15 EĞRİSEL İNTEGRALLER

REEL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN EĞRİSEL İNTEGRALİ

TANIM

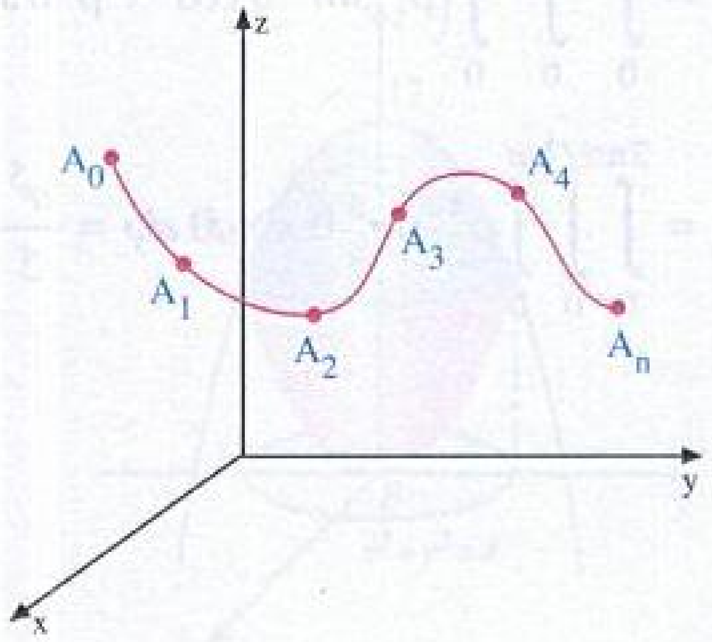
$M_k\,(x_k, y_k, z_z)$, $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ eğri parçasının herhangi bir noktası olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta l_k$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun C üzerindeki eğrisel integrali denir.

$$\int_C f\,(x, y, z)\,dl$$

ile gösterilir. Bu integrale birinci çeşit eğrisel integral denir.



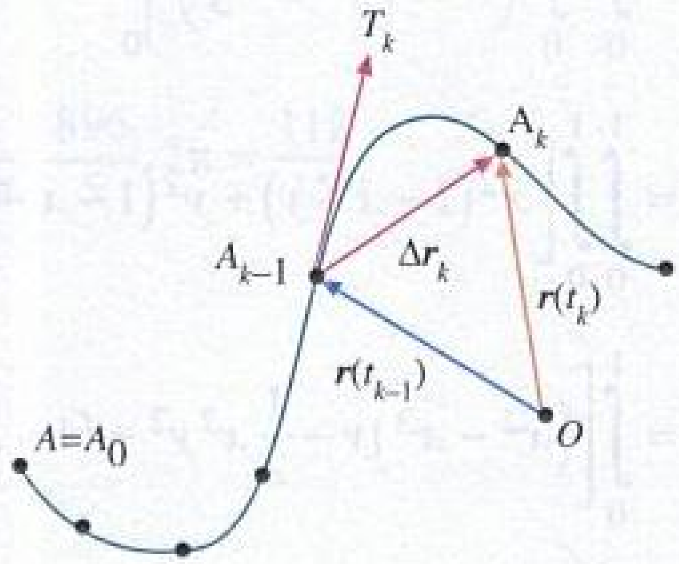
VEKTÖR ALANLARININ EĞRİSEL İNTEGRALİ

TANIM

C bir düzgün eğri, F de bu eğri üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. T, eğrinin $(x\,(t), y\,(t), z\,(t))$ noktasındaki birim teğet vektörü olmak üzere

$$\int_C F.dr = \int_C F.T dl$$

integraline F alanının C üzerindeki integrali denir. Bu integrale ikinci çeşit eğrisel integral de denir.



EĞRİSEL İNTEGRALLERİN TEMEL TEOREMLERİ

TEOREM

C eğrisinin başlangıç noktası (x_1, y_1, z_1), bitim noktası (x_2, y_2, z_2) olsun. f, bu C eğrisini içine alan bölge üzerinde türevlenebilen üç değişkenli bir fonksiyon ve gradf, C eğrisi üzerindeki sürekli ise

$$\int_C \nabla f.dr = f\left(x_2, y_2, z_2\right) - f\left(x_1, y_1, z_1\right)$$

dır.

SONUÇ

$\boldsymbol{F}$, türevlenebilen bir fonksiyonun gradiyenti ise $\int_C F.dr$ integrali yoldan bağımsızdır.

TEOREM

P, Q, R fonksiyonları bir D bölgesinde sürekli olsunlar,

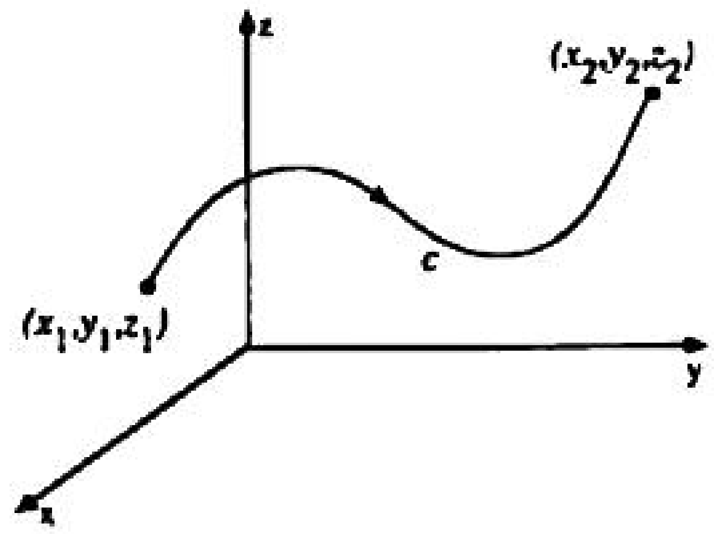
Eğer D bölgesinde tanımlı ve

$$df = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa, yani $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli ise D bölgesinde (x_1, y_1, z_1) ile (x_2, y_2, z_2) noktalarını birleştiren her bir C eğrisi için

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = f\left(x_2, y_2, z_2\right) - f\left(x_1, y_1, z_1\right)$$

olur.



TEOREM

C, D bölgesinde bulunan yönlendirilmiş bir kapalı eğri ve F de D bölgesinde bir vektör alanı olsun. Eğer $\int_C F.dr$ yola bağlı değilse

$$\oint_C F.dr = 0$$

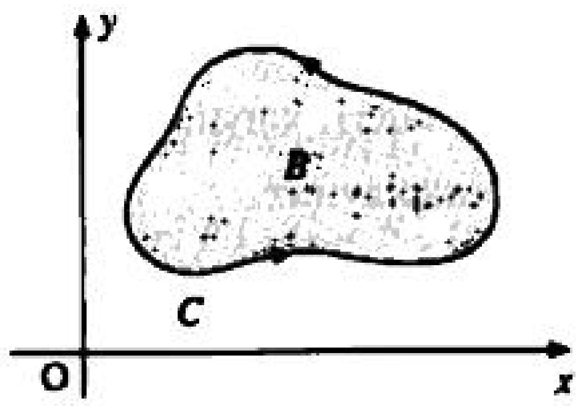
olur.

TEOREM (Green Teoremi)

B, xOy düzleminde bir basit bölge, C de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

dir. Bu eşitliğe Green formülü adı verilir.



PROBLEMLER

- Reel Değerli Fonksiyonların Eğrisel İntegralleri
- Vektör Alanlarının Eğrisel İntegrali
- Eğrisel İntegrallerin Temel Teoremleri

1. Aşağıdaki integralleri, verilen eğri parçaları üzerinde hesaplayacağız.

(a) $\int_C \left(x^2 - y^2\right) dl$,

$C\ldots r(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(b) $\int_C \left(x^2 - y^2\right) dl$, $C\ldots r(t) = t\,i + (1-t)\,j, \quad 0 \le t \le 1$

(c) $\int_C xy\, dl$, $C\ldots |x| + |y| = 2$

(d) $\int_C (xy + y + z)\, dl$, $C\ldots r(t) = 2t\,i + t\,j + k, \quad 0 \le t \le 1$

(e) $\int_C 3x\sqrt{x^2 + y^2 + 3z}\; dl$,

$C\ldots r(t) = 2t\,i + j + k, \quad -1 \le t \le 1$

(f) $\int_C (2x + 9xy)\, dl$,

$C\ldots r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k, \quad 0 \le t \le 1$

(g) $\int_C \sqrt{3}\,\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1} dl$,

$C\ldots r(t) = t\,i + t\,j + t\,k, \quad 1 \le t \le \infty$

2. Aşağıdaki integralleri, karşılarında yazılı olan eğri parçaları üzerinde hesaplayınız.

(a) $\int_C 2xy\,dx + x^2 dy$, $\quad C\ldots y = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(b) $\int_C y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$, $\quad C\ldots y = x, \quad 0 \le x \le 1$

(c) $\oint_C y^3 dx - x^3 dy$, $\quad C\ldots |x| + |y| = 1$

(d) $\oint_C xy^6 dx + \left(3x^2y^5 + 6x\right) dy$, $\quad C\ldots x^2 + 4y^2 = 1$

(e) $\int_C xy\,dx + y\,dy - yz\,dz$, $\quad C\ldots r(t) = t\,i + t^2 j + t\,k$, $\quad 0 \le t \le 1$

(f) $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, $\quad C\ldots r(t) = \sin t\, i + \cos t\, j + t\,k$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

3. Aşağıda verilen F alanı ve r eğrisi için $\int_C F.dr$ integralini hesaplayınız.

(a) $F = z\,i + x\,j - y\,k$,

$r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k, \quad 0 \le t \le 1$

(b) $F = y\,i - x\,j + z\,k$,

$r(t) = \sin t\, i + \cos t\, j + 2t\,k \quad 0 \le t \le \pi$

(c) $F = x^2 i + yz\,j + y^2 k$,

$r(t) = 3t\,j + 4t\,k, \quad 0 \le t \le 1$

(d) $F = 2y\,i + 3x\,j + (x + y)\,k$,

$r(t) = (\cos t)\, i + (\sin t)\, j + \frac{t}{6} k, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(e) $F = xy\,i + y\,j - yz\,k$,

$r(t) = t\,i + t^2 j + t\,k, \quad 0 \le t \le 1$

4. Aşağıdaki integrallerin yoldan bağımsız olduklarını gösterip değerlerini hesaplayınız.

(a) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(y^2 + 2xy\right) dx + \left(x^2 + 2xy\right) dy$

(b) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2x + 3y)\, dx + (2y + 3x)$

(c) $\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy$

(d) $\int_{(1,0,1)}^{(2,1,2)} y^2z^3 dx + 2xyz^3 dy + 3xy^2z^2 dz$

(e) $\int_{(0,0,0)}^{\left(\pi,\pi,\frac{1}{\pi}\right)} (\cos x 2yz)\, dx + (\sin y + 2xz)\, dy + (z + 2xy)\, dz$

5. $\int_{(1,1)}^{(e,1)} \left(2x\ln\frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{x}\right) dx + \left(2y\ln\frac{x}{y} + a\frac{x^2 + y^2}{y}\right) dy$

integralinin yoldan bağımsız olması için a ne olmalıdır? a nın bu değeri için integrali hesaplayınız.

6. $$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \left(2xyz^3+3\right)dx+\left(mx^2z^3-2\right)dy+\left(3x^2yz^2+4z\right)dz$$
integralinin yoldan bağımsız olması için m ne olmalıdır. m nin bu değeri için integrali hesaplayınız.

7. C eğrisi, köşeleri (0,0), (1,0), (1,1,) ve (0,1) olan kare olup saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiştir.
$$I=\oint_C xydx+\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)dy$$
integralini hesaplayınız.

8. C eğrisi $x^2+y^2=1$ birim çemberi olup yönü saat yönünün tersidir.
$$I=\oint_C \left(x^2+y^2\right)^{3/2}dx+\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dy$$
integralini hesaplayınız.

9. Green Teoreminden yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız. Burada C eğrisinin yönü, saatin yönünün tersidir.

(a) $\oint_C \left(2y+\sqrt{9+x^3}\right)dx+\left(5x+e^{\arctan y}\right)dy$

C eğrisi $x^2+y^2=4$ çemberi

(b) $\oint_C ydx-xdy$, C eğrisi $r=1-\cos\varphi$ kardiyoidi.

(c) $\oint_C 4xy^3dx+6x^2y^2dy$,

C eğrisi $r=1-\cos\varphi$ kardiyoidi

(d) $\oint_C 3xydx+2x^2dy$,

C eğrisi $y=x$ doğrusuyla $y=x^2-2x$ parabolünün sınırladığı bölgenin çevre eğrisidir.

(e) $\oint_C \left(x+y^2\right)dx+\left(y+x^2\right)dy$,

C eğrisi, köşeleri (1,1,), (−1,1), (−1, −1), (1, −1) olan karedir.

(f) $\oint_C \left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy$,

C eğrisi, $x=0$, $y=0$ ve $x+y=1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin çevre eğrisidir.

(g) $\oint_C e^x\sin y\,dx+e^y\cos y\,dy$,

C eğrisi, $x=0$, $y=0$ ve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ tarafından sınırlanan bölgenin çevre eğrisidir.

(h) $\oint_C (x+6y)dx+(2x+y)dy$;

C eğrisi $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ çemberi

(ı) $\oint_C \frac{y}{1+x^2}dx+\arctan x\,dy$, C eğrisi $x^2+y^4=1$ ovali

(i) $\oint_C x^2dx-y^2dy$, C eğrisi $r=1+\cos\varphi$ kardiyoidi.

10. Herhangi bir kapalı C eğrisi için
$$\oint_C 4x^3ydx+x^4dy=0$$
olacağını gösteriniz.

11. Aşağıda verilen vektör alanlarının bazı vektörlerini çiziniz.

(a) $F(x,y)=3\,i+4\,i$

(b) $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i+y\,j)$

(c) $F(x,y)=-x\,i-y\,j$

12. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) *div* (*curl F*) = 0

(b) *curl* (*grad f*) = 0

(c) *div* (*f F*) = *f div F* + (*grad f*) *F*

(ç) *curl* (*F* + *G*) = *curl F* + *curl G*

(d) *div* (*F x G*) = (*curl F*) . *G* − *F* . (*curl G*)

(e) *curl* (*f F*) = *f* (*curl F*) + (*grad f*)*x F*

13. Eğer **F = curl G** ise **G** ve **F** nin bir vektör potansiyelidir denir. Bir telden geçen akımın meydana getirdiği magnetik indüksiyon alanı, I bir sabit olmak üzere,
$$B(x,y,z)=I\left(-\frac{y}{x^2+y^2}i+\frac{x}{x^2+y^2}j\right)$$
biçiminde verilir.
$$G(x,y,z)=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)k$$
biçiminde tanımlanan **G** fonksiyonunun **B** için bir vektör potansiyeli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $\int\limits_C (x^2 - y^2)dl, \quad C \ldots r(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$r'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j \Rightarrow \|r'(t)\| = \left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)^{1/2} = a$

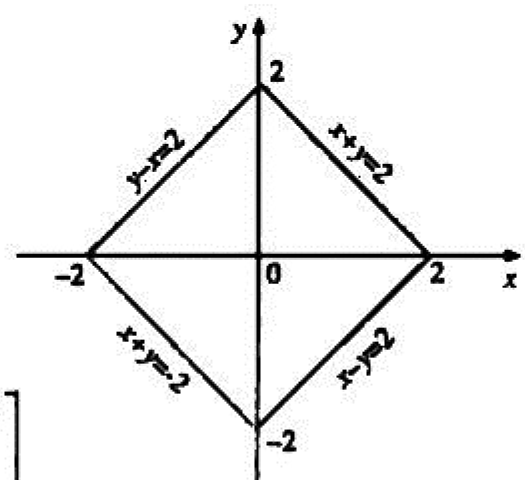
$$\int\limits_C (x^2 - y^2)dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t\right)a\,dt = a^3\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2t\,dt = a^3\,\frac{\sin 2t}{2}\,\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^3}{2}$$

(b) $\int\limits_C (x+y)dl, \quad C \ldots r(t) = ti + (1-t)j, \ 0 \le t \le 1$

$r'(t) = i - j \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\int\limits_C (x+y)dl = \int\limits_0^1 (t+1-t)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dt = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2}$$

(c) $\int\limits_C xy\,dl, \quad C \ldots |x| + |y| = 2$



$$\int\limits_C xy\,dl = \int\limits_2^0 x(2-x)\sqrt{2}\ \,dx + \int\limits_0^{-2} x(x+2)\sqrt{2}\,dx$$

$$+\int\limits_{-2}^0 x(-x-2)\sqrt{2}\,dx + \int\limits_0^2 x(x-2)\sqrt{2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_2^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^{-2} + \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{-2}^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_0^2\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(-4 + \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right] = 0$$

(d) $\int\limits_C (xy + y + z)dl, \quad C \ldots r(t) = 2t\,i + t\,j + k, \ 0 \le t \le 1.$

$r'(t) = 2i + j \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{5}$

$$\int\limits_C (xy + y + z)dl = \int\limits_0^1 (2t.t + t + 1)\sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{13\sqrt{5}}{6}$$

(e) $\int\limits_C 3x\sqrt{x^3 + y^2 + 3z}\ \,dl, \ C \ldots r(t) = t\,i + j + k, \quad -1 \le t \le 1 \quad r'(t) = i \Rightarrow \|r'\| = 1$

$$\int\limits_C 3x\sqrt{x^2 + y^2 + 3z}\ \,dl = \int\limits_{-1}^1 3t\sqrt{t^2 + 1 + 3}\ \,dt = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^1 2t\sqrt{t^2 + 4}\ \,dt = \left(t^2 + 4\right)^{3/2}\Bigg|_{-1}^1 = 0$$

(e) $\int\limits_C (2x + 9xy)\,dl \quad C \ldots r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k, \ 0 \le t \le 1$

$r'(t) = i + 2t\,j + 3t^2 k \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

$$\int_C (2x+9xy)dl = \int_0^1 \left(2t+9t^3\right)\sqrt{1+4t^2+9t}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1+4t^2+9t^4}\left(8t+36t^3\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+4t^2+9t^4\right)^{3/2}.\frac{2}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}(1+4+9) = \frac{7}{3}$$

(g) $\int_C \sqrt{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} dl,\ C\ldots r(t) = ti+tj+tk,\ \ t \le t \le \infty$

$r'(t) = i+j+k \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{3}$ olduğundan

$$\int_C \sqrt{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} dl = \int_1^\infty \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3t^2}\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Bigg|_1^\infty = 1$$

2. (a) $\int_C 2xydx + x^2dy,\ C\ldots y = x^2,\ \ 0 \le x \le 1.$

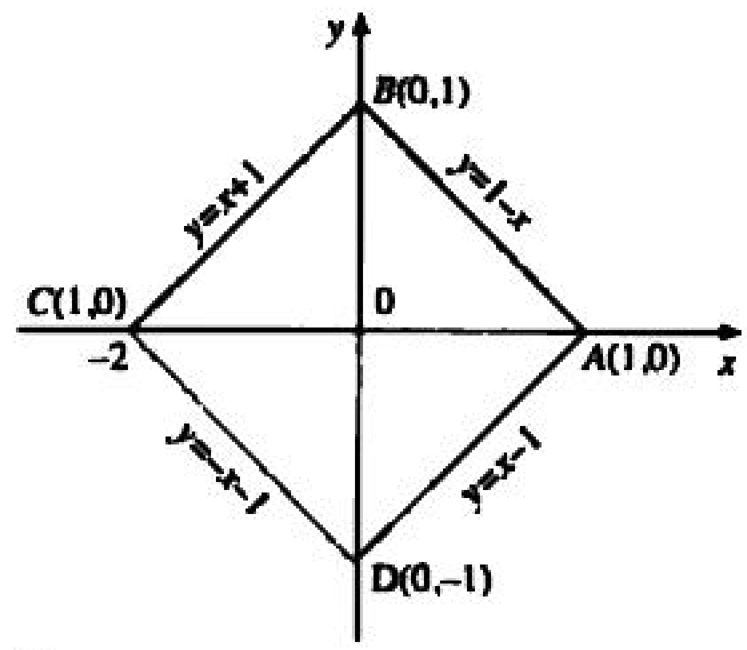
$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_1^1 \left(2x.x^2 + x^2.2x\right)dx = \int_0^1 4x^3dx = x^4\Bigg|_0^1 = 1$$

(b) $\int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy,\ C\ldots y = x,\ 0 \le x \le 1.$

$$\int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = \int_0^1 \left(xe^{x^2} + xe^{x^2}\right)dx = \int_0^1 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}\Bigg|_0^1 = e-1.$$

(c) $\int_C y^3dx - x^3dy,\ C\ldots|x|+|y| = 1$

I.yol:



$$\int_C y^3dx - x^3dy = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$= \int_1^0 \left[(1-x)^3 + x^3\right]dx + \int_0^{-1}\left[(x+1) - x^3\right]dx + \int_{-1}^0 \left[(-x-1)^3 dx + x^3\right]dx + \int_0^1 \left[(x-1)^3 - x^3\right]dx$$

$$= \int_1^0 \left(1-3x+3x^2\right)dx + \int_0^{-1}\left(1+3x+3x^2\right)dx + \int_{-1}^0 \left(-1-3x-3x^2\right)dx + \int_0^1 \left(-3x^2+3x-1\right)dx$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}x^2 + x^3\right)\Bigg|_1^0 + \left(x + \frac{3}{2}x^2 + x^3\right)\Bigg|_{-1}^0 + \left(-x - \frac{3}{2}x^2 - x^3\right)\Bigg|_{-1}^0 + \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

II. yol: Green Teoreminden yararlanalım.

$P = y^3$, $Q = -x^3$ alınırsa $Q_x - P_y = -3(x^2+y^2)$ olur.

$$\int_C y^3 dx - x^3 dy = \iint_B (Q_x - P_y)dx\,dy = -3\iint_B (x^2+y^2)dx\,dy$$

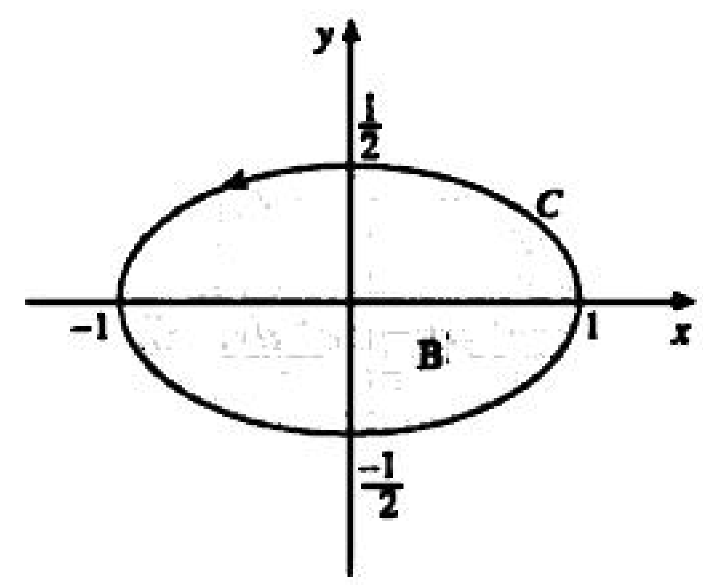
$$= -3\int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1}(x^2+y^2)dy\,dx - 3\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1}(x^2+y^2)dy\,dx$$

$$= -6\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1}(x^2+y^2)dy\,dx - 6\int_{0}^{1}\int_{0}^{-x+1}(x^2+y^2)dy\,dx$$

$$= -6\int_{-1}^{0}\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{x+1} - 6\int_{0}^{1}\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_x^{x+1}$$

$$= -6\int_{-1}^{0}\left(\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+\frac{1}{3}\right)dx - 6\int_{0}^{1}\left(-\frac{4}{3}x^3+2x^2-x+\frac{1}{3}\right)dx = -1-1=-2.$$

(d) Green teoreminden yararlanalım.



