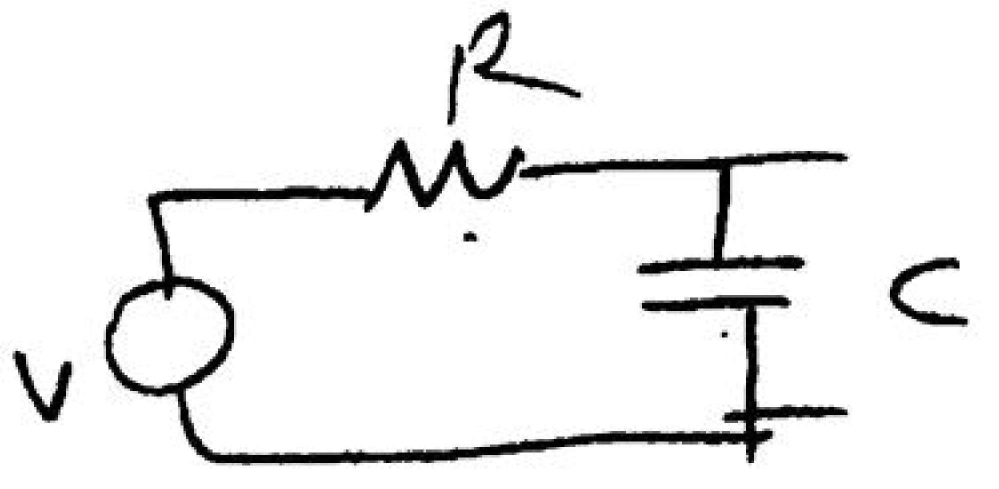
$$f = ma + c.V$$

$$\boxed{f = m\frac{d^2x}{dx^2} + c\frac{dx}{dt}}$$



$$f = m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx$$

elastiklik katsayısı



$$-V + RI + V_c = 0$$

$$\boxed{-V + RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = 0}$$

Genel matematik derslerinden $y = f(x)$ biçimindeki bir fonksiyonun x değişkenine göre türevinin

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{1.1}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. (1.1) ifadesi de x değişkeninin bir fonksiyonudur ve türev alma kuralıyla kolayca bulunur. Örneğin,

$$y = e^{x^2}$$

şeklindeyse

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

olur. Diferensiyel denklemler dersinin konusu genel olarak $dy/dx = 2xy$ şeklinde verilen denklemi sağlayan $y = f(x)$ fonksiyonunu bulmaktır.

Tanım 1.1. *İçinde türev veya diferensiyeller bulunan ifadelere diferensiyel denklem denir.*

Diferensiyel denklemler tip, mertebe ve lineerliğe göre sınıflandırılırlar.

1.1 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Birçok mühendislik, fizik ve sosyal kökenli problemler, onlara karşı gelen matematik probleme getirildiğinde, bu problemler bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren bir denklemi sağlayan fonksiyonun bulunmasına dönüşür. Bu mantıkla oluşturulmuş denkleme **diferansiyel denklem** denir.

ÖRNEK $F = m.a$ Newton kuralına karşı gelen diferansiyel denklem

$$m.\frac{d^2u}{dt^2} = F[t, u, \frac{du}{dt}] \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada F kuvvet, m kütle ve $u(t)$ m kütleli bir parçacığın konumunu veren fonksiyondur.

ÖRNEK $F = m.g - \gamma v$ veya

$$m.\frac{dv}{dt} = m.g - \gamma v \tag{1.2}$$

diferansiyel denklemi, deniz sevyesine yakın bir seviyede atmosferde düşen bir cismin hareketinin matematik modelini temsil eden bir denklemdir. Bu modelde m, g ve γ birer sabittir.

ÖRNEK Deprem dalgalarını temsil eden matematik modele karşı gelen diferansiyel denklem

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 u = \omega^2 \cos \omega t \tag{1.3}$$

şeklindedir. Yukarıdaki (1.3) denkleminde t zaman, ω periyot ve c sabit olmak üzere $u(t)$ aranan fonksiyondur.

Bu örneklere benzer şekilde zamana bağlı olarak, doğada hareket eden (konum değiştiren), hacim değiştiren, nüfusu artan veya azalan canlı türlerinin araştırılması v.b problemlere uygun, koşulları iyi konulmuş matematik modeller bulunduğunda onlara karşı gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması problemleri, binlerce bilim adamının çalışma alanını oluşturmaktadır.

Diferansiyel denklemler bağımsız değişkenden yararlanılarak adi diferansiyel

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

1.1. TANIMI.

Bağımsız değişken x, bağımlı değişken y ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre muhtelif mertebeden türevleri arasındaki ilişkiye **diferansiyel denklem** denir. Genel olarak bu ilişkiyi

$$F(x,y,y',y'',y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

formunda ifade edebiliriz.
Örneğin,

1) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 7,$

2) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y - xy - 5 = 0,$

3) $x^2y'' + xy' - 5 = 0$,

4) $(y''')^5 + 2(y'')^2 = \cos x,$

5) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + z$,

6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^3 = x^2 + yz$

birer diferansiyel denklemdir.

Bağımlı değişken, bir tek bağımsız değişkenin fonksiyonu ise diferansiyel denkleme **adî diferansiyel denklem**; birden fazla değişkenin fonksiyonu ise **kısmî türevli diferansiyel denklem** denir.

1), 2), 3) ve 4) adî diferansiyel denklem, 5) ve 6) ise kısmî türevli diferansiyel denklemdir.

1.2. DİFERANSİYEL DENKLEMİN MERTEBESİ.

Diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. 1), 2) ve 5) in mertebesi bir, 3) ve 6) nın mertebesi iki, 4) ün mertebesi ise üçtür.

1.3. DİFERANSİYEL DENKLEMİN DERECESİ.

Diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin derecesine diferansiyel denklemin derecesi denir. 1), 3), 5) in derecesi bir, 2) nin ki iki, 4) ün ki 5, 6) nın ki üçtür.

1.4. DİFERANSİYEL DENKLEM OLUŞTURULMASI .

Diferansiyel denklemler muhtelif kaynaklardan ortaya çıkar. Aşağıda bununla ilgili bazı örnekler verilmiştir.

ÖRNEK 1. $\rho = a(1 - \cos\theta)$ kardiyoid ailesinin diferansiyel denklemini oluşturalım. Burada a bir parametredir.

ÇÖZÜM : Bu tür problemlerde parametre yok edilerek ailenin diferansiyel denklemine ulaşmağa çalışılır.

$$\rho = a(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = a\sin\theta \Rightarrow a = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\rho}{d\theta}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}, \qquad (y')^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

x:bagimsiz degisken,	Adi/ Kısmi	Lineer/Nnlineer	mertebe	derece
$y'+2y=0$	A	L	1	1
$y''+2y'+3y=0$	A	L	2	1
$y'''+2y'+3y=0$	A	L	3	1
$(y')^5+2y=0$	A	N	1	5
$(y'')^5+2y=0$	A	N	2	5
$y'''+2(y')^7+3y=0$	A	N	3	1
$(y''')^2+2(y')^7+3y=0$	A	N	3	2
$(y''')^4+2(y')^7+3y=0$	A	N	3	4
$y'+3y=0$	A	L	1	1
$y'+3y^2=0$	A	N	1	1
$y'+3\ y'y=0$	A	N	1	1
$y'+3\sqrt{y}=0$	A	N	1	1
$y'+3\sin(y)=0$	A	N	1	1
$y'+3e^y=0$	A	N	1	1
$y''+2y'+3\sqrt{y}=0$	A	N	2	1
$y''+2\sqrt{y'}+3y=0$	A	N	2	1
$y''+2\sqrt{y'}+3y=0$	A	N	2	1
$y''+2yy'+3y=0$	A	N	2	1
$y''+\sin(y')+3y=0$	A	N	2	1
$y''+x^3y'+3y=0$	A	L	2	1
$y''+x^7y'+3x^2y=0$	A	L	2	1
$y''+x^7y'+3\sin(x)y=0$	A	L	2	1
$y''+e^x y'+3\sin(x)y=0$	A	L	2	1
$y'''+e^x y''+3\sin(x)\,y'+x^4y=0$	A	L	2	1

4) $13\frac{d^2x}{dt^2} + e^t\frac{dx}{dt} + t^2x = 0$ Degisken katsayılı lineer

5) $f_n(t)\frac{d^nx}{dt^n} + f_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots f_1(t)\frac{dx}{dt} + f_0(t)x = 0$

değişken katsayılı lineer.

$f_n(t), f_{n-1}(t)\ldots\ldots f_1(t), f_0(t)$ t ye bağlı fonksiyonlar

6) $a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0$

sabit katsayılı lineer.

$a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_1, a_0$ sabit sayılar.

7) $\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$ Nonlineer

8) $x\frac{dx}{dt} + x = 0$ Nonlineer

9) $x\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$ Nonlineer

10) $\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0$ Nonlineer.

11) $(\frac{dx}{dt})^2 + x = 0$ Nonlineer

12) $(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + \frac{dx}{dt} + 2x = 0$ Nonlineer

13) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = \sin((t)$ Lineer ikinci taraflı.

dif denklemin çözüm

161) $y'' + 25x = 0$

dif denkleminin çözümünü $y = \sin 5y$ olduğunu gösterin.

Cevap:

$y = \sin 5x$ çözüm ise denklemde yerine koyarsak denklemi sağlaması gerekir.

X $\quad y = \sin 5x$

$y' = 5 \cdot \cos 5x$

$y'' = -25 \sin 5x$

$y'' + 25x = 0$

$-25 \sin 5x + 25 \sin 5x = 0$

$0 = 0$

162

$y'' + 25y = 0$ diff denkleminin çözümü $y = e^{5x}$ olduğunu gösterin

Cevap

$y = e^{5x}$

$y'' = 5 \cdot e^{5x}$

$y'' = 25 e^{5x}$

$y'' - 25y = 0$

$\overbrace{25 e^{5x}}^{y''} - \overbrace{25 e^{5x}}^{y} = 0$

$0 = 0$

o halde $y = e^{5x}$ $y'' - 25y = 0$ diff denklemin bir çözümü

$y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}$,

Lineer Bagimsiz cozum.

$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$, denkleminin bir cozumu $y=5e^{2x}$ dir.

gercekten

$y=5e^{2x} \rightarrow y' = 5\ 2\ e^{2x} = 10\ e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$,

$10\ e^{2x} - 2\ 5\ e^{2x} = 0$

$10\ e^{2x} - 10\ e^{2x} = 0$

$0=0$

------------------ --------------

$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$, denkleminin bir cozumu $y=17\ e^{2x}$ dir.

gercekten

$y=17e^{2x} \rightarrow y' = 34\ e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$,

$34\ e^{2x} - 2\ \ 17\ e^{2x} = 0$

$34\ e^{2x} - 34\ e^{2x} = 0$

$0=0$

--------------------- ---------------------

$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$, denkleminin cozumleri

$y_1 = 5\ e^{2x}$, $y_2 = 17\ e^{2x}$.

Burada $y_2 = \frac{17}{5} y_1$ yani y_1 ri bir sayi ile carparsak y_2 yi elde ediyoruz.

y_1 ve y_2 kendi aralarinda **liner bagimlidir** denir. Aslinda

$y=C\ e^{2x}$

C ne olursa olsun bu bir cozumdur.

$y_1=2e^{2x}$, $y_2=3e^{2x}$. $y_3=5e^{2x}$, $y_4=17e^{2x}$.......

Bu cozumlerin hepsi aslinda **tek bagimsiz cozumdur**.

Bir cozumu bir sayi ile carparak elde edecegimiz yeni cozumlerin hepsi birbirine lineer bagimlidir.

------------------ --------------------------

$\frac{d^2y}{dx^2} - 25y = 0$, denkleminin cozumleri

$y_1 = C_1\ e^{5x}$, $y_2 = C_2\ e^{-5x}$

Gercekten dif denklemde y yerine $C_1\ e^{5x}$ koyalim.

$\left(C_1 e^{5x}\right)'' - 25C_1 e^{5x} = 0$

$\left(C_1 5e^{5x}\right)' - 25C_1 e^{5x} = 0$

$\left(C_1 25e^{5x}\right) - 25C_1 e^{5x} = 0$

$0=0$

Yani $C_1\ e^{5x}$ dif denklemi saglar dolayisiyla $C_1\ e^{5x}$ dif denklemin bir cozumudur.

Simdi de dif denklemde y yerine $C_2\ e^{-5x}$ koyalim.

$\left(C_2 e^{-5x}\right)'' - 25C_2 e^{-5x} = 0$

$\left(-C_2 5e^{-5x}\right)' - 25C_2 e^{-5x} = 0$

$\left(C_2 25e^{-5x}\right) - 25C_1 e^{-5x} = 0$

$0=0$

Yani diff denklemin iki cozumu vardir.

$y_1 = C_1\ e^{5x}$, $y_2 = C_2\ e^{-5x}$

Simdi y_1 ri bir sayi ile carpip y_2 yi elde edemeyiz.

Burada $y_1 = \alpha\ y_2$ olacak sekilde bir α sayisi yoktur.

$C_1\ e^{5x} = \alpha\ C_2\ e^{-5x}$

esitligini saglayan **sabit** bir sayi bulunamaz.

Dolayisiyla y_1 ve y_2 **lineer bagimsizdir.**

-------------- ---------------------- ------------

Örnek. 1.1.

$$y = xe^x$$

fonksiyonu, tüm reel eksende

$$y'' - 2y' + y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. Çünkü tüm $x \in R$ için $y' = xe^x + e^x$ ve $y'' = xe^x + 2e^x$ biçiminde olduklarından.

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

bulunur.

Tanım 1.3. *Bir diferensiyel denklemin çözümü $y = f(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa. buna açık çözüm. $F(x, y) = 0$ şeklinde yazılabiliyorsa buna da kapalı çözüm denir.*

Örnek. 1.2. $c \in R$ olmak üzere $x^2 + y^2 - c = 0$ bağıntısı

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

diferensiyel denkleminin kapalı çözümüdür. Çünkü $x^2 + y^2 - c = 0$ bağıntısının kapalı türevinden.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(c) = 0$$

veya

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

bulunur. Bu ifade her $c \in R$ için doğru olduğundan. bir diferensiyel denklemin birden çok veya sonsuz tane çözümü bulunur.

Örnek. 1.3. Herhangi bir $c \in R$ için

$$y = \frac{c}{x} + 1$$

fonksiyonu $(0, \infty)$ açık aralığında

$$x\frac{dy}{dx} + y = 1$$

diferensiyel denkleminin açık çözümüdür.

Tanım 1.4. (Genel Çözüm):

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.5}$$

diferensiyel denklemi verilmiş olsun. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere,*

$$F(x, y, c_1, \ldots, c_n) \tag{1.6}$$

bağıntısıyla tanımlanan n parametreli bir fonksiyon ailesi göz önüne alalım. Eğer bu ailedeki her fonksiyon (1.5) denkleminin bir çözümü ise, bu fonksiyon kümesine (1.5) denkleminin ***genel çözümü*** *denir.*

Genel çözümde denklemin mertebe sayısı kadar keyfi lineer bağımsız sabit vardır.

Tanım 1.5. (Özel Çözüm): *Keyfi sabitlere özel değerler verilerek genel çözümden elde edilen çözümlere* ***özel çözüm*** *denir.*

Tanım 1.6. (Singüler (Tekil) Çözüm): *Keyfi sabitlere özel değerler verilerek genel çözümden elde edilemeyen fakat verilen diferensiyel denklemi sağlayan çözümler de vardır, bu tür çözümlere* ***Singüler (tekil) çözüm*** *denir.*

Örnek. 1.4.

$$y' = 2x$$

denkleminin genel çözümünü bularak bazı özel çözümlerini yazınız.

Çözüm. $y' = dy/dx$ olduğundan verilen denklem $dy = 2xdx$ şeklinde yazıldıktan sonra her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int dy = \int 2xdx + c \Longrightarrow y = x^2 + c$$

genel çözümü bulunur.

Görüldüğü gibi genel çözüm bir parabol denklemi olup c değiştikçe parabolün grafiği de birbirine paralel olarak yer değiştirir. $c = 0$ ve $c = \pm 1$

için özel çözümler $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ ve $y = x^2 - 1$ şeklindedir. Bunların grafikleri aşağıdaki şekil.1 de gösterilmiştir.

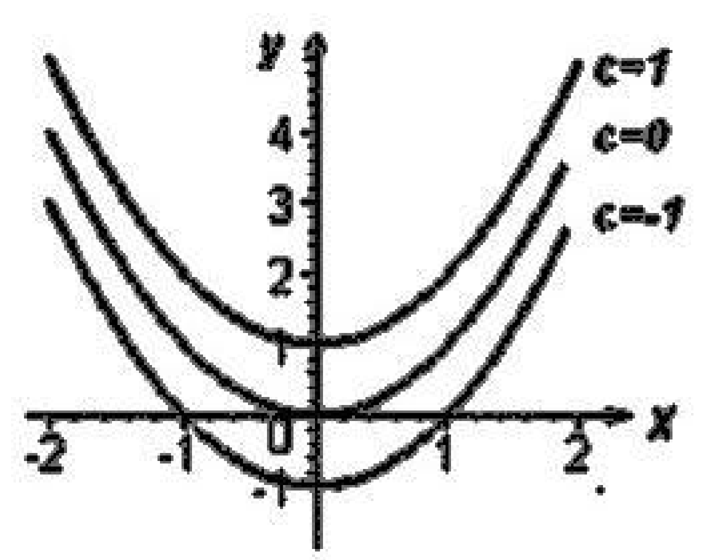
Uygulamalı bilimlerde genellikle bir diferensiyel denklemin genel çözümü yerine onun bazı yan koşulları sağlayan özel çözümünün bulunması istenir. Örneğin,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.7}$$

şeklinde verilen bir diferensiyel denklem için bu yan koşullar:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{1.8}$$

şeklinde verilir. İşte (1.7) denkleminin (1.8) yan koşullarını sağlayan çözümünü bulma problemine **başlangıç değer problemi** denir. Yukarıda görüldüğü gibi n. mertebeden bir diferensiyel denklem için n tane yan koşul verilmiştir. (1.8) ile verilen bu yan koşullara **başlangıç koşulları** denir.



Şekil 1.1: $y' = 2x$ diferensiyel denkleminin bazı integral eğrileri

Örnek. 1.5.

$$y' = 2x, y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklemin $dy/dx = 2x \Longrightarrow dy = 2xdx$ şeklinde yazılır ve her iki yanın integrali alınırsa,

$$y = x^2 + c$$

şeklinde genel çözüm bulunur. Genel çözümde $x = 0$, $y = 1$ yazılırsa, $c = 1$ bulunur. Bulunan bu $c = 1$ değeri genel çözümde yerine yazılırsa,

$$y = x^2 + 1$$

şeklinde istenen (özel) çözüm bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin hangi mertebe ve dereceden olduklarını belirtiniz ve lineer olup olmadığını araştırınız.

   (a) $y' - x^2y = 0$

   (b) $(y')^2 + 2xy - 1 = 0$

   (c) $y'' - 3x(y')^2 + y = 0$

   (d) $(y'')^3 + 2(y')^5 + 4y - 8 = 0$

   (e) $yy' - 3xy + x^2 = 0$

   (f) $xy''' - 5y'' + 8xy = 0$

2. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında verilen diferensiyel denklemlerin çözümü olup olmadığını gösteriniz.

   (a) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$, $\quad y'' - 9y = 0$

   (b) $y = cx^2$, $\quad xy' - 2y = 0$

   (c) $y = cos2x$, $\quad y'' + 4y = 0$

3. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulunuz.

   (a) $y'' - e^x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (b) $y' = 3x^2$

   (c) $y' - 1/x = 0$, $y(1) = 1$

   (d) $y''' - e^{3x} = 0$

   (e) $y'' - sin2x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/2$

1.4 Diferensiyel Denklemlerin Elde Edilişi

Bir tek parametreye bağlı

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1.9}$$

Diferansiyel Denklemlerin Cozumleri Uzerine Aciklamalar:

1) En basit cozum teknigi degiskenlerine ayirma teknigidir. Verilen bir denklem

$$f(y)dy = f(x)dx$$

haline getirilebilirse ,

$$\int f(y)dy = \int f(x)dx$$

seklinde integrali aliniabilir hale gelir ve dif denklem cozme islemi integral alma islemine donusmus olur.

Ancak bazan cok basit gorunen bir denklem bile degiskenelerine ayrilamayabilir. mesela

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2$$

seklindeki bir dif denklem degiskenlerine ayrilabilir duruma getirilemez. Bu denklem degiskenlerine ayrilarak cozulemez.

2)Her dif denklemin mutlaka cozumu varmidir? Basit gorunen bir diff denklemin cozumu bulunamayabilir.

$\frac{dy}{dx} = \cos x^2$ dif denkleminin analitik bir cozumu yoktur.

3)Her dif denkleme uyan “**genel bir cozum teknigi”** yoktur. Bu nedenle dif denklemler guruplandirilir ve her gurup icin ayri bir teknik uygulanir.

Cozum teknigine gore diff denklemlerin siniflandirilmasi.

1)Degiskenlerine ayrilabilen diff denklemler .

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy\, g(y) = dx\, \mathrm{q(x)}$$

sekline getirilebilen denklemler. Eger bu hale getirilirse her iki tarafin integrali alinir ve problem cozulur.

2)Homojen denklemler: Bu diff denklemler y=ux seklinde degisken donusumu ile $dy\, g(y) = dx\, \mathrm{q(x)}$ haline getirilen denklemlerdir.

Cozum teknigi

1)y=ux → dy=x du+u dx veya $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

donusumu yapilir.

2)denklem x, ve u ya bagli olarak

$$p(u)du = q(x)dx$$

haline getirilir, ve cozulur.

3)cozum sonucu u=f(x) elde edilmistir. u=y/x konulur ve y=g(x) elde edilr.

3)Homojen hale getirilen denklemler. Denklemde (a ve b sabit sayilar olmak uzere) x=a+t, y=b+z seklinde donusum yapilirsa homojen hale gelen denklemlerdir.

Cozum teknigi:

1)Donusum yapilir ,

2)z ve t ye bagli olarak denklem homojen hale gelmistir. Homojen denklemlerin cozum teknigi kullanilarak cozum bulunur.

3)t=x-a, z=y-b donusumu ile gercek cozum bulunur.

4)Tam diff denklemler.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy=0$$

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ sartini saglayan diff denkleme tam diff denklem denir.

Eger diff denklem tam diff ise *U(x,y)=C* seklinde bir cozum kesin vardir. ve bu cozum

$U(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y)$ seklinde olacaktir.

$U_y=N$, olacagindan

$$\frac{d}{dy}\left(\int M(x, y)dx + h(y)\right) = N$$

esitliginden *h(y)* hesaplanir. aranan cozum *U(x,y)=C* dir.

5) Tam diff denklem haline getirilebilen diff denklemler

Bazi durumlarda *M(x,y)dx + N(x,y)dy=0* dif denklemi tam dif sartini saglamaz fakat diff denklem esitliginin her iki tarafi bir μ(x,y)fonksiyonu ile carpinca denklem tam diff olur.

μ(x,y) *M(x,y)dx* + μ(x,y) *N(x,y)dy=0*

Her denklem icin bir μ(x,y) bulunmayabilir. Yani bazi dif denklemler hic bir zaman tam dif haline getirilemez.

6)Lineer denklemler.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ seklindeki diff denklemler birinci mertebeden lineer diff denklemlerdir. Bu denklemin cozumu

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c\right]$$

seklinde oldugu isbat edilir.

6.a)Bernoelli denklemi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

seklindeki denklemlerdir

$v=y^{1-n}$ donusumu yapilarak denklem lineer hale getirilir ve cozulur.

6.b)Riccati Denklemi

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

seklindeki denklemlerdir. Genel cozumun bulunabilmesi icin bir ozel cozumun bilinmesi gerekir.
Bir cozum y_1 ise

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

degisken donusumu yapilir ve denklem

$$u' + [Q(x) + 2y_1 R(x)]u = -R(x)$$

haline getirilir. Bu da lineer diff denklemdir ve cozulur.

7)Yuksek Mertebeden Lineer denklemler
Lineer bagimsizlik kosulu

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = B(x)$

veya

$$\mathrm{a}_0(\mathrm{x})\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{a}_1(\mathrm{x})\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{a}_{n-1}(\mathrm{x})\frac{dy}{dx} + \mathrm{a}_n(\mathrm{x}) = \mathrm{B}(\mathrm{x})$$

seklinde yazilirlar.

8) Sabit katsayili dif denklemlerin cozumleri
Muhendislikte en cok kullanilan sabit katsayili dif denklemlerdir.

9)Sabit katsayili Homojen dif denklemler

$$\mathrm{a}_0\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{a}_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{a}_{n-1}\frac{dy}{dx} + \mathrm{a}_n = 0$$

Cozum:

$$\mathrm{a}_0\lambda^n + \mathrm{a}_1\lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{a}_{n-1}\lambda + \mathrm{a}_n = 0$$

kokler λ_1, λ_2, ... λ_{n-1}, λ_n

$$\mathrm{y}_h(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{x}} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{x}} + \ldots\ldots + \mathrm{C}_n\mathrm{e}^{\lambda_n \mathrm{x}}$$

10) Sabit katsayili ikinci tarafli dif denklemlerin Ozel Cozumleri

$$\mathrm{a}_0\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{a}_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{a}_{n-1}\frac{dy}{dx} + \mathrm{a}_n = \mathrm{B}(\mathrm{x})$$

L(D) Operatoru Yontemi
Belirsiz Katsayilar Metodu
Parametrelerin Degisimi Metodu

11)Laplas Donusumu

12)Diferansiyel Denklem Sistemleri

$$\int dx = x + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int \cos ax\,dx = +\frac{1}{a}\sin ax + c$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c$$

$$\int x^{-5}\,dx = \int \frac{dx}{x^5}$$

$$= \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$= -4\,x^{-4} + c$$

1

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \qquad x^2+1 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c$$

$$= \ln(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad \begin{aligned} x^2+1 &= u \\ 2x\,dx &= du \\ x\,dx &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln u + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

②

Basit dif denklemler

211)

$$\frac{dy}{dx} = 3 \quad , \quad \text{veya } y' = 3$$

$$dy = 3dx$$

$$\int dy = \int 3\, dx$$

$$y + c_1 = 3x + c_2$$

$$y = 3x + c_2 - c_1$$

$$\boxed{y = 3x + c}$$

Kontrol

$$y' = 3$$

212)

$$\frac{dy}{dx} = 3x \quad , \quad (y' = 3x)$$

$$dy = 3x\, dx$$

$$\int dy = \int 3x\, dx$$

$$y + c_1 = 3\frac{x^2}{2} + c_2$$

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x^2 + c}$$

Kontrol

$$y = \frac{3}{2}x^2 + c$$

$$y' = \frac{3}{2} \cdot 2x = \underline{3x}$$

213)

$$\frac{dy}{dx} = \sin 4x$$

$$\int dy = \int \sin 4x\, dx$$

$$y + c_1 = -\frac{1}{4}\cos 4x + c_2$$

$$y = -\frac{1}{4}\cos 4x + c$$

Kontrol

$$y' = -\frac{1}{4}(-4\sin 4x)$$

$$= \sin 4x$$

Not:

$$(\sin ax)' = a\cos ax$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$$

$$(\cos ax)' = -a \cdot \sin ax$$

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

214)

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$e^{\ln y} = e^{x+c}$$

$$\downarrow$$

$$y = e^x \cdot e^c$$

$$\boxed{y = c \cdot e^x}$$

integral sabitine e^c veya c demenin bir farkı yoktur.

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad y(1) = 3$$

şartını sağlayan çözümü bulun.

Çözüm

$$y = e^x \cdot e^c$$

$x=1$ için $y=3$.

$$3 = e^1 \cdot e^c$$

$$e^c = \frac{3}{e^1} = \frac{3}{2.7183} = 1.1036$$

$$e^c = 1.1036$$

$$\ln e^c = \ln(1.1036)$$

$$c = \ln(1.1036)$$

$$= 0.0956$$

$$y = e^x \cdot e^c = e^x \cdot e^{0.0956}$$

$$= e^x \cdot 1.1036$$

$$\boxed{y = 1.1036\, e^x}$$

Çözüm

$$y = c \cdot e^x$$

$x=1$ için $y=3$

$$3 = c \cdot e^1 \Rightarrow c = \frac{3}{e} = 1.1036$$

$$\boxed{y = 1.1036\, e^x}$$

integral sabitinin c veya e^c olması aynı.

215)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln y = \frac{x^3}{3} + c$$

$$e^{\ln y} = e^{\frac{x^3}{3} + c}$$

$$y = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot e^c$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{x^3/3}}$$

Kontrol

$$y = c \cdot e^{x^3/3}$$

Turevini alalım

$$y' = c \cdot \frac{1}{3} 3x^2 \cdot e^{x^3/3}$$

Not $\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x)\, e^{f(x)}$

$$y' = c\, x^2\, e^{x^3/3}$$

$$= x^2 \underbrace{c \cdot e^{x^3/3}}_{y}$$

$$\underline{y' = x^2 y}$$

diff denklemi sağladı

216)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^3$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^{-3+2}}{-3+2} = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x^3}{3} + c}$$

$$y=\sqrt{\frac{3}{2(x^3+c)}}$$

217)

$$yy''-(y')^2=0$$

Çözüm

$$yy''=(y')^2$$

$$yy''=y'\cdot y'$$

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}$$

iki tarafı integre edelim

Birinci taraf

$$\int\frac{y''}{y'}dy=?$$

$$u=y'$$

$$du=y''\cdot dy$$

$$\int\frac{y''dy}{y'}=\int\frac{du}{u}=\ln u$$

$$=\ln y'+c$$

ikinci taraf

$$\int\frac{y'}{y}dy$$

$$u=y$$

$$du=y'\cdot dy$$

$$\int\frac{y'}{y}dy=\int\frac{du}{u}=\ln u$$

$$=\ln y+c_2$$

sonuç

$$\ln y'=\ln y+c$$

$$e^{\ln y'}=e^{\ln y+c}$$

$$y'=e^{\ln y}\cdot \underbrace{e^{c}}_{\tilde{c}}=$$

$$y'=c\cdot e^{\ln y}=c\cdot y$$

$$\frac{dy}{dx}=c\cdot y$$

$$\frac{dy}{y}=c\,dx$$

$$\int=\int$$

$$\ln y=cx+c_2$$

$$y=e^{cx}\cdot e^{c_2}=c_2e^{cx}$$

2.1 Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler

Tanım 2.1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilen denklemlere değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemler denir.

Açıkca görüldüğü gibi (2.1) denklemi

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.2}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer $h(y) = 1$ ise (2.2) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.3}$$

şekline dönüşür. Eğer $y = f(x)$ ise (2.2) denklemi

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \tag{2.4}$$

yazarız. $dy = f'(x)dx$ olduğundan (2.4) ifadesi

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{2.5}$$

şekline dönüşür.(2.5) ifadesinin her iki tarafının integralinin alınmasıyla (2.1) denkleminin genel çözümü elde edilir.

Örnek. 2.1.

$$9yy' + 4x = 0$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferensiyel denklem

$$9ydy = -4xdx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir ve her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + c_1$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c \quad \text{(burada} \quad c = \frac{c_1}{18})$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek. 2.2.

$$y' + 5x^4y^2 = 0, \quad y(0) = 1$$

olan başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem

$$\frac{dy}{y^2} = -5x^4 dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır ve her iki tarafın integrali alınırsa,

$$-\frac{1}{y} = -x^5 + c \quad \text{ve buradan} \quad y = \frac{1}{x^5 - c}$$

genel çözümü elde edilir. Genel çözümde başlangıç koşulu kullanılırsa,

$$y(0) = \frac{1}{-c} = 1, \ c = -1 \ \text{ ve böylece } y = \frac{1}{x^5 + 1}$$

istenen çözüm elde edilir.

Örnek. 2.3.

$$y' = \cos^2 x \cos^2 2y$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 2y$$

şeklinde yazılır ve değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{dy}{\cos^2 2y} = \cos^2 x dx$$

elde edilir. Sağ taraftaki integral,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\end{aligned}$$

şeklinde kolayca hesaplanır. Sol taraftaki integral için $u = 2y$ $(dy = \frac{1}{2}du$ olur) değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int \sec^2 u du &= \frac{1}{2}\tan u \\ &= \frac{1}{2}\tan 2y \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\cos^2 2y} &= \cos^2 x dx \\ \frac{1}{2}\tan 2y &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}\tan 2y &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}c \\ \tan 2y &= x + \sin x\cos x + c \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}\arctan(x + \sin x\cos x + c)$$

genel çözümü elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y' + (x+1)y^3 = 0$
2. $y' = 3(y+1)$
3. $y' + csc(y) = 0$
4. $y' = (1+x)(1+y^2)$
5. $yy' = \frac{1}{2}sin^2 \omega x$ $(\omega \neq 0)$
6. $y' sin2x = ycos2x$
7. $y' - 1 - y^2 = 0$
8. $yy' - x = 0$
9. $y' + y^2 = 1$
10. $y' = x^2y^2 - 2y^2 + x^2 - 2$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin istenen çözümlerini bulunuz.