$P(x,y) = xy^6$, $Q(x,y) = 3x^2y^5 + 6x$, $Q_x - Py = 6xy^5 + 6 - 6xy^5 = 6$

$$\int_C xy^6 dx + \left(3x^2y^5 + 6x\right)dy = \iint_B 6\,dx\,dy$$

olur. $x = 2r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa, B bölgesi $r = 1$ dairesine dönüşür.

$$\iint_B 6dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 6.2r\,dr\,d\varphi = 12\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 d\varphi = 6.2\pi = 12\pi$$

(e) $\int_C xydx + ydy - yzdz,\ C \ldots r(t) = ti + t^2j + tk,\ 0 \le t \le 1$

$$\int_C xydx + ydy - 2dz = \int_0^1\left(t.t^2 + t^2.2t - t^2.t\right)dt = \int_0^1 2t^3dt = \frac{1}{2}t^4 = \frac{1}{2}.$$

(f) $\int_C zdx + xdy + ydz,\ C \ldots r(t) = \sin ti + \cos tj + tk,\ 0 \le t \le 2\pi.$

$$\int_0^{2\pi}\left(t\cos t + \sin t(-\sin t) + \cos t\right)dt = \int_0^{2\pi} t\cos t\,dt - \int_0^{2\pi}\sin^2 t\ dt + \int_0^{2\pi}\cos t\ dt$$

$$= t\sin t + \cos t\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \sin t\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 0 - \frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4}$$

3. (a) $F = z\,i + x\,j - y\,k,\ r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k,\ 0 \le t \le 1.$

$$\int_C F.dr = \int_0^1 \left(t^3, t, -t^2\right).\left(1, 2t, 3t^2\right)dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2t^2 - 3t^4\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{5}t^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{19}{60}$$

(b) $F(t) = y\,i - x\,j + z\,k,\ r(t) = \sin t\,i + \cos t\,j + 2t\,k,\ 0 \le t \le \pi$

$$\int_C F.dr = \int_0^\pi (\cos t\,i - \sin t\,j + 2t\,k).(\cos t\,i - \sin t\,j + 2\,k)dt$$

$$= \int_0^\pi \left(\cos^2 t + \sin^2 t + 4t\right)dt = \int_0^\pi (1 + 4t)dt = t + 2t^2 \Big|_0^\pi = \pi + 2\pi^2$$

(c) $F = x^2\,i + yz\,j + y^2\,k,\ r(t) = 3t\,j + 4t\,k,\ 0 \le t \le 1$

$$\int_C F.dr = \int_0^1 \left(12t^2 j + 9t^2 k\right).(3j + 4k)dt = \int_0^1 \left(36t^2 + 36t^2\right)dt = 72.\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 24.$$

(d) $F = 2y\,i + 3x\,j + (x + y)\,k,\ r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j + \frac{t}{6}k,\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C F.dr = \int_0^{2\pi} \left[2\sin t\,i + 3\cos t\,j + (\cos t + \sin t)k\right].\left(-\sin t\,i + \cos t\,j + \frac{1}{6}\,k\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\sin^2 t + 3\cos^2 t + \frac{1}{6}(\cos t + \sin t)\right]dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1 - \cos 2t}{2} + 3.\frac{1 + \cos 2t}{2} + \frac{1}{6}(\cos t + \sin t)\right]dt$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{6}\sin t - \frac{1}{6}\cos t\right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{1}{6}$$

(e) $F = xy\,i + y\,j - yz\,k,\ r(t) = t\,i + t^2 j + t\,k,\qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_C F.dr = \int_0^1 \left(t^3\,i + t^2 j - t^3\,k\right).(i + 2t\,j + k)dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2t^3 - t^3\right)dt = t^4 - \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. (a) $P = y^2 + 2xy,\quad Q = x^2 + 2xy,\quad P_y = 2y + 2x,\quad Q_x = 2x + 2y \ \Rightarrow\ P_y = Q_x$

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx = \int \left(y^2 + 2xy\right)dx = xy^2 + x^2 y + \varphi(y)$$

$$Q = f_y(x,y) \Rightarrow x^2 + 2xy = 2xy + x^2 + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C\ (sabit)$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(y^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy = f(1,2) - f(0,0) = 4 + 2 - 0 = 6.$$

(b) $P(x,y)=2x+3y,\ Q(x,y)=2y+3x,\ P_y=Q_x=3 \ \Rightarrow$ integral yoldan bağımsız.

$$f(x,y)=\int(2x+3y)dx=x^2+3xy+\varphi(y)$$

$$f_y(x,y)=Q(x,y)\Rightarrow 3x+\varphi'(y)=2y+3x\Rightarrow\varphi'(y)=2y\Rightarrow\varphi(y)=y^2 \ \Rightarrow \ f(x,y)=x^2+3xy+y^2$$

dir. Buna göre

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(2x+3y)dx+(2y+3x)=f(1,1)-f(0,0)=5-0=5$$

olur.

(c) $P=\dfrac{y}{x^2},\ Q=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow P_y=Q_x=-\dfrac{1}{x^2}$ İntegral yoldan bağımsız.

$f(x,y)=\int\dfrac{y}{x^2}dx=-\dfrac{y}{x}+\varphi(y)$ olur. $f_y=Q\Rightarrow-\dfrac{1}{x}+\varphi'(y)=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow\varphi(y)=c\ (sabit)$

$$\int_{(1,-2)}^{(3,4)}\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=f(3,4)-f(1,-2)=-\frac{4}{3}+\frac{2}{1}=\frac{2}{3}.$$

(d) $P=y^2z^3,\quad Q=2xyz^3,\quad R=3x^2z^2 \ \Rightarrow \ P_y=Q_x=2yz^3,\quad P_z=R_x=3y^2z^2,\quad Q_z=R_y=6xz^2$

olduğundan integral yoldan bağımsızdır.

$$f(x,y,z)=\int y^2z^3dx=xy^2z^3+\varphi(y,z)$$

$$f_y=Q\Rightarrow 2xyz^3+\varphi'(y,z)=2xyz^3=\varphi'(y,z)=0 \ \Rightarrow \ \varphi(y,z)=\psi(z)$$

$f_z=R\Rightarrow 3x^2z^2+\psi'(z)=3xy^2z^2 \ \Rightarrow \ \psi'(z)=0 \ \Rightarrow \ \psi(z)$ sabittir.

$$\int_{(1,0,1)}^{(2,1,2)}y^2z^3dx+2xyz^3dy+3xy^2z^2dz=f(2,1,2)-f(1,0,1)=2.1.8-1.0.1=16.$$

(e) $P=\cos x+2yz,\quad Q=\sin y+2xz,\quad R=z+2xy \ \Rightarrow \ P_y=Q_x=2z,\ P_z=R_x=2y,\ Q_z=R_y=2x.$

İntegral yoldan bağımsızdır.

$$f(x,y,z)=\int(\cos x+2yz)dx=\sin x+2xyz+\varphi(y,z)$$

$$f_y=Q\Rightarrow 2xz+\varphi_y(y,z)=\sin y+2xz\Rightarrow\varphi_y(y,z)=\sin y\Rightarrow\varphi(y)=-\cos y+\psi(z) \ \Rightarrow$$

$f(x,y,z)=\sin x-\cos y+2xyz+\psi(z)$ olur. $f_z=R$ olacağından

$2xy+\psi'(z)=z+2xy\Rightarrow\psi'(z)=z\Rightarrow\psi(z)=\dfrac{1}{2}z^2$ dir. Bu durumda $f(x,y,z)=zinx-\cos y+2xyz+\dfrac{1}{2}z^2$

olur. Buna göre

$$\int_C(\cos x+2yz)dx+(\sin y+2xz)+(z+2xy)dz=f\left(\pi,\pi,\frac{1}{\pi}\right)-f(0,0,0)=1+2\pi+\frac{1}{2\pi^2}+1=2+2\pi+\frac{1}{2\pi^2}$$

bulunur.

5. (a)

$$P = 2x\ln\frac{x}{y} + \frac{x^2+y^2}{x}, \qquad Q = 2y\ln\frac{x}{y} + a\frac{x^2+y^2}{y}$$

$$P_y = 2x.\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}} + \frac{2y}{x} = -\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}, \qquad Q_x = 2y.\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} = a.\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} + a.\frac{2x}{y}$$

$$P_y = Q_x \Rightarrow -\frac{2x}{y} + \frac{2y}{y} = \frac{2y}{x} + a.\frac{2x}{y} \Rightarrow a = -1 \text{ olmalıdır.}$$

İntegral yoldan bağımsız olduğundan, integrali $(1,1)$, $(1,e)$ noktalarını birleştiren $x=1$ doğrusu boyunca hesaplayalım. İntegralde $x=1$ yazılırsa $dx=0$ olur.

$$\int_{(1,1)}^{(1,e)} \left[2x\,ln\frac{x}{y} + \frac{x^2+y^2}{x}\right]dx + \left[2y\,ln\frac{x}{y} - \frac{x^2+y^2}{y}\right]dy = \int_1^e \left(2y\,ln\frac{1}{y} - \frac{1+y^2}{y}\right)dy$$

$$= \int_1^e \left(-2y\,ln\,y - \frac{1}{y} - y\right)dy = -y^2\,ln\,y + \frac{1}{2}y^2 - ln\,y - \frac{1}{2}y^2 = -\left(y^2+1\right)ln\,y\,\Big|_1^e = -\left(e^2+1\right)$$

6. $$\left.\begin{aligned} P(x,y,z) &= 2xyz^3+3 \\ Q(x,y,z) &= mx^2z^3-2 \\ R(x,y,z) &= 3x^2yz^2+4z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &P_y = Q_x = 2xz^3 = 2mxz^3 \Rightarrow m=1 \text{ olmalı} \\ &P_z = R_x = 6xyz^2 \\ &Q_z = R_y = 3x^2z^2 \end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = \int\left(2xyz^3+3\right)dx + u(y,z) = x^2yz^3 + 3x + u(y,z)$$

$$f_y = Q \;\Rightarrow\; x^2z^3 + u_y(y,z) = x^2z^3 - 2 \Rightarrow u_y(y,z) = -2 \Rightarrow u(y,z) = -2y + h(z)$$

$$f_z = R \;\Rightarrow\; 3x^2yz^2 + h'(z) = 3x^2yz^2 + 4z \Rightarrow h'(z) = 4z \Rightarrow h(z) = 2z^2$$

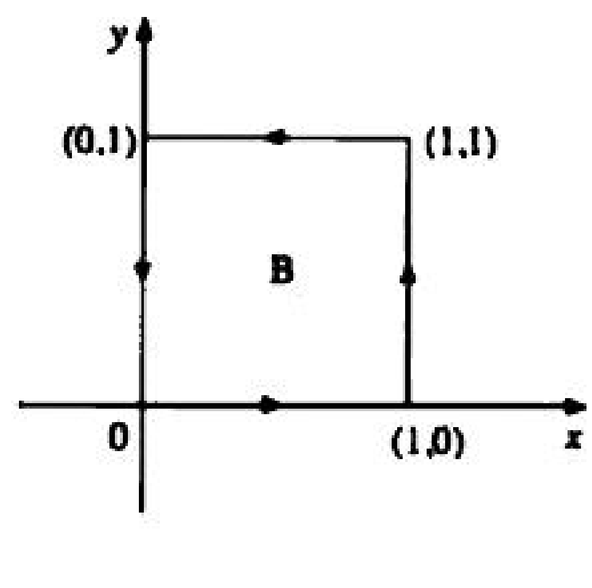
$f(x,y,z) = x^2yz^3 + 3x - 2y + 2z^2$ olağından $I = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 71$ bulunur.

7. $P(x,y) = xy$, $\quad Q(x,y) = x^{3/2} + y^{3/2}$

$$\oint_C xy\,dx + \left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)dy = \iint_B \left(Q_x - P_y\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x\right)dy\,dx$$

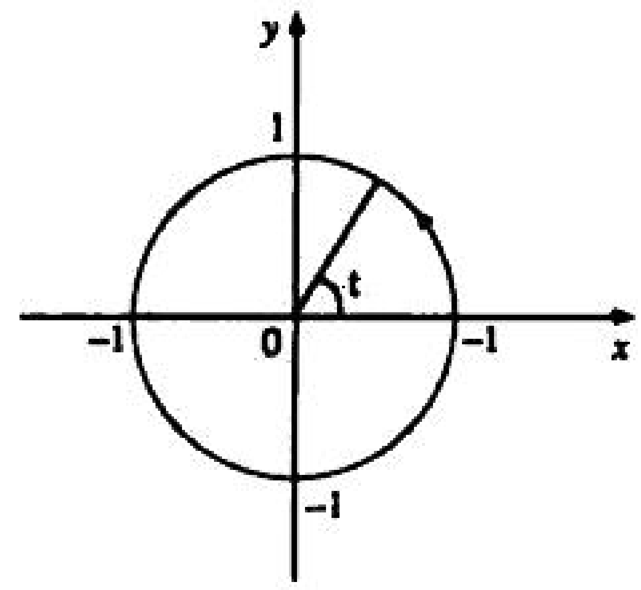
$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x\right)dx = \left(x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



8. $$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(Q_x - P_y\right)dy\,dx = \iint\left(\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}2x - \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}2y\right)dy\,dx$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1}\left(3r\cos\theta . r - 3r\sin\theta . r\right)r\,dr\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left(r^3\cos\theta - r^3\sin\theta\right)\Bigg|_0^1 d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\theta - \sin\theta\right)d\theta = \sin\theta + \cos\theta\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$



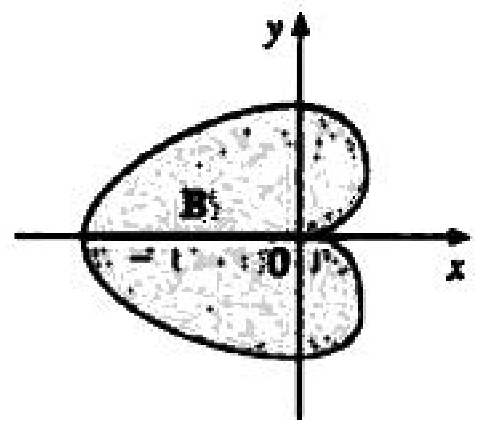
9. (a) $$\oint\limits_C\left(2y+\sqrt{9+x^3}\right)dx + \left(5x + e^{\arctan y}\right), \qquad C \ldots x^2+y^2 = 4$$

$$\oint\limits_C\left(2y+\sqrt{9+x^3}\right)dx + \left(5x + e^{\arctan y}\right)dy = \iint\limits_B\left(Q_x - P_y\right)dx\,dy = \iint\limits_B(5-2)\,dx\,dy = 3.\pi.4 = 12\pi.$$

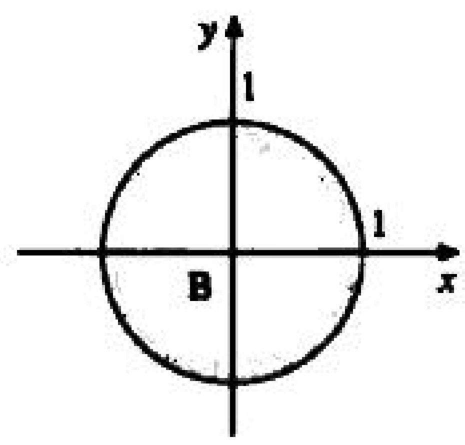
(b) $I = \oint\limits_C y\,dx - x\,dy$, $\qquad$ C eğrisi $r = 1-\cos\theta$ kardiyoidi

$$I = \iint\left(Q_x - P_y\right)dy\,dx = \iint(-1-1)\,dy\,dx = -2\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta = -2\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2}\,d\theta$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)d\theta = -\left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -3\pi$$



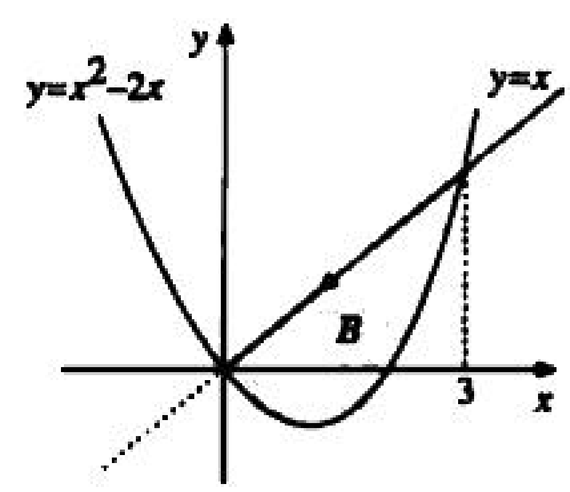
(c) $$I = \oint\limits_C 4xy^3\,dx + 6x^2y^2\,dy = \iint\limits_B\left(12xy^2 - 12xy^2\right)dx\,dy = \iint\limits_B 0\,dx\,dy = 0$$



(d) $I = \oint\limits_C 3xy\,dx + 2x^2\,dy \qquad x^2 - 2x = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$

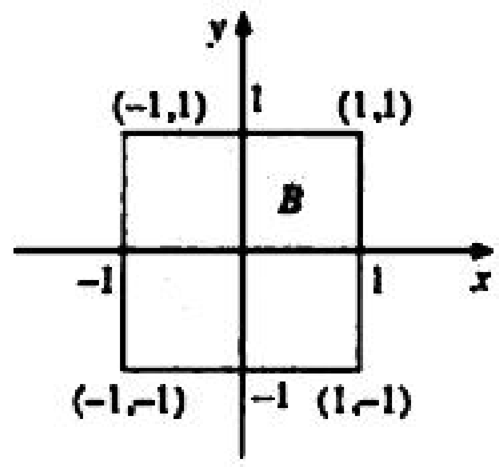
$$I = \iint\limits_B(4x - 3y)\,dx\,dy = \int\limits_0^3\int\limits_{x^2-2x}^{x} x\,dy\,dx = \int\limits_0^3 x\left(3x - x^2\right)dx$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{27}{4}$$



(e) $$I = \oint\limits_C\left(x+y^2\right)dx + \left(y+x^2\right)dy = \iint\limits_B(2x-2y)\,dx\,dy$$

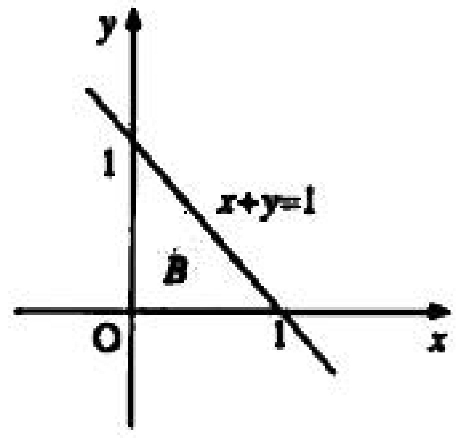
$$= 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}(x-y)\,dy\,dx = 2\int\limits_{-1}^{1}\left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\int\limits_{-1}^{1}2x\,dx = 0.$$



(f) $I = \oint\limits_C \left(x^2+y^2\right)dx - 2xy\,dy = \iint\limits_B (-2y-2y)\,dx\,dy$

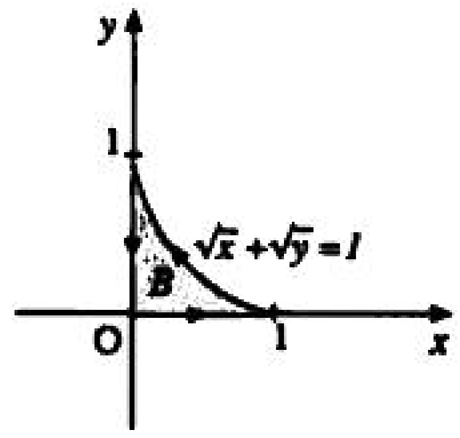
$$= -4\int_0^1\int_0^{1-x} y\,dx\,dy = -4\int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$$

$$= -2\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)dx = -2\left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$



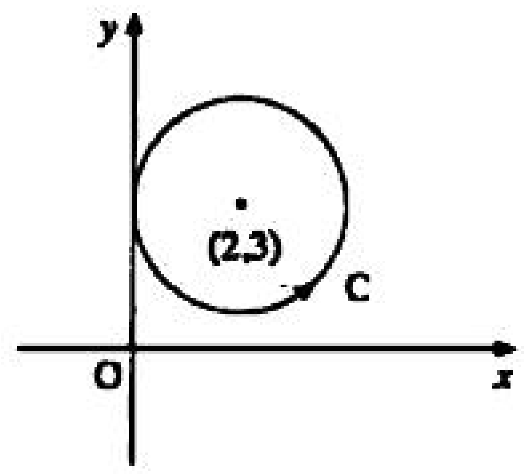
(g) $I = \oint\limits_C e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy = \iint\limits_B \left(e^x\cos y - e^x\cos y\right)dx\,dy$

$$= \iint\limits_B 0\,dx\,dy = 0$$



(h) $I = \oint\limits_C (x+6y)dx + (2x+y)dy = \iint\limits_B (2-6)\,dx\,dy = -4\iint\limits_B dx\,dy$

$$= -4 .\, alan(B) = -4 .\, \pi .\, 4 = -16\pi$$



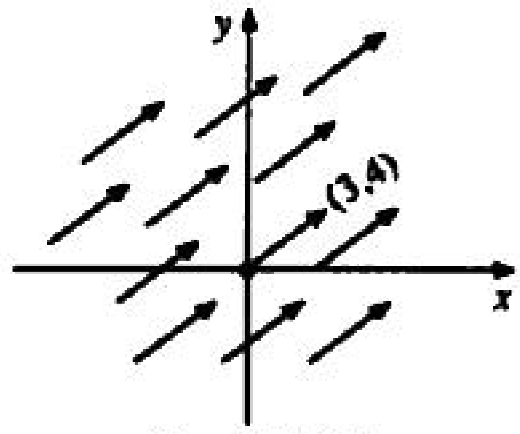
(ı) $I = \oint\limits_C \frac{y}{1+x^2}\,dx + \arctan x\,dy = \iint\limits_B \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx\,dy = \iint\limits_B 0\,dx\,dy = 0.$

(i) $I = \oint\limits_C x^2dx - y^2dy = \iint\limits_B 0\,dx\,dy = 0.$

10. $\oint\limits_C 4x^3y + x^4dy,\quad Q_x - P_y = 4x^3 - 4x^3 = 0$

$$\oint\limits_C 4x^3y + x^4dy = \iint\limits_B 0\,dx\,dy = 0$$

11. (a) $F(x,y,z) = 3\,i + 4\,j$ için $\| F \| = 5$ dir. Bu nedenle çizilecek vektörler 5 birim uzunluğunda ve (3,4) vektörüne paralel vektörlerdir.

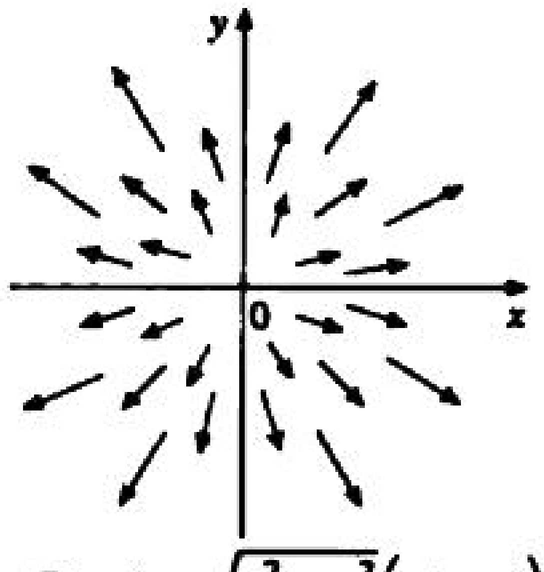


$F(x,y) = 3i + 4j$

(b) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i + y\,j) \Rightarrow \|F\| = x^2 + y^2$

Vektörler orijinden uzaklaştıkça boyları büyür.

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(xi + yj)$$



$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i + y\,j)$

12. (a) $curl\, F = (R_y - Q_z)i + (P_z - R_x)j + (Q_x - P_y)k$

$$div\,(curl F) = (R_y - Q_z)_x + (P_z - R_x)_y + (Q_x - P_y)_z = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$$

(b) $grad f = f_x\, i + f_y\, j + f_z\, k$

$$curl(grad f) = [(f_z)_y - (f_y)_z]\, i + [(f_x)_z - (f_z)_x]\, j + [(f_y)_x - (f_x)_y]\, k = 0$$

(c)
$$div(f F) = (f F)_x + (f F)_y + (f F)_z$$
$$= \left(f_x F + f F_x\right) + \left(f_y F + f F_y\right) + \left(f_z F + f F_z\right)$$
$$= \left(f_x + f_y + f_z\right) F + f\left(F_x + F_y + F_z\right) = (grad f) F + f\, div F$$

(ç), (d), (e) benzer biçimde gösterilebilir.

13. $B = curl G$ olduğunu göstermek yeterlidir.

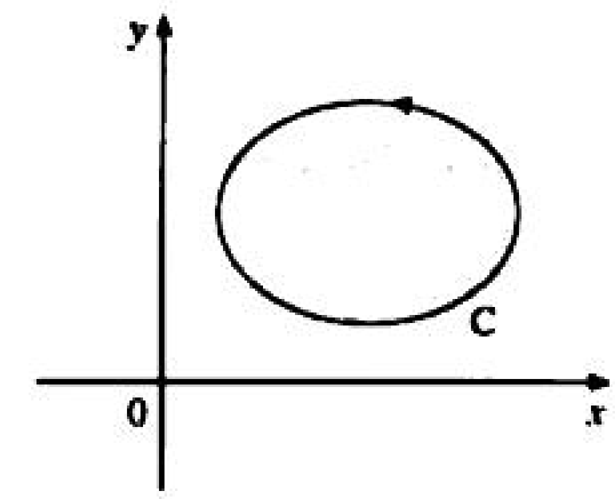
$$CurlG = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) i + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) j = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, i + \frac{x}{x^2 + y^2}\, j = B(x, y, z)$$

olduğundan G fonksiyonu B için bir vektör potansiyelidir.

EĞRİSEL İNTEGRALİN UYGULAMALARI

ALAN HESABI



C, alanı istenen bölgenin çevre eğrisi ise söz konusu bölgenin alanı

$$A = \int_C x\,dy - y\,dx$$

olur.

YAY UZUNLUĞU HESABI

C bir düzgün eğri ve L bu eğrinin uzunluğu ise

$$L = \int_C dl$$

olur.

KÜTLE HESABI

C eğrisi üzerine yerleştirilmiş bir telin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y,z)$ ise bu telin M kütlesi

$$M = \int \sigma(x,y,z)\,dl$$

olur.

AĞIRLIK MERKEZİ HESABI

C eğrisi üzerine yerleştirilmiş bir telin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ ise ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\,\sigma(x,y,z)\,dl, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\,\sigma(x,y,z)\,dl, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z\,\sigma(x,y,z)\,dl$$

dir.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

$$I_x = \int_C \left(y^2 + z^2\right)\sigma\,dl, \quad I_y = \int_C \left(x^2 + z^2\right)\sigma\,dl, \quad I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right)\sigma\,dl, \quad I_0 = \int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\sigma\,dl$$

İŞ HESABI

F kuvvetinin etkisi altında kalan bir parçacığın, C eğrisinin başlangıcından bitim noktasına varınyaca kadar yapılan iş

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

olur.

PROBLEMLER

• Eğrisel İntegralin Uygulamaları

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $r(t) = t\,i + t^2 j + \frac{2t^3}{3} k, \qquad 0 \le t \le 2$

(b) $r(t) = t\,i + \frac{t^2}{\sqrt{2}} j + \frac{t^3}{3} k, \qquad 0 \le t \le 2$

(c) $r(t) = t\,i + \frac{3}{2} t^2 j + \frac{3}{2} t^3 k, \qquad 0 \le t \le 2$

(d) $r(t) = t\,i + \frac{t^2}{2} j + \frac{t^3}{6} k, \qquad 0 \le t \le 6$

(e) $r(t) = t\cos t\; i + t \sin t\; j + t\,k, \quad 0 \le t \le \pi$

(f) $r(t) = t\,i + \ln(\sec t + \tan t)\,j + \ln\,\sec k,$

$0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(g) $x^2 = 3y,\ 2xy = 9z$ yüzeylerinin arakesit eğrisinin (0,0,0) noktasını (3,3,2) noktasına birleştiren parçası

2. $r(t) = cos^3 t\; i + sin^3 t\; j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanı eğrisel integral yardımıyla hesaplayınız.

3. $r(t) = \left[2\,cos\,t(1 - cos\,t) + 1\right] i + \left[2\,sin\,t(1 - cos\,t)\right] j$

$0 \le t \le 2\pi$

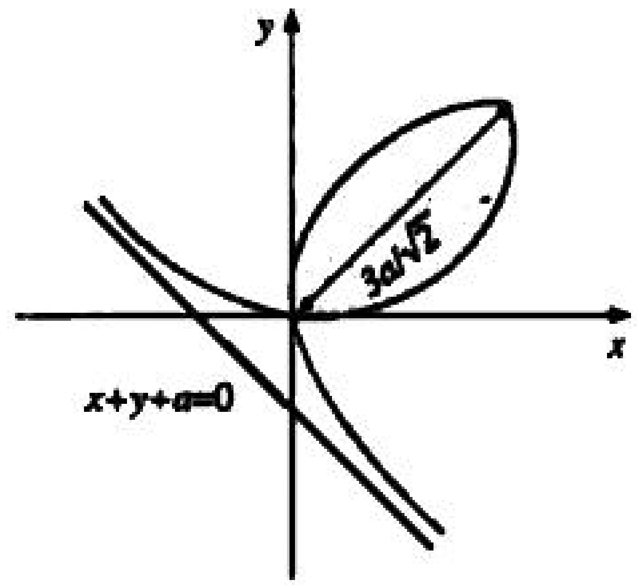
kardioyoid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

4. $r(t) = a(2cos\,t - cos\,2t)i + (2sin\,t - sin2t)\,j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

5. $(x + y)^3 = axy$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz [*YG.* $y = tx$ yazarak eğrinin parametrik denklemini bulunuz.]

6. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$ Descartes Yaprağı tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.



[*YG* : $y = tx$ koyarak eğrinin parametrik denklemini yazınız.)

7. Bir parçacık

$$F = \frac{x\,i + y\,j}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

kuvvetinin etkisi altında

$C \ldots r(t) = e^t\,cos\,t\; i + e^t\,sin\,t\; j$

eğrisi boyunca $A(1,0)$ noktasından $B(e^{2\pi}, 0)$ noktasına taşındığında yapılan işi hesaplayınız.

8. Birinci bölgede $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi üzerine yerleştirilmiş bir ince telin (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y) = xy$ dir. Bu telin kütlesini, ağırlık merkezini ve eksenlere göre eylemsizlik momentlerini hesaplayınız.

9. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ Astroid eğrisinin birinci abölgedeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir ince telin (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y) = x + y$ dir. Telin kütlesini, ağırlık merkezini ve eksenlere göre eylemsizlik momentlerini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $r(t) = t\,i + t^2 j + \dfrac{2t^3}{3} k \qquad 0 \le t \le 2$

$r'(t) = t\,i + 2t\,j + 2t^2 k \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = \left(1 + 4t^2 + 4t^4\right)^{1/2} = 1 + 2t^2$

$$\ell = \int_0^2 \|r'(t)\|dt = \int_0^2 \left(1 + 2t^2\right)dt = \left(t + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = 2 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}$$

(b) $r(t) = t\,i + \dfrac{t^2}{\sqrt{2}} j + \dfrac{t^3}{3} k, \qquad 0 \le t \le 2$

$r'(t) = i + \sqrt{2}t\,j + t^2 k, \;\Rightarrow\; \|r'(t)\|^2 = 1 + 2t^2 + t^4 = \left(1 + t^2\right)^2 \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = 1 + t^2$

$$l = \int_C dl = \int_0^2 \|r'(t)\|dt = \int_0^2 \left(1 + t^2\right)dt = t + \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^2 = 4$$

(c) $r(t) = t\,i + \dfrac{3}{2}t^2 j + \dfrac{3}{2}t^3 k, \quad 0 \le t \le 2$

$r'(t) = i + 3t\,j + \dfrac{9}{2}t^2 k \;\Rightarrow\; \|r'(t)\|^2 = 1 + 9t^2 + \dfrac{81}{4}t^4 = \left(1 + \dfrac{9}{2}t^2\right)^2 \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = 1 + \dfrac{9}{2}t^2$

$$l = \int_0^2 \left(1 + \frac{9}{2}t^2\right)dt = t + \frac{3}{2}t^3 \Big|_0^2 = 2 + 12 = 14.$$

(d) $r'(t) = i + t\,j + \dfrac{t^2}{2} k \Rightarrow \|r'\| = \left(1 + t^2 + \dfrac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{t^2}{2}$

$$l = \int_0^6 dl = \int_0^6 \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt = \left(1 + \frac{t^3}{6}\right)\Big|_0^6 = 42$$

(e) $r(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + t\,k, \qquad 0 \le t \le \pi$

$r'(t) = \left(\cos t - t\sin t\right)i + \left(\sin t + t\cos t\right)j + k$

$\|r'(t)\|^2 = \left(\cos t - t\sin t\right)^2 + \left(\sin t + t\cos t\right)^2 + 1 = 2 + t^2 \;\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}$

$$l = \int_0^\pi \sqrt{2 + t^2}\;dt = \frac{t}{2}\sqrt{2 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{2 + t^2}\right|\,\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\sqrt{2 + \pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{2 + \pi^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2$$

(f) $r(t) = t\,i + \ln\left(\sec t + \tan t\right)j + \ln\sec t\,k \Rightarrow r'(t) = i + \sec t\,j + \tan t\,k$

$\|r'(t)\|^2 = 1 + \sec^2 t + \tan^2 t = 1 + \dfrac{1}{\cos^2 t} + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{2}{\cos^2 t} \Rightarrow \|r'(t)\| = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}$

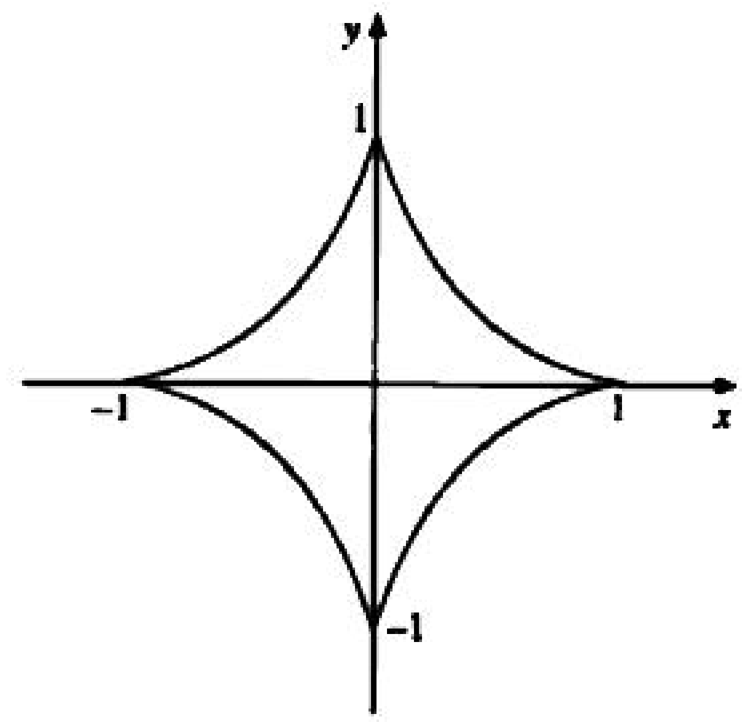
$$l = \int_0^{\pi/4} \|r'(t)\|dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\,dt = \sqrt{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|\,\Bigg|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\ln\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

(g) $r(t)=t\,i+\frac{1}{3}t^2 j+\frac{2}{27}t^3 k\ ,\ 0\le t\le 3$

$$r'(t)=i+\frac{2}{3}j+\frac{2}{9}t^2 k \Rightarrow \| r' \| = 1+\frac{2}{9}t^2$$

$$l=\int_0^3 \| r'(t)\| dt=\int_0^3 \left(1+\frac{2}{9}t^2\right)dt=\left(t+\frac{2}{27}t^3\right)\Bigg|_0^3=5$$

2. $r(t)=\cos^2 t\, i+\sin^3 t\, j \qquad 0\le t\le 2\pi$



$$x=\cos^3 t \Rightarrow dx=-3\cos^2 t.\sin t\ dt$$

$$y=\sin^3 t \Rightarrow dy=3\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$A=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3\sin^2 t\cos^4 t+3\cos^2 t\sin^4 t\right)dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 2t)^2}{4}dt=\frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{3}{8}\pi$$

3. $r(t)=\left[2\cos t\left(1-\cos t\right)+1\right]i+\left[2\sin t\left(1-\cos t\right)\right]j,\ \ 0\le t\le 2\pi$

$$x=2\cos t\left(1-\cos t\right)+1\Rightarrow dx=\left(\sin t+4\cos t\ \ \sin t\right)dt,$$

$$y=2\sin t\left(1-\cos t\right)\Rightarrow dy=\left(2\cos t-2\cos^2 t+2\sin^2 t\right)dt$$

$$A=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-8\cos^3 t+6\sin^2 t+4\cos^4 t+4\cos^2 t\sin^2 t+2\cos t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-8\cos^3 t+6\sin^2 t+4\cos^2 t+2\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left[-4\cos t+4\sin^2 t+\sin^2 t+\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[5.\frac{1-\cos 2t}{2}-3\cos t dt\right]=\frac{5}{2}\left(\theta-\frac{\sin 2t}{2}\right)-3\sin t\ \Bigg|_0^{2\pi}=\frac{5}{2}.2\pi=5\pi$$

4. $r(t)=a(2\cos t-\cos 2t)i+a(2\sin t-\sin 2t)j \qquad 0\le t\le 2\pi$

$$x=a(2\cos t-\cos 2t)\quad\Rightarrow\quad dx=(-2a\sin t+2a\sin 2t)dt$$

$$y=a(2\sin t-\sin 2t)\quad\Rightarrow\quad dy=(2a\cos t-2a\cos 2t)dt$$

$$A=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2a^2[3-3(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t)]dt=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\sin 3t)dt=6\pi a^2$$

5. $y = tx$ yazılırsa $(x+tx)^3 = axtx \Rightarrow x^3(1+t)^3 = atx^2 \Rightarrow x = \dfrac{at}{(1+t)^3}$ bulunur. Şu halde eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = \dfrac{at}{(1+t)^3} \\ y = \dfrac{at^2}{(1+t)^3} \end{cases}$$

olur. $x = y$ için $t = 0 \lor t = 1$ dir. Buna göre

$$A = \int_C xdy - ydx = \int_0^1 \left[\frac{at}{(1+t)^3} \cdot \frac{2at(1+t)^3 - 3(1+t)^2 at^2}{(1+t)^6} - \frac{at^2}{(1+t)^3} \cdot \frac{a(1+t)^3 - 3(1+t)^2 . at}{(1+t)^6} \right] dt$$

$$= a^2 \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^6} dt = a^2 \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{u^6} du = a^2 \int_1^2 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^6} = a^2 \int_1^2 \left(u^{-4} - 2u^{-5} + u^{-6}\right) du$$

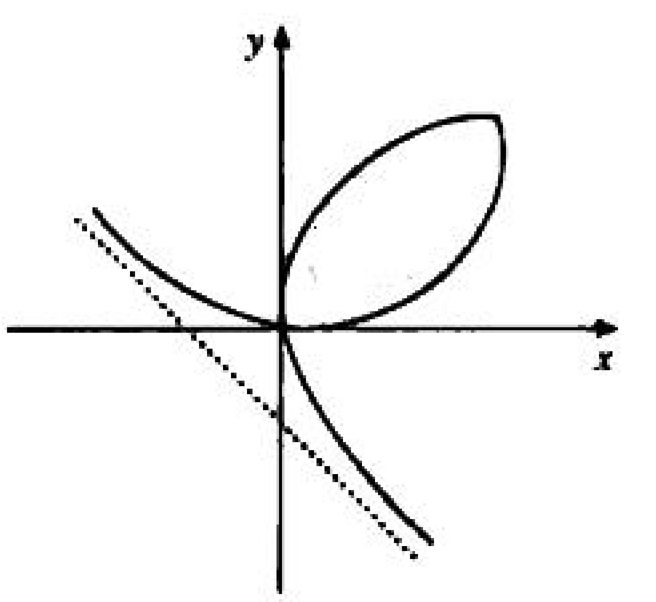
$$= a^2 \left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{2u^4} - \frac{1}{5u^5} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{a^2}{60} .$$

6. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$ (*Descartes yaprağı*)

$y = tx$ yazılırsa $x^3 + t^3x^3 - 3ax^2t = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3at}{t^3+1} \Rightarrow y = \dfrac{3at^2}{t^3+1}$

parametrik gösterimi elde edilir. $x = y \Rightarrow t = 0 \lor t = 1$ dir.

$$dx = \frac{3at^3 + 3a - 9at^3}{(t^3+1)} dt = \frac{6at - 3at^4}{(t^3+1)^2} dt$$



$$dy = \frac{6at^4 + 6at - 9at^4}{(t^3+1)^2} dt = \frac{6at - 3at^4}{(t^3+1)^2} dt$$

$$A = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx = 2.\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{18a^2t^2 - 9a^2t^5}{(t^3+1)^3} - \frac{9a^2t^2 - 18a^2t^5}{(t^3+1)^3} \right) dt$$

$$= 2.\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{9a^2t^2 9a^2t^5}{(t^3+1)^3} dt = 2.\frac{9a^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{(t^3+1)^2} dt = 2.\frac{3}{2} a^2 \left(-\frac{1}{t^3+1} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} a^2$$

7. $w = \int_C F.dr, \quad F = \dfrac{xi + yj}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad r(t) = e^t \cos t\, i + e^t \sin t\, j, \quad A(1,0), \quad B(e^{2\pi}, 0)$

Önce t parametresinin değişim aralığını bulalım:

$$\left.\begin{array}{l} e^t\cos t=1 \\ e^t\sin t=0 \end{array}\right\}\Rightarrow t=0, \qquad \left.\begin{array}{l} e^t\cos t=e^{2\pi} \\ e^t\sin t=0 \end{array}\right\}\Rightarrow t=2\pi$$

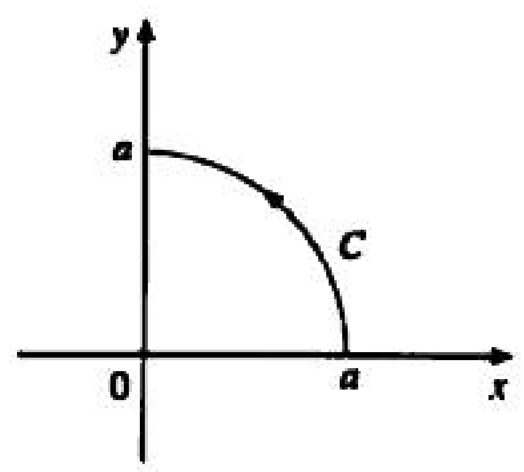
$$r'(t)=\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)i+\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)j=e^t\left(\cos t-\sin t\right)i+e^t\left(\cos t+\sin t\right)j.$$

$$W=\int_C F.dr=\int_0^{2\pi}\frac{e^t\cos t\,i+e^t\sin t\,j}{e^{3t}}.\left[e^t\left(\cos t-\sin t\right)i+e^t\left(\cos t+\sin t\right)j\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{-t}\left[\cos^2 t-\cos t\sin t+\sin t\cos t+\sin^2 t\right]dt=\int_0^{2\pi}e^{-t}dt=1-e^{-2\pi}.$$

8. $\sigma(x,y)=xy.\quad r(t)=a\cos t\,i+a\sin t\,j,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2},\qquad \left\|r'(t)\right\|=a$

$$M=\int_C\sigma(x,y)dl=\int_0^{\pi/2}a\cos t.a\sin t.a\,dt=a^3.\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^3}{2}$$