1. $y' = x^3e^{-y}$, $y(2) = 0$
2. $yy' + x = 0$, $y(0) = -2$
3. $y' = 2e^x y^3$, $y(0) = 0.5$
4. $y' cosh^2 x + sin^2 y = 0$, $y(0) = \frac{1}{4}\pi$

5. $dr/dt = -4tr$, $r(0) = 8.2$ 6. $v(dv/dt) = g = sabit$, $v(t_0) = v_0$

7. $y' = y^2 - 4$, $y(0) = -2$ 8. $ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx$, $y(0) = 1$

9. $y' = \frac{y^2-1}{x^2-1}$, $y(2) = 2$ 10. $y' + 2y = 1$, $y(0) = 5/2$

2.2 Homojen Denklemler

Birinci mertebeden homojen diferensiyel denklem kavramını ve bu denklemin çözüm metodunu incelemeden önce, homojen fonksiyonu tanımlamaya gerek vardır (burada denklemin homojenliği daha önceki verilen homojen denklem tanımından farklıdır).

Tanım 2.2. *Eğer bir f fonksiyonu tanım bölgesindeki keyfi (x, y) ve (tx, ty) için*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{2.6}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonuna n. dereceden homojen fonksiyon denir. Burada, n reel sayıdır.

Örnek. 2.4.

$$f(x, y) = x^2 + 5xy$$

fonksiyonunun homojen olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + 5(tx)(ty) \\ &= t^2x^2 + 5t^2xy \\ &= t^2(x^2 + 5xy) = t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan, bu fonksiyon ikinci dereceden homojendir.

Örnek. 2.5.

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

fonksiyonunun homojen olup olmadığını araştırınız.

$$(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)\,dy = 0$$

$$y = ux, \quad y^2 = u^2x^2, \quad dy = u\,dx + x.\,du.$$

$$(x^2+u^2x^2)\,dx + (x^2 - x\,ux)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$x^2(1+u^2)\,dx + x^2(1-u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

x^2 ye böl

$$(1+u^2)\,dx + (1-u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1+u^2)\,dx + (1-u)u\,dx + (1-u)x\,du = 0$$

$$du[(1-u)x] + dx[(1+u^2) + (1-u)u] = 0$$

$$du[(1-u)x] + dx[1+u^2+u-u^2] = 0$$

$$du[(1-u)x] + dx[1+u] = 0$$

$$du[(1-u)x] = -dx[1+u]$$

$$du\left[\frac{1-u}{1+u}\right] = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-u}{1+u}\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \underline{15} & 3 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 1-u & 1+u \\ \underline{-1-u} & -1 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{1-u}{1+u} = -1 + \frac{2}{1+u}$$

$$\int \left(\frac{1-u}{1+u}\right) = \int \left(-1 + \frac{2}{1+u}\right) du$$

$$= -\int du + 2\int \frac{du}{1+u}$$

$$= -u + 2\ln(1+u)$$

$$\int du \left(\frac{1-u}{1+u}\right) = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\downarrow$$

$$-u + 2\ln(1+u) = -\ln x + C$$

$$\boxed{-\frac{y}{x} + 2\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = -\ln x + C}$$

Homojen dif denklemler (18)

$y=ux \rightarrow y'=u'x+ux'$

$dy=du.x+u.dx$ yazılırsa

denklem çözülebilir hale gelir.

283) $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$

$y=ux \rightarrow y^2=u^2x^2$

$(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$

$(x^2-u^2x^2)dx+(x^2+u^2x^2)(\underbrace{du.x+u.dx}_{dy})=0$

$x^2(1-u^2)dx+x^2(1+u^2)(du.x+u.dx)=0$

eşitliğin her iki tarafını x^2 ye böl

$(1-u^2)dx+(1+u^2)(du\,x+u\,dx)=0$

$(1-u^2)dx+(1+u^2)du.x+(1+u^2)u\,dx=0$

$du[(1+u^2)x]+dx[(1-u^2)+(1+u^2)u]=0$

$du[(1+u^2)x]=-dx[1-u^2+u+u^3]=0$

$$\frac{1+u^2}{1-u^2+u+u^3}du=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1+u^2}{1-u^2+u+u^3}du=\int-\frac{dx}{x}$$

$$(x^2 - y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0 \qquad y = ux$$

$$(x^2 - u^2x^2)\,dx + (x^2 + u x^2)\,dy = 0$$

$$x^2(1 - u^2)\,dx + x^2(1 + u)\,dy = 0$$

eşitliği $x^2(1+u)$ ya bölelim:

$$(1 - u)\,dx + dy = 0$$

$$dy = u\,dx + du \cdot x \quad \text{koy}$$

$$(1 - u)\,dx + u\,dx + du \cdot x = 0$$

$$du\,[x] + dx\,[1 - u + u] = 0$$

$$x\,du + dx = 0$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

$y = ux$ $\boxed{u = -\ln x + c}$

$$\frac{y}{x} = -\ln x + c$$

$$\boxed{y = -x \cdot \ln x + cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$$

$$y' = -[\ln x + x \cdot \tfrac{1}{x} + c]$$

285) — Doğrom. ?9 21

$$x\frac{dy}{dx}=y+x\,e^{y/x}$$

$y=ux \qquad y'=u'x+u(x')$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot\frac{dx}{dx}\rightarrow 1$$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y+x\,e^{y/x} \quad (x\text{e böl})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{y/x}$$

$y=ux \qquad \frac{y}{x}=u \qquad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$$\left(u+x\frac{du}{dx}\right)=u+e^{u}$$

$$x\frac{du}{dx}=e^{u}\rightarrow e^{-u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\int e^{-u}du=\int\frac{dx}{x}\rightarrow \boxed{-e^{-y/x}+c=\ln x}$$

5. $dr/dt = -4tr$, $r(0) = 8.2$ 6. $v(dv/dt) = g = sabit$, $v(t_0) = v_0$

7. $y' = y^2 - 4$, $y(0) = -2$ 8. $ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx$, $y(0) = 1$

9. $y' = \frac{y^2-1}{x^2-1}$, $y(2) = 2$ 10. $y' + 2y = 1$, $y(0) = 5/2$

2.2 Homojen Denklemler

Birinci mertebeden homojen diferensiyel denklem kavramını ve bu denklemin çözüm metodunu incelemeden önce, homojen fonksiyonu tanımlamaya gerek vardır (burada denklemin homojenliği daha önceki verilen homojen denklem tanımından farklıdır).

Tanım 2.2. *Eğer bir f fonksiyonu tanım bölgesindeki keyfi (x, y) ve (tx, ty) için*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{2.6}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonuna n. dereceden homojen fonksiyon denir. Burada, n reel sayıdır.

Örnek. 2.4.

$$f(x, y) = x^2 + 5xy$$

fonksiyonunun homojen olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + 5(tx)(ty) \\ &= t^2x^2 + 5t^2xy \\ &= t^2(x^2 + 5xy) = t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan, bu fonksiyon ikinci dereceden homojendir.

Örnek. 2.5.

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

fonksiyonunun homojen olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \frac{tx-ty}{tx+ty} \\ &= \frac{t(x-y)}{t(x+y)} = t^0 f(x,y) \end{aligned}$$

olduğundan bu fonksiyon sıfırıncı dereceden homojendir.

Örnek. 2.6. $f(x,y) = \sqrt[5]{x^3+y^3}$ fonksiyonunun homojen olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$$f(tx,ty) = \sqrt[5]{t^3x^3+t^3y^3} = t^{3/5}\sqrt[5]{x^3+y^3} = t^{3/5}f(x,y)$$

olduğundan bu fonksiyon 3/5. dereceden homojendir.

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu n. dereceden homojen ise, bu durumda $f(x,y)$

$$f(x,y) = x^n f(1,\frac{y}{x}) \text{ veya } f(x,y) = y^n f(\frac{x}{y},1) \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $f(x/y,1)$ ve $f(1,y/x)$ fonksiyonlarının ikiside sıfırıncı dereceden homojendir. 1.Örneğin (a) şıkkındaki $f(x,y) = x^2+5xy$ fonksiyonu ikinci dereceden homojen idi. Bu fonksiyonu, aynı zamanda,

$$f(x,y) = x^2\left(1+5(\frac{y}{x})\right) = x^2 f(1,\frac{y}{x}) \tag{2.8}$$

veya

$$f(x,y) = y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+5\left(\frac{x}{y}\right)\right) = y^2 f(\frac{x}{y},1) \tag{2.9}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.3. *Eğer,*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.10}$$

denklemindeki. $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise, bu taktirde diferensiyel denkleme homojen diferensiyel denklem denir.

Bir başka ifadeyle

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diferensiyel denkleminin homojen olması için gerek ve yeter koşul

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y) \qquad \text{ve} \qquad N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

olmasıdır. Bu tip bir denklemi çözmek için şu şekilde bir yol izlenir.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

şeklindeki bir homojen diferensiyel denklem

$$y = ux$$

ya da

$$x = vy$$

şeklinde değişken değiştirilmesi yapılarak birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denkleme dönüştürülür. Burada, u ve v yeni bağımlı değişkenlerdir. Buna göre,

$$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + xdu$$

olup, $y = ux$ ve dy nin bu değeri (2.10) denkleminde yerine yazılırsa.

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)[u\,dx + x\,du] = 0$$

olur. M ve N fonksiyonları homojen olduklarından (2.7) formülü yardımıyla bu ifadeyi

$$x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)[u\,dx + xdu] = 0$$

veya

$$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0$$

şeklinde yazarsak. buradan.

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)\,du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılmış diferensiyel denklemini buluruz.

Örnek. 2.7.

$$(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. $M(x,y)=x^2+y^2$ ve $N(x,y)=x^2-xy$ olup, bu iki fonksiyon da ikinci dereceden homojendir. Eğer $y=ux$ dönüşümü yapılırsa, $dy=udx+xdu$ olur. Bunları diferensiyel denklemde kullanırsak,

$$\begin{aligned}(x^2+u^2x^2)dx+(x^2-ux^2)[udx+xdu]&=0\\ x^2(1+u)dx+x^2(1-u)du&=0\\ \frac{1-u}{1+u}du+\frac{dx}{x}&=0\\ \left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du+\frac{dx}{x}&=0\end{aligned}$$

olur. Son satırdaki ifade integre edilirse,

$$\int\left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du+\int\frac{dx}{x}=-u+2\ln|1+u|+\ln|x|=\ln|c|$$

$$-\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|x|=\ln|c|$$

bulunur. Bu ifade, logaritmanın özelliğinden yararlanarak daha sade biçimde,

$$\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|=\frac{y}{x}$$

şeklinde yazılabilir.

Homojen diferensiyel denklem, alternatif bir form olarak, her zaman

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.11}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $y=ux$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

olur. Bu değerler (2.11) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u) \quad \text{veya} \quad \frac{dx}{x}+\frac{du}{u-f(u)}=0 \tag{2.12}$$

denklemi bulunur. Buna göre verilen denklem yine değişkenlerine ayrılabilen (2.12) denklemine indirgenmiş olur. (2.12) denklemi, terim terim integre edilerek (2.10) denkleminin çözümü bulunur.

Örnek. 2.8.

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}, \qquad y(1) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Denklemin her iki yanı $x \neq 0$ ile bölünürse,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x} \tag{2.13}$$

olur. Burada $y = ux$ dönüşümü yapılırsa, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ olur, bunlar (2.13) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$u + x\frac{du}{dx} = u + e^{u} \Rightarrow e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

denklemi bulunur. Bu denklemde terim terim integre edilirse,

$$\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -e^{-u} + c = \ln|x|$$

bulunur. $u = y/x$ olduğundan denklemin genel çözümü

$$-e^{-y/x} + c = lnx$$

olur. Denklemin başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümünü bulmak için c sabitinin değerini belirleyelim. Bunun için başlangıç koşulu kullanılarak, $x = 1$ için $y = 1$ olduğundan $-e^{-1} + c = 0$ bulunur ve buradan da $c = e^{-1}$ elde edilir. $c = e^{-1}$ değeri genel çözümde yerine yazılırsa,

$$e^{-1} - e^{-y/x} = lnx$$

özel çözümü bulunur.

Örnek. 2.9.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \tag{2.14}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklemi,

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}$$

şeklinde yazalım. $y=ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ dönüşümü yardımıyla,

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2+2u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=u^2+u$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem ise değişkenlerine ayrılabilen türden olup,

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u(u+1)}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemin sol tarafının x değişkenine göre, sağ tarafının da u değişkenine göre integralini alabilmek için, denklemin sağ tarafındaki ifadeyi çarpanlarına ayırırsak,

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

olur. Her iki tarafın integrali alınarak,

$$|lnx|+|lnc|=ln|u|-ln|u+1|$$

bulunur. Burada c keyfi bir sabittir. Logaritmanın özellikleri kullanılarak, yukarıdaki ifadeyi, $cx=\dfrac{u}{u+1}$ şeklinde yazabiliriz. $u=y/x$ değeri burada yerine yazılarak

$$cx=\frac{y/x}{(y/x)+1}=\frac{y}{y+x}\Rightarrow y=\frac{cx^2}{1-cx}$$

çözümü bulunur.

Alıştırmalar

Aşağıdaki homojen diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $3(3x^2+y^2)dx-2xydy=0$
2. $xy'-y=\sqrt{y^2+x^2}$
3. $2(2x^2+y^2)dx-xydy=0$

4. $y' = \frac{y}{x} + tan\frac{y}{x}$

5. $xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$

6. $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

7. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

8. $(y + x)dx + (y - x)dy = 0$

9. $(x^2 + 2xy - 4y^2)dx - (x^2 - 8xy - 4y^2)dy = 0$

10. $x(x^2 + y^2)^2(ydx - xdy) + y^6dy = 0$

11. $(x - y)(4x + y)dx + x(5x - y)dy = 0$

12. $(3x^2 - 2xy + 3y^2)dx = 4xydy$

13. $x^2cos\frac{x}{y}y' - (y^2 + xycos\frac{x}{y}) = 0$

14. $e^{x/y}(y - x)dy + y(1 + e^{x/y})dx = 0$

15. $(y + 2x)dx - ydy = 0$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin özel çözümlerini bulunuz.

1. $(3x^2 - 2y^2)y' = 2xy, \qquad y(0) = -1$

2. $(x - y)dx + (3x + y)dy = 0, \qquad y(3) = -2$

3. $y(3x + 2y)dx - x^2dy = 0, \qquad y(1) = 2$

4. $(y - \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, \qquad y(0) = 1$

5. $(16x + 5y)dx + (3x + y)dy = 0, \qquad y(1) = -3$

Tam dif denklemler

$M\,dx + N\,dy = 0$

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ise

Tamdır.

Çözümü:

$\int M\,dx = y\ \ + h(y) = U$

integral sabiti

$\frac{dU}{dy}$ bulunur.

$\frac{dU}{dy} = N$ yazılır

ve $h(y)$ hesaplanır.

aranan çözüm

$\boxed{U(x,y) = C}$

Örnek:

$(9x^2y^2+5)\,dx + (6x^3y+8)\,dy = 0$

Çözüm

$M = 9x^2y^2+5 \rightarrow M_y = 18x^2y$

$N = 6x^3y+8 \rightarrow N_x = 18x^2y$

Tam dif.

$U = \int M\,dx = \int (9x^2y^2+5)\,dx$

$U = 9\frac{x^{2+1}}{2+1}y^2 + 5x + h(y)$

$U = 3x^3y^2 + 5x + h(y)$

$\frac{dU}{dy} = 6x^3y + h'(y)$

$N = \frac{dU}{dy}$

$6x^3y + 8 = 6x^3y + h'(y)$

$8 = h'(y)$

$\frac{dh}{dy} = 8$

$\int dh = \int 8\,dy$

$h = 8y$

$U = 3x^3y^2 + 5x + h(y)$

$\boxed{U = 3x^3y + 5x + 8y = C}$

261)

$$\left(\underbrace{2xy^3e^{x^2y^3}}_{M}\right)dx + \left(\underbrace{3x^2y^2\,e^{x^2y^3}+6}_{N}\right)dy = 0$$

Çözüm.

$M_y = N_x$ tam dif.

$$\int M\,dx = \int 2xy^3 e^{x^2y^3}\,dx$$

$$t = x^2y^3 \rightarrow \frac{dt}{dx} = 2xy^3 \rightarrow dt = 2xy^3 dx$$

$$\int e^{x^2y^3}\underbrace{2xy^3\,dx}_{dt} = \int e^t dt = e^t + h(y) = U$$

$$U = e^{x^2y^3} + h(y) \rightarrow \frac{dU}{dy} = 3x^2y^2e^{x^2y^3} + h'(y)$$

$$N = \frac{dU}{dy}$$

$$3x^2y^2e^{x^2y^3} + 6 = 3x^2y^2e^{x^2y^3} + h'(y)$$

$$6 = h'(y) \rightarrow h(y) = 6y$$

$$\boxed{U = e^{x^2y^3} + 6y = C}$$

2.4 Tam Diferensiyel Denklemler

Verilen bir bölgede sürekli kısmi türevleri olan bir $u(x,y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy \tag{2.21}$$

denklemi ile verilir. (2.21) denkleminin sağ yanına tam diferensiyel denir. Bu ifadenin

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = 0 \tag{2.22}$$

olarak yazılmasına da tam diferensiyel denklem denir. Buna göre $u(x,y)$, (2.22) şeklindeki tam diferensiyel denklemin çözümü olur.

Teorem 2.1. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferensiyel denkleminin tam olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olmasıdır.

İspat.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.23}$$

diferensiyel denklemi tam ise o zaman $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ tam diferensiyeldir. Tam diferensiyelin tanımından bir $u(x,y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

olacak şekilde vardır. Buradan,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

olur. Ancak $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}$$

yazılır ve böylece,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

elde edilir.

Şimdi tersine

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ise,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

denkleminin tam diferensiyel denklem olduğunu ispatlamalıyız. Yani,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{2.24}$$

ve

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.25}$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonunun var olduğunu göstermemiz gerekir. Acaba (2.24) ve (2.25) eşitliklerini aynı anda sağlayan böyle bir $u(x,y)$ fonksiyonu var mıdır? Bir an için (2.24) eşitliğinin sağlandığını düşünelim ve y yi sabit tutup x'e göre integral alalım. Bu durumda,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + h(y) \tag{2.26}$$

elde ederiz, burada $h(y)$ integral sabitinin yerini almıştır. Şimdi (2.26) ifadesinin y ye göre kısmi türevini alalım. Böylece,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{dh(y)}{dy} \tag{2.27}$$

olur. (2.25) ve (2.27) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan sağ taraflarını da eşitlersek

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{dh(y)}{dy}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\frac{dh(y)}{dy}$ göre çözülürse,

$$\frac{dh(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

bulunur. $\dfrac{dh(y)}{dy}$ ifadesi x den bağımsız olduğundan

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x \tag{2.28}$$

fonksiyonu da x den bağımsız olmalıdır. Hipotez gereği

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right] = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)\partial x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

bulunur. Buradan, (2.28)'nin x den bağımsız olduğunu anlarız. Böylece

$$h(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]dy$$

yazabiliriz. Bu ifade (2.26) da yerine yazılırsa,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]dy$$

bulunur. Elde edilen bu $u(x,y)$ fonksiyonu hem (2.24) ve hem de (2.25) sağlar. Buradan

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

denkleminin tam diferensiyel denklem olduğu sonucuna varırız. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi kısaca özetleyecek olursak,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.29}$$

şeklinde verilen tam diferensiyel denklemin çözümü şu şekilde bulunur. Bir kere (2.29) denklemi tam diferensiyel olduğundan

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.30}$$

yazılır. (2.30) ifadesinin birinci eşitliğinde y sabit tutulup x değişkenine göre integral alınırsa,

$$u(x,y) = \int^{x} M(x,y)dx + h(y) \tag{2.31}$$

bulunur. Burada $h(y)$ integral sabitidir. Çünkü y sabit kabul edilmişti. Şimdi $h(y)$ sabitini hesaplayalım. Bunun için (2.31) ifadesinin y ye göre türevini alalım (Bu durumda x sabit kabul edilir) ve (2.30) ifadesinin ikinci denklemine eşitleyelim. Buradan,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \frac{dh(y)}{dy} = N(x,y) \tag{2.32}$$

elde dilir. (2.32) denkleminden

$$\frac{dh(y)}{dy}$$

bulunur ve integrali alındıktan sonra (2.31) denkleminde yerine yazılarak (2.29) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u(x,y) = c$$

olarak elde edilir.

Örnek. 2.13. $(6x^2 + 4xy + y^2)dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2, \quad N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

ve

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x + 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

olduklarından, verilen denklem tam diferensiyel denklemdir. Buna göre $u(x,y)$ fonksiyonu bu denklemin çözümü ise,

$$u(x,y) = \int^x (6x^2 + 4xy + y^2)dx = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 + h(y) \qquad (2.33)$$

olur. (2.33) ifadesinin y göre türevini alıp $N(x,y)$ eşitleyelim,

$$2x^2 + 2xy + h'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

ve buradan,

$$h'(y) = -3y^2 \Longrightarrow h(y) = -y^3 + c_1$$

bulunur. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 + c_1 = c_2$$

ya da

$$u(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = c, \qquad (c = c_2 - c_1)$$

olarak elde edilir.

Örnek. 2.14.

$$(e^{2y} - ycos(xy))dx + (2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y)dy = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$M(x,y) = e^{2y} - ycos(xy) \qquad N(x,y) = 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y$$

ve

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2e^{2y} + xysin(xy) - cos(xy) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

olduklarından, verilen denklem bir tam diferensiyel denklemdir. Buna göre $u(x,y)$ fonksiyonu bu denklemin çözümü ise,

$$u(x,y) = \int^y (2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y)dy$$

olur bu integralin alınmasıyla,

$$u(x,y) = xe^{2y} - sin(xy) + y^2 + h(x) \tag{2.34}$$

bulunur. (2.34) ifadesinin x göre türevini alıp $M(x,y)$ eşitleyelim,

$$e^{2y} - ycos(xy) + h'(x) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = e^{2y} - ycos(xy)$$

ve buradan,

$$h'(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = c$$

bulunur. Böylece verilen denklemin genel çözümü,

$$u(x,y) = xe^{2y} - sin(xy) + y^2 + c = 0$$

olarak elde edilir.

Örnek. 2.15.

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$$

denkleminin tam olup olmadığını kontrol ediniz, eğer tam ise çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem için,

$$M(x,y) = (2xy^2 + 2y), \qquad N(x,y) = (2x^2y + 2x)$$

olmak üzere,

$$M_y = N_x = 4xy + 2$$

olup denklem tam diferensiyeldir. Bu durumda,

$$u(x,y) = \int (2xy^2 + 2y)dx + h(y)$$

yazılır ve integral alınırsa,

$$u(x,y) = x^2y^2 + 2xy + h(y)$$

elde edilir. Her iki tarafın y değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + 2x + \frac{\partial h}{\partial y}$$

tam diferensiyellikten dolayı,

$$N(x,y) = 2x^2y + 2x = 2x^2y + 2x + \frac{\partial h}{\partial y}$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = c$$

bulunur. Bulunan $h = c$ değeri yerine yazılırsa,

$$u(x,y) = x^2y^2 + 2xy + c$$

genel çözümü bulunur.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin tam diferensiyel denklem olduklarını göstererek çözünüz.

1. $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$

2. $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

3. $(cosy + ycosx)dx + (sinx - xsiny)dy = 0$

4. $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$

5. $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)dy = 0$

6. $e^x(cosydx - sinydy) = 0$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

1. $xdy + y^2dx = 0, \quad y(1) = 0.2$

2. $4dx + x^{-1}dy = 0, \quad y(1) = -8$

3. $2sin\omega ydx + 2x\omega cos\omega ydy = 0, \quad y(0) = \pi/2\omega$

4. $e^{y/x}(-ydx + xdy)/x^2 = 0, \quad y(-2) = -2$

5. $(x-1)dx + (y+1)dy = 0, \quad y(1) = 0$

2.5 İntegral Çarpanı Yöntemi

Eğer

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.35}$$

diferensiyel denklemi tam diferensiyel denklem değilse, (2.35) denklemini tam diferensiyel yapacak olan bir integral çarpanı bulunur. Adi diferensiyel denklemler de böyle bir integral çarpanınını bulmak için iki hal vardır.

1.HAL: Eğer

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \tag{2.36}$$

ifadesi yalnız x değişkenine bağlı ise, λ integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int f(x)dx} \tag{2.37}$$

ile bulunur. (2.37) integral çarpanı ile (2.35) denkleminin her bir terimi ayrı ayrı çarpılırsa (2.35) denklemi tam diferensiyel olur ve (2.35)'in genel çözümü tam diferensiyel denklemin çözüm yöntemi ile bulunur.

Örnek. 2.16.

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Önce verilen denklemin tam diferensiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tam diferensiyel denklem değildir. Şimdi bu denklemi çözmek için x değişkenine bağlı bir integral çarpanı bulalım.

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} = e^{\int \frac{2y-y}{xy}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{lnx} = x$$

bulunur. Verilen denklemi x ile çarparsak,

$$(x^3 + xy^2)dx + x^2ydy = 0$$

elde edilir. Bu ise tam diferensiyel denklemdir. Şimdi bu denklemi çözelim,

$$\lambda M(x,y) = x^3 + xy^2, \quad \lambda N(x,y) = x^2 y$$

ve

$$\frac{\partial \lambda M(x,y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial \lambda N(x,y)}{\partial x}$$

olduklarından, $u(x,y) = c$ olacak şekilde $u(x,y)$ fonksiyonunu bulalım,

$$u(x,y) = \int^x (x^3 + xy^2)dx + h(y)$$

olur bu integralin alınmasıyla,

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + h(y) \tag{2.38}$$

bulunur. (2.38) ifadesinin y göre türevini alıp $\lambda N(x,y)$ eşitleyelim,

$$x^2y + h'(y) = x^2y = \lambda N(x,y)$$

ve buradan,

$$h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = c$$

bulunur. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} = c$$

olarak bulunur.

Örnek. 2.17.

$$(x+y)dx + x\ln x dy = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemde

$$M(x,y) = x + y, \quad N(x,y) = x\ln x$$

şeklindedir. Buradan,

$$M_y = 1, \quad N_x = 1 + \ln x$$

olduğundan,

$$M_y \neq N_x$$

sonucuna varılır. Yani verilen denklem tam diferensiyel denklem değildir. Şimdi verilen denklemi tam diferensiyel denklem haline getirecek bir integral çarpanı bulalım.

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{1-1-\ln x}{x \ln x} dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

olur. $\lambda(x) = \frac{1}{x}$ integral çarpanı ile verilen denklemin her bir terimi çarpılırsa,

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx + \ln x dy = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Bu durumda,

$$u(x, y) = c$$

olacak şekilde bir $u(x, y)$ fonksiyonu bulalım.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx \\ &= x + y \ln x + h(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin y değişkenine göre türevi alınırsa,

$$u_y(x, y) = \ln x + h'(y)$$

elde edilir.

$$u_y(x, y) = N(x, y) \Rightarrow \ln x + h'(y) = \ln x \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

bulunur. $h(y) = c_1$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x + y \ln x + c_1 = c_2 \\ &= x + y \ln x = c, \qquad (c = c_2 - c_1) \end{aligned}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

2.HAL: Eğer

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = f(y) \tag{2.39}$$

ifadesi yalnız y değişkenine bağlı ise, λ integral çarpanı

$$\lambda(y) = e^{\int f(y)dy} \tag{2.40}$$

ile bulunur. (2.40) integral çarpanı ile (2.35) denkleminin her bir terimi ayrı ayrı çarpılırsa (2.35) denklemi tam diferensiyel olur ve (2.35)'in genel çözümü tam diferensiyel denklemin çözüm yöntemi ile bulunur.

Örnek. 2.18.

$$(xy+1)ydx + (2y-x)dy = 0$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Önce verilen denklemin tam diferensiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1 \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tam diferensiyel denklem değildir. Şimdi bu denklemi çözmek için y değişkenine bağlı bir integral çarpanı bulalım.

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy} = e^{-\int \frac{2xy+1+1}{(xy+1)y} dy} = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2lny} = \frac{1}{y^2}$$

bulunur. Verilen denklemi $1/y^2$ ile çarparsak,

$$\frac{xy+1}{y}dx + \frac{2y-x}{y^2}dy = 0$$

elde edilir. Bu ise tam diferensiyel denklemdir. Şimdi bu denklemi çözelim,

$$\lambda M(x,y) = \frac{xy+1}{y}, \quad \lambda N(x,y) = \frac{2y-x}{y^2}$$

ve

$$\frac{\partial \lambda M(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial \lambda N(x,y)}{\partial x}$$

olduklarından, $u(x,y) = c$ olacak şekilde $u(x,y)$ fonksiyonunu bulalım,

$$u(x,y) = \int^x \frac{xy+1}{y}dx + h(y)$$

olur bu integralin alınmasıyla,

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + h(y) \tag{2.41}$$

bulunur. (2.41) ifadesinin y göre türevini alıp $\lambda N(x,y)$'ye eşitleyelim,

$$-\frac{x}{y^2} + h'(y) = \frac{2y-x}{y^2} = \lambda N(x,y)$$

ve buradan,

$$h'(y) = \frac{2}{y} \Longrightarrow h(y) = 2lny$$

bulunur. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2lny = c$$

olarak bulunur.

Daha kolay bir şekilde, eğer $M(x,y)$ ile $N(x,y)$ fonksiyonları m. dereceden homojen fonksiyonlar ise integral çarpanı

$$\lambda(x,y) = \frac{1}{xM + yN}$$

eşitliği ile de bulunabilir.

Örnek. 2.19. $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Yukarıdaki denklem ikinci dereceden homojen olduğundan integral çarpanı

$$\lambda(x,y) = \frac{1}{xM + yN} = \frac{1}{x(y^2 - xy) + yx^2} = \frac{1}{xy^2}$$

olarak bulunur. Denklemin her iki yanını $\lambda(x,y) = \frac{1}{xy^2}$ ile çarparsak

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$$

elde ederiz, bu ise tam diferensiyel denklemdir. Burada

$$\lambda(x,y)M(x,y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

ve

$$\lambda(x,y)N(x,y) = \frac{x}{y^2}$$

olduğundan

$$(\lambda M)_y = \frac{1}{y^2} = (\lambda N)_x$$

olur. Buradan integral çarpanlı denklemin tam diferensiyel olduğu görülür. Dolayısıyla

$$u(x,y) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) dx + h(y) = \ln x - \frac{x}{y} + h(y)$$

olur. Burada $h(y)$'yi belirleyebilmek için $\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda(x,y)N(x,y)$ olduğunu kullanırsak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + h'(y) = \frac{x}{y^2} = \lambda(x,y)N(x,y)$$

ve dolayısıyla $h'(y) = 0$ yani $h(y) = c$ olarak bulunur. Buna göre denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = \ln x - \frac{x}{y} = c$$

olarak bulunur.

Alıştırmalar

Aşağıda verilen diferensiyel denklemlerin tam diferensiyel olup olmadığını kontrol ederek tam diferensiyel olmayanları uygun bir integral çarpanı bularak tam diferensiyel yaptıktan sonra çözünüz.

1. $ydx + (2x - ye^y)dy = 0$
2. $(x+2)sinydx + xcosydy = 0$
3. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
4. $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$
5. $y(x + y + 1)dx + (x + 2)dy = 0$
6. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$

Birinci Mertebe Lineer dif denklemler

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

seklindeki dif denklemlerdir.

Denklemi cozmek icin $\lambda(x)=e^{\int P(x)dx}$ icin seklindeki bir integral carpani ile carpalim

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

hali ne gelir. **uv' + u'v =(uv) '**

$u=e^{\int P(x)dx}$, $u'=P(x)e^{\int P(x)dx}$, $v=y$, $v'=\frac{dy}{dx}$ gibi dusunulurse

$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=(uv)'=\left(e^{\int P(x)dx}\,y\right)'$ oldugu gorulur.

Bu esitlik yukarida yerine konulursa

$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\,y\right)=e^{\int P(x)dx}Q(x)$ elde edilir. Iki tarafin integralialinirsa $e^{\int P(x)dx}\,y=\int e^{\int P(x)dx}\,Q(x)dx+C$

veya

$y=\frac{1}{\lambda(x)}\int\lambda(x)Q(x)dx+C$ elde edilir.

Pr561. $\frac{dy}{dx}+xy=x^3+1$ dif denklemi cozunuz.

Cozum:

P(x)=x, $Q(x)=x^3+1$, $\lambda(x)=e^{P(x)}=e^x$,

$y=\frac{1}{\lambda(x)}\int\lambda(x)Q(x)dx+C$ degerler yerien konulursa $y=\frac{1}{e^x}\int e^x(x^3+1)dx+C$

integral cozulerek y hesaplanir.

(bazi kitaplarda $\lambda(x)$ yerine $\mu(x)$ kullanilir.)