$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_C x\sigma(x,y)dl=\frac{2}{a^3}\int_0^{\pi/2}a\cos t\left(a^2\cos t\sin t\right)a\,dt=2a\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=2a\left(\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{2a}{3}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_C y\sigma(x,y)dl=\frac{2}{a^3}\int_0^{\pi/2}a\sin t\left(a^2\cos t\sin t\right)a\,dt=2a\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=2a\left(\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{2a}{3}.$$

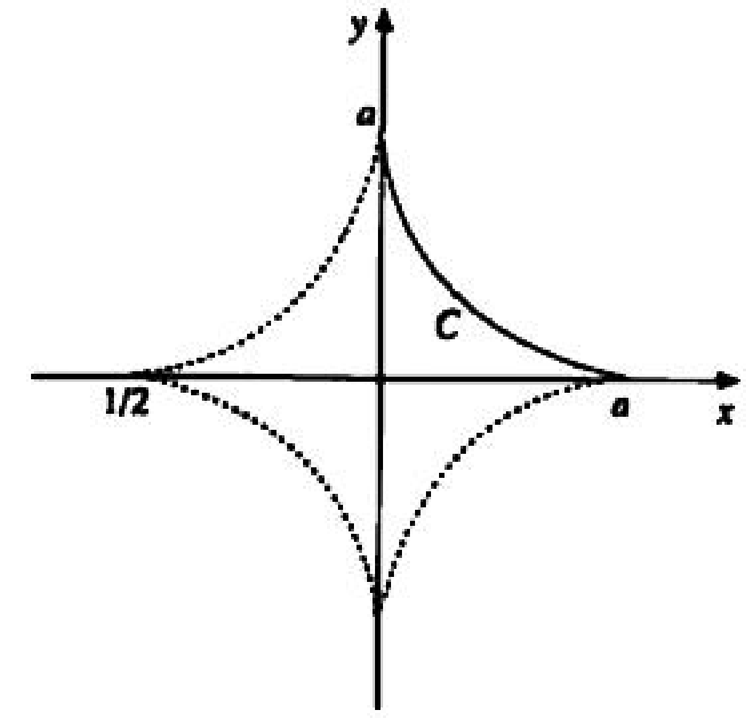
Ağırlık merkezi $\left(\frac{2a}{3},\ \frac{2a}{3}\right)$ noktasıdır.

$$I_x=\int_C y^2\sigma(x,y)dl=\int_0^{\pi/2}a^2\sin^2 t.a^2\cos t\sin t.a\,dt=a^5\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\cos t\,dt=a^5\frac{1}{4}\sin^4 t\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^5}{4}$$

$$I_y=\int_C x^2\sigma(x,y)dl=\int_0^{\pi/2}a^2\cos^2 t.a^2\cos t\sin t.a\,dt=a^5\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\sin t\,dt=a^5\left(-\frac{1}{4}\cos^4 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^5}{4}\text{ olur.}$$

9. Astroid parçasının parametrik denklemi $r(t) = a\cos^3 t\, i + a\sin^3 t\, j$, $0 \le t \le \pi/2$ dir.

$$M = \int_C \sigma(x,y)\,dl = \int_C \sigma\big(x(t),y(t)\big)\big\|r'(t)\big\|\,dt \text{ olacaktır.}$$



$$r' = -3a\cos^2 t\sin t\, i + 3a\sin^2 t\cos t\, j,$$

$$\|r'\| = 3a\left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right)^{1/2} = 3a\sin t\cos t$$

$$M = \int_0^{\pi/2}\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt = 3a^2\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t\sin t + \sin^4 t\cos t\right)dt$$

$$= 3a^2\left(-\frac{1}{5}\cos^5 t + \frac{1}{5}\sin^5 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 3a^2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}a^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\sigma(x,y)\,dl = \frac{5}{6a^2}\int_0^{\pi/2} a\cos^3 t\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt$$

$$= \frac{5}{6a^2}.3a^3\int_0^{\pi/2}\left(\cos^7 t\sin t + \cos^4 t\sin^4 t\right)dt = \frac{5a}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos^8 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{5a}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt$$

$$= \frac{5a}{16} + \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt \quad \text{olur.}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 2t\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos^2 2t+\cos^4 2t\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-2.\frac{1+\cos 4t}{2}+\frac{3}{2}+2\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 8t\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 8t\right)dt = \frac{1}{4}.\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

olduğundan $\bar{x} = \dfrac{5a}{16} + \dfrac{5a}{2}.\dfrac{3\pi}{16} = \dfrac{5a}{16} + \dfrac{15a\pi}{32} = \dfrac{5a}{16}\left(1+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ *dir.*

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\sigma(x,y)\,dl = \frac{5}{6a^2}\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\left(a\sin^3 t + a\cos^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt$$

$$= \frac{5}{6a^2}.3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\cos t\,dt + \frac{5a}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt = \frac{5a}{16} + \frac{15a\pi}{32} = \frac{5a}{16}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{bulunur.}$$

$$I_x = \int_C x^2\sigma(x,y)\,dl = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^6 t\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\cos t\sin t\,dt = a^4\int_0^{\pi/2}\left(\cos^{10} t\sin t + \cos^7 t\sin^4 t\right)dt$$

$$= a^4\left[-\frac{1}{\pi}\cos^{11} t\,\Bigg|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)^3\sin^4 t\cos t\,dt\right] = \frac{a^4}{11} + \int_0^1\left(1-u^2\right)^3 u^4\,du = \frac{a^4}{11}\left[1+\int_0^1\left(u^4-3u^6+3u^6+3u^8-u^{10}\right)du\right]$$

$$= \frac{a^4}{11}\left[1+\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{3}{7}u^7+\frac{1}{3}u^9-\frac{1}{11}u^{11}\right)\Bigg|_0^1\right] = \frac{a^4}{11}\left[1+\frac{1}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{11}\right] = \frac{a^4}{11}.\frac{1166}{1155} = \frac{106}{1155}a^4.$$

I_y benzer biçimde hesaplanır.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki vektör alanlarının birer tutarlı (konservatif) vektör alanı olduğunu gösteriniz.
$\nabla f = \mathbf{F}$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunu bulunuz.
(a) $F(x,y) = \left(x^3 + \dfrac{y}{x}\right)i + \left(y^2 + \ln x\right)j$
(b) $F(x,y) = \left(1 + ye^{xy}\right)i + \left(2y + xe^{xy}\right)j$
(c) $F(x,y) = \left(\cos x + \ln y\right)i + \left(\dfrac{x}{y} + e^{y}\right)j$
(d) $F(x,y) = \left(x + \arctan y\right)i + \dfrac{x+y}{1+y^2}j$

2. $F = P\,i + Q\,j$ vektör alanı tutarlı olduğunda
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
olacağını gösteriniz.

3. $F = P\,i + Q\,j + R\,k$ vektör alanı tutarlı olduğunda
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$
olacağını gösteriniz.

4. $F = P\,i + Q\,j + R\,k$ ile $r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ olsun.
$$\int_C F\cdot dr = \int_C \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\,\cos\theta\, d\ell$$
olacağını gösteriniz.

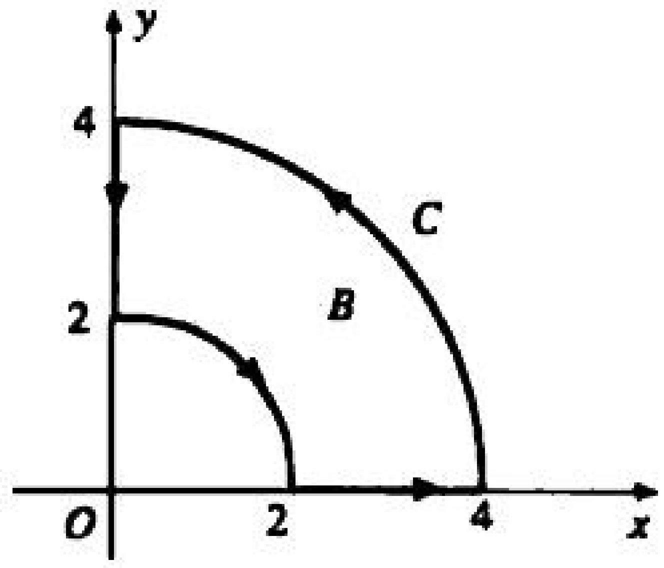
5. Curl (grad f) = 0 olduğunu gösteriniz.

6. grad $f(x,y,z) = (2xy+z^2)\,i + x^2 j + (2xz+\pi\cos\pi z)\,k$ eşitliğini sağlayan $f(x,y,z)$ ifadesini hesaplayınız.

7. m ve w birer sabit olmak üzere
$$f(x,y,z) = \frac{mw^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$
fonksiyonunun $F(x,y,z) = mw^2\,(xi + yj + zk)$ vektör alanı için bir potansiyel fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

8. $z = f(x,y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. f, Laplace denklemini sağlayan bir fonksiyon olduğunda
$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$$
olacağını gösteriniz. Burada C bir kapalı eğridir.

9. $B = \{ (x,y) : 4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$ bölgesinin sınırı C olsun.



$$I = \oint_C \sqrt{4x^2 + y^2}\,(2x\,dx - y\,dy)$$
integralini
(a) doğrudan
(b) Green Teoreminden yararlanarak
hesaplayınız.

10. C eğrisi $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi olup yönü saat yönünün tersidir.
$$\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$$
integralini hesaplayınız.

11. C eğrisi $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ lemniskatının sağ ilmeği olup saatin çalışma yönünün ters yönünde yönlendirilmiştir.
$$\oint_C \frac{xy(y\,dx - x\,dy)}{x^2+y^2}$$
integralini hesaplayınız.

12. C, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi üzerinde herhangi bir eğri parçası olsun.
$$F(x,y,z) = k\frac{xi + yj + zk}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$
vektör alanının, bir parçacığı C üzerinde başlangıç noktasından bitim noktasına kadar götürdüğünde yapılan iş ne olur?

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x,y)=\int\left(x^3+\frac{y}{x}\right)dx=\frac{1}{4}x^4+y\ln x+y\ln x+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=\ln x+\varphi'(y)=y^2+\ln x\Rightarrow\varphi'(y)=y^2\Rightarrow\varphi(y)=\frac{1}{3}y^3\quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\frac{1}{4}x^4+y\ln x+\frac{1}{3}y^3$

(b) $f(x,y)=\int(1+ye^{xy})dx=x+e^{xy}+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=xe^{xy}+\varphi'(y)=2y+xe^{xy}\Rightarrow\varphi'(y)=2y\Rightarrow\varphi(y)=y^2\quad\Rightarrow\quad f(x,y)=x+e^{xy}+y^2$ olur.

(c) $f(x,y)=\int(\cos x+\ln y)dx=\sin x+x\ln y+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=\frac{x}{y}+\varphi'(y)=\frac{x}{y}+e^y\Rightarrow\varphi'(y)=e^y\Rightarrow\varphi(y)=e^y\quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\sin x+x\ln y+e^y$ olur.

(d) $f(x,y)=\int(x+\arctan y)dx=\frac{x^2}{2}=x\arctan y+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=\frac{x}{1+y^2}+\varphi'(y)=\frac{x+y}{1+y^2}=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+y^2}\Rightarrow\varphi'(y)=\frac{y}{1+y^2}\quad\Rightarrow\quad\varphi'(y)=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

$f(x,y)=\frac{x^2}{x}+x\arctan y+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

2. F = Pi + Qj tutarlı olduğunda öyle bir f fonksiyonu vardır ki $f_x=$ P ve $f_y=$ Q dur. Buradan

$f_{xy}=P_x$ ve $f_{yx}=Q_x$ olur. $f_{xy}=f_{yx}$ olacağından $P_x=Q_x$ dir.

3. F = P i + Q j + R k tutarlı olduğunda sürekli türevlere sahip öyle bir f fonksiyonu vardır ki $f_x=P$, $f_y=Q$, $f_z=R$ dir. Buradan $f_{xy}=P_y$, $f_{yx}=Q_x$, $f_{xz}=P_z$, $f_{zy}=R_y$ ve $f_{zx}=R_x$ dir. Buradan $P_y=Q_x$, $P_z=R_x$ ve $Q_z=R_y$ bulunur.

4. T teğet birim vektör olmak üzere $\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\,d\ell$ olduğunu biliyoruz.

$F\cdot T=\|F\|\|T\|\cos\theta=\|F\|\cos\theta=\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta$ olacağından

$\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\,d\ell=\int_C\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\,d\ell$

bulunur.

5. $\text{grad } f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$ olduğundan

$$\text{curl}(\text{grad } f)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)i-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)k=0$$

olur.

6. $f(x,y,z)=\int(2xy+z^2)dx=x^2y+xz^2+\varphi(y,z)$

$f_y(x,y,z)=x^2+\varphi_y(y,z)=x^2 \Rightarrow \varphi_y(y,z)=0 \Rightarrow \varphi(y)=\psi(z) \Rightarrow f(x,y,z)=x^2y+xz^2+\psi(z)$

$f_z(x,y,z)=2xz+\psi'(z)=2xz+\cos\pi z \Rightarrow \psi'(z)=\cos\pi z \Rightarrow \psi(z)=\frac{1}{\pi}\sin\pi z$ olur.

$f(x,y,z)=x^2y+z^2+\frac{1}{\pi}\sin\pi z$ bulunur.

7. $\text{grad } f=mw^2x\, i+mw^2y\, j+mw^2z\, k=mw^2(x\, i+y\, j+z\, k)=F(x,y,z)$ olduğundan f, F için bir potansiyel fonksiyondur.

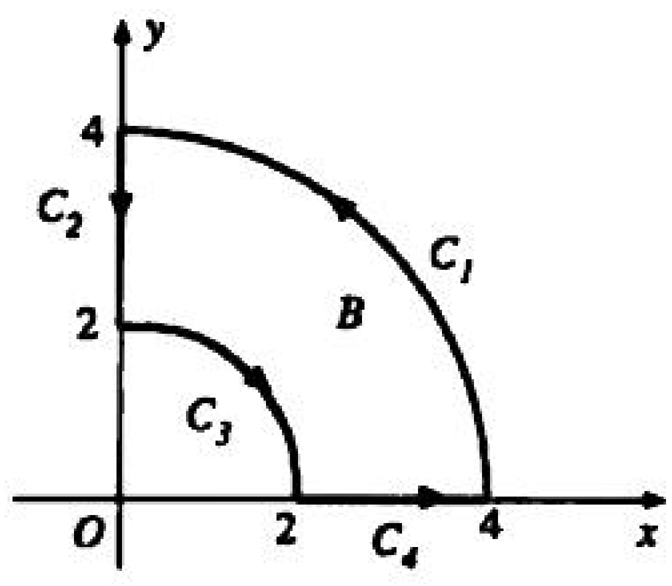
8. f, Laplace denklemini sağlıyorsa $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ olur.

$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$, $Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ denirse $Q_x-P_y=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0$ olur. Green teoreminden

$$\int_c \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=\iint_B-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint_B 0.dx\,dy=0$$

bulunur.

9. (a) $\int_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}$



$C_1 \ldots r_1(t)=4\cos t\, i+4\sin t\, j,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

$C_2 \ldots r_2(t)=-t\, j,\ 2\le t\le 4$

$C_3 \ldots r_3(t)=2\cos t\, i+2\sin t\, j,\ \frac{\pi}{2}\le t\le 0$

$C_4 \ldots r_4(t)=t\, i,\ 2\le t\le 4$

$$\int_{C_1}\sqrt{4x^2+y^2}\,(2x\,dx-y\,dy)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{64\cos^2 t+16\sin^2 t}\,(-32\cos t\sin t\,dt-16\sin t\cos t\,dt)$$

$$=-192\int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}\,\sin t\cos t\,dt=-192\int_0^{\pi/2}\sqrt{3\cos^2 t+1}\,\sin t\cos t\,dt$$

$$=\frac{192}{6}(3\cos^2 t+1)^{3/2}.\frac{2}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{64}{3}(1-8)=-\frac{448}{3}$$

$$\int_{C_2} \sqrt{4x^2+y^2}\,(2x\,dx - y\,dy) = \int_2^4 \sqrt{t^2}\,(-t\,dt) = -\int_2^4 t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^4 = -\frac{56}{3}$$ bulunur. Benzer biçimde hesaplanarak

$$\int_{C_3} \sqrt{4x^2+y^2}\,(2x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y) = -\frac{56}{3} \quad \text{ve} \quad \int_{C_4} \sqrt{4x^2+y^2}\,(2x\,dx - y\,dy) = \frac{224}{3}$$ bulunur.

$$\int_{C} \sqrt{4x^2+y^2}\,(2x\,dx - y\,dy) = -\frac{224}{3} - \frac{56}{3} - \frac{56}{3} + \frac{224}{3} = -\frac{112}{3}$$ olur.

(b) $P = 2x\sqrt{4x^2+y^2}$, $Q = -y\sqrt{4x^2+y^2}$, $Q_x - P_y = -\dfrac{4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}} - \dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+y^2}} = 6\dfrac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$

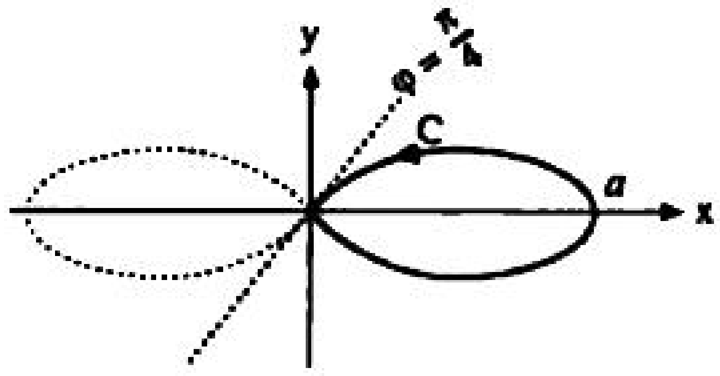
$$\int_C \sqrt{4x^2+y^2}\,(2x\,dx - y\,dy) = -6\iint_B \frac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}\,dx\,dy = -6\int_0^{\pi/2}\int_{r=2}^{4} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{4r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\Bigg|_2^4 \frac{-6\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{-6\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}\,d\varphi$$

$$= \frac{56}{3}(1+3\cos^2\varphi)^{1/2}.2\,\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{112}{3}(1-2) = -\frac{112}{3}$$

10. C nin parametrik denklemi $r(t) = a\cos t + a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ olacağından

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)a\cos t}{a^2}\,dt = \int_0^{2\pi} -1.\,dt = -2\pi$$ bulunur.



11. $P = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, $Q = -\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $Q_x = -\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)}$, $P_y = -\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$, $Q_x - P_y = \dfrac{2x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_B \frac{2x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{2r^3\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^4}\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2\varphi\cos 2\varphi\, r\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2\varphi\cos 2\varphi\; a\sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi = 0$$

olur, zira fonksiyon tek fonksiyon olup integrasyon sınırları simetriktir.

12. $\int_C F\cdot dr = \int_C F\cdot T\,d\ell$

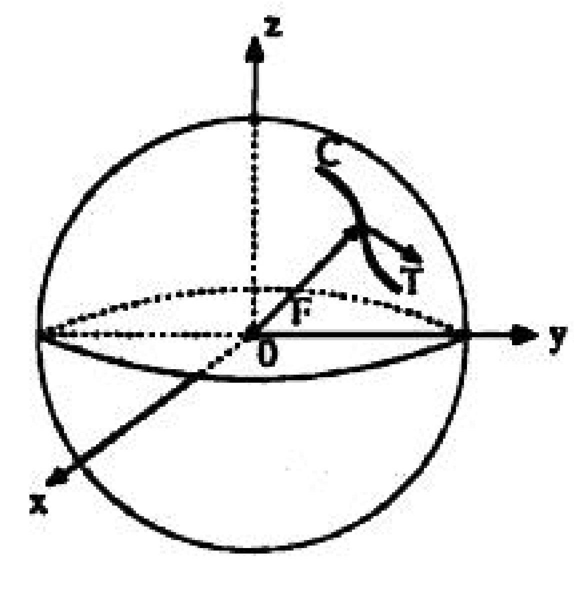
F orijinden küre yüzeyine doğru yönlendirilmiş bir vektör,

T de küreye teğet olacağından her noktada $F \perp T$ dir.

Dolayısıyla $F.T = 0$ dır. Buna göre

$$\int_C F\cdot dr = \int_C F\cdot T\,d\ell = \int_C 0.\,d\ell = 0$$

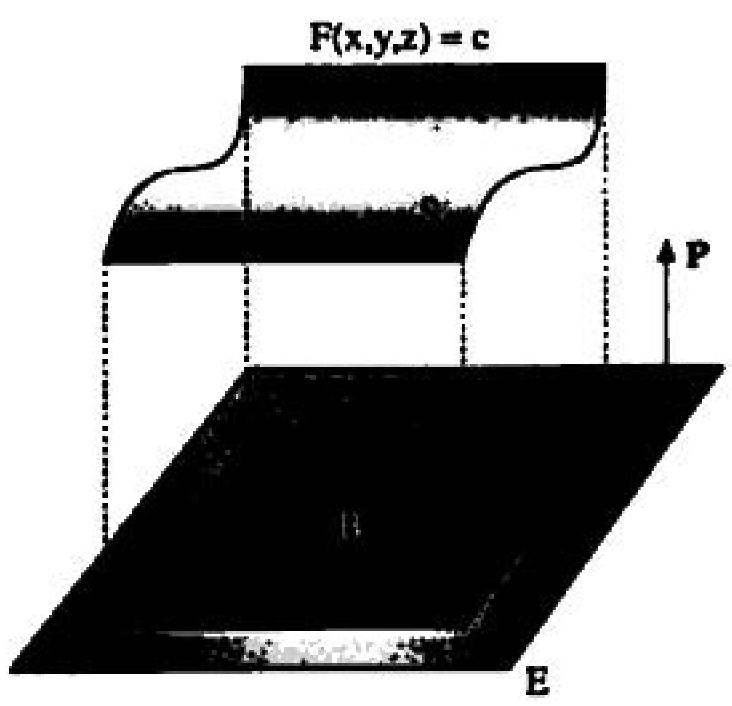
olacaktır.



16 YÜZEY İNTEGRALLERİ

REEL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN YÜZEY İNTEGRALLERİ

E, üç boyutlu uzayda bir düzlem, p bu düzlemin bir normali olsun. $F(x,y,z) = c$ denklemiyle tanımlanan S yüzeyinin E üzerindeki dik izdüşümü B olsun. S üzerinde tanımlı bir g fonksiyonu için



$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$$

limiti varsa bu limite g fonksiyonunun S üzerindeki birinci çeşit yüzey integrali denir,

$$\iint_S g(x,y,z)ds$$

ile gösterilir. Burada (x_k, y_k, z_k), S_k bölgesinde alınan herhangi bir noktadır.

$$\iint_S g(x,y,z)ds = \iint_B \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F . P|} dA$$

dır. Eğer S yüzeyinin denklemi $z = f(x,y)$ biçiminde verilir ve E düzlemi olarak xOy düzlemi alınırsa

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_B g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy$$

olur. Eğer S yüzeyinin denklemi $y = f(x,z)$ ve S nin xOz düzlemindeki dik izdüşümü G ise

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_G g(x, f(x,z), z)\sqrt{1+f_x^2+f_z^2}\, dx\, dz$$

olur.

İKİNCİ ÇEŞİT YÜZEY İNTEGRALLERİ

$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, normali $\mathbf{n}$ olan bir yönlü S yüzeyi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun.

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds$$

integraline F vektör alanının S yüzeyi üzerindeki ikinci çeşit yüzey integrali denir.

PROBLEMLER

- **Birinci Çeşit Yüzey İntegralleri**
- **İkinci Çeşit Yüzey İntegralleri**

1. S yüzeyi, $x + y + z = 1$ düzleminin birinci bölgedeki parçası olduğuna göre $g(x, y, z) = x$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

2. $g(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$ fonksiyonunun $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ yarıküresi üzerindeki integralini hesaplayınız.

3. S yüzeyi, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = x + 2$ düzlemleri arasındaki parçası olduğuna göre

$$\iint_S xz \, ds$$

integralini hesaplayınız.

4. S yüzeyi $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$ ve $z = a$ düzlemleri tarafından sınırlanan küp olduğuna göre $g(x, y, z) = x + y + z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

5. S yüzeyi $y^2 + 4z = 16$ silindirinin $x = 0, x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleri arasında kalan parçası olduğuna göre

$$\iint_S x\sqrt{y^2+4} \, ds$$

integralini hesaplayınız.

6. S yüzeyi, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = y$ düzlemi altında kalan parçası olduğuna göre $g(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

7. S yüzeyi, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin iç bölgesinde bulunan parçası olduğuna göre $f(x, y, z) = z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

8. S yüzeyi, $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleri arasındaki parçası olduğuna göre

$$\iint_S x^2 \, ds$$

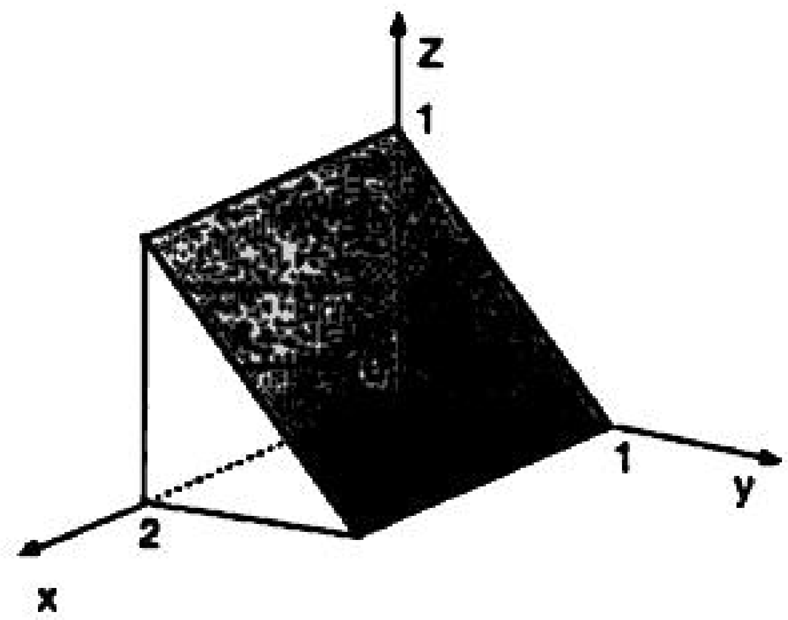
integralini hesaplayınız.

9. S yüzeyinin parametrik denklemi

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = z$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

dir. $0 \le z \le 2$ olduğuna göre $f(x, y, z) = z^2$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

10. S yüzeyi, aşağıda şekli verilen üçgen prizma olduğuna göre $g(x, y, z) = y + z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.



11. S yüzeyi, $z = 4 - y^2$ parabolik silindirinin $x = 0, x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleri arasında kalan parçası olup bu yüzey yukarı doğru yönlendirilmiştir. (n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.)

$F(x, y, z) = z^2 \boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ alanının S üzerindeki integralini hesaplayınız.

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi, yönü kürenin dışına doğru olan normalle yönlendirilmiştir. Bu yüzey üzerinde aşağıda verilen vektör alanlarının integralini hesaplayınız.

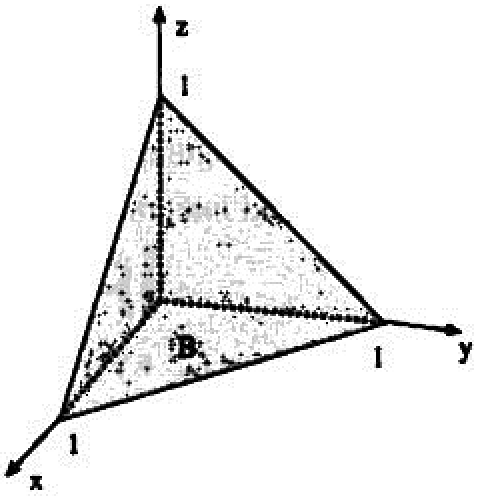
(a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{k}$

(b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

(c) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

(d) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$

ÇÖZÜMLER



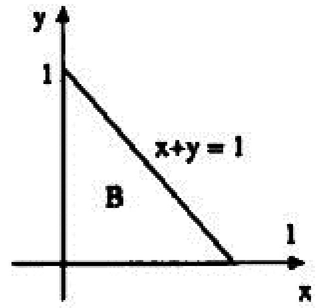
1. (c) $g(x, y, z) = x$

S: yüzeyi $x + y + z = 1$ düzleminin birinci bölgedeki parçası

$z = 1 - x - y, \quad z_x = -1, \quad z_y = -1$

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{3}d = dy$$

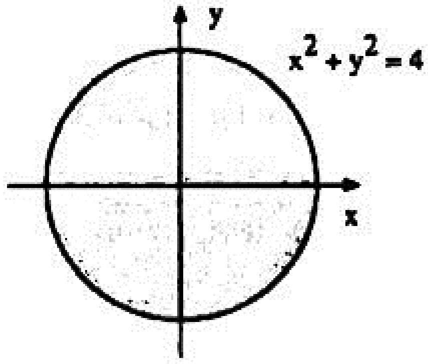
$$\iint_S x\,ds = \iint_B x\sqrt{3}\,dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} x\sqrt{3}\,dydx = \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



2. $g(x,y,z) = z(x^2 + y^2)$

S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ yarı küresi

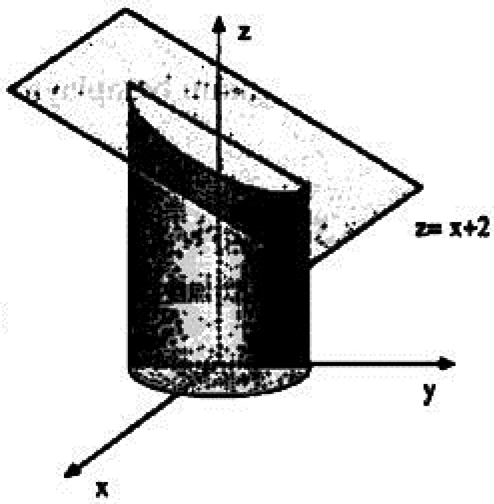
$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$



$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$\iint_S z(x^2 + y^2)\,ds = \iint_B \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,.(x^2 + y^2)\frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^2.r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\,d\theta = 4\pi.4 = 16\pi$$



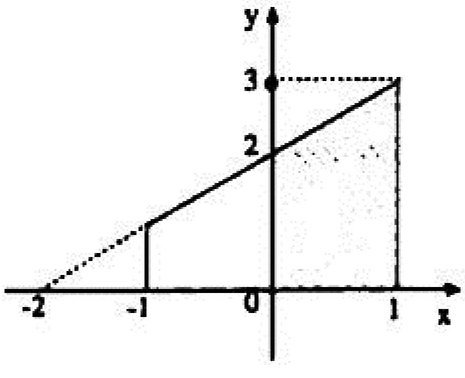
3. $g(x,y,z) = xz, \quad y = f(x,z) = \sqrt{1 - x^2}$

$ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}\,dz\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx\,dz$ olacağından $S: x^2 + y^2 = 1$ silindirinin

$y = \sqrt{1 - x^2}$ parçasının $z = 0$ ve $z = x + 2$ düzlemleri arasında kısmi üzerindeki yüzey integrali

$$\iint_{S_1} ,xz\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2} = \iint_B xz\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dz\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{z=0}^{x+2} z\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dz\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{x(x+2)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad (x = \sin t)$$

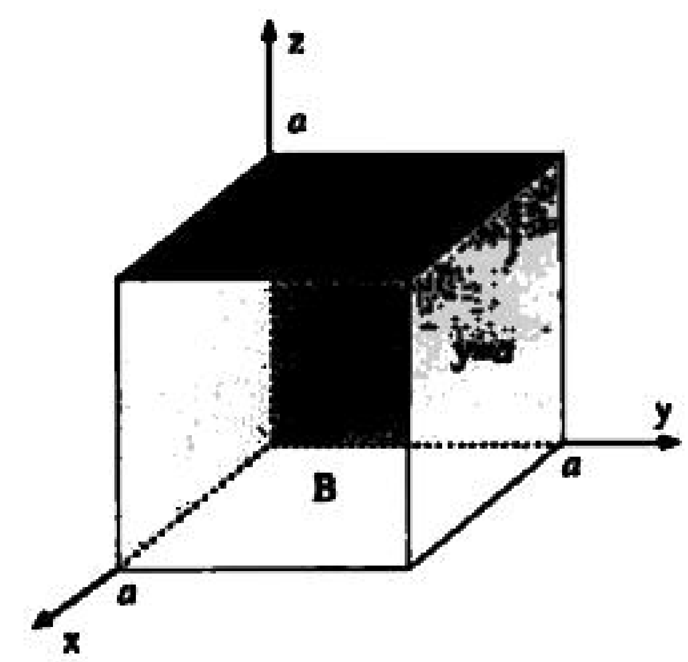


olur. Benzer şekilde, silindirin $y = -\sqrt{1 - x^2}$ denklemli parçası üzerindeki integrali hesaplandığında

$$\iint_{S_2} xz\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2}\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. Bu durumda $\iint_S xz\,ds = \pi$ olur.

4. $z=a,\ \ z_x=0,\ \ z_y=0$

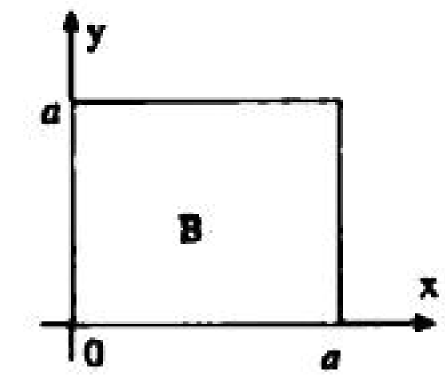


$$\iint_S (x+y+z) = \iint_B (x+y+a)\sqrt{1+0+0}\ dx\,dy$$

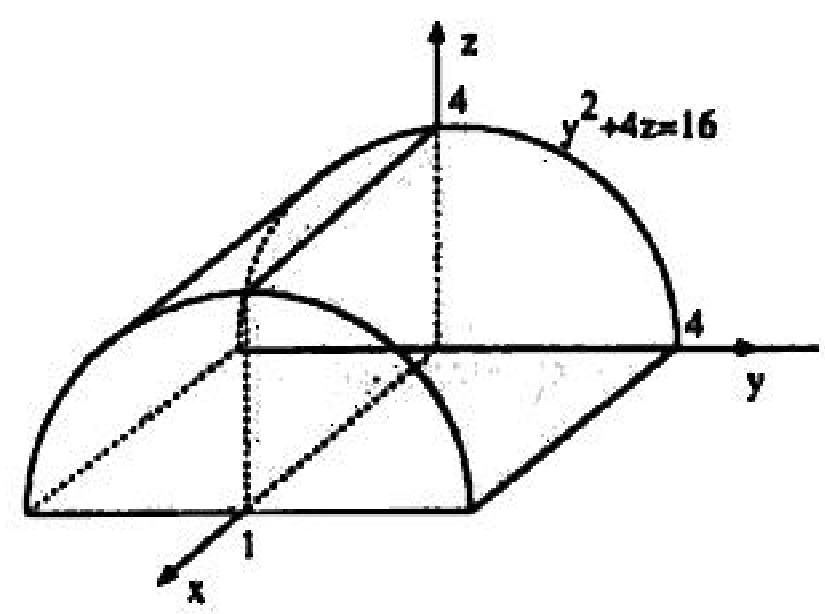
$$=\int_0^a\int_0^a (x+y+a)\,dx\,dy = \int_0^a \left(xy+\frac{y^2}{2}+ay\right)\Bigg|_0^a dx$$

$$=\int_0^a\left(ax+\frac{a^2}{2}+a^2\right)dx = \frac{1}{2}ax^2+\frac{3}{2}a^2x\ \Bigg|_0^a$$

$$=\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^3=2a^3$$



5. $$\iint_S x\sqrt{y^2+4}\,ds = \int_0^1\int_0^4 x\sqrt{y^2+4}\,.\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dy\,dx$$



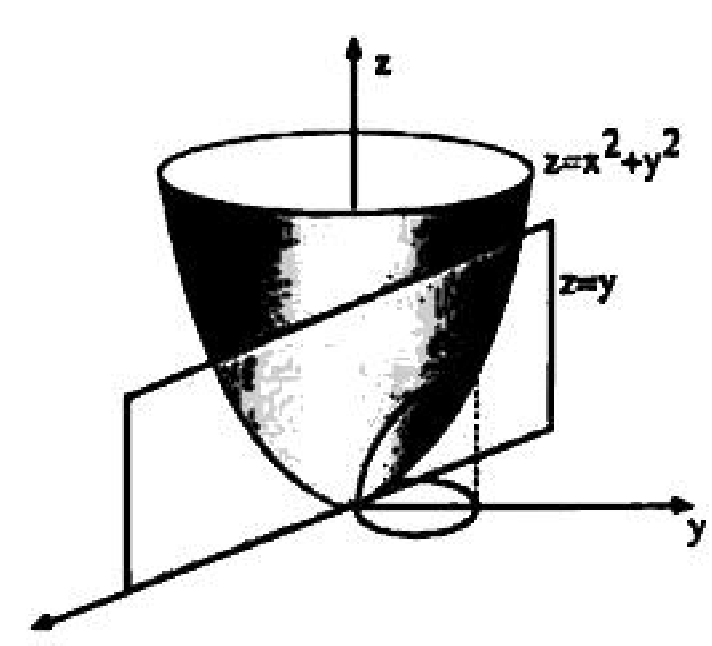
$$=\int_0^1\int_0^4 x\sqrt{y^2+4}\ \ \sqrt{1+0+\frac{y^2}{4}}\ dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^4 x((y^2+4)\ dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}+4y\right)\Bigg|_0^4 dx = \frac{56}{3}\int_0^1 x\,dx = \frac{28}{3}$$

6. $g(x,y,z)=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, $\ z_x=2x$, $\ z_y=2y$ dir. B bölgesi

$\Rightarrow y = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ çemberi tarafından sınırlanan dairedir.



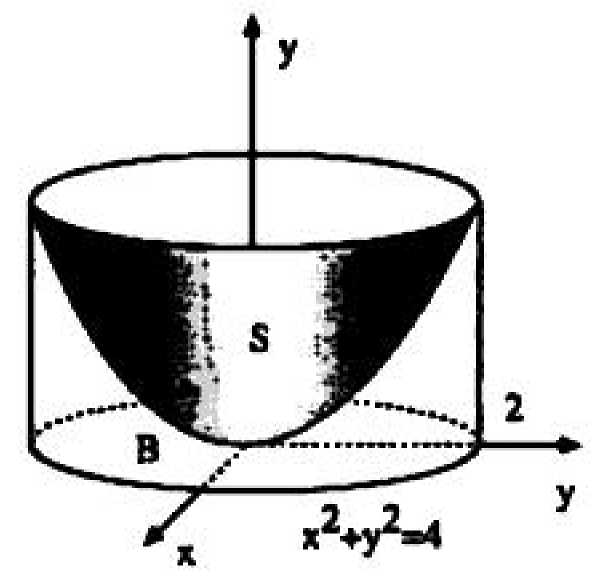
$$\iint_S y(x,y,z)\,ds=\iint_B \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\ dx\,dy$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\ \int_{r=0}^{\sin\varphi}(1+4r^2)r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi}\left(\frac{r^2}{2}+r^4\ \Bigg|_0^{\sin\varphi}\right)d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi+\sin^4\varphi\right)d\varphi=\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)+\frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)^2\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{5}{4}-3\cos 2\varphi+\frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{5}{16}\pi$$

7. $z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2=4$



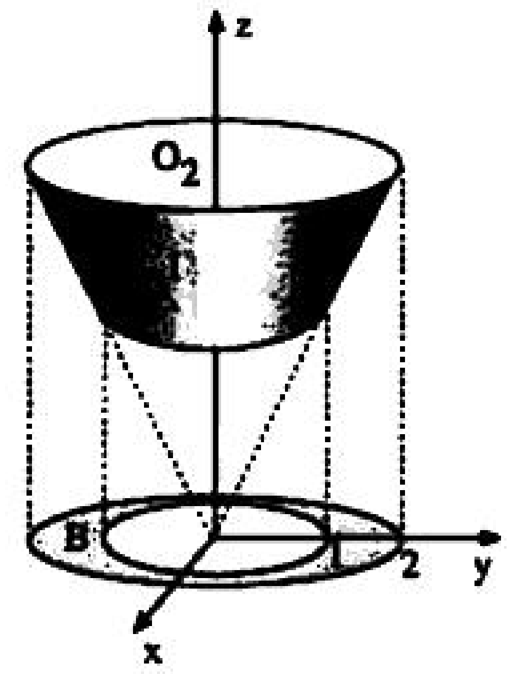
$$ds=\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\,dy=\left(1+4x^2+4y^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\,dy$$

$$\iint_S z\,ds=\iint_B \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}r^2\left(1+4r^2\right)^{\frac{1}{2}}r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^{17}\frac{1}{4}(t-1)t^{1/2}\frac{1}{8}dt\,d\varphi=\frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\int_1^{17}\left(t^{3/2}-t^{1/2}\right)dt\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}t^{5/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\Bigg|_1^{17}2\pi=\frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{5}\left(17^2\sqrt{17}-1\right)-\frac{2}{3}\left(17\sqrt{17}-1\right)\right]=\frac{\pi}{240}\left(1564\sqrt{17}+4\right)$$

8. $g(x,y,z)=x^2,\quad S: z^2=x^2+y^2$ konisinin $z=1$ ve $z=2$ düzlemleri arasındaki parçası.



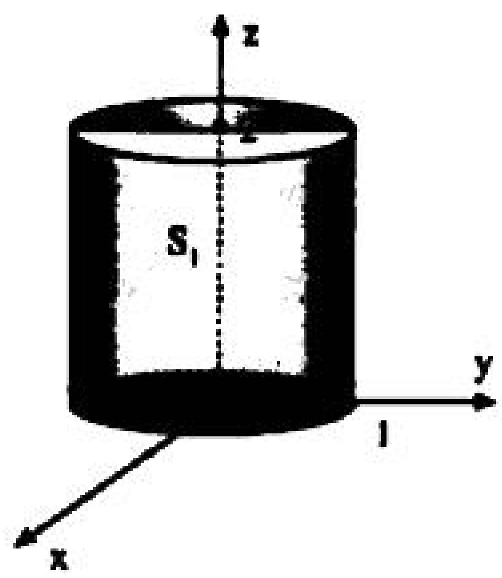
$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\left(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2}dx\,dy=\sqrt{2}dx\,dy$$

$$\iint_S x^2ds=\iint_B x^2\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}r^2\cos^2\varphi.r\,dr\,d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4\Bigg|_1^2\cos^2\varphi d\varphi=\frac{15}{4}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{15\sqrt{2}}{8}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{15\sqrt{2}\pi}{4}$$

9. S yüzeyinin yOz düzleminin üst tarafında kalan kısmı S_1, alt tarafında kalan kısmı S_2 olsun. S_1 ve S_2 nin yOz düzlemi üzerindeki dik izdüşümü

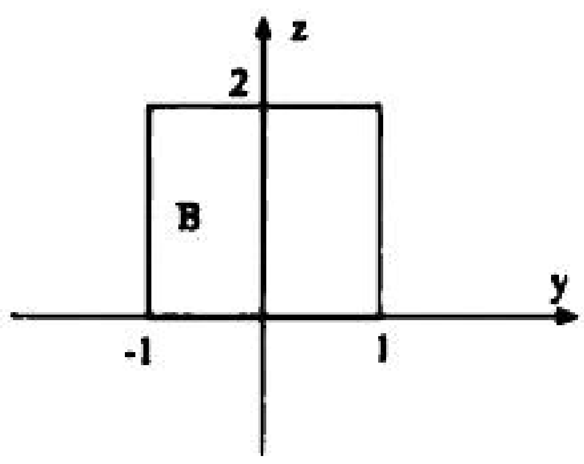


$$B=\{(y,z): -1\le y\le 1,\ \ 0\le z<2\}$$

karesidir. $x^2+y^2=1$ olacağından $x=-\sqrt{1-y^2}$ dir.

$$\iint_{S_1} z^2ds=\iint_B z^2.\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\ dy\,dz=\iint_B z^2\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}\ dy\,dz=\int_0^2\int_{-1}^{1}\frac{z^2}{\sqrt{1-y^2}}\ dy\,dz$$

$$=\int_0^2 z^2\arcsin y\Bigg|_{-1}^{1}dz=\pi\int_0^2 z^2dz=\pi\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8\pi}{3}$$

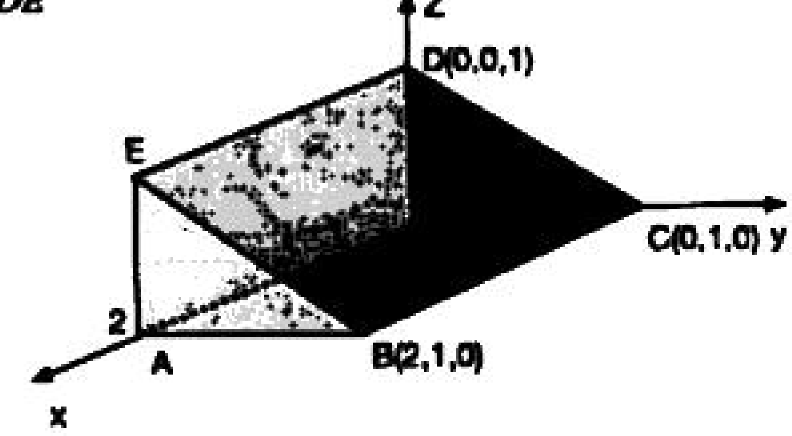


bulunur. Benzer biçimde

$$\iint_{S_2} z^2ds=\frac{8\pi}{3}$$

olacağı gösterilebilir. $\iint_S z^2ds=\frac{8\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$ olur.