Hemen iki örnek verelim: a) $y'-y=e^{2x}-1$, b) $ty'+y=9t\cos 3t$ diferansiyel denklemlerini bu yöntemle çözelim:

a) $P=-1$, $Q=e^{2x}-1 \;\Rightarrow\; \mu(x)=e^{\int(-1)\,dx}=e^{-x} \;\Rightarrow$

$$y=\frac{1}{e^{-x}}\left(\int e^{-x}(e^{2x}-1)\,dx+C\right)=e^{x}[\,e^{x}+e^{-x}+C\,]=e^{2x}+1+Ce^{x}\ .$$

b) Denklemi önce $y'+\frac{1}{t}y=9\cos 3t$ formunda yazalım. $P=\frac{1}{t}$, $Q=9\cos 3t$ ve

$$y=e^{-\int P dt}\left(\int e^{\int P dt}Q dt+C\right)=e^{-\int(1/t)dt}\left(\int e^{\int(1/t)dt}9\cos 3t\,dt+C\right)$$

$$=e^{-\ln t}\left(9\int e^{\ln t}\cos 3t\,dt+C\right)=\frac{1}{t}\left(9\int t\cos 3t\,dt\right)+\frac{C}{t}$$

$$=3\sin 3t+\frac{\cos 3t}{t}+\frac{C}{t}$$

Not: $\int 9t\cos 3t\,dt\,\begin{bmatrix} u=t & , & du=dt \\ dv=3\cos 3t\,dt & , & v=\sin 3t\end{bmatrix}$

$$=3\left(t\sin 3t-\int\sin 3t\,dt\right)=3t\sin 3t+\cos 3t+C.$$

2.6 Lineer Diferensiyel Denklemler

Tanım 2.4.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.42}$$

şeklinde yazılabilen diferensiyel denklemlere birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemler denir.

Şimdi (2.42) denklemini

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \tag{2.43}$$

şeklinde yazalım. Bu durumda (2.43) denklemi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.44}$$

şekline dönüşür. Burada,

$$M(x,y) = P(x)y - Q(x) \quad \text{ve} \quad N(x,y) = 1 \tag{2.45}$$

dir. Şimdi bu denklemin tam diferensiyel olup olmadığını araştıralım.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x) \neq 0 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2.46}$$

olur. Yani (2.43) denklemi tam diferensiyel denklem değildir. Şimdi (2.43) denklemini tam diferensiyel yapacak bir integral çarpanı bulalım. Böyle bir integral çarpanı (2.46) denkleminden de görüleceği gibi yalnızca x değişkenine bağlı olacaktır. Böyle bir integral çarpanı $\lambda(x)$ olduğunu kabul edelim ve bu integral çarpanı ile (2.43) denklemini çarpalım.

$$[\lambda(x)P(x)y - \lambda(x)Q(x)]dx + \lambda(x)dy = 0 \tag{2.47}$$

olur. Bu ise tam diferensiyel denklemdir ve tam diferensiyellik koşulunu sağlar. Yani,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(x)P(x)y - \lambda(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(x)] \tag{2.48}$$

olur. (2.48) denkleminden,

$$\lambda(x)P(x) = \frac{d}{dx}[\lambda(x)] \tag{2.49}$$

yazılır. (2.49) denklemi

$$\frac{d\lambda(x)}{\lambda(x)} = P(x)dx \tag{2.50}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılmış denklem olarak yazılır. (2.50) denkleminin her iki yanının integrali alınırsa,

$$ln|\lambda(x)| = \int P(x)dx \quad \text{veya} \quad \lambda(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{2.51}$$

olur. (2.42) denkleminin her iki yanı $\lambda(x)$ integral çarpanı ile çarpılırsa,

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.52}$$

ve buradan da

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.53}$$

elde edilir. (2.53) denkleminin her iki yanının integrali alınarak (2.42) denkleminin genel çözümü,

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c$$

ya da

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right] \tag{2.54}$$

olarak bulunur. Burda c integral sabitidir. Eğer $\lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$ olduğu gözönüne alınırsa, yukarıdaki formüller

$$\lambda(x)y = \int \lambda(x)Q(x)dx + c$$

ya da

$$y = \frac{1}{\lambda(x)}\left[\int \lambda(x)Q(x)dx + c\right]$$

şeklini alır.

Örnek. 2.20.

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2x+1}{x}\right)y=e^{-2x} \tag{2.55}$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bir kere (2.55) denklemi lineer diferensiyel denklemdir ve

$$P(x)=\frac{2x+1}{x} \quad \text{ve} \quad Q(x)=e^{-2x}$$

dir. İntegral çarpanı,

$$\lambda(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\left(\frac{2x+1}{x}\right)dx}=e^{2x+ln|x|}=e^{2x}e^{ln|x|}=xe^{2x}$$

olarak bulunur. $P(x)$, $Q(x)$ ve $\lambda(x)$ değerleri (2.54) de yerlerine yazılırsa,

$$y=(xe^{2x})^{-1}\left[\int xe^{2x}e^{-2x}dx+c\right]$$

olur. Bu integral hesaplanırsa verilen denklemin genel çözümü

$$y=\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{c}{x}e^{-2x}$$

olarak bulunur.

Örnek. 2.21.

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=x, \qquad y(2)=1 \tag{2.56}$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Önce (2.56) denklemini (2.42) şeklinde yazalım. Bunun için (2.56)'ün her bir terimini x^2+1 ile bölelim. Bu durumda,

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1}$$

olur. Burada,

$$P(x)=\frac{4x}{x^2+1} \quad \text{ve} \quad Q(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

dir. İntegral çarpanı,

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx}=e^{ln(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2$$

olarak bulunur. $P(x)$, $Q(x)$ ve $\lambda(x)$ değerleri (2.54) de yerlerine yazılırsa,

$$y=(x^2+1)^{-2}\left[\int (x^2+1)^2\frac{x}{x^2+1}x dx+c\right]$$

olur. Bu integral hesaplanırsa verilen denklemin genel çözümü

$$y=(x^2+1)^{-2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c\right]$$

olarak bulunur. $y(2)=1$ başlangıç değerini kullanırsak $c=19$ bulunur. $c=19$ değeri, genel çözümde yerine yazılırsa,

$$y=(x^2+1)^{-2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+19\right]$$

istenen çözümü bulunmuş olur.

Örnek. 2.22.

$$ty'+2y=\sin t,\quad t>0$$

şeklinde verilen lineer denklemin çözümünü bulup, $t\to\infty$ için çözümün davranışını belirleyiniz.

Çözüm. $t>t$ olduğundan verilen denklemin her iki yanı t ile bölünürse,

$$y'+\frac{2}{t}y=\frac{\sin t}{t}$$

elde edilir. Bu ise birinci mertebeden lineer bir denklemdir. Bu denklem için ,

$$P(t)=\frac{2}{t},\qquad Q(t)=\frac{\sin t}{t}$$

olup integral çarpanı,

$$\lambda(t)=e^{\int\frac{2}{t}dt}=e^{2\ln t}=t^2$$

olarak bulunur. Denklemin çözümü için,

$$y=t^{-2}\left[\int t^2\frac{\sin t}{t}dt+c\right]$$

integraline ulaşıp, $u=t$, $dv=\sin t dt$ ile kısmi integrasyon alınırsa,

$$y=\frac{c}{t^2}-\frac{\cos t}{t}+\frac{\sin t}{t^2}$$

çözümünü elde ederiz. Bu çözümün $t\to\infty$ için $y\to 0$ olduğu görülür.

2.6.1 Bernoulli Denklemi

Tanım 2.5. *n bir doğal sayı olmak üzere*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.57}$$

şeklindeki denklemlere Bernoulli[1] *diferensiyel denklemi denir.*

Eğer $n = 1$ ise (2.57) denklemi

$$\frac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)]y = 0 \tag{2.58}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir lineer denklem olur. Eğer $n \neq 1$ ise aşağıdaki teorem yardımıyla genel çözüm bulunur.

Teorem 2.2. $n \neq 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Bernoulli denklemi $v = y^{1-n}$ dönüşümü yardımıyla lineer diferensiyel denkleme dönüşür.

Örnek. 2.23.

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2 \tag{2.59}$$

denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemde, $p(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ ve $n = 2$ olup, denklemin her iki tarafı y^{-2} ile çarpılırsa,

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x \tag{2.60}$$

bulunur. Burada, $y^{-1} = v$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$-y^{-2}y' = v' \Rightarrow y^{-2}y' = -v'$$

[1] Jakob Bernoulli, 1654-1705 yılları arasında yaşamış olan İsviçreli matematikçidir.

olur. Bu değerler (2.60) denkleminde yerlerine yazılırsa, v ye göre,

$$-v' + \frac{1}{x}v = x \Rightarrow v' - \frac{1}{x}v = -x$$

lineer denklemi bulunur. Bu denklem için integral çarpanı

$$e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}$$

dir. Buradan

$$v = (x^{-1})^{-1}\left[\int x^{-1}(-x)dx + c\right]$$

yazılır. Bu denklemin integrali alınırsa,

$$v = -x^2 + cx$$

bulunur. $v = y^{-1}$ olduğundan, $y = 1/v$ ve buradan

$$y = \frac{1}{cx - x^2}$$

genel çözümü bulunur.

Örnek. 2.24.

$$y' - \frac{2y}{x} = -x^2y^2$$

Bernoulli diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin her iki tarafını y^2 ye bölelim. Bu durumda,

$$y'y^{-2} - \frac{2}{x}y^{-1} = -x^2$$

elde edilir. Şimdi,

$$v = \frac{1}{y} \Rightarrow y^{-1} = v$$

değişken değişimi yapalım. Bu durumda

$$v' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow y'y^{-2} = -v'$$

olur. Böylece, $y^{-1} = v$ ve $y'y^{-2} = -v'$ değerleri denkleminde yerine yazılır ve denklemin her iki tarafı eksi bir ile arpılırsa,

$$v' + \frac{2}{x}v = x^2$$

şeklinde lineer diferensiyel denklem elde edilir. Şimdi bu lineer denklemi çözelim. Bunun için önce integral çarpanını bulalım. integral çarpanı,

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

şeklinde bulunur. Buradan,

$$x^2 v = \int x^2 x^2 dx + c = \int x^4 dx + c$$

yazılır ve böylece

$$x^2 v = \frac{1}{5}x^5 + c$$

elde edilir. Eğer $y^{-1} = v$ değeri yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{y}x^2 = \frac{1}{5}x^5 + c$$

olur. Bu denklemden y çözülürse,

$$y = \frac{x^2}{\frac{1}{5}x^5} + c$$

genel çözümü elde edilir.

2.6.2 Riccati Denklemi

Lineer olmayan fakat lineer denklem haline getirilebilen bir diğer diferensiyel denklem ise

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{2.61}$$

şeklinde yazılabilen Riccati[2] denklemidir. Eğer $P(x) \equiv 0$ ise (2.61) denklemi lineer denkleme, $R(x) \equiv 0$ ise Bernoulli denklemine indirgenir. Bu nedenle, Riccati denklemi her ikisinden de geneldir.

Riccati diferensiyel denklemini $y = y_1$ gibi bir özel çözümü bilindiğinde çözmek mümkündür. Bu durumda

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \tag{2.62}$$

[2]Jacobo Francesco Riccati, 1676-1754 yılları arasında yaşamış İtalyan matematikçisi ve filozofudur.

dönüşüm formülü yardımıyla Riccati denklemi lineer denkleme indirgenir. Gerçekten,

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \tag{2.63}$$

türevi ve y nin (2.62) ile verilen değeri (2.61) de yerlerine yazılarak benzer terimler birleştirilirse,

$$\frac{du}{dx} + [2P(x)y_1 + Q(x)]u = -R(x) \tag{2.64}$$

bulunur. Bu ise lineer diferensiyel denklemdir.

Örnek. 2.25. Bir özel çözümü $y_1 = x$ olan

$$x(x-1)y' - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$y = x + \frac{1}{u} \quad \text{dönüşümü yapılırsa,} \; y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

olur. y ve y' nün değerleri denklemde yerlerine yazıldığında verilen denklem,

$$u' + \frac{1}{x(x-1)}u = \frac{1}{x(x-1)}$$

lineer denklemine indirgenir. Bu denklem için integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x(x-1)}dx} = \frac{x-1}{x}$$

dir. Buna göre lineer denklemin genel çözümü,

$$u = \frac{x}{(x-1)}\left[\int \frac{(x-1)}{x}\frac{1}{x(x-1)}dx + c\right]$$

den,

$$u = \frac{cx-1}{x-1}$$

olarak bulunur. u yerine dönüşüm formülünden çözülen

$$u = \frac{1}{y-x}$$

yazılırsa verilen denklemin genel çözümü,

$$y = \frac{cx^2 - 1}{cx - 1}$$

olarak elde edilir.

Örnek. 2.26. Bir özel çözümü $y_1 = 2$ olan

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$$

Riccati diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$y = 2 + \frac{1}{u}$$

değişken dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$u = \frac{1}{y-2}$$

ve

$$y' = -\frac{u'}{u^2}$$

olur. y ve y' değerleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$-\frac{u'}{u^2} = -2 - (2 + \frac{1}{u}) + (2 + \frac{1}{u})^2$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{3}{u} + \frac{1}{u^2}$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafı $-u^2$ ile çarpılırsa,

$$u' + 3u = -1$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Bu lineer diferensiyel denklem çözülürse,

$$\lambda(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

integral çarpanı ve buradan

$$e^{3x}u = \int -e^{3x}dx + c$$

integrali hesaplanırsa

$$e^{3x}u = -\frac{1}{3}e^{3x} + c$$

bulunur. Bu denklemden u çözülürse

$$u = \frac{-1/3e^{3x} + c}{e^{3x}} = -\frac{1}{3} + ce^{-3x}$$

genel çözümü bulunur. Bu denklemde

$$u = \frac{1}{y-2}$$

değeri yerine yazılırsa, genel çözüm

$$y = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}}$$

olur.

Alıştırmalar

Aşağıda verilen diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y' + y = 5$
2. $y' - 4y = 0.8$
3. $y' = (y-1)cotx$
4. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$
5. $y' + 2y - cosx = 0$
6. $y'tanx - 2y = 0$
7. $xy' - 2y - x^3e^x = 0$
8. $xy' + y = y^{-2}$

9. $y' - y = e^x y^2$

10. $y' = y(xy^3 - 1)$

11. $xy' - (1+x)y = xy^2$

12. $x^2 y' + y^2 = xy$

13. $3(1+x^2)y' = 2xy(y^3 - 1)$

Aşağıda verilen başlangıç değer problemlerinin çözümlerini bulunuz.

1. $y' + 3y = 12$, $y(0) = 6$

2. $y' = y\cot x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$

3. $y' + y = (x+1)^2$, $y(0) = 3$

4. $y' + x^3 y = 4x^3$, $y(0) = -1$

5. $y' + 3x^2 y = xe^{-x^3}$, $y(0) = -1$

Aşağıda verilen Riccati diferensiyel denklemlerini çözünüz.

1. $y' = y^2 - xy - x$, $y_1(x) = ax + b$, (burada a ve b sabittir.)

2. $(x^2 - 1)y' = y^2 - 1$, $y_1(x) = 1$

3. $y' = -y^2 + xy + 1$, $y_1(x) = x$

4. $y' = x + y(1-2x) - y^2(1-x)$, $y_1(x) = 1$

2.7 Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Denklemler

Bu bölümde,

$$f(x, y, y') = 0$$

şeklinde yazılabilen yüksek dereceden denklemler ele alınacaktır. Burada

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

Eğer mümkünse, aşağıdaki diferensiyel operatörleri çarpanlarına ayırınız.

1. $9D^2 - 4 = 0$
2. $D^2 - 5 = 0$
3. $D^2 - 4D - 12 = 0$
4. $2D^2 - 3D - 2 = 0$
5. $D^3 + 10D^2 + 25D = 0$
6. $D^3 + 4D^2 + 3D = 0$
7. $D^4 - 8D^2 + 16 = 0$

4.2 Lineer Bağımsızlık

Yüksek mertebeden diferensiyel denklemleri sağlayan birden fazla çözüm fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Bu fonksiyonların birbirinden bağımsız olup olmadığını bilmek büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle yüksek mertebeden denklemlerin çözümüne geçmeden önce lineer bağımlılık ve bağımsızlığı hatırlamak yerinde olacaktır.

Tanım 4.1. *Eğer tümü sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri ve $[a,b] \subseteq R$ kapalı aralığındaki tüm x değerleri için,*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \tag{4.6}$$

oluyorsa, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir. Eğer $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı değilse, bunlara lineer bağımsızdır denir. Yani, $[a,b] \subseteq R$ kapalı aralığındaki tüm x değerleri için, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olduğunda

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \tag{4.7}$$

oluyorsa $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdır denir. Eğer bu fonksiyonlar lineer bağımlı ise, bu fonksiyonlardan herhangi birisi diğer fonksiyonların lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Örnek. 4.3. x ve $2x$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımlıdır. Her zaman ikisi birden sıfır olacak şekilde c_1 ve c_2 sayıları bulunamaz. Yani, $c_1 = c_2 = 0$ eşitliği olmadan da

$$c_1 x + c_2 2x = 0$$

eşitliği sağlanır. Örneğin $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, içinde $c_1 x + c_2 2x = 0$ olur.

Örnek. 4.4. x ve x^2 fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımsızdır. Çünkü

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

olabilmesi için daima $c_1 = c_2 = 0$ olmak zorundadır. Yani

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

eşitliği c_1 ve c_2 sayılarının ikisi birden sıfır olmadan sağlanamaz.

Şimdi verilen bir fonksiyon kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını anlamanın daha kısa bir yolunu bulmaya çalışalım.

Tanım 4.2. $\mathbf{I} = [a, b]$ *kapalı aralığında tanımlı* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ *fonksiyonlarının n. mertebeye kadar sürekli türevleri olsun. Bu durumda, bu fonksiyonların bu* $\mathbf{I}$ *aralığında lineer bağımlı olması için gerekli koşulun, bu* $\mathbf{I}$ *aralığındaki her* x *değeri için*

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

olmasıdır. Bu determinata ***Wronski determinantı*** *ismi verilir ve kısaca*

$$\mathbf{W}(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

şeklinde gösterilir. O halde, $\mathbf{W} = 0$ *olması lineer bağımlılık için gerek koşuldur. Yeter değildir. Yani* $\mathbf{W} = 0$ *olmasına karşın* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$

fonksiyonları lineer bağımsız olabilir. $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarının bu I aralığında lineer bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşulun, bu I aralığındaki her x değeri için Wronski determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Yani,

$$\mathbf{W}(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \neq 0$$

olmasıdır.

Örnek. 4.5. a ve b iki reel sayı ve $b \neq 0$ olsun. Bu durumda $y_1 = e^{ax}\cos bx$ ve $y_2 = e^{ax}\sin bx$ fonksiyonları tüm reel eksende lineer bağımsızdır.

Çözüm. Reel eksen üzerindeki her x değeri için

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx) &= \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ -be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx & be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx \end{vmatrix} \\
&= be^{2ax}(\cos^2 bx + \sin^2 bx) \\
&= be^{2ax} \neq 0
\end{aligned}$$

yazılır. Bu da, $y_1 = e^{ax}\cos bx$ ve $y_2 = e^{ax}\sin bx$ fonksiyonlarının tüm reel eksen üzerinde lineer bağımsız olduklarını gösterir.

Örnek. 4.6. e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix} \\
&= e^{(a+b+c)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= (c-a)(c-b)(b-a)e^{(a+b+c)x}
\end{aligned}$$

olur. Görüldüğü gibi $a \neq b \neq c$ ise $\mathbf{W} \neq 0$ ve dolayısıyla verilen fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

Örnek. 4.7. $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ fonksiyonlarının herhangi bir aralıkta lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Reel eksen üzerindeki tüm x noktaları için,

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

ve

$$(\cos^2 x)' = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$$

olduklarından

$$W(\sin^2 x, \cos^2 x, 1) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin 2x & -\sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

olur. Bu da, tüm x değerleri için ,$\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduklarını gösterir.

Teorem 4.1.

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)]y = B(x) \tag{4.9}$$

lineer denklemi ile,

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)]y = 0 \tag{4.10}$$

ikinci tarafsız lineer denklemi verilmiş olsun. Burada $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$ ve $B(x)$ bir **I** aralığında tanımlı, sürekli ve $a_0(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.10) denkleminin **I** aralığında n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Eğer, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonları (4.10) nin lineer bağımsız çözümleri ise,

$$u = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \tag{4.11}$$

fonksiyonu (4.10) in genel çözümüdür. Bundan başka, verilen **I** aralığında (4.9) denkleminin çözümleri de vardır. Eğer v, (4.9) in bir çözümü ise,

$$y = u + v \tag{4.12}$$

fonksiyonu (4.9) in genel çözümü olur. Burada u ya **tamamlayıcı fonksiyon** v ye de **özel çözüm** denir.

Örnek. 4.8. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x^2 - 2$ fonksiyonunun $y'' + y = x^2$ denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ fonksiyonlarının $y'' + y = 0$ homojen denklemini sağladığı kolayca görülür. Wronski determinantı sıfırdan farklı olduğu için bu fonksiyonlar lineer bağımsızdır. O halde, iki parametre içeren,

$$u = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

tamamlayıcı fonksiyonu homojen denklemin genel çözümüdür. Öte yandan, hiç bir parametre içermeyen $v = x^2 - 2$ fonksiyonu verilen denklemi sağlar. Yani bir özel çözümdür. Böylece,

$$y = u + v = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x^2 - 2$$

fonksiyonu ikinci taraflı denklemin genel çözümü olur.

Alıştırmalar

Aşağıdaki fonksiyonların lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

1. (e^2, e^{-x}, e^{4x}),
2. $(1, -x^2, x^2 + 1)$,
3. $(\sin x, \cos x)$,
4. $(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x)$,
5. $(e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x})$,
6. $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$

Aşağıdaki fonksiyonların, karşılarında verilen denklemlerin genel çözümü olup olmadığını gösteriniz.

1. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{5x/12}$, $\quad y'' + y' - 6y = 0$,
2. $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + e^x/4$, $\quad y'' - 6y' + 9y = e^x$,
3. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 e^x$, $\quad (D^3 - D^2 + D - 1)y = 0$,
4. $y = \ln \sin(x - c_1) + c_2$, $\quad y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

Lineer Diferansiyel Denklemler.

$y''' + 2y'' + 5y' - 34y = 0$ (lineer sabit katsayili homojen)
$y^{(4)} - y''' + 2y'' + 5y' + 34y = 0$ (lineer sabit katsayili homojen)
$y''' - 12y'' + 25y' + 34y = \sin(2x) + x^3 + e^{3t}$ (lineer sabit katsayili ikinci tarafli)
$y''' - 12y'' + 25y' + 34y = \sin(2x)\, x^3\, e^{3t}$ (lineer sabit katsayili ikinci tarafli)
$y''' + 2xy'' + 5y' + 34y = 0$ (lineer degisken katsayili homojen)
$y''' + 7x^5 y'' + 15x^7 y' + 34y = 9x$ (lineer degisken katsayili ikinci tarafli)
$y^{(5)} - 2y''' + 2y'' + 5y' + 34y = 0$ (lineer sabit katsayili homojen)
$yy' = 0$ (nonlineer, (nonlineer=lineer degil))
$yy' + 34y = 0$ (nonlineer)
$(y')^2 = 2x$ (nonlineer)
$(y')^2 + y' = 0$ (nonlineer)
$(y')^2 + y' = x^3 + \sin(3x)$ (nonlineer)
$(y')^{1/2} + y = 2x + 1$ (nonlineer)
$(y')^{-1}\, y = 2x + 1$ (nonlineer)

Sabit Katsayili Lineer Diferansiyel Denklemlerin cozumleri.

Homojen Cozum, Ozel Cozum, Genel Cozum
Homojen cozum: ikinci taraf sifir yapilarak bulunan cozum. y_h
Ozel cozum (Zorlanmis Cozum): ikinci taraftaki fonksiyona gore bulunan cozum y_O
Genel cozum= Homojen cozum + Ozel cozum

Homojen Cozum
Homojen cozumu bulmak icin karakteristik denklemin kokleri bulunur: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$,
Homojen cozum $y_h = e^{\lambda 1x} + e^{\lambda 2x} + e^{\lambda 3x} + \ldots\ldots e^{\lambda nx}$ seklindedir.
Ornek 1: $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$
$y'' - 3y' + 2y = 0 \rightarrow a^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow a_1 = 2, a_1 = 1 \rightarrow y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Ornek 2: $y'' - 3y' + 2y = 114x^3 - 3x^2 + \cos 6x^2 + 12e^{6x}$
$y'' - 3y' + 2y = 0 \rightarrow a^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow a_1 = 2, a_1 = 1 \rightarrow y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$
(y, y', y'' , y''', degiskenlerini ihtiva etmeyen terimlerin homojen cozume etkisi yoktur.)

Ornek 3: $y'' - 4y' + 13y = 3x^2 + \sin 6x$ $\rightarrow a^2 - 4y + 13 = 0 \rightarrow a_1 = 2+3i, a_1 = 2-3i$
$\rightarrow y_h = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
Kokler komplex ise cozumde sinus cosinus terimleri bulunur.

Ornek 4: $y'' - 4y' + 4y = \tan(5x) + \log(3x)$ $\rightarrow a^2 - 4y + 4 = 0 \rightarrow a_1 = 2, a_1 = 2 \rightarrow y_h = C_1 e^{2x} + C_2\, x\, e^{2x}$
Kokler katli ise (bazi kokler cakisik ise, kokler birbirine esit ise) cozumde x carpani bulunur.

Ozel cozum.
Ozel cozumu bulmak icin degisik yontemler vardir.
Ozel cozumu bulma yontemleri
1: L(D) operator yontemi
2: Belirsiz Katsayilar yontemi
3: Parametrelerin degisimi yontemi.
4: Laplas Donusumu Yontemi: baslangic kosullari verilirse genel cozum Laplas donusumu ile elde edilebilir. Ancak Laplas donusumu ile Sadece ozel cozum (ozel haller disinda) bulunamaz.

1) $2\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ sabit katsayili lineer

2) $3\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x = 0$ Sabit katsayili lineer

3) $3t\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ Degisken katsayili lineer

4) $13\frac{d^2x}{dt^2} + e^t\frac{dx}{dt} + t^2x = 0$ Degisken katsayili lineer

5) $f_n(t)\frac{d^nx}{dt^n} + f_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots. f_1(t)\frac{dx}{dt} + f_0(t)x = 0$ degisken katsayili lineer.

$f_n(t), f_{n-1}(t) \ldots\ldots f_1(t), f_0(t)$ t ye bagl fonksiyonlar

6) $a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots. a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0$ sabit katsayili lineer.

$a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_1, a_0$ sabit sayilar.

7) $\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$ Nonlineer

8) $x\frac{dx}{dt} + x = 0$ Nonlineer

9)$x\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$ Nonlineer

10)$\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0$ Nonlineer.

11)$(\frac{dx}{dt})^2 + x = 0$ Nonlineer

12)$(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + \frac{dx}{dt} + 2x = 0$ Nonlineer

13)$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = \sin((t)$ Lineer ikinci tarafl.

14) $a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots. a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t)$ Ikinci Tarafli lineer. $f(t)$ herhangibir fonksiyon.

DIFERANSIYEL DENKLEMLERIN COZUMLERI.

Nonlineer dif denklemlerin ozel haller disinda genel bir cozum yontemi yoktur. Degisken katsayili diferansiyel denklemler icinde durum aynidir. Fakat sabit katsayl lineer dif denklemlerin her zaman analitik cozumu vardir.

Herhangibir dif denklemi cozmek icin cesitli yontemleri vardr. Bu yontemlerden birisi dif denklemin cozumu $x(t)$ fonksiyonunu t nin seriye acilmis Sekli kabul edip serinin katsaylarn bulmaktir. Yani

$$X(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \ldots\ldots. + a_nt^n + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + \ldots\ldots. + na_nt^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = +2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + \ldots\ldots. + n(n-1)a_nt^{n-2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots.$$

Bu Sekilde elde edilen turevler dif denklemde yerine konursa

$$A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + \ldots\ldots\ldots = 0$$

elde edilir.

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ ,\ldots\ldots\ldots A_n = 0,\ \ldots..$$

yapilarak $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots.. a_n,\ ,\ldots.$ katsayilari hesaplanir.

$$X(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \ldots\ldots. + a_n t^n + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \ldots\ldots. + n a_n t^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = +2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \ldots\ldots. + n(n-1)a_n t^{n-2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots.$$

Bu Sekilde elde edilen turevler dif denklemde yerine konursa

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots\ldots\ldots = 0$$

elde edilir.

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ ,\ldots\ldots\ldots A_n = 0,\ \ldots..$$

yapilarak $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots.. a_n,\ ,\ldots.$ katsayilari hesaplanir.

SABIT KATSAYILI LINEER DIFERANSIYEL DENKLEMLERIN COZUMLERI.

Lineer sabit katsayili dif denklemler, $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_1, a_0$
sabit saylar olmak zere

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots. a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0(a18)$$

formundadirlar. Bu tip denklemler elektrik, elektronik ve dinamik sistemlerin modellemesinde ortaya cikarlar. Bu yuzden diger tip denklemlere oranla daha cok kullanilirlar.

Yukarda anlatlan seriye acilma islemi, lineer sabit katsayili dif denklemlere uygulanrsa cozumun $X(t) = ce^{\alpha t}$ Seklinde oldugu yani

$$x(t) = 1 + \alpha x + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \frac{(\alpha t)^4}{4!} + \ldots\ldots \frac{(\alpha t)^n}{n!} + \frac{(\alpha t)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\ldots$$

oldugu gorulur. Dolaysyla lineer sabit katsayili dif denklemler icin $x(t) = ce^{\alpha t}$ Seklinde bir cozum aramak gerekir. $x(t) = ce^{\alpha t}$ ifadesi tretilerek
$x(t) = ce^{\alpha t}$ $\frac{dx(t)}{dt} = c\alpha e^{\alpha t}$ $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = c\alpha^2 e^{\alpha t}$ .... $\frac{dx^n(t)}{dt^n} = c\alpha^n e^{\alpha t}$
(18) de yerine konursa

$$c\alpha^n e^{\alpha t} + a_{n-1} c\alpha^{n-1} e^{\alpha t} + a_{n-2} c\alpha^{n-2} e^{\alpha t} + a_1 c\alpha e^{\alpha t} + a_0 c e^{\alpha t} (29)$$

elde edilir. (29) un her iki yani $(\frac{1}{c} e^{-\alpha t})$ ile carpilirsa. $(c \neq 0)$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \ldots\ldots. + a_1 \alpha + a_0 = 0(30)$$

(30) esitligini saglayan butun α lar (18) dif denkleminin cozumunu verir. (30) polinomunun n tane koku oldugundan dif denklemin de n tane cozumu vardr. Toplam cozumu cozumlerin toplamidir. (30) polinomunun kokleri $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots \alpha_{n-1},\ \alpha_n$ olsun. O halde (18) dif denkleminin cozumu de

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 e^{\alpha_3 t} + \ldots\ldots c_n e^{\alpha_n t}$$

Seklindedir. Burada $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_n$ tamamen keyfi sabitlerdir. Yani $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_n$ katsaylari $-\infty$, $+\infty$ arasnda herhangibir degeri alabilirler. Butun aldiklari degerler icin dif denklem saglanir.

Pratikte cogu kez α kokleri komplex cikar. Bu durumda cozum $x(t)$ nin icinde sinus ve kosinslu ifadeler bulunur. Polinomun bir kok komlex ise o komplex kokun eslenigide muhakkak koktur. Ornek olarak

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

dif denkleminin karakteristik polinomu.

$$\alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

dur. Polinomun kokleri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dur.

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

olur. $\alpha_1 = r + jw, \alpha_2 = r - jw$ Seklinde komplex olsun. **bu halde $\mathbf{c_1 = c_2 *}$ olacaktr**. $*$ eslenik

anlaminda, $j = \sqrt{(-1)}$ anlamindadirlar.
$c_1 = m + jn$ ise $c_2 = m - jn$ olacaktir.

$$x(t) = (m + jn)e^{(r+jw)t} + (m - jn)e^{(r-jw)t} + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

$$x(t) = e^{rt}((m + jn)e^{jwt} + (m - jn)e^{-jwt}) + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

$$x(t) = e^{rt}((m + jn)[\cos(wt) + j\sin(wt)] + (m - jn)[\cos(wt) + j\sin(wt)]) + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

$$x(t) = e^{rt}(m\cos(wt) - n\sin(wt) + j[n\cos(wt) + m\sin(wt)] + m\cos(wt) - n\sin(wt)$$

$$-j[n\cos(wt) + m\sin(wt)]) + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

$$x(t) = e^{rt}(2m\cos(wt) - 2n\sin(wt)) + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

$$x(t) = e^{rt}(A\cos(wt) + B\sin(wt)) + c_3 e^{\alpha_3 t}$$

$A = 2m,\ B = -2n$ Sekline gelir. A, B, C_3 keyfi sabitlerdir.