10. $$\iint_S (y+z)ds = \iint_{ABCO}(y+z)ds + \iint_{AODE}(y+z)ds + \iint_{ABE}(y+z)ds + \iint_{OCD}(y+z)ds + \iint_{BCDE}(y+z)ds$$



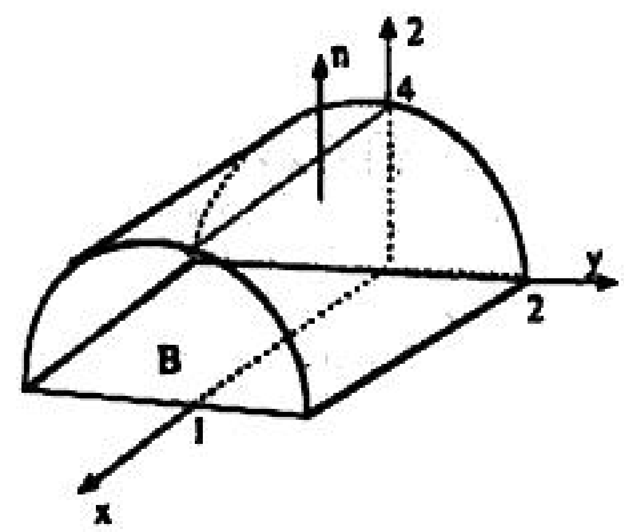
$$= \int_0^2\int_0^1 y\,dy\,dx + \int_0^2\int_0^1 z\,dz\,dx + \int_0^1\int_0^{1-y}(y+z)dz\,dy$$

$$+ \int_0^1\int_0^{1-y}(y+z)dz\,dy + \int_0^2\int_0^1 (y+1-y)\sqrt{1+1}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 dx + \int_0^2 \frac{1}{2}z^2\Big|_0^1 dx + \int_0^1 (yz+\frac{1}{2}z^2)\Big|_0^{1-y} dy$$

$$+ \int_0^1 \left(yz+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_1^{1-y} dy + \int_0^2 \sqrt{2}y\Big|_0^1 dx = 1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2\sqrt{2} = \frac{8}{3}+2\sqrt{2}$$

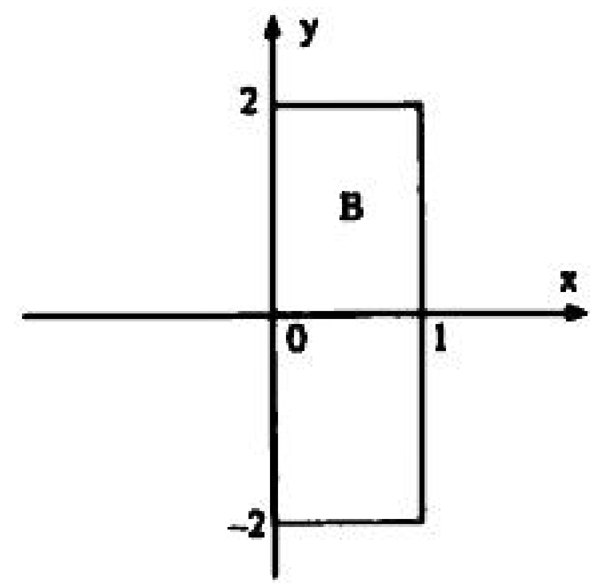
11. $z = 4-y^2,\quad z_x = 0,\quad z_y = -2y$



$$\mathbf{n} = \frac{-0.\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+4y^2}} = \frac{2y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+4y^2}}$$

$\mathbf{F}.\mathbf{n} = 2xy-3z$ olacağından

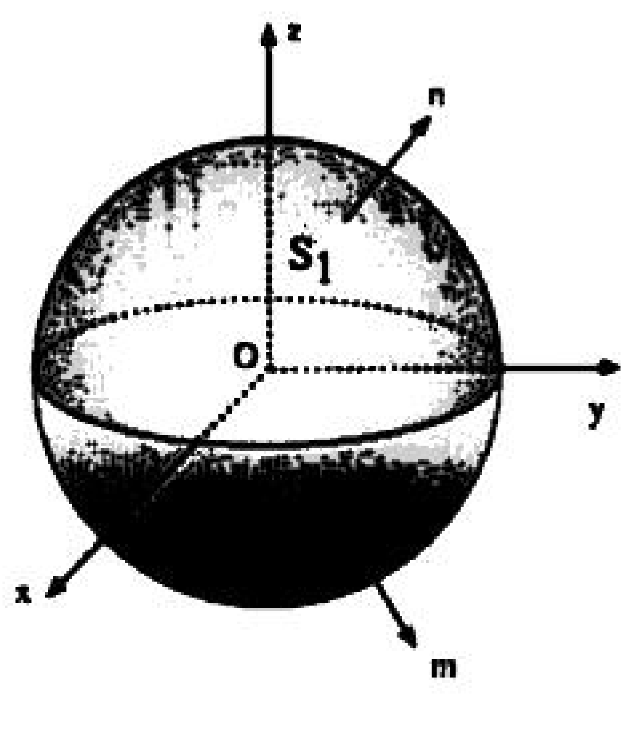
$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_S \frac{(2xy-3z)}{\sqrt{1+4y^2}}ds = \iint_B \frac{\left[2xy-3(4-y^2)\right]}{\sqrt{1+4y^2}}\sqrt{1+4y^2}\,dxdy$$



$$= \int_0^1\int_{-2}^2 (2xy-12+3y^2)dydx = \int_0^1 (xy^2-12y+y^3\Big|_{-2}^2 dx$$

$$= \int_0^1 (-32)dx = (-32x)\Big|_0^1 = -32$$

12. S yüzeyi denklemi $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ olan S_1 üst yarı küresi ile denklemi $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ olan S_2 alt yarı küresinin birleşimidir. Üst yarı kürenin normali



$$\mathbf{n} = \frac{-z_x\,\mathbf{i}-z_y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

alt yarı kürenin normali

$$\mathbf{m} = \frac{z_x\mathbf{i}+z_y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

olacaktır. Yarı kürelerin her ikisinin de xOy düzlemindeki izdüşümü $x^2+y^2 \le 1$ dairesidir.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{k}$

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\iint_{S_1}\frac{z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}ds=\iint_{B_1}\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_{B}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdrd\varphi=\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}(1-r^2)^{3/2}.\frac{2}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.2\pi=\frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds=\iint_{S_2}\frac{-z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}ds=\iint_{S}\frac{-\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}ds=\iint_{B}\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{B}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\frac{2\pi}{3}$$

olacağından $\iint\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ bulunur.

(b) $\mathbf{F}=y\,\mathbf{i}-x\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$ $\qquad \mathbf{F}.\mathbf{n}=\dfrac{-yz_x+xz_y+1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $\quad \mathbf{F}.\mathbf{m}=\dfrac{yz_x-xz_y-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$.

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\iint_{B}(-yz_x+xz_y+1)dxdy=\iint_{B}(-y\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1)dxdy=\iint_{B}dxdy=\pi$$

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds=\iint_{B}(yz_x-xz_y-1)dxdy=\iint_{B}(-1)dxdy=-\pi\quad \text{olacağından}\quad \iint_{S}\mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds=0 \text{ dır.}$$

(c) $\mathbf{F}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{F}.\mathbf{n}=-xz_x-yz_y+z$, $\quad \mathbf{F}.\mathbf{m}=xz_x+yz_y-z$

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\iint_{B}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dx\,dy=\iint_{B}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\varphi$$

$$=-\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}\Big|_0^1 d\varphi=2\pi$$

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds=\iint_{B}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy=2\pi\quad \text{olacağından}\quad \iint_{S}\mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds=4\pi \text{ dir.}$$

(d) $$\iint_{S_1}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\iint_{S}\left(-xzz_x-yzz_y+z^2\right)=\iint_{B}\left(-xz.\frac{-x}{z}-yz.\frac{-y}{z}+z^2\right)dxdy=\iint_{B}\left(x^2+y^2+1-x^2-y^2\right)dxdy=\iint_{B}dxdy=\pi$$

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds=\iint_{S_2}\left(xz.z_x+yz.z_y-z^2\right)dxdy=\iint_{B}\left[xz.\frac{-x}{z}+yz.\frac{-y}{z}-(1-x^2-y^2)\right]dxdy=\iint_{B}[(-1)]dxdy=-\pi$$

olacağından $\iint_{S}\mathbf{F}.\mathbf{n}\ ds=\pi-\pi=0$ dir.

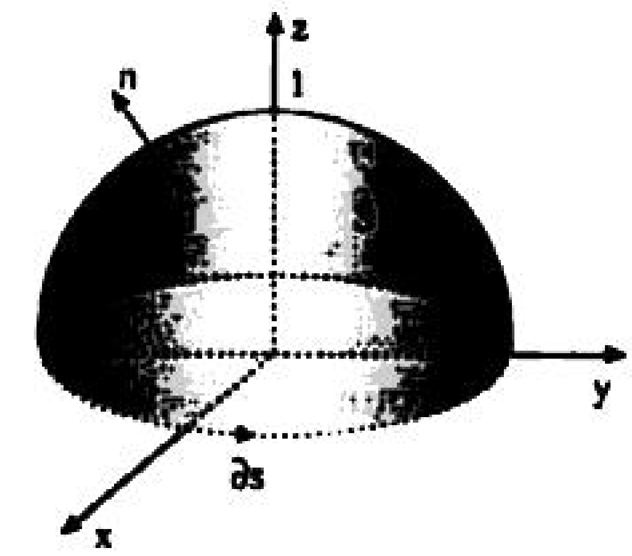
YÜZEY İNTEGRALLERİNİN TEMEL TEOREMLERİ

TEOREM **(Stokes Teoremi)**

S, normali ***n*** birim vektörü olan ve sonlu alana sahip bir yönlendirilmiş yüzey, bu yüzeyin ∂S sınır eğrisi kapalı, parçalı düzgün bir eğri ve bunun yönü de ***S*** den indirgenen yön olsun. ***F*** de ***S*** üzerinde sürekli bir vektör alanı ve ***F*** nin bileşen fonksiyonları, ***S*** nin sınır noktası olmayan tüm noktalarında sürekli kısmi türevlere sahip ise

$$\iint_{\partial s} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_{S} \mathbf{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\; ds$$

olur.

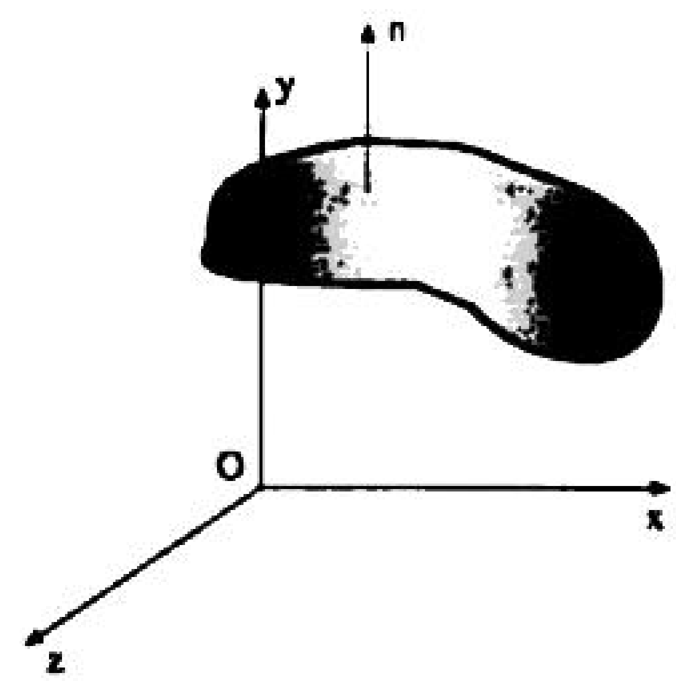


TEOREM **(Divergens Teoremi – Gauss Teoremi)**

D bir basit uzay bölgesi, ***S*** bu bölgenin sınır yüzeyi ve ***n*** de bu yüzeyin dışa doğru yönlendirilmiş normali olsun. ***F***, bileşen fonksiyonları ***D*** üzerinde sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör alanı ise

$$\iint_{S} \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds = \iiint_{D} \text{div}\mathbf{F}\, dxdydz$$

olur.



1. Aşağıdaki vektör alanları ile S yüzeyleri için

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla x \mathbf{F}).\mathbf{n}\, ds$$

eşitliğinin gerçeklendiğini, yani Stokes teoreminin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $F = y^2\, i + xy\, j - 2xz\, k$

$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin üst yarısı.
n kürenin dışına doğru yönlendirilmiştir.

(b) $F = y\, i - x\, j$

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin üst yarısı.
n kürenin dışına doğru yönlendirilmiştir.

(c) $F = (x^2 - y)\, i + 4z\, j + x^2\, k$

$S = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi.
n koninin dışına doğru yönlendirilmiştir.

(d) $F = (x^2 + z)\, i + (y^2 + x)\, j + (z^2 + y)\, k$,

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin üstünde kalan parçası
n yukarı doğru yönlendirilmiştir.

(e) $F = x^2\, i + y^2\, j + z^2 \tan(xy)\, k$,

$S : z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yarı elipsoidi.
n elipsoidin dışına doğru yönlendirilmiştir.

2. D, bir basit uzay bölgesi, C, D de bir parçalı düzgün kapalı eğri ve $\mathbf{F}$ de bir fonksiyonun gradiyenti olsun. Bu takdirde

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

olacağını gösteriniz.

3. S, $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ elipsoidinin üst yarısı olup n birim normal vektörü yukarı doğru yönlendirilmiştir.

$$F = y\, i + x^2\, j + (x^2 + y^4)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xyz}}\, k$$

vektör alanı için

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}).\mathbf{n}\, ds$$

integralini hesaplayınız.

4. S yüzeyi, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yarı küresi olup n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.

$$\iint_S (\nabla \times (x\, \mathbf{i})).\mathbf{n}\, ds$$

integralini hesaplayınız.

5. Stokes teoreminden yararlanarak herhangi bir kapalı C eğrisi için

$$\oint_C yz\,dz + xz\,dy + xy\,dz = 0$$

olacağını gösteriniz.

6. C eğrisi, köşeleri $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ olan üçgen olduğuna göre

$$\oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$$

integralini hesaplayınız.

7. Divergens teoreminden yararlanarak, aşağıda verilen F vektör alanları ile S yüzeyleri için $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds$ integrallerini hesaplayınız.

(a) $F = x\, i + y\, j + z\, k$,

S, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleri arasında kalan bölgenin sınır yüzeyi

(b) $F = y\,(x^2 + y^2)^{3/2}\, i - x\,(x^2 + y^2)^{3/2}\, j + (z + 1)\, k$,

S, üstten $z = 2x$ düzlemi, alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin sınır yüzeyi

8. $F = x^2 y^2 z\, i - x^4 yz^2\, j$ ve

$D = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$ olduğuna göre

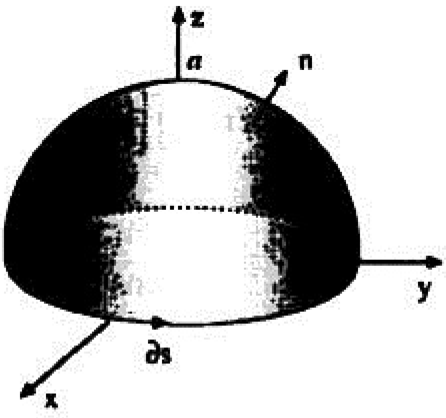
$$\iiint_D (\mathrm{div}\mathbf{F})dxdydz$$

integralini divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

9. $F = x^3\, i + y^3\, j + z^3\, k$ ve S de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi olsun.

$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds$ integralini divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER



1. (a) $\mathbf{F} = y^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} - 2xz\,\mathbf{k}$, S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ yarı küresi, $\mathbf{n}$ yukarı doğru.

∂S eğrisi, yarıçapı a olan çember olduğundan parametrik denklemi $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ olur. Buradan $\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$ bulunur. Buna göre

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\partial S} (\mathbf{F}.\mathbf{r}')dt = \int_0^{2\pi} \left[a^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos t\sin t(a\cos t)\right]dt = a^3\int_0^{2\pi}\left(-\sin^3 t + \cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left[-(1-\cos^2 t)\sin t + \cos^2 t\sin t\right]dt = a^3\int_0^{2\pi}\left(-\sin t + 2\cos^2 t\sin t\right)dt = a^3\left(\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & -2xz \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} + (2z+0)\mathbf{j} + (y-2y)\mathbf{k} = 2z\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\ dy \text{ olacağından}$$

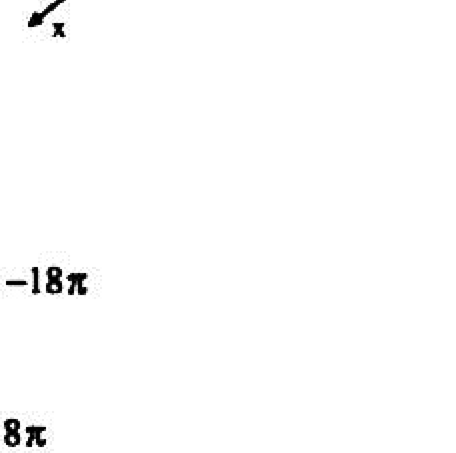
$$\int_S (\nabla\times\mathbf{F}).\mathbf{n}\,ds = \iint_B \left(-2zf_y - y\right)dxdy = \iint_B\left(-2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} - y\right)dxdy = -3\iint_B y\,dx\,dy$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = -3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} d\varphi = -a^3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = -a^3.0 = 0$$

bulunur. O halde

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_B \mathbf{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$$

olur ki bu da Stokes Teoreminin gerçeklendiğini gösterir.



(b) $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $\mathbf{n} = \dfrac{-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0.\mathbf{i} - 0.\mathbf{j} + (-1-1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\left(3\sin t\,\mathbf{i} - 3\cos t\,\mathbf{j}\right).(-3\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j})dt = \int_0^{2\pi}(-9\sin^2 t - 9\cos^2 t)dt = -9\int_0^{2\pi}dt = -18\pi$$

$$\iint_B \mathbf{cur}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_B(-2\mathbf{k}).\frac{-z_x\,\mathbf{i} - z_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.ds = \iint_B(-2\mathbf{k}).\mathbf{k}\,dxdy = -2\iint_B dxdy = -2.\pi.9 = -18\pi$$

bulunur. Şu halde $\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_B \mathbf{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$ dir.

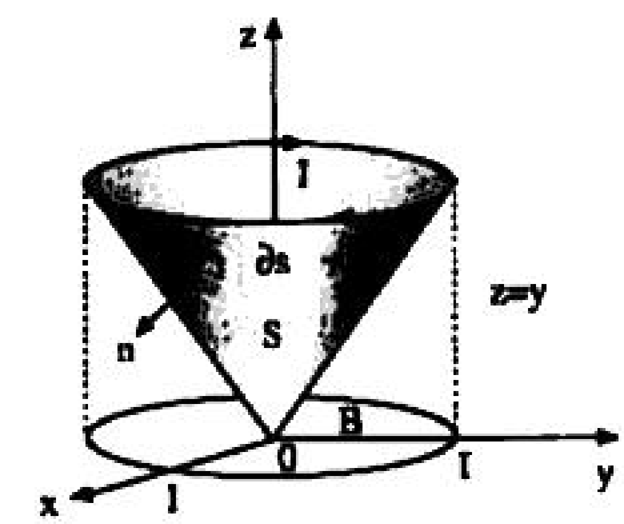
(c) $\mathbf{F}=(x^2-y)\mathbf{i}+4z\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$,

$z=1$ düzlemi ile $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin arakesit eğrisi $x^2+y^2=1$, $z=1$ çemberidir. Bunun bir parametrik gösterimi $\mathbf{r}(t)=\cos(-t)\mathbf{i}+\sin(-t)\mathbf{j}+\mathbf{k}=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $0\le t\le 2\pi$ olur. $\mathbf{r}'(t)=-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$ olacağından

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(\cos^2 t+\sin t\right)\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\cos^2 t\mathbf{k}\right].\left[-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}\right]dt=\int_0^{2\pi}\left[\cos^2 t(-\sin t)-\sin^2 t-4\cos t\right]dt$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-4\sin t\Big|_0^{2\pi}=-\pi$$

olur.



$\iint_S \mathrm{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,dS$ integralini hesaplayalım.

$\mathrm{Curl}\mathbf{F}=-4\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ve $\mathbf{n}=\dfrac{z_x\mathbf{i}+z_y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ olacağından

$$\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\iint_B(-4\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\mathbf{k}).\frac{z_x\mathbf{i}+z_y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_B\left(-4z_x-2xz_y-1\right)dxdy$$

$$=\iint_B\left(-4\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{-4r\cos\varphi}{r}-\frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}-1\right)r\,drd\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}-4\frac{r^2}{2}\cos\varphi-\frac{2}{3}r^3\cos\varphi\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(-2\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos\varphi\sin\varphi-\frac{1}{2}\right)d\varphi=-\pi$$

bulunur.