Ornek problem 251

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 52x = 0$$

sabit katsayl dif denklemini $x(0) = 0$ $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \dot{x}(0) = -1,$ $\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0} = 2$ Sartlarini saglayan cozmunu bulunuz.
Karakteristik denklem $q^3 - 8q^2 + 29q - 52 = 0$ ve kokler $q1 = 4,\ q_2 = 2 + 3j,\ q_3 = 2 - 3j$ dir. cozum.

$$x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{(2+3j)t} + c_3 e^{(2-3j)t}$$

veya

$$x(t) = c_1 e^{4t} + e^{2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t))$$

$x(0) = 1$ konursa ($t = 0$ icin $x(0) = 1$)

$$c_1 e^{4\ 0} + e^{2\ 0}\big(A\cos(3\ 0) + B\sin(3\ 0)\big) = 1$$

$$c_1 + A = 1(d11)$$

elde edilir.
$\dot{x}(0) = -1$ Sartini kullanabilmek icin $x(t)$ nin turevini almak gerekir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = 4c_1 e^{4t} + 2e^{2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + e^{2t}(-3A\sin(3t) + 3B\sin(3t))$$

$$\dot{x}(t) = 4c_1 e^{4t} + e^{2t}((2A + 3B)\cos(3t) + (2B - 3A)\sin(3t))$$

$t = 0$ icin $\dot{x}(0) = -1$ koyarak

$$\dot{x}(0) = 4c_1 e^{4\ 0} + e^{2\ )}\big((2A + 3B)\cos(3\ 0) + (2B - 3A)\sin(3\ 0)\big)$$

$$4c_1 + 2A + 3B = -1(d21)$$

$\dot{x}(0) = -1$ Sartini kullanabilmek icin $x(t)$ nin ikinci turevin ($\dot{x}(t)$ nin birinci turevini) almak gerekir.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 16c_1 e^{4t} + 2e^{2t}[(2A + 3B)\cos(3t) + (2B - 3A)\sin(3t)]$$

$$+ e^{2t}[-3(2A + 3B)\sin(3t) + 3(2B - 3A)\sin(3t)]$$

$$= 16c_1 e^{4t} + e^{2t}[(4A + 6B + 6B - 9A)\cos(3t) + (4B - 6A - 6A - 9B)\sin(3t)]$$

oldugundan

$$= 16c_1 e^{4\ 0} + e^{2\ 0}[(4A + 6B + 6B - 9A)\cos(3\ \ 0) + (4B - 6A - 6A - 9B)\sin(3\ \ 0)]$$

$$16c_1 + 4A + 6B + 6B - 9A = 2 \Rightarrow 16c_1 - 9A + 12B = 2(d31)$$

Yukardaki (d11,d21,d31) esitlikleri 3 bilinmeyenli 3 denklem olusturur. Bilinen yontemlerle cozulebilir.

$$c_1 + A = 1(d11)$$

$$4c_1 + 2A + 3B = -1(d21)$$

$$16c_1 - 9A + 12B = 2(d31)$$

Cozum $A = -0.3529 \quad B = -1.9020 \quad c_1 = 1.3529$ Denklemleri matris formunda yazarak bilgisayarda cozmek icin daha elveriSldr.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -9 & 12 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cozum benzer Sekilde $A = -0.3529 \quad B = -1.9020 \quad c_1 = 1.3529$ olarak bulunur.
Dolaysyla dif denklemin cozumu

$$x(t) = 1.3529e^{4t} + e^{2t}(-0.3529\cos(3t) - 1.90\sin(3t))$$

olarak elde edilir.

Ornek problem 252

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

dif denklemini $x(0) = 0 \quad \dot{x}\ (0) = 0 \quad x(2) = 0$ Sartlarn saglayan cozumunu bulun.
cozum: Once karakteristik denklemi yazmak gerekir. $q^3 - 5q^2 + 2q + 8 = 0 \Rightarrow q_1 = 4 \quad q_2 = 2 \quad q_3 = -1$

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-0} + c_2 e^{2\ \ 0} + c_3 e^{4\ \ 0} \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0(d61)$$

$$x(2) = 10 \Rightarrow c_1 e^{-2} + c_2 e^{2\ \ 2} + c_3 e^{4\ \ 2} = 10 \Rightarrow 0.135c_1 + 54.5c_2 + 2981c_3 = 10(d62)$$

$\dot{x}\ (0) = 0$ Sartini kullanmak icin $x(t)$ nin birinci turevini almak gerekir.

$$\Rightarrow \dot{x}\ (t) = \frac{dx}{dt} = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + 4c_3 e^{4t}\ \ \dot{x}\ (0) = 0 \Rightarrow -c_1 e^0 + 2c_2 e^0 + 4c_3 e^0 = 0$$

Buradan da

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0(d63)$$

ellde edilir. (d61,d62,d63) esitlikleri beraberce matris formunda yazilarak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.135 & 54.5 & 2981 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ve cozum $c_1 = 0.0023 \quad c_2 = -0.0058 \quad c_3 = 0.0035$ olarak elde edilir. Dif denklemin cozumu:
$x(t) = 0.0023e^{-t} - 0.0058e^{2t} + 0.0035e^{4t}$ olarak elde edilir.

Ornek Problem 253

$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$ dif denklemini $x(0) = 1 \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0$ Sartlarini saglayan cozumunu bulun.

$$q^2 - 6q + 10 = 0 \Rightarrow q_1 = 3 + j \quad q_2 = 3 - j \Rightarrow x(t) = c_1 e^{(3+j)t} + c_2 e^{(3-j)t} = e^{3t}(A\cos(t) + B\sin(t))$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow e^{3\ \ 0}(A\cos(0) + B\sin(0)) \ = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad e^{3\frac{\pi}{2}}(A\cos(\frac{\pi}{2}) + B\sin(\frac{\pi}{2})) \;= 0 \Rightarrow e^{3\frac{\pi}{2}}B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Dolayisiyla cozm $x(t) = e^{3t}\cos(t)$ olarak elde edilir.

Ornek Problem 254

$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$ dif denklemini $x(0) = 1 \quad x(1) = 10$ baslangic sartlarini saglayan cozumunu bulun.

$q^2 - 2q - 2 = 0 \Rightarrow q_1 = 2 \;\; q_2 = -1$ ve cozum $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ olarak elde edilir.

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \qquad x(1) = 10 \Rightarrow c_1e^{2\ 1} + c_2e^{-1} = 10 \Rightarrow 7.3891c_1 + 0.3679c_2 = 10$$

Iki bilinmeyenli iki denklem $c_1 \quad c_2$ cozlrse.

$$c_1 = 1.373 \quad c_2 = -0.3736 \quad ve \;\; x(t) = 1.373e^{2t} - 0.373e^{-t}$$

olarak elde edilir.

Ornek Problem 255

$\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ dif denklemini $x(0) = 0$ sartini saglayan cozumunu bulun.

$q + 2 = 0 \;\Rightarrow q = -2 \;\;\Rightarrow x(t) = ce^{-2t} \qquad x(0) = 10 \Rightarrow ce^{-2\ 0} = 10 \qquad \Rightarrow c = 10$ cozum $x(t) = 10e^{-2t}$

Ornek Problem 256

$\frac{dx}{dt} - 16x = 0 \quad x(1) = -2 \quad \Rightarrow 8q - 16 = 0 \quad x(t) = ce^{2t}$

$-2 = ce^{2(-1)t} \qquad c = \frac{-2}{e^2} = -0.270 \Rightarrow x(t) = -0.27e^{2t}$

Ornek Problem 257

$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0$ dif denklemini $x(0) = 1$ ve $\dot{x}\,(0) = 10$ Sartlar icin cozunuz.

Cozum: Karakteristik denklem ve kokleri $q^2 - 6q + 9 = 0 \quad \to q_1 = 3 \;\; q_2 = 3$ yani kokler birbirine esit (katli kok). Cozum $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{3t}$ Seklinde degil, fakat $x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$ Seklindedir. Yani ilave olarak bir t carpan gelmistir.

$x(0) = 1 \Rightarrow c_1e^0 + c_2 0e^0 = 1 \to c_1 + 0 = 1 \to c_1 = 1$

$x(t) = 3c_1e^{3t} + c_2e^{3t} + 3c_2te^{3t} = e^{3t}(3c_1 + c_2) + 3c_2te^{3t}$

$\dot{x}\,(0) = 10 \Rightarrow e^0(3c_1 + c_2) + 3c_2 0e^0 \Rightarrow c_2 = 7$

Dolayisiyla cozum $x(t) = e^{3t} + 7te^{3t}$ Seklinde olacaktr.

Ornek Problem 258

$\frac{d^3x}{dt^3} - 6\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} - 8x = 0$

$q^3 - 6q^2 + 12q - 8 = 0 \to q_1 = 2,\;\; q_2 = 2,\;\; q_3 = 2$

$x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3t^2e^{2t}$

Ornek Problem 259

$\frac{d^4x}{dt^4} + 16\frac{d^3x}{dt^3} + 96\frac{d^2x}{dt^2} + 256\frac{dx}{dt} + 256x = 0$

$q^4 + 16q^3 + 96q^2 + 256q - 256 = 0 \to q_1 = -4,\;\; q_2 = -4,\;\; q_3 = -4 \quad q^4 = -4$

$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t} + c_3t^2e^{-4t} + c_4t^3e^{-4t}$

Ornek Problem 260

$\frac{d^5x}{dt^5} - 4\frac{d^4x}{dt^4} + 10\frac{d^3x}{dt^3} + 64\frac{d^2x}{dt^2} + -247\frac{dx}{dt} + 676x = 0$

$q^5 - 4q^4 + 10q^3 + 64q^2 - 247q + 676 = 0 \longrightarrow q_1 = -4,\ \ q_2 = 2+3j,\ \ q_3 = 2-3j,\ \ q_4 = 2+3j,\ \ q_5 = 2-3j$

$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{2+3j} + c_3e^{2-3j} + c_4te^{2+3j} + c_5te^{2-3j}$

$= c_1e^{-4t} + e^{2t}(A_1\cos(3t) + B_1\sin(3t)) + te^{2t}(A_2\cos(3t) + B_2\sin(3t))$

Ornek Problem 261

$\frac{d^2x}{dt^2} + 25x$ x(t)=?

$q^2 + 25 = 0 \longrightarrow q_1 = -5j,\ \ q_2 = 5j \Rightarrow x(t) = c_1e^{-5jt} + c_2e^{5jt} = A\cos(5t) + B\sin(5t)$

Ornek Problem 262

$\frac{d^4x}{dt^4} + 16\frac{d^3x}{dt^3} + 96\frac{d^2x}{dt^2} + 256\frac{dx}{dt} + 256x = 0$

$q^4 + 16q^3 + 96q^2 + 256q - 256 = 0 \longrightarrow q_1 = -4,\ \ q_2 = -4,\ \ q_3 = -4\ \ \ q^4 = -4 \Rightarrow$

$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t} + c_3t^2e^{-4t} + c_4t^3e^{-4t}$

Ornek Problem 263

$\frac{d^4x}{dt^4} + 18\frac{d^2x}{dt^2} + 81x = 0$

$q^4 + 18q^2 + 81 = 0 \longrightarrow q_1 = 3j,\ \ q_2 = -3j,\ \ q_3 = 3j\ \ \ q^4 = -3j \Rightarrow$

$x(t) = c_1e^{3jt} + c_2e^{-3jt} + t\left(c_3e^{3jt} + c_4e^{-3jt} \right) =$

$A_1\cos(3t) + B_1\sin(3t) + t\left(A_2\cos(3t) + B_2\sin(3t) \right)$

Ozel cozumu bulma yontemi 1: L(D) operator yontemi

$$\frac{1}{[1-\phi(D)]} = 1+\phi(D)+[\phi(D)]^2+[\phi(D)]^3+\cdots$$

$$\frac{1}{[1+\phi(D)]} = 1-\phi(D)+[\phi(D)]^2-[\phi(D)]^3+\cdots$$

$D^2y-3Dy+2y=4x^2 \rightarrow [D^2-3D+2]y=4x^2 \rightarrow y=\frac{1}{D^2-3D+2}4x^2=\frac{1}{2+D^2-3D}4x^2$

$$=\frac{1}{2\left(1+\frac{D^2-3D}{2}\right)}4x^2=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\Phi)}4x^2=\frac{1}{2}\left(1-\Phi+\Phi^2-\Phi^3+\Phi^4-....\right)4x^2 \qquad \text{(A21)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(4x^2-\Phi(4x^2)+\Phi^2(4x^2)-\Phi^3(4x^2)+\Phi^4(4x^2)-....\right)$$

$$\Phi(4x^2)=\frac{D^2-3D}{2}4x^2=\frac{1}{2}(D^2-3D)4x^2=\frac{1}{2}[D^2(4x^2)-3D(4x^2)]$$

D operatoru turev demektir. D^2 ikinci turev demektir. $D^2(4x^2)$ ve $3D(4x^2)$ ifadelerini teker teker hesaplayalim.

$$D^2 4x^2=\frac{d^2}{dx^2}4x^2=8$$

$$3D\,4x^2=3\frac{d}{dx}(4x^2)=24x$$

Sonuc $\Phi(4x^2)=\frac{1}{2}(D^2 4x^2-3D\,4x^2)=\frac{1}{2}(8-24x)$

Simdi de $\Phi^2 4x^2$ yi hesaplayalim

$$\Phi^2=\left(\frac{D^2-3D}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^4-6D^3+9D^2)$$

$$\Phi^2(4x^2)=\frac{1}{4}(D^4-6D^3+9D^2)(4x^2)=\frac{1}{4}9D^2(4x^2)=18$$

$4x^2$nin ucuncu dorduncu turevleri sifir oldugundan $D^3(4x^2)$, $D^4(4x^2)$ sifir olacaktir.
Ayrica $\Phi^3(4x^2)$, $\Phi^4(4x^2)$ lerde sifir olacaktir, cunku ucuncu dorduncu besinci ,,,, turevleri ihtiva edeceklerdir.
(A21) denklemine tekrar donersek.

$$y=\frac{1}{2}\left(1-\Phi+\Phi^2-\Phi^3+\Phi^4-....\right)4x^2 \quad =\frac{1}{2}\left(4x^2-\frac{1}{2}(8-24x)+18\right)=2x^2+6x+7$$

Ozel cozum $y_O=2x^2+6x+7$

olur. Bu ifadenin her iki yanının x e göre integrali alınırsa,

$$D^{-1}v = \int v dx \tag{4.32}$$

olur. (4.32) ifadesinden görüldüğü gibi D^{-1} bir integral operatörüdür. Örneğin,

$$D(x^5 + x) = 5x^4 + 1, \qquad D^{-1}(x^5 + x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2}$$

dir. Şimdi (4.26)' in ikinci yanındaki $B(x)$ fonksiyonunun durumuna göre v özel çözümünün nasıl bulunacağını görelim.

Teorem 4.4. $L(D)$ sabit katsayılı bir operatör ve $L(a) \neq 0$ olsun. Eğer (4.26) denkleminin sağ yanındaki fonksiyon e^{ax} şeklinde ise, (4.26)'in özel çözümü,

$$v = \frac{1}{L(a)} e^{ax} \tag{4.33}$$

şeklindedir.

Teoremin ispatı kolay olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek. 4.16.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{7x}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin homojen kısmının karakteristik denklemi

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

şeklindedir. Bu karekteristik denklemin kökleri: $a_1 = 1$ ve $a_2 = 2$ dir. Buna göre tamamlayıcı fonksiyon

$$u = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

dir. Özel çözüm ise (4.33)' e göre,

$$
\begin{aligned}
(D^2 - 3D + 2)v &= e^{7x} \\
v &= \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{7x} \\
&= \frac{1}{30} e^{7x}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Böylece verilen denklemin genel çözümü,

$$
\begin{aligned}
y &= u + v \\
&= c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{30} e^{7x}
\end{aligned}
$$

olur.

Eğer (4.26) denkleminin sağ yanındaki fonksiyon, yani

$$B(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n \tag{4.34}$$

şeklinde ise, $1/L(D)$ operatörü seriye açılır. Bunun için önce,

$$\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{D^k} \cdot \frac{1}{[1 \pm \phi(D)]}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.35}$$

şeklinde yazılır. Genel matematik derslerinden bilindiği gibi,

$$\frac{1}{[1 + \phi(D)]} = 1 - \phi(D) + [\phi(D)]^2 - [\phi(D)]^3 + \cdots \tag{4.36}$$

ve

$$\frac{1}{[1 - \phi(D)]} = 1 + \phi(D) + [\phi(D)]^2 + [\phi(D)]^3 + \cdots \tag{4.37}$$

biçiminde seriye açılır. Buna göre (4.26)'in özel çözümü,

$$v = \frac{1}{L(D)} B(x) = \frac{1}{D^k} [1 \pm \phi(D) + [\phi(D)]^2 \pm [\phi(D)]^3 + \cdots] B(x) \tag{4.38}$$

formülünden bulunur. $B(x)$ polinomunun derecesi p olduğundan (4.36) ve (4.37) serilerini p yinci dereceye kadar yazmak yeterlidir. Çünkü bu serilerin p den daha büyük dereceli terimleri sıfır olur.

Örnek. 4.17.

$$(D^2+9)y = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin homojen kısmının (yani, $(D^2+9)u = 0$ kısmının) karakteristik denklemi,

$$a^2 + 9 = 0$$

olup, kökleri $a_1 = 3i$ ve $a_2 = -3i$ dir. Buna göre tamamlayıcı fonksiyon,

$$u = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

olur. Şimdi de

$$(D^2+9)v = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

denkleminin özel çözümünü bulalım. Bu denklemden v bilinmeyeni çözülürse,

$$v = \frac{1}{D^2+9}(x^3 - 2x^2 + x - 1)$$

elde edilir. Şimdi bu ifadeyi önce $1/9$ parantezine alıp sonra seriye açalım, bu durumda

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+(\frac{D}{3})^2}(x^3 - 2x^2 + x - 1) \\
&= \frac{1}{9}\left[1 - \left(\frac{D}{3}\right)^2 + \left(\frac{D}{3}\right)^4 - \cdots\right](x^3 - 2x^2 + x - 1) \\
&= \frac{1}{9}\left[x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{1}{9}(6x-4)\right] \\
v &= \frac{1}{9}\left(x^3 - 2x^2 + \frac{x}{3} - \frac{5}{9}\right)
\end{aligned}$$

özel çözümü bulunur. Böylece genel çözüm,

$$\begin{aligned}
y &= u + v \\
&= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{9}\left(x^3 - 2x^2 + \frac{x}{3} - \frac{5}{9}\right)
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.5. $L(D)$ sabit katsayılı bir operatör ve f, x'in herhangi bir fonksiyonu ise,

$$\frac{1}{L(D)}e^{ax}f(x) = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}f(x) \tag{4.39}$$

olur. Burada a reel ya da kompleks sabittir.

Örnek. 4.18.

$$(D^2-1)y = (x^3+2x^2+x+6)e^{2x}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin homojen kısmın denklemi

$$(D^2-1)u = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin karakteristik denklemi, $a^2-1=0$ olup, kökleri $a_1=-1$, $a_2=1$ dir. Buna göre tamamlayıcı fonksiyon

$$u = c_2e^{-x} + c_2e^{x}$$

dir. Şimdi v özel çözümünü bulalım.

$$(D^2-1)v = (x^3+2x^2+x+6)e^{2x}$$

den

$$v = \frac{1}{D^2-1}(x^3+2x^2+x+6)e^{2x}$$

yazılır. Teorem (4.5) den

$$\begin{aligned} v &= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-1}(x^3+2x^2+x+6) \\ &= e^{2x}\frac{1}{D^2+4D+3}(x^3+2x^2+x+6) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} v &= e^{2x}\frac{1}{3\left(1+\frac{D^2+4D}{3}\right)}(x^3+2x^2+x+6) \\ &= \frac{1}{3}e^{2x}\left(1-\frac{D^2+4D}{3}+\frac{(D^2+4D)^2}{9}-\frac{(D^2+4D)^3}{27}\cdots\right)(x^3+2x^2+x+6) \\ &= \frac{1}{3}e^{2x}\left(x^3+2x^2+x+6-\frac{1}{3}(6x+4+12x^2+16x+4)+\frac{1}{9}(48+96x+64)-\frac{384}{27}\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{2x}\left(x^3-2x^2+\frac{13}{3}x+\frac{14}{9}\right) \end{aligned}$$

özel çözümü bulunur. Buna göre, genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{e^{2x}}{3}\left(x^3 - 2x^2 + \frac{13}{3}x + \frac{14}{9}\right)$$

şeklindedir.

Şimdi,

$$B(x) = e^{ax} \quad \text{ve} \quad L(a) = 0$$

olması halini ele alalım. Bu halde v özel çözümünü bulmak için teorem (4.5) uygulanır. $L(a) = 0$ ise a, $L(D)$ nin köküdür. Eğer, a, $L(D)$ nin k katlı kökü ise, bu durumda,

$$L(D) = (D-a)^k \Psi(D) \tag{4.40}$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Burada $\Psi(a) \neq 0$ dır. Eğer $f(x) = 1$ olduğu kabul edilerek teorem (4.5) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L(D)} e^{ax}.1 &= \frac{1}{(D-a)^k \Psi(D)} e^{ax}.1 \\
&= \frac{1}{(D-a)^k} \frac{1}{\Psi(a)} e^{ax}.1 \\
&= \frac{e^{ax}}{\Psi(a)} \frac{1}{D^k}.1
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha önce $1/D$ nin integral operatörü olduğunu görmüştük. Buna göre, $(1/D^k) \cdot 1$ demek 1'in k defa integrali alınacak demektir. Buna göre yukarıdaki eşitlikte $(1/D^k) \cdot 1$ yerine $x^k/k!$ yazılırsa

$$\frac{1}{L(D)} e^{ax}.1 = \frac{e^{ax}}{\Psi(a)} \frac{x^k}{k!} \tag{4.41}$$

bulunur.

Örnek. 4.19.

$$(D-3)^2(D+2)y = e^{3x}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin homojen kısmının karakteristik denklemi

$$(a-3)^2(a+2)=0$$

olup, kökleri, $a_1=a_2=3$ ve $a_3=-2$ dir. Buradan tamamlayıcı fonksiyon

$$u=(c_0+c_1x)e^{3x}+c_2e^{-2x}$$

olarak yazılır. Şimdi özel çözümü bulalım.

$$(D-3)^2(D+2)v=e^{3x}$$

den,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{(D-3)^2(D+2)}e^{3x}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{(D-3)^2}\cdot\frac{1}{5}e^{3x}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{5}e^{3x}\frac{1}{((D+3)-3)^2}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{5}e^{3x}\frac{1}{D^2}\cdot 1 \\ &= \frac{x^2}{10}e^{3x} \end{aligned}$$

özel çözümü bulunur. O halde genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= u+v \\ &= (c_0+c_1x)e^{3x}+c_2e^{-2x}+\frac{x^2}{10}e^{3x} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.6. $L(D^2)$, D^2'nin sabit katsayılı bir polinomu olsun. Eğer $L(-a^2)\neq 0$ ise,

$$\frac{1}{L(D^2)}\left\{\begin{array}{c}\sin ax\\ \cos ax\end{array}\right\}=\frac{1}{L(-a^2)}\left\{\begin{array}{c}\sin ax\\ \cos ax\end{array}\right\} \tag{4.42}$$

olur. Burada a reel ya da kompleks sayıdır.

Örnek. 4.20.

$$(D^6 - D^4)y = \sin 3x + \cos 5x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklem,

$$a^6 - a^4 = 0$$

olup, kökleri, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = 1$ dir. Tamamlayıcı fonksiyon,

$$u = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4e^{-x} + c_5e^x$$

şeklindedir. Özel çözüm,

$$(D^6 - D^4)v = \sin 3x + \cos 5x$$
$$v = \frac{1}{D^6 - D^4}(\sin 3x + \cos 5x)$$

denkleminden,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{D^6 - D^4}\sin 3x + \frac{1}{D^6 - D^4}\cos 5x \\ &= \frac{1}{(-(3)^2)^3 - (-(3)^2)^2}\sin 3x + \frac{1}{(-(5)^2)^3 - (-(5)^2)^2}\cos 5x \\ &= -\frac{1}{810}\sin 3x - \frac{1}{16\,250}\cos 5x \end{aligned}$$

olarak bulunur. Genel çözüm,

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4e^{-x} + c_5e^x - \frac{1}{810}\sin 3x - \frac{1}{16\,250}\cos 5x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Eğer, $L(-a^2) = 0$ ya da $f(x) = x^p(\sin ax + \cos ax)$ şeklinde ise Teorem (4.6) uygulanamaz. Bu durumda $\sin ax$ ve $\cos ax$ fonksiyonları yerine onların üstel fonksiyonlar cinsinden değeri olan,

$$\cos ax = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2},$$
$$\sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$$

ifadeleri yazılır ve Teorem (4.5) den faydalanılır.

Örnek. 4.21.

$$(D^2+1)\,y=\cos x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin karakteristik denklemi

$$a^2+1=0$$

olup, kökleri, $a_1=i, a_2=-i$ dir. Buradan tamamlayıcı fonksiyon

$$u=c_1\cos x+c_2\sin x$$

olarak bulunur. Şimdi v özel çözümünü bulalımm. $L(D^2)=D^2+1$ olup $L(-1)=0$ dır. Bu nedenle Teorem (4.6) uygulanamaz. Bu nedenle $\cos x$'in üstel fonksiyon cinsinden karşılığını yazacağız. Bu durumda,

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

yazılır. Bu ifade verilen diferensiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$(D^2+1)y=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$$

olur. Buradan,

$$v=\frac{1}{D^2+1}\cdot\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$$

yazılır. Bu durumda $f(x)=1$ kabul edilerek teorem (4.5) uygulanabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}v&=\frac{1}{2}e^{ix}\cdot\frac{1}{(D+i)^2+1}\cdot 1+\frac{1}{2}e^{-ix}\cdot\frac{1}{(D-i)^2+1}\cdot 1\\&=\frac{1}{2}e^{ix}\cdot\frac{1}{D^2+2iD}\cdot 1+\frac{1}{2}e^{-ix}\cdot\frac{1}{D^2-2iD}\cdot 1\end{aligned}$$

elde edilir. Her terim paydasının eşleniği ile çarpılırsa,

$$v=\frac{1}{2}\,e^{ix}\,\frac{D^2-2iD}{D^4+4D^2}.1+\frac{1}{2}\,e^{-ix}\,\frac{D^2+2iD}{D^4+4D^2}.1$$

olur. Bu operatörler seriye açılırsa,

$$v = \frac{1}{2}e^{ix}(D^2 - 2iD)\frac{1}{4D^2}\left(1 - \frac{D^2}{4} + \cdots\right)\cdot 1 + \frac{1}{2}e^{-ix}(D^2 + 2iD)\frac{1}{4D^2}\left(1 - \frac{D^2}{4} + \cdots\right)\cdot 1$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{16}e^{ix}(D^2 - 2iD)x^2 + \frac{1}{16}e^{-ix}(D^2 + 2iD)x^2 \\ &= \frac{1}{16}e^{ix}(2 - 4ix) + \frac{1}{16}e^{-ix}(2 + 4ix) \\ &= \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix}) - \frac{ix}{4}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{4}\cos x + \frac{x}{2}\sin x \end{aligned}$$

özel çözümü bulunur. Genel çözüm,

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{x}{2}\sin x$$

olarak bulunur.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$

   (Cevap: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3$)

2. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

   (Cevap: $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$)

3. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

   (Cevap: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$)

4. $y'' + 3y = -48x^2 e^{3x}$

   (Cevap: $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x + (-4x^2 + 4x - \frac{4}{3})e^{3x}$

5. $y'' - y' = -3$

   (Cevap: $y = c_1 + c_2 e^{x} + 3x$)

6. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$

(Cevap: $y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2 e^{x/2}$)

7. $y'' + 4y = 3\sin 2x$

(Cevap: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{3}{4}x \cos 2x$)

8. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

(Cevap: $y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{4}xe^x \sin 2x$)

9. $y'' + 2y' + y = \sin x + 3\cos 2x$

(Cevap: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\sin 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$)

10. $y'' + y = \cos x - \sin 2x$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

(Cevap: $y = -\frac{1}{6}\cos x - \frac{\pi}{4}\sin x + \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$)

4.4.1 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu bölümde ikinci tarafı özdeş olarak sıfır olmayan n.mertebeden sabit katsayılı lineer

$$L(D)y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = f(x) \tag{4.43}$$

denkleminin özel çözümünün bulunması problemini tekrar ele alacağız. Bundan önceki bölümde operatör yöntemi ile (4.43) denkleminin özel çözümlerinin nasıl bulunduğunu gördük. Belirsiz katsayılar yöntemi operatör yöntemine göre uygulanabildiği problemlerde daha kullanışlı bir yöntemdir. Bu bölümde, $f(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki özel halleri için belirsiz katsayılar yöntemini göreceğiz.

1. $f(x) = Ae^{ax}$ olsun. Bu durumda özel çözüm için uygun form.

$$v = \beta x^r e^{ax}$$

dir. Burada r; v özel çözümündeki her terimi u tamamlayıcı fonksiyondaki her terimden farklı yapacak şekilde seçilen en küçük pozitif tamsayıdır. Özel çözüm için seçilen uygun form, yani $v = \beta x^r e^{ax}$

Ozel cozumu bulma yontemi 2: Belirsiz Katsayilar yontemi

$y'' - 3y' + 2y = 4x^2$ Burada y icin bir tahmin yapmak zorundayiz. Tahmini y ifadesi

$y = Ax^2 + Bx + C$ seklindedir.

$y' = 2Ax + B$,

$y'' = 2A$,

$y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

$2A - 3(2Ax+B) + 2(Ax^2+Bx+C) = 4x^2$

$2Ax^2 + (-6A+2B)x + (2A-3B+2C) = 4x^2$

$2A = 4 \rightarrow A = 2$

$-6A + 2B = 0 \rightarrow B = 6$

$2A - 3B + 2C = 0 \rightarrow C = 7$

$y = Ax^2 + Bx + C = 2x^2 + 6x + 7$

------------------- ---------

$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ Burada y icin bir tahmin y= **Ae^{2x}**

$y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x}$ Burada y icin bir tahmin y= **Ae^{3x}**

$y'' - 3y' + 2y = 7e^{2x} + 10e^{5x}$ Burada y icin bir tahmin y= **$Ae^{2x} + Be^{5x}$**

$y'' - 3y' + 2y = 15x^3 + 7e^{2x} + 10e^{5x}$ Burada y icin bir tahmin **$y = Ae^{2x} + Be^{5x} + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$**

$y'' - 3y' + 2y = \sin 3x + \cos 8x$ Burada y icin bir tahmin y= **$A\sin 3t + B\cos 3t + C\sin 8t + D\cos 8t$**

$y'' - 3y' + 2y = e^{6x}\sin 3x$ Burada y icin bir tahmin y= **$e^{6x}(A\sin 3t + B\cos 3t)$**

6. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$

(Cevap: $y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2 e^{x/2}$)

7. $y'' + 4y = 3\sin 2x$

(Cevap: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$)

8. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

(Cevap: $y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{4}xe^x \sin 2x$)

9. $y'' + 2y' + y = \sin x + 3\cos 2x$

(Cevap: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\sin 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$)

10. $y'' + y = \cos x - \sin 2x, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

(Cevap: $y = -\frac{1}{6}\cos x - \frac{\pi}{4}\sin x + \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$)

4.4.1 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu bölümde ikinci tarafı özdeş olarak sıfır olmayan n.mertebeden sabit katsayılı lineer

$$L(D)y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = f(x) \tag{4.43}$$

denkleminin özel çözümünün bulunması problemini tekrar ele alacağız. Bundan önceki bölümde operatör yöntemi ile (4.43) denkleminin özel çözümlerinin nasıl bulunduğunu gördük. Belirsiz katsayılar yöntemi operatör yöntemine göre uygulanabildiği problemlerde daha kullanışlı bir yöntemdir. Bu bölümde, $f(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki özel halleri için belirsiz katsayılar yöntemini göreceğiz.

1. $f(x) = Ae^{ax}$ olsun. Bu durumda özel çözüm için uygun form.

$$v = \beta x^r e^{ax}$$

dir. Burada r; v özel çözümündeki her terimi u tamamlayıcı fonksiyondaki her terimden farklı yapacak şekilde seçilen en küçük pozitif tamsayıdır. Özel çözüm için seçilen uygun form, yani $v = \beta x^r e^{ax}$

fonksiyonu (4.43) denkleminin bir çözümü olacağından v ve türevleri (4.43) denkleminde yerine yazılır ve x değişkeninin aynı kuvvetten olan katsayıları birbirine eşitlenirse β sabiti bulunur. Böylece, (4.43) denkleminin keyfi parametreden bağımsız özel çözümü bulunmuş olur.

2. $f(x) = b_0x^r + b_1x^{r-1} + \cdots + b_r$ olsun. Bu durumda özel çözüm için uygun form $v = A_0x^r + A_1x^{r-1} + \cdots + A_r$ dir. (4.43) denkleminde v ve türevleri yerine yazılır ve x değişkeninin aynı kuvvetten olan katsayıları birbirine eşitlenirse x^r için $a_nA_0 = b_0$, $b_0 \neq 0$ elde edilir. Buradan $A_0 = b_0/a_n$ bulunur. Aynı yolla $A_1, A_2, \ldots, A_r$ sabitleri de $x^{r-1}, x^{r-2}, \ldots, x^0$ terimlerinin katsayılarından hesaplanır. Eğer (4.43) denkleminin homojen kısmının çözümü bir sabitse, A_0 bulunamaz. Bu durumda, v özel çözümünün derecesi bir artırılarak $r+1$ olarak alınır. Daha genel olarak, eğer 0 (sıfır) karakteristik denklemin $s-$katlı kökü ise v için uygun form

$$v = x^s(A_0x^r + A_1x^{r-1} + \cdots + A_r)$$

şeklinde olur.