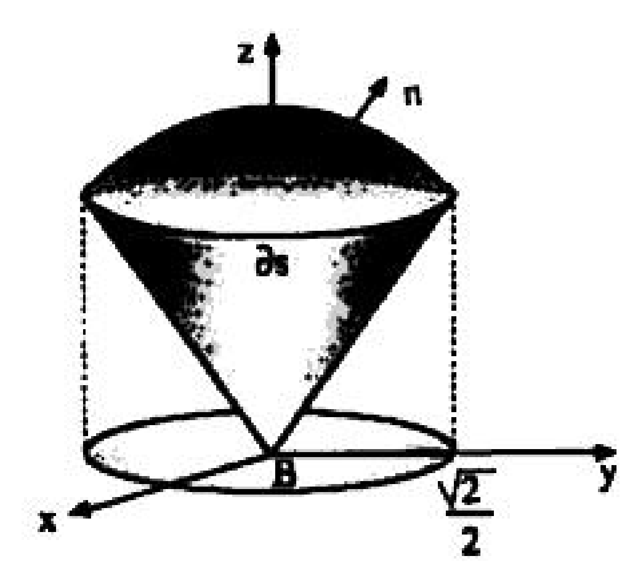
(d) $\mathbf{F}=(x^2+z)\mathbf{i}+(y^2+x)\mathbf{j}+(z^2+y)\mathbf{k}$

S: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $\quad n=\dfrac{-zx\,i-zy\,j+k}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

B: $x^2+y^2\le\frac{1}{2}$ dairesi

$r(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,i+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,j$, $\quad 0\le t\le 2\pi$



∂S, koni ile kürenin arakesit eğrisi bir çember olup bir parametrik denklemi

$$r(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,i+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,j+\frac{1}{\sqrt{2}}k,\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$F(x(t),y(t),z(t))=\left(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i+\left(\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)j+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)k$$

ve $r'(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,i+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,j$ olacağından

$$\int_{\partial S} F.dr=\int_0^{2\pi}\left(F.\frac{dr}{dt}\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cos^2 t-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin^2 t\cos t+\frac{1}{2}\cos^2 t\right)dt=\frac{\pi}{2}$$ olur.

$$rotF=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ x^2+z & y^2+x & z^2+y\end{vmatrix}=i+j+k$$

$$n=\frac{-f_x i-f_y j+k}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}i+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}j+k}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}=xi+yj+\sqrt{1-x^2-y^2}\,k$$

olduğundan $rotF.n=x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}$ olur. Bu durumda

$$\iint_S rotF.n\,ds=\iint_B\left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint_B\left(\frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{1-r^2}}+1\right)dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi dr+\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

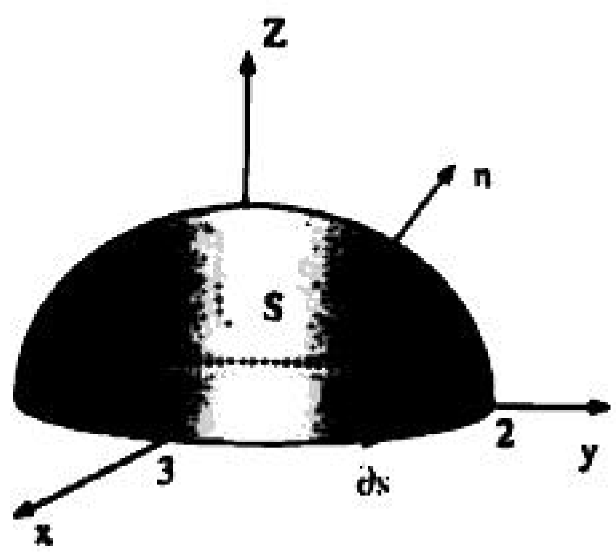
olur. O halde Stokes Teoremi gerçekleşir.

(e) Yukarıda yapılanlara benzer biçimde gösterilir.

2. $F=gradf$ olsun. Stokes teoreminden

$$\oint_C F.dr=\oint_C gradf.dr=\iint_S curl(gradf).n\,ds=\iint_S 0.n\,ds=0$$

bulunur.



3. $F=y\,i+x^2\,j+(x^2+y^4)^{3/2}\sin e^{\sqrt{xyz}}\,k$

$r(t)=3\cos t\,i+2\sin t\,j,\quad 0\le t\le 2\pi$

$r'(t)=-3\sin t\,i+2\cos t\,j$

$$\iint_S(\nabla\times F).n\,ds=\int_{\partial S}F.d\,r=\int_{\partial S}(F.r')dt=\int_0^{2\pi}\left[2\sin t\,i+9\cos^2 t\,j+\left(9\cos^2 t+16\sin^4 t\right)^{3/2}\sin t\,k\right][3\sin t\,i+2\cos t\,j]\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-6\sin^2 t+18\cos^3 t)dt=\int_0^{2\pi}\left[-3(1-\cos 2t)+18(1-\sin^2 t)\cos t\right]dt$$

$$=-3(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+18(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)\Bigg|_0^{2\pi}=-6\pi$$

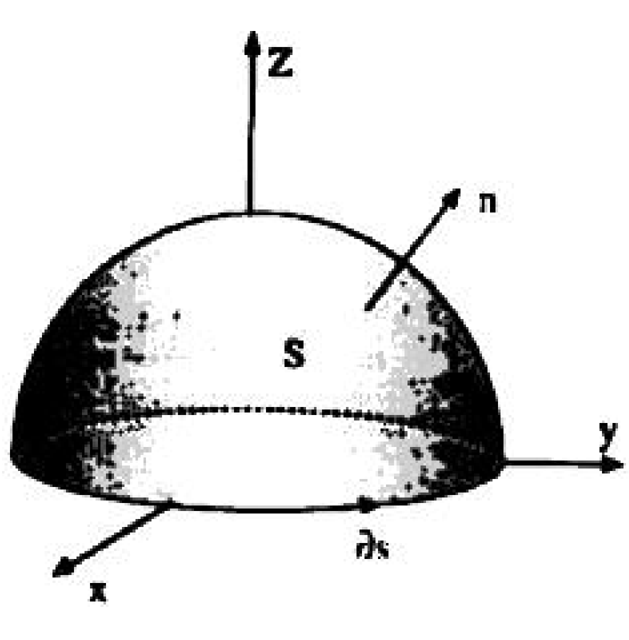
4. $F=x\,i$

$r(t)=\cos t\,i+\sin t\,j,\quad 0\le t\le 2\pi$

$r'(t)=-\sin t\,i+\cos t\,j$

$$\iint_S\nabla\times(x\,i).n\,ds=\int_{\partial S}F.d\,r=\int_0^{2\pi}\cos t\,i.(-\sin t\,i+\cos t\,j)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos t(-\sin t)dt=\frac{1}{2}\cos^2 t\Bigg|_0^{2\pi}=0$$



5. $\oint\limits_C yzdx + xzdy + xydz$ ifadesi $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun gradiyentinin eğrisel integralidir.

$$\oint\limits_c yzdx + xzdy + xydz = \oint\limits_c gradf.d\,r = \iint\limits_S curl(gradf).n \; dS$$

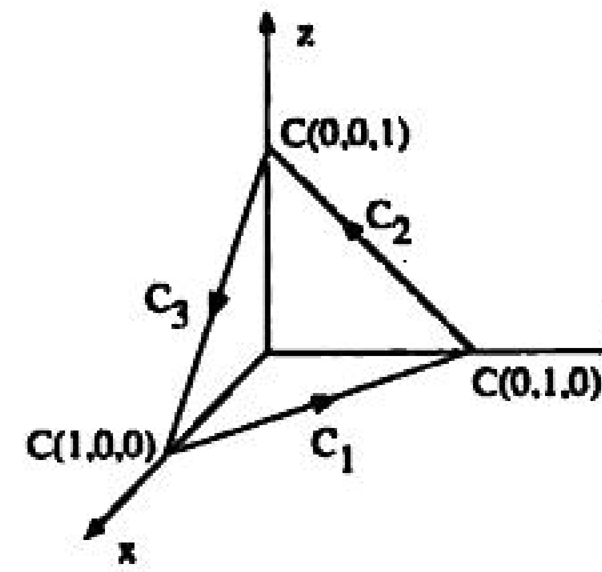
$$= \iint\limits_S 0.n \; ds = \iint\limits_S 0.dS = 0$$

olur.

6. $C_1 \ldots \; x = y, \; z = 0$

$C_2 \ldots \; y = z, \; x = 0$

$C_3 \ldots \; x = z, \; y = 0$



$$\oint\limits_{C_1} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz = \int\limits_0^1 (-x + x)dx = 0$$

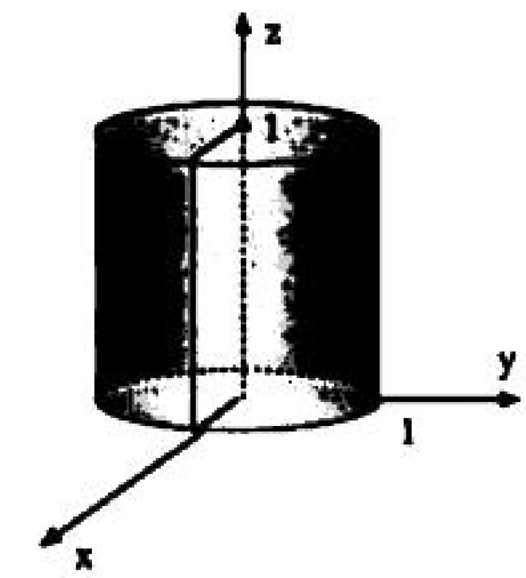
olur. Benzer biçimde $\int\limits_{C_2} = \int\limits_{C_3} = 0$ olduğu gösterilebilir. O halde

$$\oint\limits_C (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz = \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3} = 0 + 0 + 0 = 0 \; olur.$$

7. (a) $div\, F = 1 + 1 + 1 = 3$ olduğundan

$$\iint\limits_S F.n ds = 3 \iiint\limits_G dxdydz = 3.(\text{G nin hacmi}) = 3.\pi.1.1 = 3\pi$$

olur.



(b) $divF = \frac{3}{2} y(x^2 + y^2)^{1/2} 2x - \frac{3}{2} x(x^2 + y^2)^{1/2} 2x + 1 = 1$

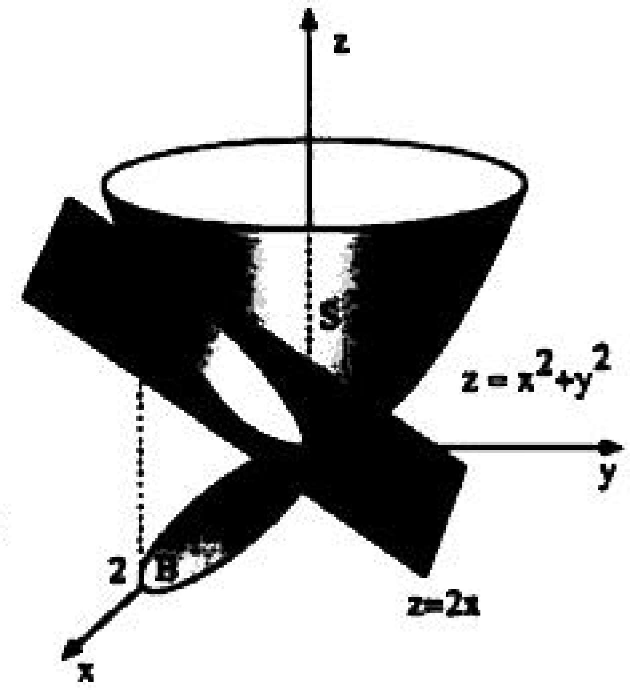
$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos\varphi$

$$\iint\limits_S F.nds = \iiint\limits_D divF \; dxdydz = \iint\limits_B \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{2x} dz \right) dxdy$$

$$= \iint\limits_B [2x - (x^2 + y^2)]dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{2\cos\varphi} (2r\cos\varphi - r^2) r \, dr \, d\varphi$$

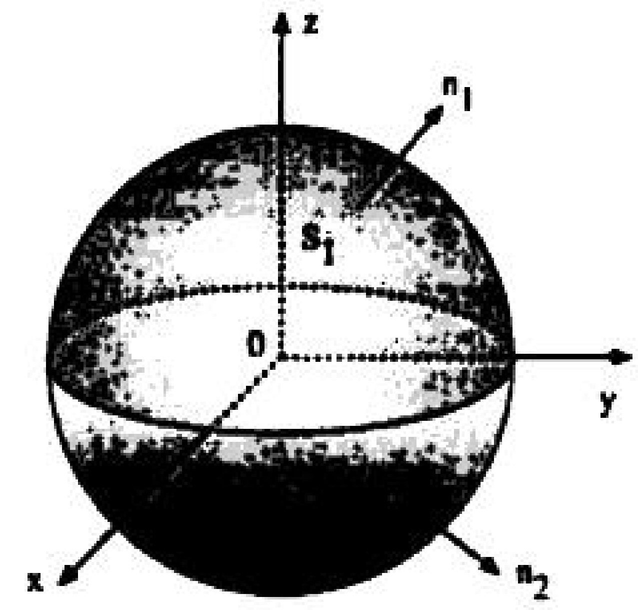
$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2}{3} r^3 \cos\varphi - \frac{1}{4} r^4 \right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{3} \cos^4\varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \, d\varphi$$



$$= \frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{2}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

8. $$\iiint\limits_D div\mathbf{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \mathbf{F}.n\,ds = \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}.n\,ds + \iint\limits_{S_2} \mathbf{F}.n_2\,ds$$



olur. S_1 yüzeyinin denklemi $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ olacağından

bunun dışarı doğru yönlendirilen normali

$$n_1 = \frac{-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+y\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

olacağından

$$\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}_1 ds = \iint\limits_{S_1} (x^4y^2z - x^4y^2z)ds = \iint\limits_{S_1} 0\,ds = 0$$

olur.

S_2 yüzeyinin denklemi $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ olacağından bunun normali

$$n_2 = \frac{z_x\mathbf{i} + z_y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = -(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$

olur. Bu durumda

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F}.n_2 ds = \iint\limits_{S_2} -(x^4y^2z - x^4y^2z)ds = \iint\limits_{S_2} 0\,ds = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\iiint\limits_D div\mathbf{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$

olur.

9. $divF = 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$ olacağından

$$\iint\limits_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iiint\limits_D divF(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 3\iiint\limits_D divF(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

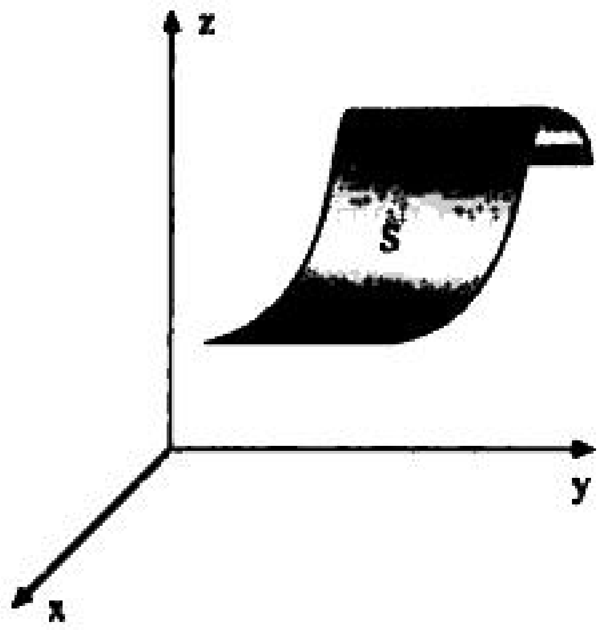
$$= \frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \rho|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\phi = \frac{3}{2}a^4 \int_0^{2\pi} d\phi = 3\pi a^4$$

bulunur.

YÜZEY İNTEGRALLERİNİN UYGULAMALARI

ALAN HESABI



S parçalı düzgün bir yüzey parçası ise bu yüzeyin alanı

$$A = \iint_S ds$$

olur.

KÜTLE HESABI

S yüzeyinin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu σ (x, y, z) ise

$$M = \iint_S \sigma(x, y, z)ds$$

olur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\,\sigma(x, y, z)ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\,\sigma(x, y, z)ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\int z\,\sigma(x, y, z)ds$$

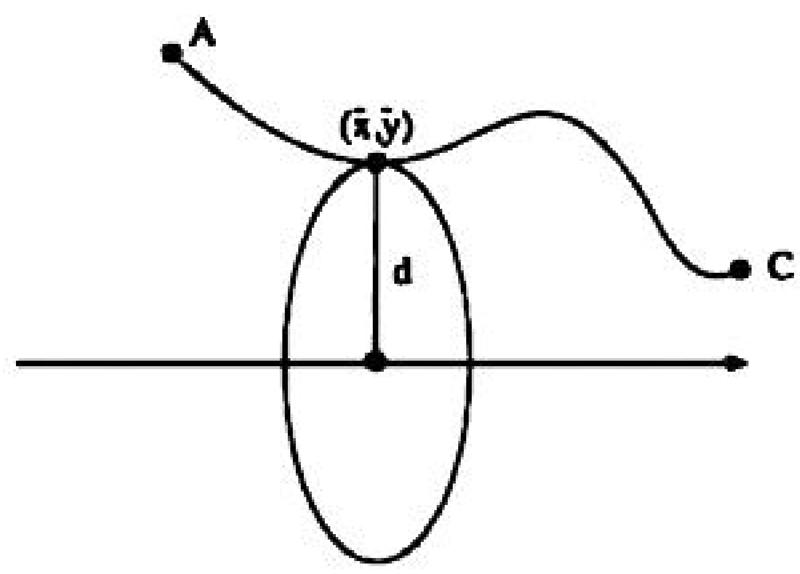
EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\sigma(x, y, z)ds \qquad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\sigma(x, y, z)ds$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)ds \qquad I_d = \iint_S d^2\,\sigma(x, y, z)ds$$

TEOREM **(İkinci Pappus Teoremi)**

Bir düzlem eğrisinin, kendisiyle aynı düzlemde bulunan ve eğriyi kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı, eğrinin uzunluğu ile ağırlık merkezinin çizdiği çemberin uzunluğunun çarpımına eşittir.



PROBLEMLER

• **Yüzey İntegrallerinin Uygulamaları**

1. $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin $x^2+y^2-2y=0$ silindiri içinde kalan parçalarının alanları toplamını bulunuz.

2. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin $x^2+y^2=a^2$ silindiri içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

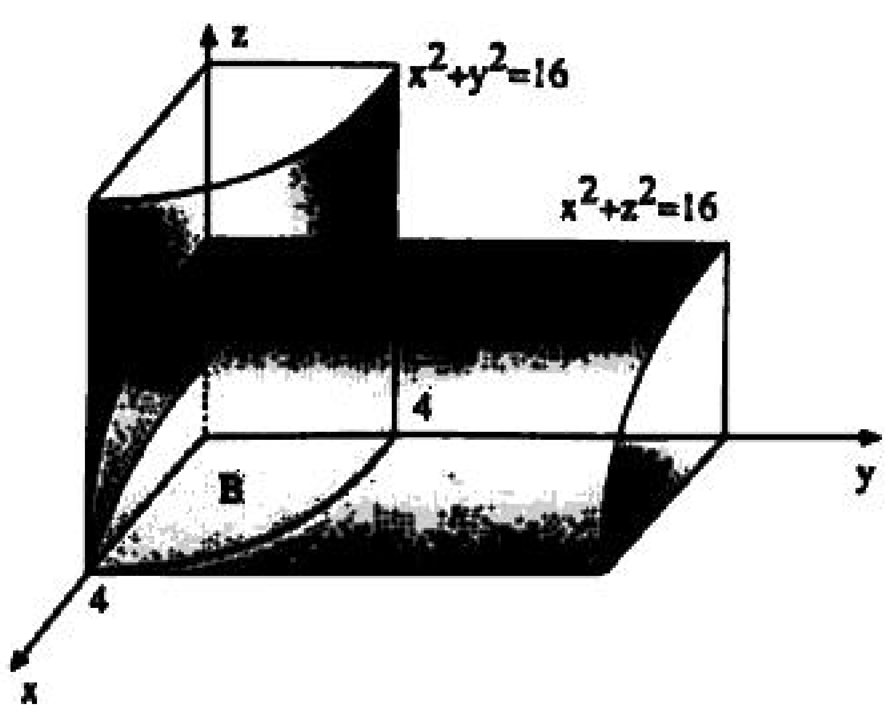
3. $x^2+y^2=6z$ paraboloidinin $x^2+y^2=27$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

4. $z^2=x^2+y^2$ konisinin $x^2+y^2+z^2=2z$ küresi içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

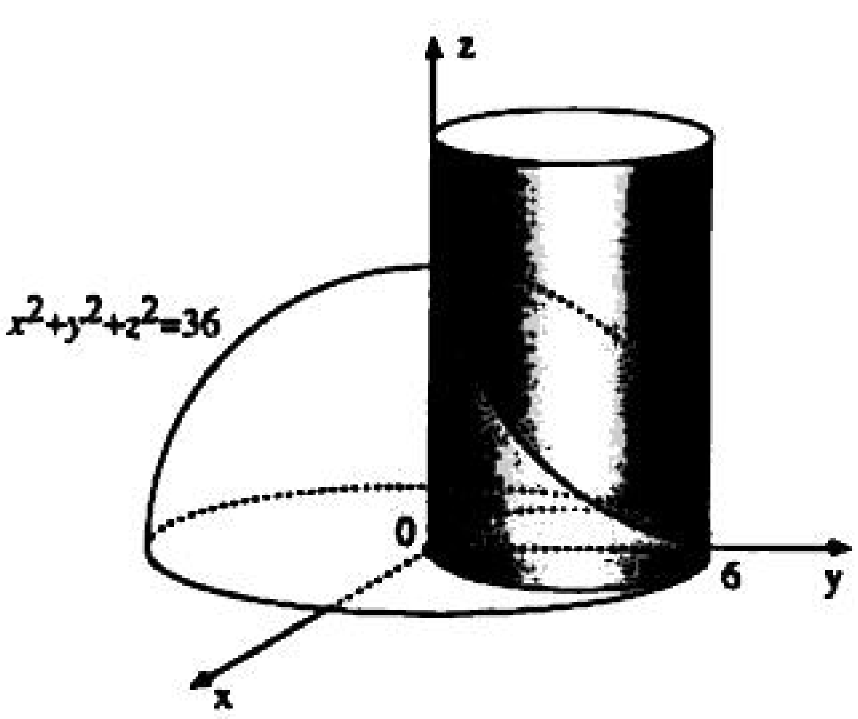
5. $x^2+y^2+z^2=2z$ küresinin $z^2=x^2+y^2$ konisi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

6. $y^2=x^2+z^2$ konisinin $x^2+y^2+z^2=2z$ küresi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

7. $x^2+z^2=16$ silindirinin $x^2+y^2=16$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.



8. $x^2+y^2=6y$ silindirinin $x^2+y^2+z^2=36$ küresi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.



9. $x+y+z=6$ düzleminin $x^2+y^2=6$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

10. $x^2+y^2+z^2=4z$ küresinin $z=x^2+y^2$ paraboloidi içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

11. $x^2+y^2+z^2=25$ küresinin $z=2$ ve $z=4$ düzlemleri arasında kalan parçasının alanını hesaplayınız.

12. $x^2+y^2+z^2=25$ küresinin $2x^2+y^2=25$ eliptik silindiri içinde kalan parçalarının alanları toplamını hesaplayınız.

13. S yüzeyi, $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi içinde kalan parçası olduğuna göre bu yüzey üzerine yerleştirilen homogen bir ince tabakanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

14. Yarıçapı 4 birim olan yarıküre biçimindeki ince bir tabakanın (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu

$\sigma(x, y, z)=z^2$ şeklinde değişiyor. Bu levhanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

15. $x^2+y^2=3z^2$ konisinin xOy düzleminin üstünde ve $x^2+y^2=4y$ silindirinin içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

16. $x^2+y^2+z^2=16$ küresinin, $z=16-x^2-y^2$ paraboloidi dışında kalan parçasının alanını hesaplayınız.