3. Eğer $f(x) = e^{ax}(b_0x^r + b_1x^{r-1} + \cdots + b_r)$ şeklinde ise, v özel çözümü için uygun form,

$$v = x^s e^{ax}(A_0x^r + A_1x^{r-1} + \cdots + A_r)$$

şeklinde olacaktır.

4. Eğer $f(x) = e^{ax}(b_0x^r + b_1x^{r-1} + \cdots + b_r)\left\{\begin{array}{c}\sin \alpha x\\ \cos \beta x.\end{array}\right\}$ şeklinde ise, v özel çözüm için uygun form,

$$\begin{aligned} v = x^s | & e^{ax}(A_0x^r + A_1x^{r-1} + \cdots + A_r)\cos \beta x \\ & + e^{ax}(B_0x^r + B_1x^{r-1} + \cdots + B_r)\sin \alpha x| \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek. 4.22.

$$y'' - y = x + 3x^2$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin karekteristik denklemi

$$a^2 - 1 = 0$$

olup, kökleri, $a_1 = 1$ ve $a_2 = -1$ dir. Böylece tamamlayıcı fonksiyon

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

dir. Şimdi özel çözümü bulalım. Verilen denklem için ikinci taraf bir polinom olduğundan özel çözüm için uygun form,

$$v = a + bx + cx^2$$

olarak alınabilir. Bu tahmini özel çözümün türevleri,

$$v' = b + 2cx, \qquad v'' = 2c$$

dir. v ve türevleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$y'' - y = (2c - a) - bx - cx^2 = x + 3x^2.$$

elde edilir. x değişkeninin aynı kuvvetten olan katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned} 2c - a &= 0, \\ -b &= 1, \\ -c &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse, $a = -6$, $b = -1$ ve $c = -3$ bulunur. Buradan özel çözüm,

$$v = -6 - x - 3x^2$$

olarak bulunur. Böylece genel çözüm,

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - (6 + x + 3x^2) \end{aligned}$$

olur.

Örnek. 4.23.

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin homojen kısmının karekteristik denklemi

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

olup, kökleri, $a_1 = 1$ ve $a_2 = 2$ dir. Böylece tamalayıcı fonksiyon,

$$u = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

olur. Şimdi özel çözümü bulalım. Verilen denklemin sağ tarafındaki herbir fonksiyon için tahmini özel çözümler şu şekildedir.

$$2x^2 \text{ için tahmini özel çözüm } Ax^2 + Bx + C$$

dir. Benzer şekilde,

$$e^x \text{ için tahmini özel çözüm } Ge^x$$

dir. Benzer şekilde,

$$2xe^x \text{ için tahmini özel çözüm } Exe^x + Fe^x$$

dir. Yine benzer şekilde,

$$4e^{3x} \text{ için tahmini özel çözüm } De^{3x}$$

olur. e^x için tahmini özel çözüm $2xe^x$ için önerilen tahmini çözümün içinde olduğundan bu iki tahmini çözüm birleştirilebilir. Böylece e^x ve $2xe^x$ için tahmini özel çözüm

$$Exe^x + Fe^x$$

olarak alınabilir. Fakat e^x terimi tamamlayıcı fonksiyonda olduğundan e^x ve $2xe^x$ için tahmini özel çözümü

$$x(Exe^x + Fe^x)$$

olarak almalıyız. Böylece verilen denklemin tahmini özel çözümü

$$v = Ax^2 + Bx + C + De^{3x} + Ex^2e^x + Fxe^x \tag{4.44}$$

olarak alınabilir. Buradan,

$$v' = 2Ax + B + 3De^{3x} + Ex^2e^x + 2Exe^x + Fxe^x + Fe^x \tag{4.45}$$

$$v'' = 2A + 9De^{3x} + Ex^2e^x + 4Exe^x + 2Ee^x + Fxe^x + 2Fe^x \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.44), (4.45) ve (4.46) ifadeleri verilen diferensiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\{2A + 9De^{3x} + Ex^2e^x + 4Exe^x + 2Ee^x + Fxe^x + 2Fe^x\} \\
&-3\{2Ax + B + 3De^{3x} + Ex^2e^x + 2Exe^x + Fxe^x + Fe^x\} \\
&+2\{Ax^2 + Bx + C + De^{3x} + Ex^2e^x + Fxe^x\} \\
&= 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}
\end{aligned}$$

olur Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\{(2A - 3B + 2C) + (2B - 6A)x + 2Ax^2 + 2De^{3x} \\
&+ (-2E)xe^x + (2E - F)e^x\} \\
&= 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
2A - 3B + 2C &= 0, \\
2B - 6A &= 0, \\
2A &= 2, \\
2D &= 4, \\
-2E &= 2, \\
2E - F &= 1
\end{aligned}$$

lineer deklem sistemi elde dilir. Bu denklem sistemi çözülürse,

$$A = 1, \quad B = 3, \quad C = \frac{7}{2}, \quad D = 2, \quad E = -1 \quad \text{ve} \quad F = -3$$

bulunur. Bu değerler (4.44) de yerine yazılırsa,

$$v = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x \tag{4.47}$$

özel çözümü bulunur. Böylece genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek. 4.24.

$$(D^2 - 3D + 2)y = 2\sin x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin karekteristik denklemi

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

olup, kökleri, $a_1 = 1$ ve $a_2 = 2$ dir. Böylece tamamlayıcı fonksiyon

$$u = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

dir. Şimdi özel çözümü bulalım. Verilen denklemin ikinci yanı trigonometrik bir fonksiyon olduğundan özel çözüm için uygun form,

$$v = A\sin x + B\cos x$$

olarak alınabilir. Bu tahmini özel çözümün türevleri,

$$v' = A\cos x - B\sin x, \quad v'' = -A\sin x - B\cos x$$

dir. v ve türevleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (-A\sin x - B\cos x) - 3(A\cos x - B\sin x) + 2(A\sin x + B\cos x) &= 2\sin x, \\ (A + 3B)\sin x + (B - 3A)\cos x &= 2\sin x \end{aligned}$$

elde edilir. Karşılıklı olarak aynı türden olan terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$A + 3B = 2,$$
$$B - 3A = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse, $A = \frac{1}{5}$, ve $B = \frac{3}{5}$ bulunur. Buradan özel çözüm,

$$v = \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x$$

olur. Böylece genel çözüm,

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x \end{aligned}$$

olur.

Örnek. 4.25.

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

denkleminin genel çözümünü bulunz.

Çözüm. Verilen denklemin homojen kısmının karakteristik denklemi

$$a^4 + a^2 = 0$$

olup, kökleri, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -i$ ve $a_4 = i$ dir. Böylece tamalayıcı fonksiyon,

$$u = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x$$

olur. Şimdi özel çözümü bulalım. Verilen denklemin sağ tarafındaki her bir fonksiyon için tahmini özel çözüm şu şekildedir:

$3x^2$ için tahmini özel çözüm $Ax^2 + Bx + C$ olmalıdır,

fakat tamamlayıcı fonksiyonda 1 ve x olduğundan

$3x^2$ ifadesinin tahmini özel çözümü $x^2(Ax^2 + Bx + C)$

olmalıdır.

$4\sin x - 2\cos x$ için tahmini özel çözüm $D\sin x + E\cos x$ olmalıdır, fakat tamamlayıcı fonksiyonda $\sin x$ ve $\cos x$ olduğundan

$4\sin x - 2\cos x$ için tahmini özel çözüm $x(D\sin x + E\cos x)$

olmalıdır. Böylece verilen denklemin tahmini özel çözümü

$$\begin{aligned} v &= x^2(Ax^2 + Bx + C) + x(D\sin x + E\cos x) \\ &= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx\sin x + Ex\cos x \end{aligned}$$

olarak alınabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} v' &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + Dx\cos x + D\sin x - Ex\sin x + E\cos x, \\ v'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C - Dx\sin x + 2D\cos x - Ex\cos x - 2E\sin x, \\ v''' &= 24Ax + 6B - Dx\cos x - 3D\sin x + Ex\sin x - 3E\cos x, \\ v^{(4)} &= 24A + Dx\sin x - 4D\cos x + Ex\cos x + 4E\sin x \end{aligned}$$

türevleri hesap edilir. v ve türevleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &24A + Dx\sin x - 4D\cos x + Ex\cos x + 4E\sin x + 12Ax^2 \\ &+ 6Bx + 2C - Dx\sin x + 2D\cos x - Ex\cos x - 2E\sin x \\ &= 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \end{aligned}$$

olur. Benzer terimleri birleştirirsek,

$$24A + 2C + 12Ax^2 + 6Bx - 2D\cos x + 2E\sin x = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

elde edilir. Benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned} 24A + 2C &= 0, \\ 6B &= 0, \\ 12A &= 3, \\ -2D &= -2 \\ 2E &= 4 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse,

$$A = \tfrac{1}{4}, \; B = 0, \; C = -3, \; D = 1, \; \text{ve} \quad E = 2$$

bulunur. Bu değerler,

$$v = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx\sin x + Ex\cos x$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$v = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x\sin x + 2x\cos x$$

özel çözümü bulunur. Böylece genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x\sin x + 2x\cos x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1. $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

   (Cevap: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$)

2. $y'' + 2y' + 5y = 6\sin 2x + 7\cos 2x$

   (Cevap: $y = e^{-x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) + 2\sin 2x - \cos 2x$)

3. $y'' + 2y' + 4y = \cos 4x$

   (Cevap: $y = e^{-x}(c_1 \sin\sqrt{3}x + c_2\cos\sqrt{3}x) + \frac{\sin 4x}{26} - \frac{3\cos 4x}{52}$)

4. $y''' + y'' + 3y' - 5y = 5\sin 2x + 10x^2 - 3x + 7$

   (Cevap: $y = c_1 e^x + e^{-x}(c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x)$
   $- \frac{9\sin 2x}{17} + \frac{2\cos 2x}{17} - 2x^2 - \frac{9x}{5} - \frac{82}{25}$)

5. $y'' + y' - 6y = 10e^{2x} - 18e^{3x} - 6x - 11$

   (Cevap: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + 2xe^{2x} - 3e^{3x} + x + 2$)

6. $y''' + y' = 2x^2 + 4\sin x$

   (Cevap: $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + \frac{2x^3}{3} - 4x - 2x\sin x$)

7. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = xe^x - 4e^{2x} + 6e^{4x}$

   (Cevap: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \frac{x^2 e^x}{4} + \frac{3xe^x}{4} + 4xe^{2x} + e^{4x}$)

8. $y'' + 4y = 12x^2 - 16x\cos 2x$

   (Cevap: $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + 3x^2 - \frac{3}{2} - 2x^2 \sin 2x - x\cos 2x$)

9. $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = 18x^2 + 16xe^x + 4e^{3x} - 9$

   (Cevap: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-3x} - \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}$
   $- \frac{19}{6}x^2 + 2x^2 e^x - 9xe^x + \frac{e^{3x}}{27}$)

10. $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$
    başlangıç değer problemini çözünüz.

    (Cevap: $y = \frac{1}{29}\left[e^{-2x}\left(-\frac{2\sin 3x}{3} + 37\cos 3x\right) + 9\sin 2x - 8\cos 2x\right]$)

Ozel cozumu bulma yontemi 3: Sabitlerin Degisimi yontemi

Homojen cozumde bulunan sabitler degisken varsayilarak ozel cozum elde edilir.

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = B(x)$$

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

diff denkleminin homojen cozumu

$$u = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

olsun.

Asagidaki denklemleri olusturun

$$c_1' f_1 + c_2' f_2 + \cdots + c_n' f_n = 0$$

$$c_1' f_1' + c_2' f_2' + \cdots + c_n' f_n' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1' f_1^{(n-2)} + c_2' f_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' f_n^{(n-2)} = 0$$

$$c_1' f_1^{(n-1)} + c_2' f_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' f_n^{(n-1)} = \frac{B(x)}{a_0}$$

C_1', C_2', C_3', C_4' cozulur.

İntegraller alinarak C_1, C_2, C_3, C_4 hesaplanir.

Ornek:

$y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

homojen cozum $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$, $f_1 = e^{2x}$, $f_2 = e^x$, $f_1' = 2e^{2x}$, $f_2' = e^x$

$C_1' f_1 + C_2' f_2 = 0$ (1)

$C_1' f_1' + C_2' f_2' = 4x^2$ (2)

(1) nolu denklemden C_1' yu cek (2) de yerine koy

$C_1' = -C_2' f_2 / f_1$,

$(-C_2' f_2 / f_1) f_1' + C_2' f_2' = 4x^2$

$C_2' (-f_2 f_1' / f_1 + f_2') = 4x^2$

$-f_2 f_1' / f_1 + f_2' = -e^x\, 2e^{2x} / e^{2x} + e^x = -e^x$

$C_2' (-e^t) = 4x^2$

$C_2' = 4x^2(-e^x) = -4x^2 e^{-x}$

Bu degeri yerine koyarak

$C_1' = -C_2' f_2 / f_1 = -(-4x^2 e^{-x}) e^x / e^{2x} = 4x^2 e^{-2x}$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$$

$C_2' = -4x^2 e^{-x}$

$$C_2 = \int (-4x^2 e^{-x}) dx = -4\int x^2 e^{-x} dx = -4e^{-x}\left(\frac{x^2}{-1} - \frac{2x}{(-1)^2} + \frac{2}{(-1)^3}\right)$$

$C_1' = 4x^2 e^{-2x}$

$$C_1 = \int 4x^2\, e^{-2x} dx = 4\int x^2\, e^{-2x} dx = 4e^{-2x}\left(\frac{x^2}{-2} - \frac{2x}{(-2)^2} + \frac{2}{(-2)^3}\right)$$

y= $C_1\, e^{2x} + C_2\, e^x$

oldugundan C1 ve C2 yerlerine konularak

$$y_o = 4e^{-2x}\left(\frac{x^2}{-2} - \frac{2x}{(-2)^2} + \frac{2}{(-2)^3}\right)e^{2x} + (-4)e^{-x}\left(\frac{x^2}{-1} - \frac{2x}{(-1)^2} + \frac{2}{(-1)^3}\right)e^x$$

$$y_O = 4\left(\frac{x^2}{-2} - \frac{2x}{(-2)^2} + \frac{2}{(-2)^3}\right) - 4\left(\frac{x^2}{-1} - \frac{2x}{(-1)^2} + \frac{2}{(-1)^3}\right)$$

$$y_O = 2x^2 + 6x + 7$$

6. $y''' + y' = 2x^2 + 4\sin x$

(Cevap: $y = c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x + \frac{2x^3}{3} - 4x - 2x\sin x$)

7. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = xe^x - 4e^{2x} + 6e^{4x}$

(Cevap: $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{x^2e^x}{4} + \frac{3xe^x}{4} + 4xe^{2x} + e^{4x}$)

8. $y'' + 4y = 12x^2 - 16x\cos 2x$

(Cevap: $y = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + 3x^2 - \frac{3}{2} - 2x^2\sin 2x - x\cos 2x$)

9. $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = 18x^2 + 16xe^x + 4e^{3x} - 9$

(Cevap: $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-3x} - \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}$
$- \frac{19}{6}x^2 + 2x^2e^x - 9xe^x + \frac{e^{3x}}{27}$)

10. $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$
başlangıç değer problemini çözünüz.

(Cevap: $y = \frac{1}{29}\left[e^{-2x}\left(-\frac{2\sin 3x}{3} + 37\cos 3x\right) + 9\sin 2x - 8\cos 2x\right]$)

4.4.2 Parametrelerin Değişimi Yöntemi

Bu bölümde,

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = B(x) \tag{4.48}$$

lineer diferensiyel denkleminin, homojen kısmının bir çözümü bilindiğinde özel çözümünün nasıl bulunacağını göreceğiz. Başka bir ifadeyle, (4.48) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu bilindiğinde özel çözümünün nasıl bulunacağını araştıracağız. Bu özel çözümü araştırırken tamamlayıcı fonksiyonu kullanacağız. Bu yöntem Belirsiz Katsayılar yönteminden daha genel bir yöntemdir. Ancak bazı durumlarda hesaplanması zor integrallerle karşılaşılabilir. Şimdi bu yöntemi açılayalım:

$$u = c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n \tag{4.49}$$

fonksiyonu (4.48) denkleminin homojen kısmının tamamlayıcı fonksiyonu olsun, Yani

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = 0 \tag{4.50}$$

lineer denkleminin bir çözümü olsun. Bu çözümün (4.48) denkleminin özel bir çözümü olabilmesi için c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lerin nasıl birer fonksiyon olabileceklerini inceleyelim. (4.49) ifadesinde c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fonksiyonlarını önce sabit, sonra değişken kabul ederek türev alalım, bu durumda,

$$u' = [c_1 f_1' + c_2 f_2' + \cdots + c_n f_n'] + \underbrace{[c_1' f_1 + c_2' f_2 + \cdots + c_n' f_n]}_{0} \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.49) fonksiyonu (4.50) denkleminin bir çözümü olduğundan (4.51) ifadesinin sağ yanındaki ikinci parantezin içindeki terim sıfır olur. Yani

$$c_1' f_1 + c_2' f_2 + \cdots + c_n' f_n = 0 \tag{4.52}$$

olur. Bu durumda,

$$u' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \cdots + c_n f_n' \tag{4.53}$$

olur. Bu denklemin yukarıdakine benzer şekilde (4.49) fonksiyonunun ikinci türevini hesaplayabilmek için (4.53) denkleminde c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fonksiyonlarını önce sabit, sonra değişken kabul ederek türev alalım,

$$u'' = [c_1 f'' + c_2 f'' + \cdots + c_n f''] + \underbrace{[c_1' f' + c_2' f' + \cdots + c_n' f']}_{0} \tag{4.54}$$

olur. İkinci parantezin içi yine sıfır olacaktır. Çünkü (4.49) fonksiyonu (4.50) denkleminin bir çözümüdür. Böylece,

$$u'' = c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + \cdots + c_n f_n'' \tag{4.55}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lerin türevlerinin olduğu terimlerin toplamı sıfır olan $n - 1$ tane denklem elde edilir. Fakat bizim c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gibi n tane bilinmeyenimiz var, $n-1$ denklemden n bilinmeyeni çözemeyiz, bu nedenle bir denkleme daha ihtiyacımız var. Bu denklemi de u ve türevlerini yani (4.53), (4.55) ,..., ile u nun n. türevi alınarak elde edilen

$$u^n = c_1 f_1^{(n)} + c_2 f_2^{(n)} + \cdots + c_n f_n^{(n)} + c_1' f_1^{(n-1)} + c_2' f_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' f_n^{(n-1)} \tag{4.56}$$

ifadelerini (4.48) de yerine yazar ve (4.49) fonksiyonunu (4.50) denkleminin bir çözümü olduğunu kabul ederek,

$$c_1' f_1^{(n-1)} + c_2' f_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' f_n^{(n-1)} = \frac{B(x)}{a_0} \tag{4.57}$$

şeklinde elde ederiz. Böylece elde edilen n tane denklemin oluşturduğu,

$$\begin{aligned} c_1' f_1 + c_2' f_2 + \cdots + c_n' f_n &= 0 \\ c_1' f_1' + c_2' f_2' + \cdots + c_n' f_n' &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1' f_1^{(n-2)} + c_2' f_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' f_n^{(n-2)} &= 0 \\ c_1' f_1^{(n-1)} + c_2' f_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' f_n^{(n-1)} &= \frac{B(x)}{a_0}, a_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.58}$$

denklem sisteminden c_1', c_2', ..., c_n' bilinmeyenleri çözülür ve integralleri alınırsa, c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bulunur. Bu değerler (4.49) de yerine yazılırsa, (4.48) denkleminin keyfi sabit içermeyen özel çözümü bulunmuş olur. (4.49) fonksiyonu başlangıçta özel bir çözüm kabul edildiği için keyfi sabit içermez, yani c_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ler için integral alınırken keyfi sabit eklenmez.

Örnek. 4.26.

$$y'' + y = \sec x, \ 0 < x < \pi/2$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Önce verilen denklemin tamamlayıcı fonksiyonunu bulalım. Karakteristik denklem

$$a^2 + 1 = 0$$

olup, kökleri $a_1 = i$, $a_2 = -i$ dir. Böylece tamamlayıcı fonksiyon

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

olarak bulunur. Şimdi (4.58) denklem sistemini oluşturalım, böylece

$$\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= \sec x \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin çözümünden

$$c_1' = -\tan x \quad \text{ve} \quad c_2' = 1$$

bulunur. Bu ifadelerin integralleri alınırsa,

$$c_1 = \ln(\cos x) \quad \text{ve} \quad c_2 = x$$

bulunur. Buna göre verilen denklemin özel çözümü

$$v = \ln(\cos x)\ \cos x + x \sin x$$

dir. Genel çözüm ise

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x)\ \cos x + x \sin x \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek. 4.27.

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x+1) \tag{4.59}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklem,

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

olup, kökleri $a_1 = a_2 = 2$ dir. Böylece tamamlayıcı fonksiyon

$$u = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \tag{4.60}$$

olur. Şimdi (4.58) denklem sistemini oluşturalım, böylece,

$$\begin{aligned} c_1' e^{2x} + c_2' x e^{2x} &= 0 \\ 2c_1' e^{2x} + c_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) &= e^{2x}(x+1) \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin çözümünden $c_1' = -x - x^2$ ve $c_2' = x + 1$ elde edilir. Eğer bu ifadelerin integralleri alınırsa,

$$c_1 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad \text{ve} \quad c_2 = x + \frac{1}{2}x^2$$

bulunur. Buna göre verilen denklemin özel çözümü

$$\begin{aligned} v &= \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)e^{2x} + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)xe^{2x} \\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Genel çözüm ise

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek. 4.28. $y''' - 2y'' - 21y' - 18y = 3 + 4e^{-t}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Karekteristik denklem ve kökleri

$$a^3 - 2a^2 - 21a - 18 = 0 \implies a_1 = -3,\ a_2 = -1,\ a_3 = 6$$

şeklindedir. Böylece tamalayıcı fonksiyon

$$u = c_1e^{-3t} + c_2e^{-t} + c_3e^{6t}$$

olarak elde edilir. Şimdi (4.58) denklem sistemini oluşturalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} c_1'e^{-3t} + c_2'e^{-t} + c_3'e^{6t} &= 0 \\ -3c_1'e^{-3t} - c_2'e^{-t} + 6c_3'e^{6t} &= 0 \\ 9c_1'e^{-3t} + c_2'e^{-t} + 36c_3'e^{6t} &= 3 + 4e^{-t} \end{aligned}$$

şeklinde lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemi çözülürse,

$$c_1' = \frac{(3 + 4e^{-t})(7e^{5t})}{126e^{2t}}, \quad c_2' = \frac{(3 + 4e^{-t})(-9e^{3t})}{126e^{2t}}, \quad c_3' = \frac{(3 + 4e^{-t})(2e^{-4t})}{126e^{2t}}$$

elde edilir. Eğer bu ifadelerin integralleri alınırsa

$$c_1 = \int \frac{(3 + 4e^{-t})(7e^{5t})}{126e^{2t}}dt = \frac{1}{18}\int (3e^{3t} + 4e^{2t})dt = \frac{1}{18}(e^{3t} + 2e^{2t})$$

$$c_2 = \int \frac{(3+4e^{-t})(-9e^{3t})}{126e^{2t}}dt = -\frac{1}{14}\int(3e^t+4)dt = -\frac{1}{14}(3e^t+4t)$$

$$c_3 = \int \frac{(3+4e^{-t})(2e^{-4t})}{126e^{2t}}dt = \frac{1}{63}\int(3e^{-6t}+4e^{-7t})dt = \frac{1}{63}(-\frac{1}{2}e^{-6t}-\frac{4}{7}e^{-7t})$$

çözümleri elde edilir. Buna göre verilen denklemin özel çözümü

$$\begin{aligned} v &= c_1e^{-3t}+c_2e^{-t}+c_3e^{6t} \\ &= \frac{1}{18}(e^{3t}+2e^{2t})e^{-3t} - \frac{1}{14}(3e^t+4t)e^{-t} + \frac{1}{63}(-\frac{1}{2}e^{-6t}-\frac{4}{7}e^{-7t})e^{6t} \\ &= -\frac{1}{6}+\frac{5}{49}e^{-t}-\frac{2}{7}te^{-t} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= u+v \\ &= c_1e^{-3t}+c_2e^{-t}+c_3e^{6t}-\frac{1}{6}+\frac{5}{49}e^{-t}-\frac{2}{7}te^{-t} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1. $y''+y=\cot x$

   (Cevap: $y=c_1\sin x+c_2\cos x+(\sin x)[\ln|\csc x-\cot x|]$)

2. $y''+4y=\sec^2 2x$

   (Cevap: $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+\frac{\sin 2x}{4}[\ln|\sec 2x+\tan 2x|]-\frac{1}{4}$)

3. $y''-2y'+y=xe^x\ln x, \quad (x>0)$

   (Cevap: $y=c_1e^x+c_2xe^x-\frac{5x^3e^x}{36}+\frac{x^3e^x\ln x}{6}$)

4. $y''-2y'+y=e^x\arcsin x$

   (Cevap: $y=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{e^x\arcsin x}{4}+\frac{x^2e^x\arcsin x}{2}+\frac{3xe^x\sqrt{1-x^2}}{4}$)

5. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$

(Cevap: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\,[\ln(1 + e^x)]$)

6. $y'' + y = 1/(1 + \sin x)$

(Cevap: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + (\sin x)\,[\ln(1 + \sin x)] - x\cos x - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$)

7. $y'' + y = \sec x$

(Cevap: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos|$)

8. $y'' + y = \sin x$

(Cevap: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$)

9. $y'' + y = \cos^2 x$

(Cevap: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$)

Diferansiyel Denklem Sistemleri

Tanım 9.1. *Bir diferensiyel denklem sistemi: iki ya da daha fazla diferensiyel denklemden meydana gelir ve iki ya da daha fazla sayıdaki bağımlı değişkenlerin bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini içerirler.*

$$8\frac{d^2x}{dt^2} = -6x + 3y$$

$$3\frac{d^2x}{dt^2} = 7x - 4y$$

-------------------------- ------------------ --

$$x' - 2x + y' - z' = 4$$
$$x' - y' + 4z' = t$$
$$x + y' - 7z' = t + 2$$

Yukaridaki diff denklmeler birer lineer dif denklem sistemidirler.

--------------------- ------------------

Operator Yontemi ile Cozum.

Ornek 348)

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} - 12x = 0, \quad \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} - 3y = 0$$

denklem sistemini cozun.

Cozum.

Denklemi D operatorleri ile yazalim.

Dy-12x=0,

Dx-3y=0

Denklemi iki bilinmeyenli iki denklem gibi dusunerek cozeriz.

Dy-12x=0, ===> $x = \frac{Dy}{12}$

x in bu degerini ikinci denklemde yerine koyalim.

Dx-3y=0

$D\frac{Dy}{12}$ -3y=0, ==> D^2y-36y=0;

Bu da bildigimiz turden bir diff denklemdir ve cozebiliriz.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 36y = 0,$$

karakteristik denklem. α^2-36=0, α_1=6, α_1=-6

y(t)= $C_1 e^{6t} + C_2 e^{-6t}$

Bulunan bu y degeri ilk denklemde yerine konursa

$$x = \frac{Dy}{12} = \frac{D(C_1 e^{6t} + C_2 e^{-6t})}{12} = \frac{1}{12}\frac{d}{dt}(C_1 e^{6t} + C_2 e^{-6t})$$

$$= \frac{1}{12}(C_1 6 e^{6t} + C_2(-6) e^{-6t}) = \frac{C_1}{2} e^{6t} - \frac{C_2}{2} e^{-6t}$$

$$x(t) = \frac{C_1}{2} e^{6t} - \frac{C_2}{2} e^{-6t}$$

--- -----

Örnek. 9.3.

$$x' = 3x - y - 1$$
$$y' = x + y + 4e^t$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$$x' = \frac{dx}{dt} = Dx, \quad y' = \frac{dy}{dt} = Dy$$

x'=3x-y-1,

y'=x+y+$4e^t$

operator D ile diff denklemleri yazalim

Dx=3x-y-1

Dy=x+y+$4e^t$

$$(D-3)x + y = -1$$
$$-x + (D-1)y = 4e^t$$

Dx-3x+y=-1

- x + Dy-y = $4e^t$

(D-3)x + y=-1

-x+(D-1)y=$4e^t$

Iki bilinmeyenli iki denklem gibi dusunebiliriz.

ax+by=p

cx+dy=q

seklinde dusunup x ve y yi hesaplamaliyiz.

--------------- --

ilk denklemden y yi cekelim

y=-1-(D-3)x

ikinci denklemde yerine koy

-x+(D-1) [-1-(D-3)x] =$4e^t$

-x-(D-1)1- (D-1)(D-3)x=$4e^t$

not: $(D-1)1 = \frac{dx}{dt}1 - 1_x 1 = 0 - 1$

-x+1- [D^2x - 4Dx+3x] =$4e^t$

1- [D^2x- 4Dx+4x]=$4e^t$

1- [D^2x- 4Dx+4x]=$4e^t$

1- $(D-2)^2$ x=$4e^t$

$(D-2)^2$ x =1-$4e^t$ (567)

Benzer sekilde y ye bagl;iifade elde edebiliriz.

ilk denklemden

(D-3)x =-y-1 ------ $x = \frac{-y-1}{D-3}$,

ikincide yerine koy

$$-\frac{-y-1}{D-3} + (D-1)y = 4e^t$$

$$\frac{y+1}{D-3} + \frac{(D-3)(D-1)y}{D-3} = 4e^t$$

$$y + 1 + (D-3)(D-1)y = (D-3)4e^t$$

$$y + 1 + D^2y - 4Dy + 3y = (D-3)4e^t$$

$$D^2y - 4Dy + 4y = -1 + (D-3)4e^t$$

Burada (D-3)$4e^t$, yi acalim

$$(D-3)4e^t = 4(D-3)e^t = 4(De^t - 3e^t) = 4(e^t - 3e^t) = -8e^t$$

yerine konulursa

$(D-2)^2 y = -1 - 8e^t$

$(D^2 - 4y+4)y = -1 - 8e^t$

-------- ------ -----

Burada diff denklemi bilinen yontemlerle cozebiliriz.

$(D^2 - 4y+4)y = -1 - 8e^t$

$y''-4y'+4y= -1 - 8e^t$

homojen cozum

$a^2-4a+4=0$, $a=2$, $a=2$ (katli kok)

$y_h= C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$

ozel cozum icin Belirsiz katsayilar yontemini uygulayalim.

$y''-4y'+4y=-1$ ve $y''-4y'+4y=-8e^t$

cozumlerini bulmaliyiz.

-1 icin $y=Ax^0=A$

$-8e^t$ icin $y= Be^t$

$y=A+ Be^t$, $y'= Be^t$, $y''= Be^t$

$y''-4y'+4y= -1 - 8e^t$

$Be^t - 4Be^t + 4(A+ Be^t)= -1 - 8e^t$

$B e^t + 4A= -1 - 8e^t$

$B=-8$, $4A= -1$, $A=-1/4$,

ozel cozum $y_o=A+B e^t = -1/4 - 8e^t$

genel cozum=homojen cozum+ozel cozum

$y= C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} - 1/4 - 8e^t$ (661)

----- ------ -----

x i bulmak icin bulunan ya (567) cozulur. Veya (661) de bulunan ilk denklemde yerine konur.

x hesaplanir.

$y'=x+y+4e^t$

$x= y'-y-4e^t$

$y= C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} - 1/4 - 8e^t$

$y'= 2C_1 e^{2t} + C_2 (e^{2t} + 2t e^{2t}) - 8e^t$

$x= y'-y-4e^t$

$x=(2C_1 e^{2t} + C_2 (e^{2t} + 2t e^{2t}) - 8e^t)-$
$\quad (C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} - 1/4 - 8e^t) - 4e^t$

$x= e^{2t}(2C_1+ C_2 - C_1) + t e^{2t}(2C_2-C_2)$
$\quad -8e^t + 1/4 + 8e^t - 4e^t =$

$x= e^{2t}(C_1- C_2) + t e^{2t} C_2 + 1/4 - 4e^t$

Örnek. 9.4.

$$Dx + Dz = t^2$$
$$2x + D^2y = e^t$$
$$-2Dx - 2y + (D+1)z = 0$$

denklemde x ve z yok edilirse

$$D(3D^3 + D^2 - 4)y = 4e^t - 2t^2 - 4t$$

elde edilir. Bu diff denklem bilinenyontemle cozulur. Bulunan y degeri denklemde yerine konur z ve z hesaplanir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklem sistemlerini çözünüz.

1. $\begin{array}{l} Dx = 2x - y \\ Dy = x \end{array}$: $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ y = (c_1 - c_2) e^t + c_2 t e^t \end{array}\right)$

2. $\begin{array}{l} Dx = -y + t \\ Dy = x - t \end{array}$: $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t + 1 \\ y = c_1 \sin t - c_2 \cos t + t - 1 \end{array}\right)$

---

3. $\begin{array}{l} (D^2+5)x - 2y = 0 \\ -2x + (D^2+2)y = 0 \end{array}$;

$\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}c_1 \sin t + \frac{1}{2}c_2 \cos t - 2c_3 \sin\sqrt{6t} - 2c_4 \cos\sqrt{6t} \\ y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin\sqrt{6t} + c_4 \cos\sqrt{6t} \end{array}\right)$

4. $\begin{array}{l} D^2 x = 4y + e^t \\ D^2 y = 4x - e^t \end{array}$;

$\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - c_3 \sin 2t - c_4 \cos 2t - \frac{1}{5}e^t \end{array}\right)$

5. $\begin{array}{l} Dx + D^2 y = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{array}$;

$\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{17}{15}e^{3t} \\ y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{4}{15}e^{3t} \end{array}\right)$

6. $\begin{array}{l} (D^2-1)x - y = 0 \\ (D-1)x + Dy = 0 \end{array}$;

$\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^{-t/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \left(-\frac{3}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right) e^{-t/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{3}{2}c_3\right) e^{-t/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{array}\right)$

7. $\begin{array}{l} 2Dx - 5x + Dy = e^t \\ Dx - x + Dy = 5e^t \end{array}$; $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 e^{4t} + \frac{4}{3} e^t \\ y = -\frac{3}{4} c_1 e^{4t} + c_2 + 5e^t \end{array} \right)$

8. $\begin{array}{l} (D-1)x + (D^2+1)y = 1 \\ (D^2-1)x + (D+1)y = 2 \end{array}$;

$\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 \\ y = (c_1 - c_2 +) + (c_2 + 1)t + c_4 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 \end{array} \right)$

9. $\begin{array}{l} Dx = y \\ Dy = z \\ Dz = x \end{array}$;

$$\left(\text{Covap:} \quad \begin{array}{l} x = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ y = c_1 e^t + \left(-\frac{1}{2} c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 \right) e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_2 - \frac{1}{2} c_3 \right) e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ z = c_1 e^t + \left(-\frac{1}{2} c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 \right) e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} c_2 - \frac{1}{2} c_3 \right) e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{array} \right)$$

10. $\begin{array}{r} Dx - 6y = 0 \\ x - Dy + z = 0 \\ x + y - Dz = 0 \end{array}$; $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = -6c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t} + 2c_3 e^{3t} \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ z = 5c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \end{array} \right)$

10. $\begin{array}{r} Dx - 6y = 0 \\ x - Dy + z = 0 \\ x + y - Dz = 0 \end{array}$; $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = -6c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t} + 2c_3 e^{3t} \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ z = 5c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \end{array} \right)$

11. $\begin{array}{r} 2Dx + (D-1)y = t \\ Dx + dy = t^2 \end{array}$; $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = -c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t \\ y = c_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5 \end{array} \right)$

12. $\begin{array}{l} Dx = -5x - y \\ Dy = 4x - y \end{array}$; $\left(\text{Cevap:} \quad \begin{array}{l} x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3} \\ y = -e^{3t+3} + 2te^{-3t+3} \end{array} \right)$

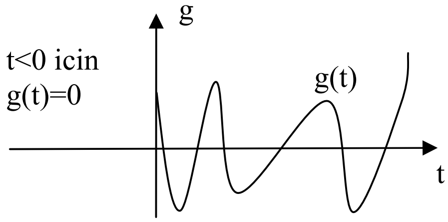
Laplas Donusumu

₤{g(t)}=G(s)

$₤^{-1}$ { G(s) }= g(t)

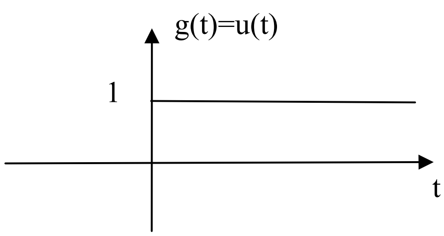
$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

Laplas donusumu alinan fonksiyonlarin negatif kismi sifir varsayilir. yani t<0 icin g(t)=0 dir. Integralalinirken s degiskeni cok buyuk ve pozitif bir sayi varsayilir.



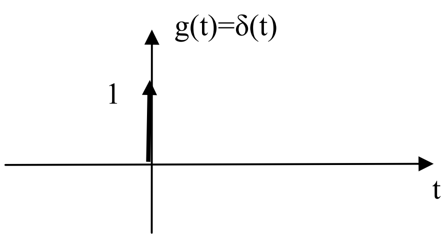
Muendislikte cok kullanilan fonksiyonlar

1)Birim basamak fonksiyonu u(t). t<0 icin g(t)=0, ve t>0 icin g(t)=1 olan fonksiyondur.



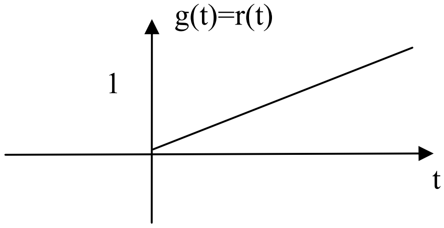
2)Impuls fonksiyonu δ(t). t≠0 icin g(t)=0, ve

$\int_{t=0}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ bagintisi varsayilir.



Muendislikte cok kullanilan fonksiyonlar

1)Rampa basamak fonksiyonu r(t). t<0 icin g(t)=0, ve t>0 icin g(t)=t olan fonksiyondur.



Ornek Problem: Birim basamak fonksiyonunun Laplas donusumunu bulun.

Cozum:

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{-s}(e^{-s\infty} - e^{-s0}) = \frac{1}{-s}(e^{-\infty} - e^{0}) = \frac{1}{-s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

s>0 varsayildigi icin $e^{-s\infty} = e^{-\infty} = 0$ olacaktir.

Sonuc: ₤{u(t)}= $\frac{1}{s}$,

-- -----

Ornek Problem 61: g(t)=e^{at} seklinde verilen fonksiyounun Laplas donusumunu bulun.

Cozum:

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{(a-s)t}dt$$

$$\frac{1}{\mathrm{a-s}}e^{(a-s)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{\mathrm{a-s}}(e^{-\infty} - e^{0}) = \frac{1}{\mathrm{s-a}}$$

Sonuc: ₤{ e^{at}}= $\frac{1}{s-a}$,

---------------------------------- --------------------- -

Ornek Problem 61: g(t)=t seklinde verilen rampa fonksiyounun Laplas donusumunu bulun.

Cozum

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt$$

Kismi integrasyon kullanilarak

$$\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

oldugu gosterilebilir. Dolayisiyla

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} te^{-st}dt = \left(\frac{1}{-s}te^{-st} - \frac{1}{(-s)^2}te^{-st}\right)\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

Sonuc: ₤{ t}= $\frac{1}{s^2}$,

Not: Butun fonksiyonlarin negatif kismi sifir oldugundan Laplas donusumu alinan fonksiyonlar u(t) ile carpilmis olarak gosterilirler.

£{ e^{at} u(t)}= $\frac{1}{s-a}$

£{ t u(t) }= $\frac{1}{s^2}$

Cok Kullanilan fonksiyonlarin Laplas Tablosu

g(t)	G(s)	g(t)	G(s)
u(t)	$\frac{1}{s}$	sin(bt)	$\frac{b}{s^2+b^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	cos(bt)	$\frac{s}{s^2+b^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	e^{at} sin(bt)	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{at} cos(bt)	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
δ(t)	1		

Ornekler

£{ e^{2t} }= $\frac{1}{s-2}$

£{ e^{-5t} }= $\frac{1}{s+5}$

£{ e^{-5t} cos(8t)}= $\frac{s+5}{(s+5)^2+8^2} = \frac{s+5}{s^2+10s+89}$

£{ e^{-5t} sin(8t)}= $\frac{8}{(s+5)^2+8^2} = \frac{8}{s^2+10s+89}$

Laplas Teoremleri.

$\int_0^t f(x)\,dx$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t-a)u(t-a), a>0$	$e^{-as}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(at), a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\,du$

Ters Laplas Donusumu

Ters Laplas donusumu tablolar yardimiyla yapilir.

Ornekler

$£^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$=u(t)

$£^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$=$e^{2t}$

$£^{-1}\left\{\frac{1}{s+12}\right\}$=$e^{-12t}$

$£^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$=sin(2t)

$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$=cos(2t)

$£^{-1}\{1\}$=δ(t)

Standart forma benzemeyenler benzetilmeye calisilir.

$£^{-1}\left\{\frac{15}{s-2}\right\}$=15 $£^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$=15 e^{2t}

$£^{-1}\left\{\frac{20}{s^2+4}\right\}$=10$£^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$=10sin(2t)

$£^{-1}\left\{\frac{28s}{s^2+4}\right\}$=28$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$=28cos(2t)

$£^{-1}\left\{\frac{28s+20}{s^2+4}\right\}$=$£^{-1}\left\{\frac{28s}{s^2+4}+\frac{20}{s^2+4}\right\}$

=$£^{-1}\left\{\frac{28s}{s^2+4}\right\}$+$£^{-1}\left\{\frac{20}{s^2+4}\right\}$

=28$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$+10$£^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$

=28 cos(2t) +10 sin(2t)

Bir polinomun derecesi kadar koku vardir.
$x+1=0$ → tek koku var $x=-1$
$x^2-4=0$ → iki koku var $x=-2$, $x=+2$
$x^2-5=0$ → iki koku var $x=-2.236$, $x=2.236$
$x^2+3x+2=0$ → iki koku var $x=-2$, $x=-1$
$x^2+1=0$ → iki koku var $x=i$, $x=-i$
$x^2+4=0$ → iki koku var $x=2i$, $x=-2i$
$x^2+5=0$ → iki koku var $x=-2.236i$, $x=2.236i$
$x^2+2x+1=0$ → iki koku var $x=-1$, $x=-1$
$x^2=0$ → iki koku var $x=0$, $x=0$
$x^2-x=0$ → iki koku var $x=0$, $x=1$
Bir polinomun bir koku kompleks ise onun eslenigi de muhakkak koktur.
$x^2+1=0$ → $x=-i$, $x=-i$
$x^2+2x+2=0$ → $x=-1-i$, $x=-1+i$
$x^2-6x+25=0$ → $x=3+4i$, $x=3-4i$
$x^2+6x+25=0$ → $x=-3+4i$, $x=-3-4i$
$x^2+4x+13=0$ → $x=-2+2i$, $x=-2-3i$
$x^2-4x+13=0$ → $x=2+2i$, $x=2-3i$

Pay ve paydasi polinom olan kesirlere rasyonel kesirler denir. Bir rasyonel kesir paydanin koku kadar basit kesirlere ayrilabilir.

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0}{(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_m)}$$

$$= \frac{A_1}{x+x_1} + \frac{A_2}{x+x_2} + \ldots + \frac{B_1}{x+x_5} + \frac{B_2}{(x+x_5)^2} + \frac{B_2}{(x+x_5)^3} + \ldots$$

A ve B lerin toplami m adet
Ornekler

$$\frac{5x+7}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2},$$

[usler,kok,bolum] = residue ([5 7] , [1 3 2])

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

[usler,kok,bolum] = residue ([5 -7] , [1 -3 2])

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{x+1},$$

Kokler kompleks ise carpanlara ayirma isleminde paya gelen terimler de kompleks ve esleniktir.

$$\frac{6x+20}{x^2+4x+5} = \frac{3+4i}{x+2+i} + \frac{3-4i}{x+2-i},$$

$$\frac{6x-4}{x^2-4x+5} = \frac{3+4i}{x-2+i} + \frac{3-4i}{x-2-i}$$

$$\frac{10x-32}{x^2-4x+8}=\frac{5+3i}{x-2-2i}+\frac{5-3i}{x-2+2i}$$

$$\frac{10x-8}{x^2-4x+8}=\frac{5-3i}{x-2-2i}+\frac{5+3i}{x-2+2i}$$

$$\frac{14x^2-74x+72}{x^3-9x^2+28x-40}=\frac{5-3i}{x-2-2i}+\frac{5+3i}{x-2+2i}+\frac{4}{x-5}$$

[usler,kok,bolum] = residue ([14 -74 72] , [1 -9 28 -40])

$$\frac{14x^2+26x-8}{x^3+x^2-12x+40}=\frac{5-3i}{x-2-2i}+\frac{5+3i}{x-2+2i}+\frac{4}{x+5}$$

$$\frac{16x^3+42x^2-6x+72}{x^4+2x^3-11x^2+28x+40}=\frac{5-3i}{x-2-2i}+\frac{5+3i}{x-2+2i}+\frac{4}{x+5}+\frac{2}{x+1}$$

$$\frac{12x^3-106x^2+434x-440}{x^4-10x^3+57x^2-148x+200}=\frac{5-3i}{x-2-2i}+\frac{5+3i}{x-2+2i}+\frac{1+3i}{x-3-4i}+\frac{1-3i}{x-3+4i}$$

$$=\frac{10x-8}{x^2-4x+8}+\frac{2x-30}{x^2-6x+25}$$

$$\frac{3x+1}{x^2-2x+1}=\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2},$$

[usler,kok,bolum] = residue ([3 1] , [1 -2 1])

$$\frac{7x+9}{x^2+2x+1}=\frac{7}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{10x}{x^2+2x+1}=\frac{10}{x+1}+\frac{-10}{(x+1)^2}$$

$$\frac{17x^5-282x^3-153x^2+1172x+344}{x^6-4x^5-15x^4+50x^3+100x^2-168x-288}=\frac{1}{x+2}+\frac{5}{(x+2)^2}+\frac{6}{(x+2)^3}$$

$$+\frac{7}{x-3}+\frac{8}{(x-3)^2}+\frac{9}{(x-4)}$$

Use of Residues: Partial Fraction Expansion.

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\frac{C}{z-c}.+.......$$

First residue Formula

$$A=\operatorname{Re}s(z=a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)}$$

$$B=\operatorname{Re}s(z=b)=\lim_{z\to b}(z-b)\frac{p(z)}{q(z)}$$

$$C=\operatorname{Re}s(z=c)=\lim_{z\to c}(z-c)\frac{p(z)}{q(z)}$$

Second residue Formula

$$A=\operatorname{Re}s(z=a)=\lim_{z\to a}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$B=\operatorname{Re}s(z=b)=\lim_{z\to b}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$C=\operatorname{Re}s(z=c)=\lim_{z\to c}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

Example AE-611

$$\frac{z+5}{z^3-5z^2-2z+24}=\frac{z+5}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\lim_{z\to 4}(z-4)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to 4}(z-4)\frac{z+5}{(z-4)(z-3)(z+2)}$$

$$=\lim_{z\to 4}\frac{z+5}{(z-3)(z+2)}=\frac{4+5}{(4-3)(4+2)}=\frac{9}{6}=1.5$$

$$B=\lim_{z\to -2}(z-(-2))\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z+5}{(z-4)(z-3)(z+2)}$$

$$=\lim_{z\to -2}\frac{z+5}{(z-3)(z-4)}=\frac{-2+5}{(-2-3)(-2-4)}=\frac{3}{30}=0.1$$

$$C=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to 3}\frac{z+5}{(z-4)(z+2)}=\frac{3+5}{(3-4)(3+2)}=-1.6$$

Using the **Second residue Formula**

In our problem $p(z)$=z+5 $q(z)$= $z^3-5z^2-2z+24$ and $q'(z)$= $3z^2-10z-2$

$$A=\lim_{z\to 4}\frac{z+5}{3z^2-10z-2}=\frac{4+5}{3\ 4^2-10\ \ 4-2}=\frac{9}{6}=1.5$$

$$B=\lim_{z\to -2}\frac{z+5}{3z^2-10z-2}=\frac{-2+5}{3\ (-2)^2-10\ \ (-2)-2}=\frac{3}{30}=0.1$$

$$C=\lim_{z\to 3}\frac{z+5}{3z^2-10z-2}=\frac{3+5}{3\ (3)^2-10\ (3)-2}=\frac{8}{-5}=-1.6$$

Note we get the same result by **classical method**

$$\frac{z+5}{z^3-5z^2-2z+24}=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}$$

$$=\frac{A(z+2)(z-3)+B(z-4)(z-3)+C(z-4)(z+2)}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$=\frac{A(z^2-z-6)+B(z^2-7z-12)+C(z^2-2z-8)}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-7A-B-2C)+12A-6B-8C}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$z^2(A+B+C)+z(-7A-B-2C)+12A-6B-8C=z+5$$

$$A+B+C=0,\qquad -7A-B-2C=1,\qquad 12A-6B-8C=5$$

Solving for A,B,C we get A=1.5 B=0.1 C=-1.6

$$\frac{z+5}{z^3-5z^2-2z+24}=\frac{1.5}{z-4}+\frac{0.1}{z+2}+\frac{-1.6}{z-3}$$

Example AE-612

$$\frac{2z+12}{z^2+2z+2}=\frac{2z+12}{[z-(-1+i)][z-(-1-i)]}=\frac{2z+12}{(z+1-i)(z+1+i)}$$

$$=\frac{A}{(z+1-i)}+\frac{B}{(z+1+i)}$$

Using the **first residue formula**

$$A=\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{2z+12}{(z+1-i)(z+1+i)}=\lim_{z\to -1+i}\frac{2z+12}{(z+1+i)}$$

$$=\frac{2(-1+i)+12}{((-1+i)+1+i)}=\frac{2i+10}{2i}=\frac{2i}{2i}+\frac{10}{2i}=1-5i$$

$$B=\lim_{z\to -1-i}(z+1+i)\frac{2z+12}{(z+1-i)(z+1+i)}=\lim_{z\to -1-i}\frac{2z+12}{(z+1-i)}=1+5i$$

Using the **second residue formula**

p(z)=2z+12, q(z)=z^2+2z+2, q'(z)=2z+2

$$A=\lim_{z\to -1+i}\frac{p(z)}{q'(z)}=\frac{2z+12}{2z+2}=\frac{2(-1+i)+12}{2(-1+i)+2}=1-5i$$

$$B=\lim_{z\to -1-i}\frac{p(z)}{q'(z)}=\frac{2z+12}{2z+2}=\frac{2(-1-i)+12}{2(-1-i)+2}=1+5i$$

Using **classical Method**

$$\frac{2z+12}{z^2+2z+2}=\frac{A}{(z+1-i)}+\frac{B}{(z+1+i)}=\frac{A(z+1+i)+B(z+1-i)}{(z+1-i)(z+1+i)}$$

(A+B)=2 A(1+i)+B(1-i)=12 solution is A=1-5i , B=1+5i

Result $\dfrac{2z+12}{z^2+2z+2}=\dfrac{1+5i}{(z+1-i)}+\dfrac{1-5i}{(z+1+i)}$

****

qq11 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ise $\mathcal{L}[x(t)e^{at}] = X(s-a)$ oldugunu gosteriniz. (??.ozellik)

Cozum:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt = X(s)$$

oldugundan

$$\mathcal{L}[x(t)e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}x(t)e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}x(t)dt = X(s-a)$$

olacagi aciktir.

qq12 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ise $\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}$ oldugunu gosteriniz.

Cozum:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$$

oldugundan

$$\frac{dX(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st}x(t))dt$$
$$= \int_0^\infty -te^{-st}x(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}(tx(t))dt = -\mathcal{L}[tx(t)]$$

olacaktir.

qq13 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ise $\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$ oldugunu gosteriniz.

Cozum:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{dx(t)}{dt}dt = \lim_{P\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{dx(t)}{dt}dt$$

$$u = e^{-st},\ \ du = -se^{-st},\quad dv = \frac{dx(t)}{dt}dt,\quad v = x(t)$$

tanimi yapip kismi integrasyon uygulanirsa

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] == \lim_{P\infty}\left(e^{-st}x(t)|_0^P - (-s)\int_0^P e^{-st}x(t)dt\right)$$
$$= \lim_{P\infty}\left(e^{-sP}x(P) - x(0) + s\int_0^P e^{-st}x(t)dt\right)$$

$e^{-\infty} = 0$ oldugundan Laplas donusumu alinabilen bir fonksiyon icin $\lim_{P\infty} e^{-sP}x(P) = 0$ olmak zorundadir. Dolayisiyla

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt - x(0) = sx(s) - x(0)$$

olarak elde edilir.

qs50 $x_1(t) = e^{-3t}\sin(5t), \quad x_2(t) = e^{-3t}\cos(5t), \quad x_3(t) = e^{-3t}(10\sin(5t) + 20\cos(5t))$
ifadelerinin Laplas donusumlerini bulun.

Cozum: Laplas donusum tablosundan

$$\mathcal{L}[\sin(5t)] = \frac{5}{s^2+25} \qquad \mathcal{L}[\cos(5t)] = \frac{s}{s^2+25}$$

olarak bulunur. (C.P.ref: xq7pc11)'den

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\sin(5t)] = \frac{5}{(s+3)^2+25} = \frac{5}{s^2+6s+34}$$

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\cos(5t)] = \frac{s+3}{(s+3)^2+25} = \frac{s+3}{s^2+6s+34}$$

olarak bulunur. Laplas donusumunun lineerlik ozelligi kullanilarak

$$\mathcal{L}[e^{-3t}(10\sin(5t) + 20\cos(5t))] = 10\frac{5}{s^2+6s+34} + 20\frac{s+3}{s^2+6s+34} = \frac{20s+110}{s^2+6s+34}$$

bulunur.

qs51 $x(t) = t^2e^{8t}$ olduguna gore $X(s)$'yi hesaplayin.

Cozum: Tablodan $Z(s) = \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$ oldugu bulunarak,

$$X(s) = \mathcal{L}[t^2e^{8t}] = Z(s-8) = \frac{2}{(s-8)^3}$$

seklinde olacagi acikca gorulur.

$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ olduguna gore $\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$ oldugunu gosterin.

Cozum:

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_0^\infty e^{-st}x(at)dt$$

$t = u/a, \quad dt = du/a$ donusumu yaparak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(at)] &= \int_0^\infty e^{-s(u/a)}x(u)\frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su/a}x(u)du \\ &= \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

qs53 $\mathcal{L}[t\sin(at)]$'yi hesaplayin.

Cozum: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}$ ve $\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}$ oldugundan

$$[t\sin(at)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{s^2+a^2}$$

olarak eldeedilir.

$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5}$ ise $x(t)$ nedir.

Cozum: Payda polinomunun kokleri hesaplanirsa $s_1 = 1+2j, \quad s_2 = 1-2j$ olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5} = \frac{A}{s-(1+2j)} + \frac{B}{s-(1-2j)}$$

seklinde carpanlara ayrilabilir. A ve B katsayilari (Ek-ref: appx41) de gosterilen yontemlerle hesaplanirsa

$$A = 2+3j, \quad B = 2-3j$$

olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5} = \frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)}$$

olacaktir. Her terimin ayri ayri ters Laplas donusumu alinirsa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(S)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2+3j}{s-(1+2j)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2-3j}{s-(1-2j)}\right]$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= (2+3j)e^{(1+2j)t} + (2-3j)e^{(1-2j)t} \\
&= (2+3j)e^t e^{2jt} + (2-3j)e^t e^{-2jt} \\
&= e^t((2+3j)e^{2jt} + (2-3j)e^{-2jt}) \\
&= e^t(2e^{2jt} + 2e^{-2jt} + 3je^{2jt} - 3je^{-2jt}) \\
&= e^t(2(e^{2jt} + e^{-2jt}) + 3j(e^{2jt} - e^{-2jt})) \\
&= e^t\left(4\frac{e^{2jt}+e^{-2jt}}{2} + 3j\,2j\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}\right) \\
&= e^t(4\cos(2t) - 6\sin(2t))
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Simdi problemi baska bir yontemle cozelim. Payda polinomunun kokleri kompleks oldugundan $x(t)$'nin sinuzoidal terimler ihtiva edecegi aciktir.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s+a)^2+b^2}\right] = e^{-at}\sin(bt) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right] = e^{-at}\cos(bt)$$

oldugundan verilen ifadeyi bu formlara benzetmeye calisalim. $X(s)$'nin paydasinin yukaridaki forma benzemesi icin

$$(s+a)^2 + b^2 = s^2 + 2as + a^2 + b^2 = s^2 - 2s + 5$$

olmalidir. Buradan acikca gorulecegi gibi

$$2a = -2 \ \longrightarrow a = -1, \quad ve \qquad a^2 + b^2 = 5 \ \longrightarrow b = 2$$

olmalidir. $x(t)$ ifadesi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t \sin(2t) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t \cos(2t)$$

terimlerini icinde bulunduracaktir. O halde $X(s)$ ifadesini yukaridaki bilesenler cinsinden yazmak gerekir.

$$X(s) = \frac{4s-16}{s^2-2s+5} = \frac{4s-4-12}{s^2-2s+5} = 4\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2} - 6\frac{2}{(s-1)^2+2^2}$$

$X(s)$'nin ters Laplas donusumu alinirsa

$$x(t) = e^t(4\cos(2t) - 6\sin(2t))$$

olarak bulunur.

qq21 $x(s) = \frac{s}{s+a}$ ise $x(t) = ?$

Cozum: $\mathcal{L}[e^{-at} = \frac{1}{s+a}$ ve $s(X(s) - x(0) = \frac{d}{dt}x(t)$ bagintilari kullanilarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s\left(\frac{1}{s+a}\right)\right] - e^{-a\,0} = \frac{d}{dt}e^{-at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s\frac{1}{s+a}\right] = \frac{d}{dt}e^{-at} + 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+a}\right] = -ae^{-at} + 1$$

olarak bulunur.

qq14 $X(s) = \frac{12s^3-14s^2+152s-294}{s^4-6s^3+42s^2-78s+145}$ ise $x(t)$ nedir.

Cozum: Payda polinomunun kokleri hesaplanirsa

$$s_1 = 1+2j, \quad s_2 = 1-2j, \quad s_3 = 2+5j, \quad s_4 = 2-5j$$

olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{12s^3 - 14s^2 + 152s - 294}{s^4 - 6s^3 + 42s^2 - 78s + 145}$$

$$= \frac{A}{s-(1+2j)} + \frac{B}{s-(1-2j)} + \frac{C}{s-(2+5j)} + \frac{D}{s-(2-5j)}$$

seklinde carpanlara ayrilabilir. A, B, C, D katsayilari hesaplanirsa

$$A = 2+3j, \qquad B = 2-3j, \qquad C = 4-5j, \qquad ,D = 4+5j$$

olarak bulunur. Bu adimdan sonraki kisim (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi iki degisik yontemle yapilabilir.

Birinci yontemde (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi A, B, C, D katsayilari yerine konur ve her terimin ayri ayri ters Laplas donusumu alinir.

$$X(s) = \frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)} + \frac{4-5j}{s-(2+5j)} + \frac{4+5j}{s-(2-5j)}$$

$$x(t) = (2+3j)e^{(1+2j)t} + (2-3j)e^{(1-2j)t} + (4-5j)e^{2+5j)t} + (4+5j)e^{2-5j)t}$$

Daha sonra reel ve sanal kisimlar uygun sekilde guruplandirilarak sinuslu ve kosinuslu terimler elde edilir.

$$x(t) = e^{t}(4\cos(2t) - 6\sin(2t)) \ + e^{2t}(8\cos(5t) + 10\sin(5t))$$

olarak bulunur

$X(s)$'nin payi ve paydasi reel katsayili oldugundan elde edilecek $x(t)$'deki kompleks degisken j carpani daima yok edilir ve $x(t)$ hicbir zaman j carpani bulundurmaz.

Ikinci yontemde kompleks eslenik kokler birlestirilerek $X(s)$ iki terim gibi dusunulur.

$$X(s) = \left(\frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)}\right) + \left(\frac{4-5j}{s-(2+5j)} + \frac{4+5j}{s-(2-5j)}\right)$$

$$= \frac{4s-16}{s^2-2s+5} + \frac{8s+34}{s^2-4s+29}$$

Tipki (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi iki terimin ters Laplas donusumleri alinir. birinci terim (C.P.ref: xq7pc153)'de oldugu gibi Ikinci terim

$$8\frac{s-2}{(s-2)^2+5^2} + 10\frac{5}{(s-2)^2+5^2}$$

haline getirilir. Sonucta $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t) = e^{t}(4\cos(2t) - 6\sin(2t)) \ + e^{2t}(8\cos(5t) + 10\sin(5t))$$

olarak elde edilir.

qq15 $X(s) = \frac{20s^2+5s-2}{s^3(s+2)}$ ise $x(t)$ nedir.

Cozum: Payda polinomunun kokleri $s_1 = -1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 0$ seklindedir. Yani $s = 0$ da 3 katli kok vardir. O halde $X(s)$ ifadesi

$$X(s) = \frac{20s^2+5s-2}{s^3(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3}$$

seklinde basit kesirler halinde yazilabilir. A, B, C, D katsayilari hesaplanirsa

$$A = -9, \quad ,B = 9 \quad ,C = 2, \quad D = 1$$

olarak bulunur. O halde $X(s)$ fonksiyonu

$$X(s) = \frac{-9}{s+2} + \frac{9}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

seklinde olacaktir. Laplas donusumleri tablosuna bakarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{t^2}{2}$$

oldugu gozonune alinip $X(s)$nin ters Laplas donusumu alinirsa

$$x(t) = -9e^{2t} + 9u(t) + 2t + \frac{1}{2}t^2$$

elde edilir.

qq16 $X(s) = \frac{7s^4+36s^3+41s^2-2s-1}{s^5+4s^4+s^3-10s^2-4s+8}$ ise $x(t)$ nedir.

Cozum: Onceki problemlere benzer sekilde $X(s)$ fonksiyonu

$$X(s) = \frac{7s^4 + 36s^3 + 41s^2 - 2s - 1}{s^5 + 4s^4 + s^3 - 10s^2 - 4s + 8}$$

$$= \frac{2}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{-1}{(s+2)^3} + \frac{5}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2}$$

seklinde yazilabilir. $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{s^3}$ fonksiyonlarinin ters Laplas donusumleri (C.P.ref: xq7pc171)de verilmisti.

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)] = X(s-a)$$

oldugu gozoune alinirsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = te^{-2t} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right] = \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$

olarak bulunur. Sonuc olarak $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t) = 2e^{-2t} + 4te^{-2t} + -\frac{1}{2}t^2e^{-2t} + 5e^t + 3te^t$$

seklinde elde edilir.

qq17 $X(s) = \frac{4s^3-16s^2-4s-64}{s^4-4s^3+14s^2-20s+25}$ ise $x(t)$ nedir.-

Cozum: Payda polinomunun kokleri hesaplanirsa

$$s_1 = 1+2j, \quad s_2 = 1-2j \quad s_3 = 1+2j, \quad s_4 = 1-2j$$

olarak bulunur. O halde

$$X(s) = \frac{4s^3 - 16s^2 - 4s - 64}{s^4 - 4s^3 + 14s^2 - 20s + 25}$$

$$= \frac{A}{s-(1+2j)} + \frac{A^*}{s-(1-2j)} \frac{B}{[s-(1+2j)]^2} + \frac{B^*}{[s-(1-2j)]^2}$$

seklinde carpanlara ayrilabilir. A ve B katsayilari (Ek-ref: appx41) de gosterilen yontemlerle hesaplanirsa

$$A = 2+3j, \qquad B = 4+5j;$$

olarak bulunur ve $X(s)$ ifadesi

$$X(s) = \frac{2+3j}{s-(1+2j)} + \frac{2-3j}{s-(1-2j)} \frac{4+5j}{[s-(1+2j)]^2} + \frac{4-5j}{[s-(1-2j)]^2}$$

seklinde olacaktir. Ilk iki terimin ters Laplas donusumu (C.P.ref: xq7pc153)de oldugu gibi hesaplanir Son iki terimin ters Laplas donusumu

inverse Laplace Transform

1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}

Example problem: Calculate inverse Laplace Trans

a) $f_1(s) = \frac{4}{s}$ b) $f_2(s) = 4 + \frac{5}{s}$ c) $f_3(s) = \frac{1}{s+6}$

d) $f_4(s) = \frac{8}{s+10}$ e) $f_5(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s-2} - \frac{6}{s+3}$ f) $f_6(s) = \frac{1}{s^2+4}$

Solution

a) $f_1(s) = 4 \cdot \frac{1}{s} \Longrightarrow f_1(t) = 4\, u(t)$

b) $f_2(s) = 4 + \frac{5}{s} \Rightarrow f_2(t) = 4\,\delta(t) + 5\, u(t)$

c) $f_3(s) = \frac{1}{s+6} \Rightarrow f_3(t) = e^{-6t}$

d) $f_4(s) = \frac{8}{s+10} = 8\, \frac{1}{s+10} \Rightarrow f_4(t) = 8\, e^{-10t}$

e) $f_5(s) = \frac{3}{s} + 4\, \frac{1}{s-2} - 6\, \frac{1}{s+3} \Rightarrow f_5(t) = 3\,u(t) + 4\, e^{2t} - 6 e^{-3t}$

f) $f_6(s) = \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2}\, \frac{2}{s^2+2^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\, \sin 2t$

Example problem: calculate $f(t)$

a) $F_1(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s+1}$ b) $f_2(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{4}{s^2+9}$

solution

a) $f_1(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s+1} \Rightarrow f_1(t) = 2\,u(t) + 3\,e^{-t}$

b) $f_2(s) = 3 \frac{1}{s+2} + 4 \frac{1}{3} \frac{3}{s^2+3^2}$

$$f_2(t) = 3\,e^{-2t} + \frac{4}{3} \sin 3t$$

Example problem calculate $f(t)$

$$f_1(s) = \frac{10\,s}{s^2+9} + \frac{8}{s^2+9} = 10 \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{8}{3} \frac{3}{s^2+3^2}$$

$$f_1(t) = 10 \cos 3t + \frac{8}{3} \sin 3t$$

Example problem calculate $f(t)$

a) $f(s) = \frac{5s+4}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \frac{(A+B)s+2A}{s(s+2)}$

$$\frac{5s+4}{s(s+2)} = \frac{(A+B)s+2A}{s(s+2)}$$

$$\begin{pmatrix} 5 = A+B \\ 4 = 2A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 3 \end{array}$$

$$F(s) = \frac{5s+4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2}$$

$$f(t) = 2\,u(t) + 3\,e^{-2t}$$

Example problem calculate $f(t)$

$$f(s) = \frac{9s^2+52s+67}{s^3+9s^2+23s+15}$$

$$s^3+9s^2+23s+15=0 \Rightarrow s_1=-1$$
$$s_2=-3$$
$$s_3=-5$$

$$\frac{9s^2+52s+67}{s^3+9s^2+23s+15} = \frac{9s^2+52s+67}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+5}$$

calculate A, B, C

$A=2$

$B=3$

$C=4$

$$F(s) = \frac{9s^2+52s+67}{s^3+9s^2+23s+15} = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+3} + \frac{4}{s+5}$$

$$f(t) = 2e^{-t} + 3e^{-3t} + 4e^{-5t}$$

<u>Problem</u>: How can we calculate A, B, C.

Residues: Partial Fraction Expansion.

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\frac{C}{z-c}.+\ldots\ldots$$

First residue Formula

$$A=\operatorname{Res}(z=a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)}$$

$$B=\operatorname{Res}(z=b)=\lim_{z\to b}(z-b)\frac{p(z)}{q(z)}$$

$$C=\operatorname{Res}(z=c)=\lim_{z\to c}(z-c)\frac{p(z)}{q(z)}$$

Second residue Formula

$$A=\operatorname{Res}(z=a)=\lim_{z\to a}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$B=\operatorname{Res}(z=b)=\lim_{z\to b}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$C=\operatorname{Res}(z=c)=\lim_{z\to c}\frac{p(z)}{q'(z)}$$

Example AE-611

$$\frac{z+5}{z^3-5z^2-2z+24}=\frac{z+5}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\lim_{z\to 4}(z-4)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to 4}(z-4)\frac{z+5}{(z-4)(z-3)(z+2)}$$

$$=\lim_{z\to 4}\frac{z+5}{(z-3)(z+2)}=\frac{4+5}{(4-3)(4+2)}=\frac{9}{6}=1.5$$

$$B=\lim_{z\to -2}(z-(-2))\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z+5}{(z-4)(z-3)(z+2)}$$

$$=\lim_{z\to -2}\frac{z+5}{(z-3)(z-4)}=\frac{-2+5}{(-2-3)(-2-4)}=\frac{3}{30}=0.1$$

$$C=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to 3}\frac{z+5}{(z-4)(z+2)}=\frac{3+5}{(3-4)(3+2)}=-1.6$$

Using the Second residue Formula

In our problem $p(z)=z+5$ $\quad q(z)=z^3-5z^2-2z+24$ and $q'(z)=3z^2-10z-2$

$$A=\lim_{z\to 4}\frac{z+5}{3z^2-10z-2}=\frac{4+5}{3\ 4^2-10\ \ 4-2}=\frac{9}{6}=1.5$$

$$B=\lim_{z\to -2}\frac{z+5}{3z^2-10z-2}=\frac{-2+5}{3\ (-2)^2-10\ \ (-2)-2}=\frac{3}{30}=0.$$

$$C=\lim_{z\to 3}\frac{z+5}{3z^2-10z-2}=\frac{3+5}{3\ (3)^2-10\ (3)-2}=\frac{8}{-5}=$$

Note we get the same result by **classical method**

$$\frac{z+5}{z^3-5z^2-2z+24}=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}$$

$$=\frac{A(z+2)(z-3)+B(z-4)(z-3)+C(z-4)(z+2)}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$=\frac{A(z^2-z-6)+B(z^2-7z-12)+C(z^2-2z-8)}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$=$$

$$\frac{z^2(A+B+C)+z(-7A-B-2C)+12A-6B-8C}{(z-4)(z+2)(z-3)}$$

$$z^2(A+B+C)+z(-7A-B-2C)+12A-6B-8C=z+5$$

$A+B+C=0,\qquad -7A-B-2C=1,\qquad 12A-6B-8C=$

Solving for A,B,C we get A=1.5 B=0.1 C=-1.6

$$\frac{z+5}{z^3-5z^2-2z+24}=\frac{1.5}{z-4}+\frac{0.1}{z+2}+\frac{-1.6}{z-3}$$

Example AE-612

$$\frac{2z+12}{z^2+2z+2}=\frac{2z+12}{[z-(-1+i)][z-(-1-i)]}=\frac{2z+12}{(z+1-i)(z+1+}$$

$$=\frac{A}{(z+1-i)}+\frac{B}{(z+1+i)}$$

Using the first residue formula

$$A=\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{2z+12}{(z+1-i)(z+1+i)}=\lim_{z\to -1+i}\frac{2z+12}{(z+1+i)}$$

$$=\frac{2(-1+i)+12}{((-1+i)+1+i)}=\frac{2i+10}{2i}=\frac{2i}{2i}+\frac{10}{2i}=1-5i$$

$$B=\lim_{z\to -1-i}(z+1+i)\frac{2z+12}{(z+1-i)(z+1+i)}=\lim_{z\to -1-i}\frac{2z+12}{(z+1-i)}=1+5i$$

Using the second residue formula

$p(z)=2z+12,\qquad q(z)=z^2+2z+2,\qquad q'(z)=2z+2$

$$A=\lim_{z\to -1+i}\frac{p(z)}{q'(z)}=\frac{2z+12}{2z+2}=\frac{2(-1+i)+12}{2(-1+i)+2}=1-5i$$

$$B=\lim_{z\to -1-i}\frac{p(z)}{q'(z)}=\frac{2z+12}{2z+2}=\frac{2(-1-i)+12}{2(-1-i)+2}=1+5i$$

Using classical Method

$$\frac{2z+12}{z^2+2z+2}=\frac{A}{(z+1-i)}+\frac{B}{(z+1+i)}=\frac{A(z+1+i)+B(z+1-i)}{(z+1-i)(z+1+i)}$$

(A+B)=2 $\quad$ A(1+i)+B(1-i)=12 $\quad$ solution is A=1-5i , B=1+5i

Result $\displaystyle\frac{2z+12}{z^2+2z+2}=\frac{1+5i}{(z+1-i)}+\frac{1-5i}{(z+1+i)}$

EX.- 28 $\quad f(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \quad f(t) = ?$ 335

Solution

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = (s+1)\,f(s)\Big|_{s=-1} = (s+1)\,\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2}\Big|_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$\boxed{A = 2}$$

$$B = (s+2)\,f(s)\Big|_{s=-2} = (s+2)\,\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1}\Big|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$B = -1$$

$$f(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a+bi}{s-(x+iy)}+\frac{a-bi}{s-(x-iy)}\right\} = e^{xt}\left[2a\cos yt - 2b\sin yt\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+14}{s^2+6s+25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5+2i}{s-(-3+4i)}+\frac{5-2i}{s-(-3-4i}\right\} = e^{-3t}(2\times5\cos 4t - 2\times2\sin 4t)$$

$$= e^{-3t}(10\cos 4t - 4\sin 4t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+2}{s^2+6s+25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3+2i}{s-(-3+4i)}+\frac{3-2i}{s-(-3-4i)}\right\} = e^{-3t}(2\times3\cos 4t - 2\times2\sin 4t)$$

$$= e^{-3t}(6\cos 4t - 4\sin 4t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-22}{s^2+10s+34}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2+7i}{s-(-5+3i)}+\frac{2-7i}{s-(-5-3i}\right\} = e^{-5t}(2\times2\cos 3t - 2\times7\sin 3t)$$

$+3i$ $+7i$

$$= e^{-5t}(4\cos 3t - 14\sin 3t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+62}{s^2+10s+34}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-7i}{s-(-5+3i)}+\frac{2+7i}{s-(-5-3i)}\right\} = e^{-5t}(2\times2\cos 3t - 2\times(-7)\sin 3t)$$

$+3i$ $-7i$

$$= e^{-5t}(4\cos 3t + 14\sin 3t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+22}{s^2-10s+34}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-7i}{s-(5+3i)}+\frac{2+7i}{s-(5-3i)}\right\} = e^{5t}(2\times2\cos 4t - 2\times(-7)\sin 4t)$$

$$= e^{5t}(4\cos 4t + 14\sin 4t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \qquad \mathcal{L}\{e^{-at}\cos bt\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \qquad \mathcal{L}\{e^{-at}\sin bt\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

EX-34

$$\frac{10s+14}{s^2+6s+25} \qquad s^2+6s+25=0 \; \begin{matrix} \nearrow s_1 = -3+4i \\ \searrow s_2 = -3-4i \end{matrix}$$

$$s^2+6s+25 = (s+3)^2+4^2$$

$14 = 10 \times 3 + x$
$x = 14-30 = -16$

$$\frac{10s+14}{s^2+6s+25} = \frac{10s+14}{(s+3)^2+4^2} = 10\frac{(s+3)}{(s+3)^2+4^2} + \frac{-16}{(s+3)^2+4^2}$$

$$= 10\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} + (-4)\frac{4}{(s+3)^2+4^2}$$

$$\downarrow$$

$$10e^{-3t}\cos 4t + (-4)\,e^{-3t}\sin 4t$$

$$= e^{-3t}\left(10\cos 4t - 4\sin 4t\right)$$

EX-35

$2 = 6 \times 3 + x$
$2 - 18 = x$

$$\frac{6s+2}{s^2+6s+25} = \frac{6s+2}{(s+3)^2+4^2} = 6\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} + \frac{-16}{(s+3)^2+4^2} = 6\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} - 4\frac{4}{(s+3)^2+4^2}$$

$$\downarrow$$

$$6e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\sin 4t$$

$$= e^{-3t}\left(6\cos 4t - 4\sin 4t\right)$$

EX-36

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-22}{s^2+10s+34}\right\}=?$$

$$s^2+10s+34=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow s_1=-5+3i \\ \searrow s_2=-5-3i \end{array}$$

$-22=4\times 5+x$

$-22-20=x$

$$\frac{4s-22}{s^2+10s+34}=\frac{4s-22}{(s+5)^2+3^2}=4\,\frac{s+5}{(s+5)^2+3^2}+\frac{-42}{(s+5)^2+3^2}$$

$$=4\,\frac{s+5}{(s+5)^2+3^2}-14\,\frac{3}{(s+5)^2+3^2}$$

$$\swarrow$$

$$4e^{-5t}\cos 3t-14e^{-5t}\sin 3t$$

$$=e^{-5t}(4\cos 3t-14\sin 3t)$$

EX-37

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+22}{s^2-10s+34}\right\}$$

$$s^2-10s+34=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow s_1=5+3i \\ \searrow s_2=5-3i \end{array}$$

$22=4\times(-5)+x$

$22+20=x$

$$\frac{4s+22}{s^2-10s+34}=\frac{4s+22}{(s-5)^2+3^2}=4\,\frac{s-5}{(s-5)^2+3^2}+\frac{42}{(s-5)^2+3^2}$$

$$=4\,\frac{s-5}{(s-5)^2+3^2}+14\,\frac{3}{(s-5)^2+3^2}$$

$$\swarrow$$

$$4e^{5t}\cos 3t+14e^{5t}\sin 3t$$

$$=e^{5t}(4\cos 3t+14\sin 3t)$$

Ex-41

s-345

$$F(s)=\frac{13s^2+82s+122}{s^3+9s^2+26s+24}=\frac{1}{s+4}+\frac{7}{s+3}+\frac{5}{s+2}$$

$$\downarrow$$

$$f(t)=e^{-4t}+7e^{-3t}+5e^{-2t}$$

Ex-42

$$F(s)=\frac{17s^4-16s^3+497s^2-1200s+10978}{s^5-4s^4+23s^3-416s^2+2966s-4420}$$

$$=\underbrace{\frac{3}{s-(-4+7i)}+\frac{3}{s-(-4-7i)}}+\underbrace{\frac{2-7i}{s-(5+3i)}+\frac{2+7i}{s-(5-3i)}}+\frac{7}{s-2}$$

$$f(t)=e^{-4t}(2\times 3\cos 7t-2\times 0\sin 3t)+e^{5t}(2\times 2\cos 3t-2\times(-7)\sin 3t)+7e^{2t}$$

$$=6e^{-4t}\cos 7t+e^{5t}(4\cos 3t+14\sin 3t)+7e^{2t}$$

Repeated real roots

$$F(s) = \frac{10}{(s+2)} \longrightarrow f(t) = 10\, e^{-2t}$$

$$F(s) = \frac{10}{(s+2)^2} \longrightarrow f(t) = 10\, t\, e^{-2t}$$

$$F(s) = \frac{10}{(s+2)^3} \longrightarrow f(t) = 10\, t^2\, e^{-2t}$$

$$F(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{3}{(s+4)^2} \longrightarrow f(t) = 2\, e^{-4t} + 3\, t\, e^{-4t}$$

$$F(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+4)^2} + \frac{5}{(s+1)^3} \longrightarrow f(t) = 2\, e^{-2t} + 3\, t\, e^{-4t} + \frac{5}{2} t^2 e^{-t}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s+1} \longrightarrow f(t) = u(t) + t\, u(t) + 3\, e^{-t}$$

$$F(s) = \frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+5)} + \frac{C}{(s+5)^2} + \frac{D}{(s+5)^2}$$

$A = 20 \quad B = -400 \quad C = -100 \quad D = -20$

$$F(s) = \frac{20}{s} - \frac{400}{s+5} - \frac{100}{(s+5)^2} - \frac{20}{(s+5)^3}$$

$$f(t) = 20\, u(t) - 400\, e^{-5t} - 100\, t\, e^{-5t} - \frac{20}{2} t^2 e^{-5t}$$

How can we calculate A, B, C, D

$$F(s) = \frac{ms+n}{(s+a)^2(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{s+b}$$

$$C = (s+b)\,F(s)\Big|_{s=-b} = (s+b)\frac{ms+n}{(s+a)^2(s+b)}\Big|_{s=-b} = \frac{ms+n}{(s+a)^2}\Big|_{s=-b}$$

$$= \frac{m(-b)+n}{(-b+a)^2}$$

$$B = (s+a)^2\,F(s)\Big|_{s=-a} = (s+a)^2\frac{ms+n}{(s+a)^2(s+b)}\Big|_{s=-a} = \frac{ms+n}{s+b}\Big|_{s=-a} = \frac{-ma+n}{-a+b}$$

$$A = \frac{d}{ds}\left[(s+a)^2 F(s)\right]\Big|_{s=-a} = \frac{d}{ds}\left[\frac{ms+n}{s+b}\right] = \frac{(ms+n)'(s+b)-(ms+n)(s+b)'}{(s+b)^2}$$

$$= \frac{m(s+b)-(ms+n)}{(s+b)^2} =$$

$$f(s) = \frac{6s^2+17s+14}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$C = \frac{6s^2+17s+14}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = \frac{6\times(-2)^2+17(-2)+14}{(-2+1)^2} = 4$$

$$B = \frac{6s^2+17s+14}{s+2}\Big|_{s=-1} = \frac{6(-1)^2+17(-1)+14}{-1+2} = 3$$

$$A = \frac{d}{ds}\left[\frac{6s^2+17s+14}{s+2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{(12s+17)(s+2)-1(6s^2+17s+14)}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$\frac{15z^3+1}{(z+2)^3(z-1)^2(z+10)}=\frac{A_1}{(z+2)}+\frac{A_2}{(z+2)^2}+\frac{A_3}{(z+2)^3}+\frac{B_1}{(z-1)}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\frac{C}{(z+10)}$$

$$C=(z+10)F(z)\Big|_{z=-10}=\frac{15z^3+1}{(z+2)^3(z-1)^2}\Big|_{z=-10}$$

$$=\frac{15(-10)^3+1}{(-10+2)^3(-10-1)^2}=0.2421$$

$$B_2=(z-1)^2F(z)\Big|_{z=1}=\frac{15z^3+1}{(z+2)^3(z+10)}\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{15(1)^3+1}{(1+2)^3(1+10)}=0.0539$$

$$B_1=\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2F(z)\right]\Big|_{z=1}=\frac{d}{dz}\left[\frac{15z^3+1}{(z+2)^3(z+10)}\right]_{z=1}$$

$p=15z^3+1$ $\quad p'=45z^2$

$q=(z+2)^3(z+10)$ $\quad q'=3(z+2)^2(z+10)+(z+2)^3\,1$

$q'=4z^3+48z^2+144z+128$

$$\left(\frac{p}{q}\right)'=\left(\frac{p'q-pq'}{q^2}\right)$$

$$=\frac{-15z^6+1080z^4+3836z^3+3552z^2-144z-128}{(z+2)^6(z+10)^2}$$

$$\frac{-15z^6+1080z^4+3836z^3+3552z^2-144z-128}{(z+2)^6(z+10)^2}\Bigg|_{z=1}$$

$$\frac{-15\,1^6+1080\,1^4+3836\,1^3+3552\,1^2-144\,1-128}{(1+2)^6(1+10)^2}=0.092$$

$B_1=0.092$

$$A_3=(z+2)^3F(z)\Big|_{z=-2}=\frac{15z^3+1}{(z-1)^2(z+10)}\Big|_{z=-2}$$

$$=\frac{15(-2)^3+1}{(-2-1)^2(-2+10)}=-1.6528$$

$$A_2=\frac{d}{dz}\left[(z+2)^3F(z)\right]\Big|_{z=-2}=\frac{d}{dz}\left[\frac{15z^3+1}{(z-1)^2(z+10)}\right]_{z=-2}$$

$p=15z^3+1$ $\quad p'=45z^2$

$q=(z-1)^2(z+10)$ $\quad q'=2(z-1)(z+10)+(z-1)^2\,1$

$q'=3z^2+16z-19$

$A_2=1.604$

$$A_1=\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{15z^3+1}{(z-1)^2(z+10)}\right]\Bigg|_{z=-2}=-0.33$$

$$\frac{15z^3+1}{(z+2)^3(z-1)^2(z+10)}=$$

$$\frac{-0.33}{z+2}+\frac{1.604}{(z+2)^2}+\frac{-1.652}{(z+2)^3}+\frac{0.092}{z-1}+\frac{0.0539}{(z-1)^2}+\frac{0.2421}{z+10}$$

Improper Rational functions

$$f(s) = \frac{s^2+7s+5}{s+3} \longrightarrow \text{improper}$$

numerator $\longrightarrow s^2$ (2)

denominator $\longrightarrow s$ (1)

$2>1$

$$\begin{array}{r|l} & s+4 \\ \hline s+3 & s^2+7s+5 \\ & -(s^2+3s) \\ \hline & 0 \quad 4s+5 \\ & -(4s+12) \\ \hline & -7 \end{array}$$

$$\frac{s^2+7s+5}{s+3} = s+4+\frac{-7}{s+3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 5 & 17 \\ & -15 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\frac{17}{5} = 3+\frac{2}{5}$$

$$f(t) = \delta(t) \longrightarrow F(s) = 1$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) \longrightarrow F(s) = s$$

$$f(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) \longrightarrow F(s) = s^2$$

$$F(s) = \frac{s^2+7s+5}{s+3} = s+4+\frac{-7}{s+3}$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 4\delta(t) - 7e^{-3t}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{array}{r|l} & s + 4 \\ \hline s^2 + 3s + 2 & s^3 + 7s^2 + 9s + 7 \\ & -\;(s^3 + 3s^2 + 2s) \\ \hline & 4s^2 + 7s + 7 \\ & -\;(4s^2 + 12s + 8) \\ \hline & -5s - 1 \end{array}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2} = s + 4 + \frac{-5s - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\frac{-5s - 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-5s - 1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \left.\frac{-5s - 1}{s+1}\right|_{s=-2} = \frac{-5(-2) - 1}{-2+1} = -9$$

$$B = \left.\frac{-5s - 1}{s+2}\right|_{s=-1} = \frac{-5(-1) - 1}{-1+2} = 4$$

$$F(s) = s + 4 + \frac{-9}{s+2} + \frac{4}{s+1}$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 4\delta(t) - 9e^{-2t} + 4e^{-t}$$

$$F(s) = \frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20}$$ 352

$$
\begin{array}{r|l}
 & s^2 + 4s + 10 \\
\hline
s^2+9s+20 & s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300 \\
 & -\underline{(s^4 + 9s^3 + 20s^2)} \\
 & 4s^3 + 46s^2 + 200s + 300 \\
 & -\underline{(4s^3 + 36s^2 + 80s)} \\
 & 10s^2 + 120s + 300 \\
 & -\underline{(10s^2 + 90s + 200)} \\
 & 30s + 100
\end{array}
$$

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 + \frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20}$$

$$\frac{30s+100}{s^2+9s+20} = \frac{30s+100}{(s+4)(s+5)} = \frac{-20}{s+4} + \frac{50}{s+5}$$

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 + \frac{-20}{s+4} + \frac{50}{s+5}$$

$$f(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + 4\frac{d}{dt}\delta(t) + 10\,\delta(t) - 20e^{-4t} + 50e^{-5t}$$

yakınsaklığına bağlıdır. Teoremdeki 2. hipotezden dolayı , $t \geq M$ için

$$|e^{-st}f(t)| \leq Ke^{-st}e^{at} = Ke^{(a-s)t}$$

olur. Buna göre, $\int_M^\infty e^{(a-s)}dt$ integralinin yakınsak olması durumunda $F(s)$ de yakınsak olur. Örnek 6.1 de c yerine $a-s$ alınırsa, $a-s<0$ olduğunda $\int_M^\infty e^{(a-s)}dt$ integrali yakınsak olur ki bu durumda da $F(s)$ yakınsaktır.

Tersi söylenmedikçe bu bölümde yalnızca Teorem 6.2 nin koşullarını sağlayan fonksiyonlar gözönüne alınacaktır. Bazı elementer fonksiyonların Laplace dönüşümleri aşağıdaki örneklerde verilmiştir.

Örnek. 8.3. $f(t) = 1,\ t \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

olur.

Örnek. 8.4. $f(t) = e^{at},\ t \geq 0$ olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek. 8.5. $f(t) =$sin at, $t \geq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{L}\{\text{sin}at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt, \quad s > 0$$

olur.

$$F(s) = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\sin at\,dt,$$

olduğundan, kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}F(s) &= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}\text{cos}at}{a}\Big|_0^A - \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\text{cos}at\,dt\right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\text{cos}at\,dt\end{aligned}$$

yazılır. Yine kısmi integrasyon ile,

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt\\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > a$$

elde edilir.

Şimdi $s > a_1$ ve $s > a_2$ için f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda s değeri a_1 ve a_2 nin maksimumundan büyük olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]\,dt\\ &= c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)]\,dt\end{aligned}$$

yazılır. Buna göre,

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \tag{8.5}$$

olup, bu ise Laplace dönüşümünün bir lineer operatör olduğunu gösterir. Laplace dö nüşümünün bu özelliğini oldukça sık kullanacağız.

Örnek. 8.6. $f(t) = t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. $\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}tdt$ integralini kısmi integral kuralını uygulayarak hesaplayalım. (Bunun için $e^{-st}dt = dv$ ve $t = u$, $s > 0$ alınız). Buna göre,

$$\mathcal{L}\{t\}] = \left.\frac{-te^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}L[1] = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

olur.

Örnek. 8.7. $f(t) = e^{-3t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Laplace dönüşünün tanımından,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-3t}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+3)t}dt \\
&= \left.\frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{s+3}, \qquad s > -3
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek. 8.8. $f(t) = 3t - 5\sin 2t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Laplace dönüşümünün lineer olma özelliği kulanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{37 - 5\sin 2t\} &= 3\mathcal{L}\{t\} - 5\mathcal{L}\{\sin 2t\} \\
&= 3 \times \frac{1}{s^2} - 5 \times \frac{2}{s^2+4} \\
&= \frac{-7s^2+12}{s^2(s^2+4)}, \qquad s > 0.
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek. 8.9. Aşağıdaki fonksiyonların laplace dönüşümünü bulunuz.

1. $f(t) = te^{-2t}$

2. $f(t) = t^2e^{-2t}$

Çözüm. Burada çözüm, Laplace dönüşümünün tanımı ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi yapılır.

1.
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{te^{-2t}\} &= \int_0^\infty e^{-st}(te^{-2t})dt \\
&= \int_0^\infty t(e^{-(s+2)t})dt \\
&= \left.\frac{-te^{-(s+2)t}}{s+2}\right|_0^\infty + \frac{1}{s+2}\int_0^\infty e^{-(s+2)t}dt \\
&= \left.\frac{-e^{-(s+2)t}}{(s+2)^2}\right|_0^\infty, \qquad s > -2 \\
&= \frac{1}{(s+2)^2}, \qquad s > -2
\end{aligned}$$

olur.

2. Birinci şıkta göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\} &= \left.\frac{-t^2e^{-(s+2)t}}{s+2}\right|_0^\infty + \frac{2}{s+2}\int_0^\infty te^{-(s+2)t}dt \\
&= \frac{2}{s+2}\int_0^\infty e^{-st}(te^{-2t})dt, \qquad s > -2 \\
&= \frac{2}{s+2}L[te^{-2t}] = \frac{2}{s+2}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}, \qquad s > -2.
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek. 8.10. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3. \end{cases}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. $f(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli olduğundan Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^3 e^{-st}f(t)dt + \int_3^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^3 e^{-st}(0)dt + \int_3^\infty e^{-st}(2)dt = -\left.\frac{2e^{-st}}{s}\right|_3 = \frac{2e^{-3s}}{s}, \qquad s > 0.^\infty$$

olur.

Örnek. 8.11. $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Laplace dönüşümünün tanımından,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt \\
&= -\frac{1}{s} e^{-st} t^n \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
&& \mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{s} \\
n = 1 & \quad \text{için} & \mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s^2} \\
n = 2 & \quad \text{için} & \mathcal{L}\{t^2\} &= \frac{2}{s}\mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3} \\
n = 3 & \quad \text{için} & \mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3}{s}\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{3!}{s^4}
\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devamla, genel olarak,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\left[\frac{(n-1)!}{s^n}\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

elde edilir.

Örnek. 8.12. $\mathcal{L}\{\sin^2 t\}$ fonksiyonunun laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Laplace dönüşümün tanımından,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin^2 t\} &= L\left[\frac{1 - cos2t}{2}\right] = \frac{1}{2}L[1] - \frac{1}{2}L[cos2t] \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \times \frac{s}{s^2+4} \\
&= \frac{2}{s(s^2+4)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$ 2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$ 4. $f(t) = \begin{cases} 2t+1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$ 6. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi/2 \\ \sin t & t \geq \pi/2 \end{cases}$

7. $f(t) = e^{t+7}$ 8. $f(t) = e^{-2t-5}$
9. $f(t) = te^{4t}$ 10. $f(t) = t^2e^{3t}$
11. $f(t) = e^{-t}\sin t$ 12. $f(t) = e^t \cos t$
13. $f(t) = t\cos\ t$ 14. $f(t) = t\sin t$
15. $f(t) = 4t - 10$ 16. $f(t) = 7t + 3$
17. $f(t) = (t+1)^3$ 18. $f(t) = 1 + e^{4t}$
19. $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$ 20. $f(t) = \cos 5t + \sin 2t$
21. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$ 22. $f(t) = \sinh kt$
23. $f(t) = \cosh kt$ 24. $f(t) = e^t \sinh t$
25. $f(t) = e^{-t}\cosh t$ 26. $f(t) = \cos t\ \times \cos 2t$
27. $f(t) = \sin t \times \sin 2t$ 28. $f(t) = \cos t\ \times \cos 2t$
29. $f(t) = \sin^3 t$

30. **Gamma fonksiyonu**: Gamma fonksiyonu $\Gamma(p)$ ile gösterilir ve

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p dx$$

integrali ile tanımlanır. Bu integral p nin her değeri için sonsuzda yakınsaktır. $p < 0$ için ise has olmayan integraldir. Çünkü $x \to 0$ için integrand sınırsız olur. Bununla birlikte $p > -1$ için bu integralin $x = 0$ da yakınsak olduğu gösterilebilir. Buradan

(a). $p > 0$ için $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ olduğunu gösteriniz.
(b). $\Gamma(1) = 1$ olduğunu gösteriniz.
(c). Eğer p pozitif n tamsayısı ise $\Gamma(n+1) = n!$ olduğunu gösteriniz.
(d). $p > 0$ için, $p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p)$

olduğunu gösteriniz.

Buna göre, uzunluğu bir birim olan $0 < p \leq 1$ aralığında $\Gamma(p)$ biliniyorsa, her pozitif p değeri için $\Gamma(p)$ değeri hesaplanabilir. Buna göre $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösteriniz.

8.2 Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü, sabit katsayılı bir lineer diferensiyel denklemin $x = 0$ noktasındaki başlangıç koşullarını sağlayan ve $x \geq 0$ için tanımlı olan çözümünü bulmada kullanılır. Bu yöntemle, verilen bir diferensiyel denklem cebirsel denkleme dönüştürülür. Bu cebirsel denklem çözüldükten sonra, ters Laplace dönüşümü alınarak verilen diferensiyel denklemin çözümü bulunur.

Tanım 8.1. *Ters Laplace dönüşümü,*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}ds \tag{8.6}$$

formülü ile tanımlanır.

Burada a öyle bir pozitif sayıdır ki, $u = a$ düşey doğrusunun üzerinde $F(s)$ fonksiyonunun kutbu yoktur ve $F(s)$ nin $s_1, s_2, \cdots, s_n$ ile gösterilen kutbları bu doğrunun solunda bulunur ($s = u + iv$). Ters Laplace dönüşümü $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ya da $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{(s)\}$ şeklinde gösterilebilir. Ters Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Bazı fonksiyonların ters Laplace dönüşümleri:

a). $1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$	b). $t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, ...$
c). $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$	d). $\sin at = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}$
e). $\cos at = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$	f). $\sinh at = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}$
g). $\cosh at = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}$	

Örnek. 8.13.

$$F(s) = \frac{1}{s^5}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Bizden istenen $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$ değerinin bulunmasıdır. Tablodaki (b) ifadesinden $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4$ olarak bulunur.

Örnek. 8.14.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+64}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Tablodaki (d) ifadesi kullanılırsa çözüm,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}\sin 8t$$

olarak bulunur.

Örnek. 8.15.

$$F(s) = \frac{3s+5}{s^2+7}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen fonksiyon önce,

$$\frac{3s+5}{s^2+7} = \frac{3s}{s^2+7} + \frac{5}{s^2+7}$$

şeklinde yazılır. Tablodaki (e) ve (d) uygulanırsa, verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} \\ &= 3\cos\sqrt{7}t + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek. 8.16.

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen fonksiyon basit kesirlere ayrılırsa,

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}$$

yazılır, buradan $A=1/15$, $B=-1/6$ ve $C=1/10$ bulunur. Böylece fonksiyon,

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\frac{1/15}{s-1}-\frac{1/6}{s+2}+\frac{1/10}{s+4}$$

şeklinde yazılır. Tablodaki (c) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}&=\frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}+\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}\\&=\frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek. 8.17.

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen ifade önce basit kesirlere ayırılırsa,

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}$$

bulunur. Buradan,

$$s+1=As(s+2)^3+B(s+2)^3+Cs^2(s+2)^2+Ds^2(s+2)+Es^2$$

$A=-1/16$, $B=1/8$,, $C=1/16$, $D=0$ ve $E=-1/4$ olarak elde edilir. Tablodaki (a), (b) ve (c) özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/16}{s}+\frac{1/8}{s^2}+\frac{1/16}{s+2}-\frac{1/4}{(s+2)^3}\right\}\\&=-\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\}\\&=-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{8}t^2e^{-2t}\end{aligned}$$

bulunur. Burada ayrıca $\mathcal{L}^{-1}[2/(s+2)^3]=t^2e^{-2t}$ eşitliği de kullanıldı.

Örnek. 8.18.

$$F(s) = \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen ifade basit kesirlere ayırılırsa,

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$$

yazılır. Böylece, $A = 1/8$, $B = 3/4$, $C = -1/2$, $D = -1/8$ ve $E = -3/4$ bulunur. Bulunan bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/8}{s} + \frac{3/4}{s^2} - \frac{1/2}{s^3} + \frac{-s/8-3/4}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\} - \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{3}{8}\sin 2t
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$ 2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$ 4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$ 6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}\right\}$ 8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}+\frac{6}{s^5}-\frac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$ 10. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$ 12. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$ 14. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-16}\right\}$ 16. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2-2s}\right\}$

17. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$ 18. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

19. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$ 20. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$

21. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}$ 22. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

23. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\}$ 24. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}\right\}$

25. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+2s-3)}\right\}$ 26. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20)}\right\}$

8.3 Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümü

Bu kesimde sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemlerinin çözümlerinin Laplace dönüşümü yardımı ile nasıl elde edileceğini inceleyeceğiz. Bunun için önce f' nün Laplace dönüşümü ile f nin Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 8.3. Kabul edelim ki herhangi bir $0 \le t \le A$ aralığında f sürekli ve f' de parçalı sürekli olsun. Fazladan, $t \ge M$ için $|f(t)| \le Ke^{at}$ olacak şekilde K, a ve M sabitlerinin olduklarını kabul edelim. Bu durumda $s > a$ için $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ vardır ve üstelik,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \tag{8.7}$$

olur.

İspat. Teoremi ispat etmek için

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt$$

integralini gözönüne alalım. $0 \le t \le A$ aralığında f' fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)dt$$

yazılır. Bu ifadenin sağ tarafındaki her terime kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$
$$+ s\left(\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)dt\right)$$

bulunur. $f(t)$ sürekli olduğundan yukarıdaki ifadenin integral aralıkları tek bir aralıkta birleştirilirse,

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt$$

yazılır. $s > a$ olduğunda, $A \to \infty$ için $e^{-sA} f(A) \to 0$ olup, buradan $s > a$ için

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

Eğer bu teoremde f ve f' üzerine konan koşullar sırasıyla f' ve f'' üzerine konulursa $s > a$ için f'' nün Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \tag{8.8}$$

olur. Bu teorem $f^{(n)}$ türevi için de ardışık olarak genelleştirilebilir.

1. Genelleme: Kabul edelimki $0 \le t \le A$ aralığı üzerinde f, f',

..., $f^{(n-1)}$ fonksiyonları sürekli, $f^{(n)}$ ise parçalı sürekli olsun. Ayrıca, $t \geq M$ için $|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, \ldots, |f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ olacak şekilde K, a ve M sayıları var olsun. Bu durumda, $s > a$ için $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ vardır ve,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (8.9)$$

formülü ile tanımlanır.

Şimdi, Laplace dönüşümünün başlangıç değer probleminin çözümü için nasıl kullanılacağını inceleyelim. İlk önce

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad (8.10)$$

diferensiyel denklemini ve

$$y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0 \qquad (8.11)$$

başlangıç koşullarını gözönüne alalım. Bu problem daha önceki bölümlerde verilen yöntemler kullanılarak kolaylıkla çözülebilir. Verilen diferensiyel denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r - 1) = 0 \qquad (8.12)$$

olup, (8.10) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \qquad (8.13)$$

olur. Başlangıç koşullarından $c_1 + c_2 = 1$ ve $-c_1 + 2c_2 = 0$ yazılır, buradan $c_1 = \frac{2}{3}$ ve $c_2 = \frac{1}{3}$ bulunur. Buna göre (8.10)-(8.11) başlangıç değer probleminin çözümü

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \qquad (8.14)$$

olarak elde edilir.

Şimdi (8.10)-(8.11) başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü yardımı ile çözelim. Bunu yaparken öncelikle verilen problemin $y = \phi(t)$ şeklinde bir çözüm fonksiyonuna sahip olduğunu ve bu fonksiyonun ilk iki türevinin 1. Genellemenin koşullarını sağladığını kabul etmek zorundayız. Buna göre (8.10) denkleminin Laplace dönüşümü alınır ve Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \tag{8.15}$$

bulunur. 1. Genellemedeki, $\mathcal{L}\{y''\}$ ve $\mathcal{L}\{y'\}$ dönüşümünün değerleri (8.15) de yerlerine yazılırsa,

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

veya buradan

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0 \tag{8.16}$$

yazılır. Burada $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ dir. (8.16) ifadesinde $y(0)$ ve $y'(0)$ yerine (8.11) başlangıç koşullarındaki değerleri yazılır ve (8.16) dan $Y(s)$ çözülürse,

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \tag{8.17}$$

elde edilir. $Y(s)$ ifadesi basit kesirlere ayrılırsa,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} \tag{8.18}$$

olur, buradan $a = 1/3$ ve $b = 2/3$ bulunur. Buna göre

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1} \tag{8.19}$$

olur. Sonuçta, $y = \phi(t)$ fonksiyonunu bulmak için (8.19) ifadesinin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

elde edilir. Aynı işlemleri

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{8.20}$$

şeklindeki ikinci mertebeden genel diferensiyel denklemlere uygulayabiliriz. $n = 2$ için $y = \phi(t)$ fonksiyonunun 1. Genellemenin koşullarını sağladığını kabul ederek (8.20) ifadesinin Laplace dönüşümü alınırsa,

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s) \tag{8.21}$$

yazılır. Burada $F(s)$ ile $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir. (8.21) denkleminde $Y(s)$ çözülürse,

$$Y(s) = \frac{(as+b)y(0) + ay'(0)}{as^2+bs+c} + \frac{F(s)}{as^2+bs+c} \tag{8.22}$$

elde edilir. Buradan Laplace dönüşümü $Y(s)$ olan bir $y(t)$ fonksiyonu bulunabilirse, başlangıç değer problemi çözülmüş olur. Böylece Laplace dönüşümünü kullanarak bilinmeyen $y = \phi(t)$ fonksiyonunu bulmak için, diferensiyel denklem yerine cebirsel denklem çözmüş olduk. Dikkat edilecek olursa (8.22) denkleminin sağ tarafındaki ifadelerin paydasında bulunan $as^2 + bs + c$ böleni, (8.20) denkleminin karekteristik denkleminin aynısıdır. Fakat burada karekteristik denklemin köklerini bulmaya gerek yoktur.

Daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler ele alındığında özellikle karekteristik denklemin köklerinin kompleks ya da irrasyonel olması halinde ortaya çıkan cebirsel problem zor olabilir. Burada (8.10)-(8.11) problemini çözerken (8.16) denklemi ile verilen ve (8.19) Laplace dönüşümüne sahip olan fonskiyondan başka bir fonksiyonun da aynı (8.19) Laplace dönüşümüne sahip olup olmayacağı sorusu sorulabilir. Eğer f fonksiyonu sürekli ve onun Laplace dönüşümü de F ise, bu durumda aynı Laplace dönüşümüne sahip başka bir sürekli fonksiyon yoktur. Bir başka ifade ile fonksiyonlar ile onların Laplace dönüşümleri arasında birebir bir eşleme vardır. Bazı önemli fonksiyonların Laplace dönüşümleri Tablo 6.1 de verilmiştir. Bu tabloya bakarak, verilen bir diferensiyel denklemin Laplace dönüşümü bulunduğunda bu dönüşüme karşılık gelen fonksiyon bulunabilir.

Örnek. 8.19.

$$y'' + y = \sin 2t \tag{8.23}$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \tag{8.24}$$

başlangıç koşularını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm. Problemin $y = \phi(t)$ şeklinde bir çözüme sahip olduğunu ve bu çözümün 1. Genellemenin koşullarını sağladığını kabul edelim. Buna göre diferensiyel denklemin Laplace dönüşümü alınırsa,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

bulunur. (8.24) başlangıç koşulları burada kullanılır ve bu ifadeden $Y(s)$ çözülürse,

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)} \tag{8.25}$$

elde edilir. $Y(s)$ ifadesi

$$Y(s) = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4} \tag{8.26}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılırsa, buradan $a = 0$, $b = \frac{5}{3}$, $c = 0$ ve $d = -\frac{2}{3}$ bulunur, buradan

$$Y(s) = \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4}$$

olarak yazılır. $Y(s)$ nin ters dönüşümü alınırsa Tablo 6.1 den

$$y = \phi(t) = \frac{5}{3}\sin t - \frac{2}{3}\sin 2t$$

elde edilir.

Örnek. 8.20.

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, \qquad y(0) = 1$$

başlangıç değer denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferensiyel denklemdeki her terimine ayrı ayrı Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{L}\{dy/dt\} = sY(s9 - y(0) = sY(s) - 1$ ve $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = 1/(s{-}2)$ bulunur. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$
$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ yanı,

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılırsa, $A = -1$ ve $B = 2$ olarak çözülmüş olur. Buradan,

$$Y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

bulunur. Bu ifadeye ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= -e^{2t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek. 8.21.

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklemin her bir terimine ayrı ayrı Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}$$
$$\underbrace{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)}_{L\{y''\}} - \underbrace{6[sY(s) - y(0)]}_{L\{y'\}} + \underbrace{9Y(s)}_{L\{y\}} = \underbrace{2/(s-3)^3}_{L\{t^2e^{3t}\}}$$

olur. Başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s - 6 + \frac{2}{(s-3)^3}$$
$$(s-3)^2 Y(s) = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3}$$
$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

elde edilir. Buradan,

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}$$
$$= 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}$$

çözümü bulunur.

Teorem 8.4. Bazı temel fonksiyonların Laplace dönüşümleri:

1. $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$
2. $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
4. $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$
5. $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$
6. $\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$
7. $\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

Teorem 8.5. Bazı temel fonksiyonların Ters Laplace dönüşümleri:

1. $1 = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}$
2. $t^n = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$
4. $\sin kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$
5. $\cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$
6. $\sinh kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$
7. $\cosh kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$

Tanım 8.2.

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, t < c, \\ 1, t \geq c, \end{cases} c \geq 0 \tag{8.27}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona birim adım fonksiyonu denir.

u_c birim adım fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)dt = \int_c^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0 \tag{8.28}$$

şeklindedir.

Teorem 8.6. Eğer $s > a \geq 0$ için $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ var ve c pozitif bir sabit ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \qquad s > a \tag{8.29}$$

olur. Tersine, eğer $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ise, bu durumda,

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} \tag{8.30}$$

olur.

Bu teorem kısaca $f(t)$ nin pozitif t yönünde c birim yer değiştirmesinin $F(s)$ nin e^{-cs} ile çarpımına karşılık geldiğini söyler. Bu teoremi ispat etmek için $u_c(t)f(t-c)$ yi hesaplamak yeterlidir. Buna göre;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-c)dt\end{aligned}$$

olur. Burada $\xi = t - c$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s}f(\xi)d\xi \\ &= e^{-cs}\int_0^\infty e^{-\xi s}f(\xi)d\xi \\ &= e^{-cs}F(s)\end{aligned}$$

elde dilir. Bu durumda (8.29) denklemi sağlanır. (8.30) ün doğruluğunu göstermek için ise (8.29) ifadesinin ters Laplace dönüşümünü almak yeterlidir. Bu teoremden faydalanarak fonksiyonların Laplace dönüşümleri ve ters Laplace dönüşümleri bulunabilir.

Örnek. 8.22.

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi/4 \\ \sin t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Eğer

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \pi/4 \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa,

$$f(t) = \sin t + g(t)$$

olur. Bu durumda,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t) \cos(t - \pi/4)$$

olup,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\left\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\right\} \\ &= \mathcal{L}\{\sin t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos(t)\} \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede $\sin t$ ve $\cos t$ nin dönüşümleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1} \\ &= \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek. 8.23.

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Ters Laplace dönüşüm lineer bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t-2) \end{aligned}$$

olur. Buradan f fonksiyonu,

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

olarak elde dilir.

Teorem 8.7. Eğer, $s > a \geq 0$ için $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ve $c \in \mathbb{Z}^+$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \qquad s > a + c \tag{8.31}$$

olur.

Tersine, eğer $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ise, bu durumda,

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{s \to s-a}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{8.32}$$

olur.

İspat. Bu teoreme göre $f(t)$ fonksiyonunun e^{ct} ile çarpımı, $F(s)$ dönüşümünün pozitif s yönünde c birim yer değiştirmesini verir. Bu teoremi ispat etmek için $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre,

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt = F(s-c)$$

olur. Bu da (8.31) ifadesine eşittir. Bu teorem kullanılarak fonksiyonların ters Laplace dönüşümleri daha kolay hesaplanır.

Örnek. 8.24.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen fonksiyon

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2+1} = F(s-2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ dir. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sin t$ olduğundan yukarıdaki teoreme göre

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t}\sin t$$

elde edilir.

Örnek. 8.25.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$$

ifadesini hesaplayınız.

Çözüm. İlk önce ikinci ifadenin paydasını kareye tamamlayalım ve sonra Laplace dönüşümünün lineerliğini kullanalım, bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2-9}\right\} \\
&= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{(s-1)^3}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-9}\right\} \\
&= \frac{1}{2!}L^{-1}\left\{\left.\frac{2!}{s^3}\right|_{s\to s-1}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\left.\frac{3}{s^2-9}\right|_{s\to s+1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}e^t t^2 + \frac{1}{3}e^{-t}\sinh 3t
\end{aligned}$$

bulunur.

8.3.1 Konvülasyon İntegral

Bu bölümde çarpım şeklindeki ifadelerin ters dönüşümlerini hesaplamak için daha kolay bir yöntem geliştireceğiz. Bazen $f(t)$ ve $g(t)$ gibi iki fonksiyonun $F(s)$ ve $G(s)$ dönüşümlerinin çarpımı olarak verilen $H(s)$ dönüşümünün Laplace dönüşümünü hesaplamak gerekir. Böyle durumlarda, $H(s)$ nin f ve g nin çarpımlarının Laplace dönüşümü olduğu düşünülebilir. Fakat bu doğru bir durum değildir. Yani Laplace dönüşümü adi çarpma ile yer değiştiremez. Açıkca, $\mathcal{L}\{f \cdot g\}$ ile $\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$ aynı değildir.

Teorem 8.8. Eğer her $s > a \geq 0$ için $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ve $G(t) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ ise , bu durumda

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \ s > a \tag{8.33}$$

dir. Burada $h(t)$ ye f ve g fonksiyonlarının **konvülasyonu** denir ve

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau \tag{8.34}$$

ile tanımlanır. Bu integrale **konvülasyon integral** denir.

(8.34) formülündeki iki integralin eşitliği, $t - \tau = \xi$ değişken değiştirmesi yapılarak bulunur. Bu teoremin ispatını vermeden önce konvülasyonun bazı özellikleri üzerinde duralım. Bu teoreme göre iki fonksiyonun konvülasyonunun dönüşümü onların adi çarpımlarının dönüşümü yerine, ayrı ayrı dönüşümlerinin çarpımı ile verilir. Klasik anlamda konvülasyon integral, "genelleştirilmiş çarpım" olarak düşünülebilir. $(f * g)(t)$ notasyonu adi çarpımın sahip olduğu bir çok özelliğe sahiptir. Örneğin:

1. $f * g = g * f$ (değişme özelliği)

2. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (dağılma özelliği)

3. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (birleşme özelliği)

4. $f * 0 = 0 * f = 0$

dir. Konvülasyonun bu özelliklerinin adi çarpma işleminin özellikleriyle aynı olmasına rağmen, adi çarpma işleminin bazı özellikleri konvülasyon için geçerli değildir. Örneğin, genelde $f * 1$ konvülasyonu f ye eşit değildir. Bunu görmek için,

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau).1\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\, d\tau$$

integralini göz önüne alalım. Eğer $f(t) = \cos t$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned}(f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t-\tau)\, d\tau \\ &= -\sin(t-\tau)\big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\sin 0 + \sin t \\ &= \sin t\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $(f*1)(t) \neq f(t)$ dir. Konvülasyon integralleri, ele alınan sistemin t anındaki davranışlarının, yalnızca dikkate alınan t anındaki duruma bağlı olmayıp, t nin geçmişteki değerlerine de bağlı olduğu çeşitli alanlarda ortaya çıkarlar. Bu tip sistemlere bazen kalıtımsal sistemler denir ve nötron yayılımı, nüfus dinamiği gibi çeşitli alanlarda karşılaşılır. Şimdi teoremin ispatını verebiliriz.

İspat. Eğer,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi$$

ve

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)\, d\eta$$

ise, bu durumda

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)\, d\eta \tag{8.35}$$

olur. Birinci integralin integrantı ikincisinin integrasyon değişkeninden bağımsız olduğundan, $F(s)G(s)$'i katlı integrasyon olarak

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi)\, d\xi \tag{8.36}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi, η yı sabit tutarak $\xi = t - \eta$ değişken değiştirmesi yapmak süretiyle daha uygun şekilde yazabiliriz. Bu durumda (8.36) ifadesindeki ξ değişkenine göre alınan integral t değişkenine göre alınan integrale dönüşür. Böylece,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_\eta^\infty e^{-st} f(t-\eta)\, dt \tag{8.37}$$

olur. Burada $\tau = \eta$ olarak alınırsa, (8.37) ifadesi,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt \tag{8.38}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt \\ &= L\{h(t)\} \end{aligned} \tag{8.39}$$

elde edilir. Burada $h(t)$ ifadesi (8.34) ile tanımlanmıştır.

Örnek. 8.26.

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)} \tag{14}$$

ifadesinin ters dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. Bir kere $H(s)$ ifadesi $1/s^2$ ve $a/(s^2+a^2)$ nin çarpımı olarak düşünülürse, sırasıyla t ve $\sin at$ fonksiyonlarının dönüşümleri olur. Teorem 8.8'e göre $H(s)$ nin ters dönüşümü

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\sin a\tau\, d\tau = \frac{at - \sin at}{a^2}$$

dir.

Örnek. 8.27.

$$y'' + 4y = g(t) \tag{8.40}$$

$$y(0) = 3, \; y'(0) = -1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferensiyel denklemin Laplace dönüşümü alınır ve başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s),$$

veya

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}$$

elde edilir. Burada $Y(s)$ ifadesini

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$$

şeklinde yazalım. Böylece, bazı temel fonksiyonların ters Laplace dönüşü teoreminden ve teorem (8.8) den,

$$y = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

çözümü bulunur.

Örnek. 8.28. $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\sin t$ diferensiyel denklemini $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Verilen diferensiyel denklemin Laplace dönüşümü alınır ve başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ Y(s)(s^2+2s+5) - 1 &= \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten $Y(s)$ çözülürse.

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2+2}{\left[(s+1)^2+1\right]\left[(s+1)^2+4\right]}$$

bulunur. Bu son eşitliğin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ifade basit kesirlere ayrılırsa,

$$\frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4}$$

yazılır.Burdan, $a = c = 0$, $b = \frac{1}{3}$ ve $d = \frac{2}{3}$ bulunur. Böylece,

$$y = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{(s^2+1)} + \frac{2/3}{(s^2+4)}\right\} = \frac{e^{-t}}{3}(\sin t + \sin 2t)$$

genel çözünü bulunur.

Örnek. 8.29. $y' + y = te^{-t}$ diferensiyel denklemini $y(0) = 0$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Verilen diferensiyel denklemin Laplace dönüşümü alınır ve başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$
$$Y(s)(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

elde edilir. Son eşitlikten $Y(s)$ çözülürse.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

bulunur. Bu son eşitliğin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t}t^2$$

çözümü bulunur.

Alıştırmalar

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

1. $\dfrac{dy}{dx} - y = 1, \quad y(0) = 0$

   (Cevap: $y = -1 + e^x$)

2. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$

   (Cevap: $y = te^{-4t} + 2e^{-4t}$)

3. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(Cevap: $y = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$)

4. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(Cevap: $y = \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$)

5. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(Cevap: $y = \frac{1}{20}t^5e^{2t}$)

6. $y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

(Cevap: $y = \cos t - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$)

7. $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(Cevap: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t$)

8. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

(Cevap: $y = -\frac{8}{9}e^{-t/2} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$)

9. $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, y'''(0) = 0$

(Cevap: $y = \cos t$)

10. $y' + y = f(t)$, burada $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0$

(Cevap: $y = [5 - 5e^{-(t-1)}]u(t-1)$)

Diferansiyel Denklemin Genel cozumunu Laplas Donusumu ile bulma:

$\pounds\{y\}=Y(s)$

$\pounds\{ \frac{dy}{dt} \}=\pounds\{y'\}=sY(s)-y(0)$

$\pounds\{ \frac{d^2y}{dt^2} \}=\pounds\{ y''\}=s^2Y(s)- s\, y(0) - y'(0)$

$\pounds\{ \frac{d^3y}{dt^3} \}=\pounds\{ y'''\}=s^3Y(s)- s^2y(0) – s\, y'(0) - y''(0)$

baslangic kosullari sifir ise y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=0 denklemler basitlesir

$\pounds\{y\}=Y(s)$

$\pounds\{y'\}=sY(s)$

$\pounds\{ y''\}=s^2Y(s)$

$\pounds\{y'''\}=s^3Y(s)$

Ornek Problem 271) y' +2y =0, diff denkleminin baslangic kosullari y(0)=5 olarak veriliyor. Diff denklemin genel cozumunu bulun.

Cozum:

$\pounds\{y\}=Y(s)$

$\pounds\{ \frac{dy}{dt} \}=\pounds\{y'\}= sY(s)-y(0) = sY(s) - 5$

y' +2y =0, ==> s Y(s) – 5+2 Y(s)=0

Y(s) [s +2] = 5

$Y(s)=\frac{5}{s+2}$ **==> $y(t)=5\, e^{-2t}$**,

Ornek Problem 272) y' +2y =2u(t), diff denkleminin baslangic kosullari y(0)=5 Diff denklemin genel cozumunu bulun.

Cozum:

$\pounds\{y\}=Y(s)$

$\pounds\{ \frac{dy}{dt} \}=\pounds\{y'\}= sY(s)-y(0) = sY(s) - 5$

$\pounds\{ u(t) \}=\frac{1}{s}$

y' +2y =2u(t), ==> $s\,Y(s) – 5+2\,Y(s)= 2\frac{1}{s}$

$Y(s)\,[s +2] - 5= \frac{2}{s}$

$Y(s)\,[s +2] = 5+ \frac{2}{s}$

$Y(s)\,[s +2] = \frac{5s+2}{s}$

$Y(s) = \frac{5s+2}{s(s+2)}$

$$\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+Bs}{s(s+2)}$$

A+B=5,

2A=2

A=1, B=4

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{4}{s+2}$$

$y(t)= u(t) + 4\, e^{-2t}$

Ornek Problem 273) y' +2y =8sin(6t) , diff denkleminin baslangic kosullari y(0)=0, Diff denklemin genel cozumunu bulun.

Cozum:

$\pounds\{y\}=Y(s)$

$\pounds\{ \frac{dy}{dt} \}=\pounds\{y'\}= sY(s)-y(0) = sY(s)-0$

$\pounds\{ \sin(5t) \}=\frac{6}{s^2+36}$

y' +2y =8sin(6t) , ==>

$$s\,Y(s) +2\,Y(s)=8\,\frac{6}{s^2+36}$$

$Y(s)\,[s +2] = \frac{48}{s^2+36}$

$Y(s) = \frac{48}{(s+2)(s^2+36)}$

$$\frac{48}{(s+2)(s^2+36)}=\frac{A}{(s+2)}+\frac{Bs+C}{s^2+36}$$

$$=\frac{A(s^2+36)+(Bs+C)(s+2)}{(s+2)(s^2+36)}$$

$$=\frac{(A+B)s^2+(2B+C)s+36A+2C}{(s+2)(s^2+36)}$$

A+B=0, 2B+C=0, 36A+2C=48

inv([1 1 0; 0 2 1; 36 0 2])*[0; 0; 48]

A=1.2, B=-1.2, C=2.4

$$Y(s)=\frac{1.2}{(s+2)}+\frac{-1.2s+2.4}{s^2+36}$$

$y(t)=1.2\, e^{-2t}$ + **?**

$\dfrac{-1.2s+2.4}{s^2+36}$ nin Laplas donusumu nedir.

$$\frac{-1.2s+2.4}{s^2+36} = \frac{-1.2(s-2)}{s^2+36} = -1.2\frac{(s-2)}{s^2+36}$$
$$= -1.2\left(\frac{s}{s^2+36} - \frac{2}{s^2+36}\right)$$
$$= -1.2\left(\frac{s}{s^2+36} - \frac{3}{3}\frac{2}{s^2+36}\right)$$
$$= -1.2\left(\frac{s}{s^2+36} - \frac{1}{3}\frac{6}{s^2+36}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+36}\right) = \cos(6t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \sin(6t)$$

oldugundan , $\dfrac{-1.2s+2.4}{s^2+36}$ ifadesinin Laplas donusumu

$$-1.2(\cos(6t) - \frac{1}{3}\sin(6t))$$
$$-1.2\cos(6t) - \frac{1.2}{3}\sin(6t)$$

elde edilir.

Bu ifade y(t) de yerine konuluirsa

$$y(t)=1.2\,e^{-2t} + -1.2\cos(6t) - \frac{1.2}{3}\sin(6t)$$

elde edilr.

Ornek Problem 275) **$y'' - 3y' + 2y = 4t^2$** diff denkleminin baslangic kosullari y(0)=0 ve y'(0)=0 olarak veriliyor. Diff denklemin genel cozumunu bulun.

$y'' - 3y' + 2y = 4t^2$

$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{4t^2\}$

$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{3y'\} + \mathcal{L}\{2y\} = \mathcal{L}\{4t^2\}$

$$s^2Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = 4\frac{2}{s^3} = \frac{8}{s^3}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{8}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s^3(s^2 - 3s + 2)}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s^3(s^2 - 3s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s-1}$$

$$\underset{S^2(S-2)(S-1)}{\frac{A}{s}} + \underset{S(S-2)(S-1)}{\frac{B}{s^2}} + \underset{(S-2)(S-1)}{\frac{C}{s^3}} + \underset{S^3(S-1)}{\frac{D}{s-2}} + \underset{S^3(S-2)}{\frac{E}{s-1}}$$

$$= \frac{A s^2(s-2)(s-1) + B s(s-2)(s-1)) + C(s-2)(s-1)) + Ds^3(s-1) + Es^3(s-2)}{s^3(s-2)(s-1)}$$

$$= \frac{A(s^4 - 3s^3 + 2s^2) + B(s^3 - 3s^2 + 2s) + C(s^2 - 3s + 2) + D(s^4 - s^3) + E(s^4 - 2s^3)}{s^3(s-2)(s-1)}$$

$$= \frac{(A+D+E)s^4 + (-3A+B-D-2E)s^3 + (2A-3B+C)s^2 + (2B-3C)s + 2C}{s^3(s-2)(s-1)}$$

A+D+E=0

-3A+B-D-2E=0

2A-3B+C=0

2B-3C=0

2C=8,
A,B,C,D,E bilinen yontemlerle hesaplanir.
A=7, B=6, C=4, D=1, E= -8

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s-1} = \frac{7}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s-2} + \frac{-8}{s-1}$$

$y(x)= 7+6t + 4 \frac{t^2}{2} + e^{2t} - 8 e^t = 7+6t + 2t^2 + e^{2t} - 8 e^t$

12. $\begin{array}{l} Dx = -5x - y \\ Dy = 4x - y \end{array}$; $\left(\text{Cevap: } \begin{array}{l} x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3} \\ y = -e^{3t+3} + 2te^{-3t+3} \end{array} \right)$

9.2 Laplace Dönüşümü Yöntemi

Başlangıç koşulları verilmiş bir diferensiyel denklem sistemine, Laplace dönüşümü uygulanarak denklem sistemi sabit katsayılı lineer cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur. Daha sonra lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemine göre denklem sistemi çözülür. Bu yöntemi aşağıdaki örnekler üzerinde açıklayalım.

Örnek. 9.5.

$$\begin{array}{c} 2x' + y' - y - t = 0 \\ x' + y' - t^2 = 0 \end{array} \tag{9.16}$$

denklemini $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm. $X(s) = [x(t)]$ ve $Y(s) = [y(t)]$ yazıp, verilen denklemlere Laplace dönüşümü uygulayalım, bu durumda,

$$\begin{aligned} 2[sX(s) - x(0)] + sY(s) - y(0) - Y(s) &= \frac{1}{s^2} \\ sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) \qquad\qquad &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{array}{l} 2sX(s) + (s-1)Y(s) = 2 + 1/s^2 \\ sX(s) + \qquad\quad sY(s) = 1 + 2/s^3 \end{array} \tag{9.17}$$

elde edilir. (9.17) ifadesinin ikinci denklemi 2 ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(-s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

bulunur. Bu ifade sadeleştirilirse,

$$sY(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)} \tag{9.18}$$

elde edilir. Bu son ifade basit kesirlere ayrılırsa,

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1}$$

olur. Buradan,

$$4 - s = As^2(s+1) + Bs(s+1) + C(s+1) + Ds^3$$

yazılır. Eşit kuvvetten terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$A = 5, \quad B = -5, \quad C = 4 \quad \text{ve} \quad D = -5$$

bulunur. Buradan (9.18) denklemi,

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

şeklinde yazılır ve ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} y(t) &= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - 5\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \end{aligned}$$

bulunur. (9.17) denklem sisteminin ikinci denklemi,

$$X(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}$$

şeklinde yazılır ve ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} x(t) &= -L^{-1}\{Y(s)\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} \\ &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece verilen denklem sisteminin çözümü,

$$\begin{aligned} x(t) &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t} \\ y(t) &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \end{aligned}$$

olur.

Örnek. 9.6.

$$\begin{aligned} x'' + 10x - 4y &= 0 \\ -4x + y'' + y &= 0 \end{aligned} \qquad (9.19)$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

başlangıç değer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklemlere ayrı ayrı Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 10X(s) - 4Y(s) = 0 \\ -4X(s) + s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 0 \end{aligned}$$

elde dilir. Verilen başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (s^2 + 10)X(s) - 4Y(s) &= 1 \\ -4X(s) + (s^2 + 4)Y(s) &= -1 \end{aligned} \tag{9.20}$$

elde edilir. Bu iki denklem arasında Y yokedilirse,

$$X(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} \tag{9.21}$$

bulunur. Bu ifadeyi basit kesirlere ayırmaya çalışalım,

$$\frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{As + B}{s^2 + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12}$$

yazılır ve paydalar eşitlenirse,

$$s^2 = (As + B)(s^2 + 12) + (Cs + D)(s^2 + 2)$$

bulunur. Aynı kuvvetten terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 1 \\ 12A + 2C &= 0 \\ 12B + 2D &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse,

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = 0, \quad D = \frac{6}{5}$$

bulunur. Böylece (9.21) denklemi,

$$X(s) = -\frac{1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12}$$

olur. Bu ifadenin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$x(t) = -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{10}\sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\sin 2\sqrt{3}t$$

elde edilir. $x(t)$ nin değeri (9.20) denklem sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa,

$$Y(s) = -\frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)}$$

bulunur. Bu denklem basit kesirlere ayrılırsa,

$$Y(s) = -\frac{2/5}{s^2+2} - \frac{3/5}{s^2+12}$$

olur. Bu ifadenin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y(t) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{5}\sin\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin 2\sqrt{3}t$$

elde dilir. Böylece verilen denklem sisteminin çözümü,

$$x(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\sin 2\sqrt{3}t$$
$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5}\sin\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin 2\sqrt{3}t$$

olur.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklem sistemlerini Laplace dönüşümü yöntemini kullanarak çözünüz.

1. $Dx = -x + y$, $Dy = 2x$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$; $\left(\text{Cevap: } \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ y = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t} \end{array}\right)$

2. $\begin{aligned} &Dx = x - 2y \\ &Dy = 5x - y \\ &x(0) = -1, \quad y(0) = 2 \end{aligned}$; $\left(\text{Cevap: } \begin{aligned} x &= -\cos 3t - \tfrac{5}{3}\sin 3t \\ y &= 2\cos 3t - \tfrac{7}{3}\sin 3t \end{aligned}\right)$

3. $\begin{aligned} &2Dx + Dy - 2x = 1 \\ &Dx + Dy - 3x - 3y = 2 \\ &x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{aligned}$; $\left(\text{Cevap: } \begin{aligned} x &= -2e^{3t} + \tfrac{5}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2} \\ y &= \tfrac{8}{3}e^{3t} - \tfrac{5}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{6} \end{aligned}\right)$

4. $\begin{aligned} &D^2x + x - y = 0 \\ &D^2y - x + y = 0 \\ &x(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \\ &y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$; $\left(\text{Cevap: } \begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sin\sqrt{2t} \\ y &= -\tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sin\sqrt{2t} \end{aligned}\right)$

5. $\begin{aligned} &D^2x + D^2y = t^2 \\ &D^2x - D^2y = 4t \\ &x(0) = 8, \; x'(0) = 0, \\ &y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$; $\left(\text{Cevap: } \begin{aligned} x &= 8 + \tfrac{2}{3!}t^3 + \tfrac{1}{4!}t^4 \\ y &= -\tfrac{2}{3!}t^3 + \tfrac{1}{4!}t^4 \end{aligned}\right)$

6. $\begin{aligned} &D^2x + 3Dy + 3y = 0 \\ &D^2x + 3y = te^{-t} \\ &x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \\ &y(0) = 0 \end{aligned}$; $\left(\text{Cevap: } \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}t^2 + t + 1 - e^{-t} \\ y &= -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}e^{-t} + \tfrac{1}{3}te^{-t} \end{aligned}\right)$

9.3 Birinci Mertebeden Lineer Denklem Sistemleri

Bu bölümde,

$$\begin{aligned} P_{11}(D)x_1 + P_{12}(D)x_2 + \cdots + P_{1n}(D)x_n &= b_1(t) \\ P_{21}(D)x_1 + P_{22}(D)x_2 + \cdots + P_{2n}(D)x_n &= b_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n1}(D)x_1 + P_{n2}(D)x_2 + \cdots + P_{nn}(D)x_n &= b_n(t) \end{aligned} \tag{9.22}$$

şeklinde yüksek mertebeden lineer diferensiyel denklem sistemi ele alınacaktır. Burada P_{ij}, D türev operatörünün polinomlarıdır. Bu denklem sistemi birinci mertebeden denklem sistemine dönüştürülebilir. Fakat (9.22) şeklindeki her denklem sistemi birinci mertebeden değildir. Birinci mertebe-