17. $x^2+z^2=1$ silindirin $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi içinde kalan parçanın her (x, y, z noktasındaki yoğunluğu

$\sigma(x, y, z)=\sqrt{1-x^2}$ dir. Bu parçanın orijine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $\quad z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\quad z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

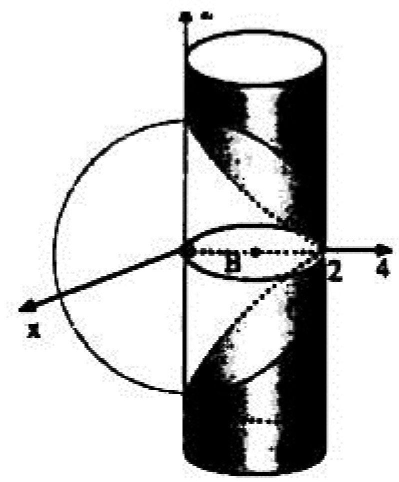
$$A=\iint_S dS=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \;=2\iint_B\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

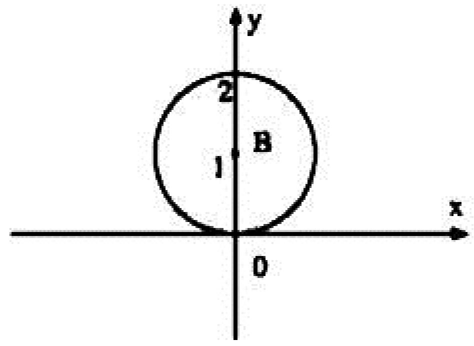
olur. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa

$$A=2\int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\varphi}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}}=4\int_0^{\pi/2}(4-r^2)^{-1/2}=-4\int_0^{\pi/2}(4-r^2)^{1/2}\Big|_0^{2\cos\varphi}$$

$$=-4\int_0^{2\cos\varphi}(4-4\cos^2\varphi)^{1/2}-2]d\varphi=-8\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi-2)d\varphi$$

$$=-8(1-\pi)=8(\pi-1)$$

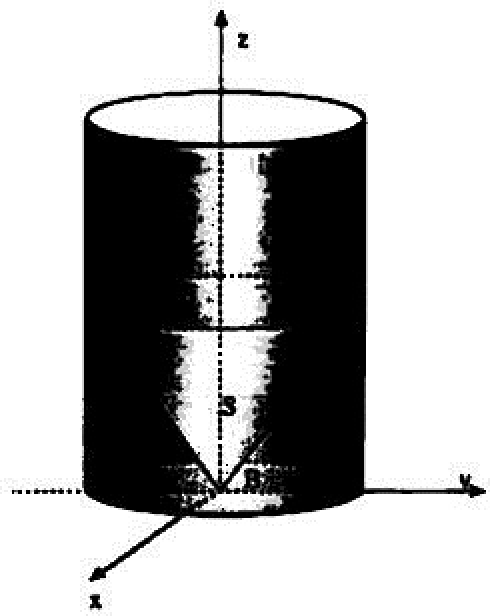




2. $A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$$=\iint_B\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\;dxdy=\sqrt{2}\iint_B dxdy$$

$$=\sqrt{2}.(Alan B)=\sqrt{2}\pi a^2$$



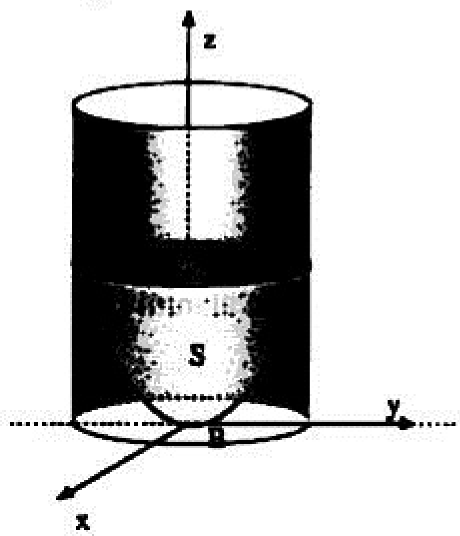
3. $6z=x^2+y^2$, $\quad z_x=\dfrac{x}{3}$, $\quad z_y=\dfrac{y}{3}$

$$A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_B\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}}\;dxdy=\frac{1}{3}\iint_B\sqrt{9+x^2+y^2}\;dxdy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{27}}(9+r^2)^{1/2}\,rdrd\varphi=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}(9+r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{27}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{9}(6^3-3^3).2\pi=42\pi.$$

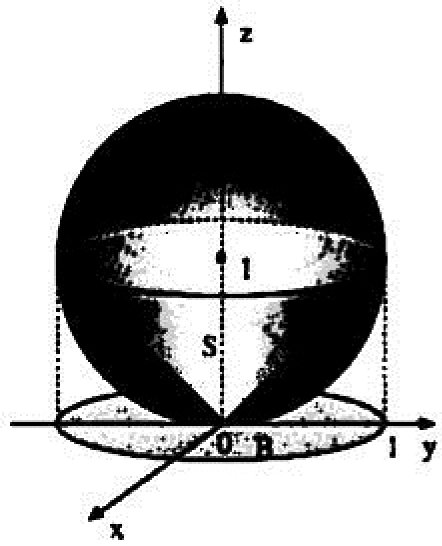


4. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$ds=\sqrt{2}dxdy$ olacağından

$$A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{2}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}\,rdrd\varphi$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 2\pi=\sqrt{2}\pi \quad \text{birimkare olur.}$$

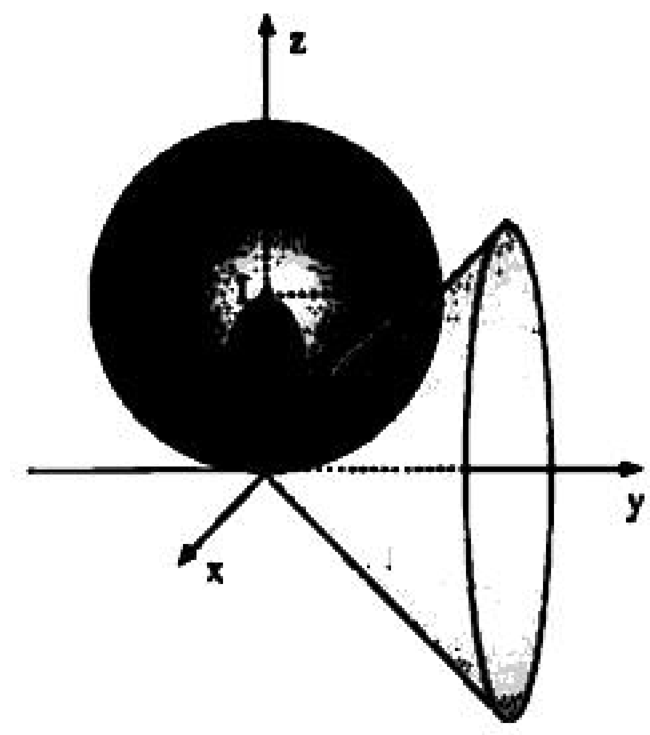


5. Problem 4'teki şekilden de görüldüğü gibi sözkonusu yüzey yarım küre yüzeyidir. Kürenin yüzey alanı $4\pi r^2 = 4\pi$ olacağından istenen alan

$$A = \frac{1}{2}.4\pi = 2\pi \ br^2$$

olur

6. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2z \\ y^2=x^2+z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+z^2=z$



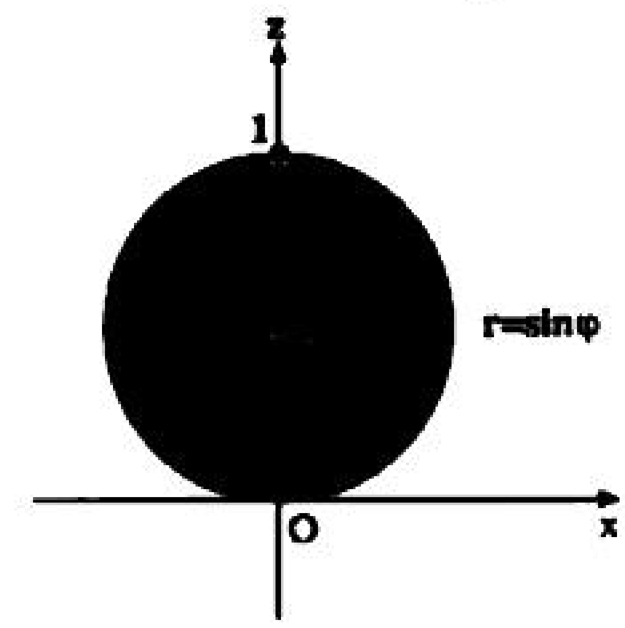
$x = r\cos\varphi,\quad z = r\sin\varphi$ yazılırsa

$r^2 = r\sin\varphi \Rightarrow r = \sin\varphi$ bulunur.

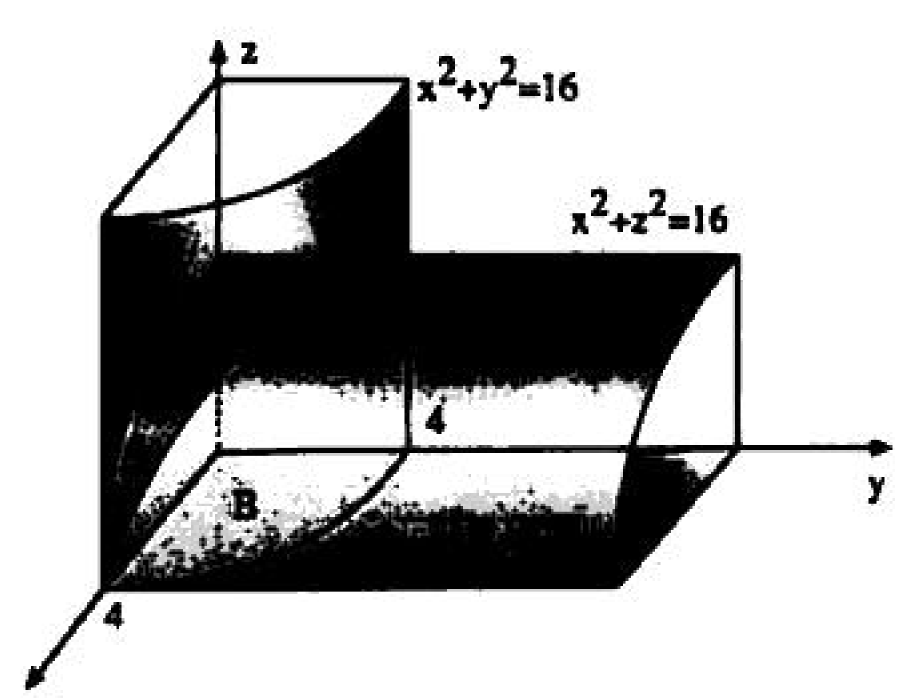
$$A = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$$

$$= \iint_B \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dxdy$$

$$= \iint_B \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sin\varphi} rdrd\varphi = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$



7. Yandaki şekilde alanı istenilen yüzeyin sekizde biri çizilmiştir.



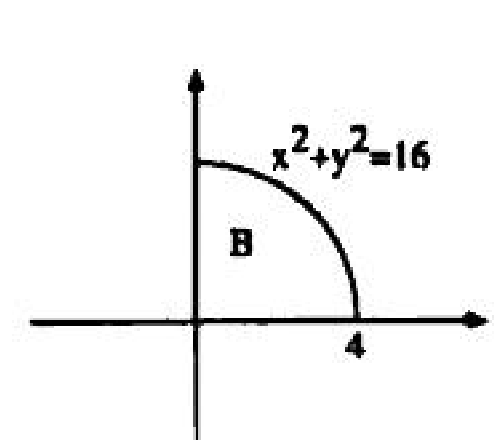
$$\frac{A}{8} = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$z = \sqrt{16-x^2},\quad z_x = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}},\quad z_y = 0$$

$$\frac{A}{8} = \iint_B \sqrt{1+\frac{x^2}{16-x^2}}\ dxdy$$

$$= 4\iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2}} = 4\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$= 4\int_0^4 y\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\int_0^4 dx = 4x\Big|_0^4 = 16$$

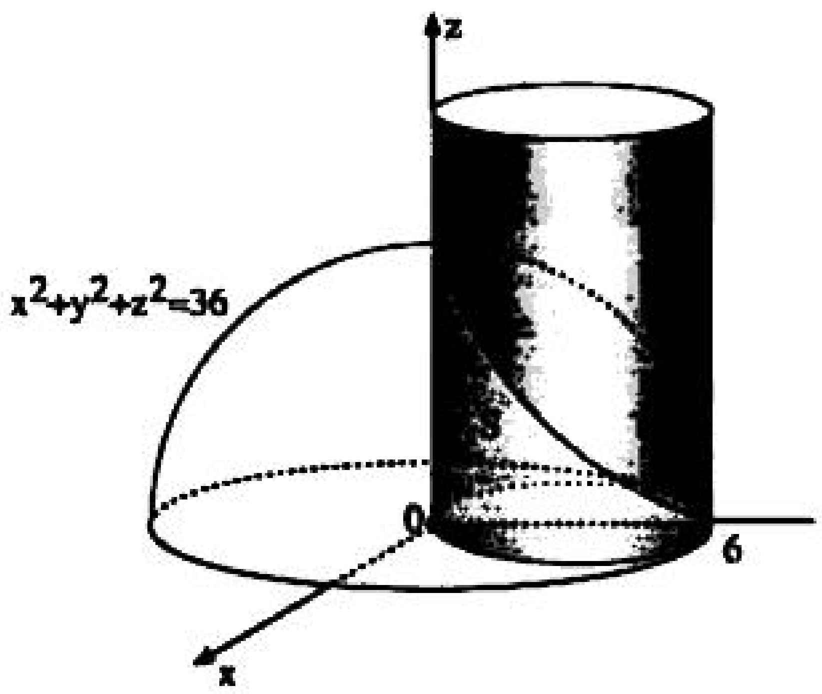


olacağından

$$A = 8.16 = 144\ br^2$$

bulunur.

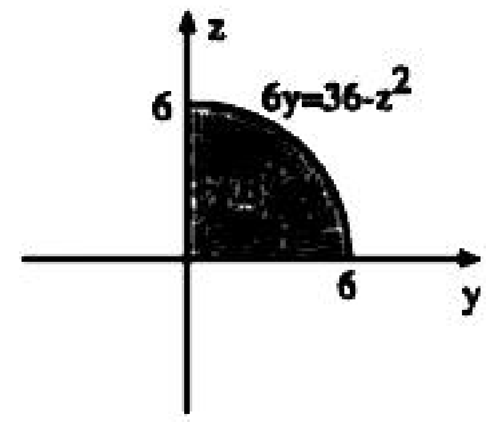
8. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=36 \\ x^2+y^2=6y \end{array}\right\} \Rightarrow 6y=36-z^2$



$$\frac{A}{4}=\iint_S ds=\iint_B \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$$

$$=\int_0^6\int_0^{\sqrt{36-6y}}\frac{dzdy}{\sqrt{6y-y^2}}=3\int_0^6\frac{\sqrt{36-6y}}{\sqrt{6y-y^2}}dy$$

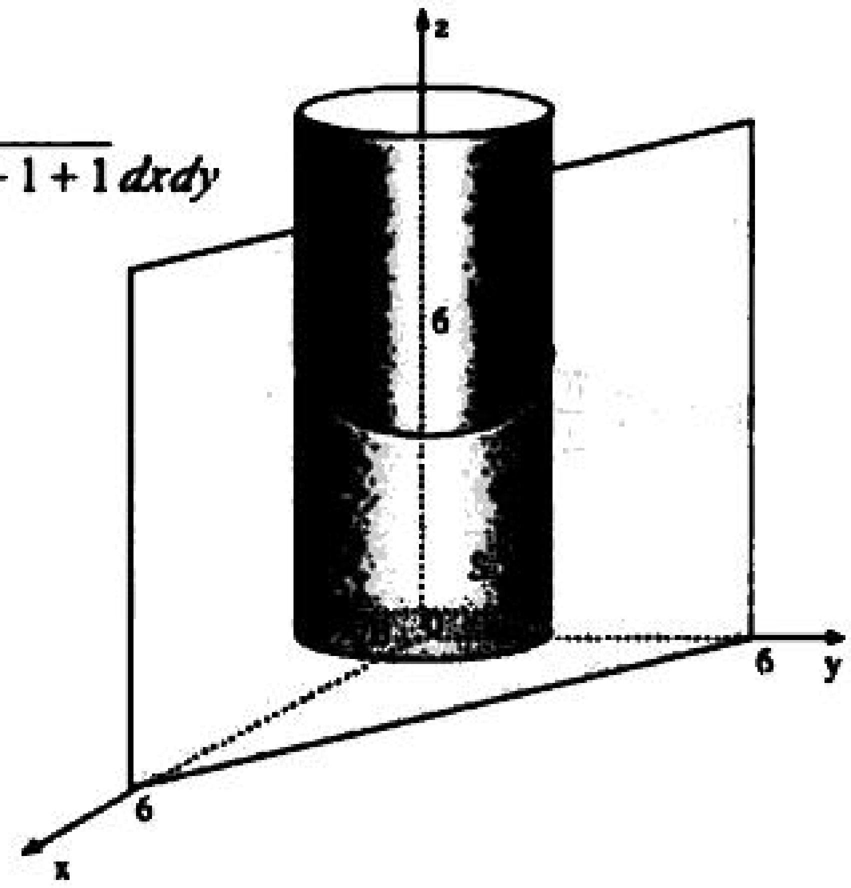
$$=3\int_0^6\sqrt{\frac{6}{y}}dy=3\sqrt{6}.2\sqrt{y}\Big|_0^6=36$$

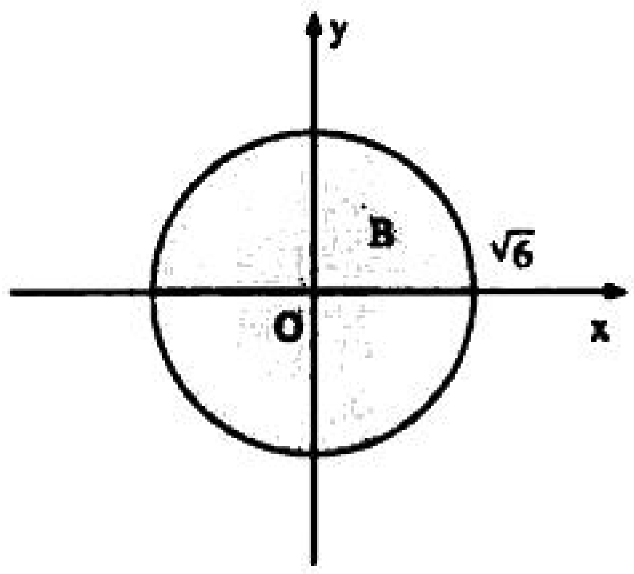


olur. O halde $A=4.36=144$ br^2 dir.

9. $A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_B\sqrt{1+1+1}\,dxdy$

$$=\sqrt{3}\iint_B dxdy=\sqrt{3}.\frac{1}{4}\pi.6=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$

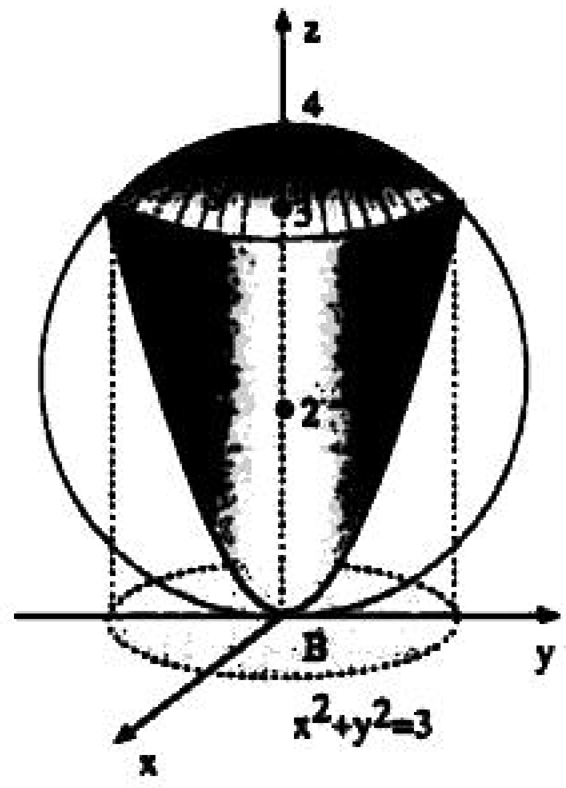




10. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4z \\ z=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z+z^2=4z \Rightarrow z=0 \ \ V \ \ z=3$

Paraboloid ile kürenin arakesit eğrisi

$x^2+y^2=3$, $z=3$ çemberdir.



$$A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$x^2+y^2+z^2=4z \Rightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4 \Rightarrow$$

$$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

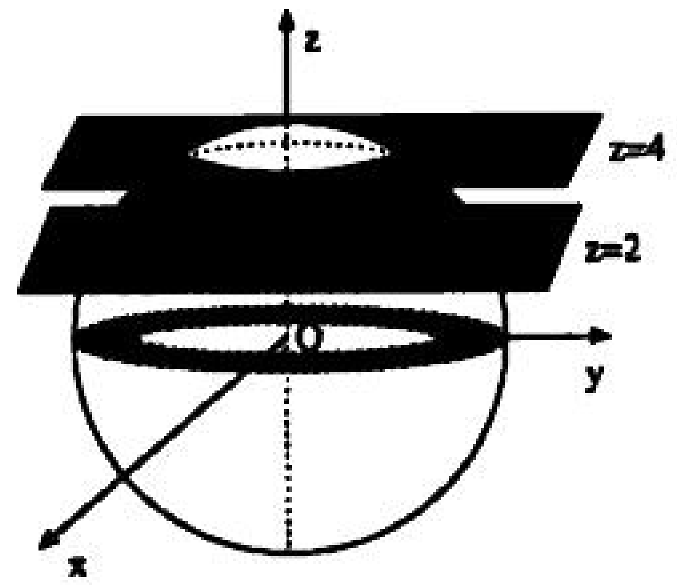
$$A=2\iint_B\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(4-r^2)^{-1/2}rdrd\varphi=-2\int_0^{2\pi}(4-r^2)^{1/2}\Big|_0^{\sqrt{3}}d\varphi$$

$$=-2.(1.2)2\pi=4\pi$$

11. $z=2$ *için* $x^2+y^2+4z \Rightarrow z=0 \ \ V \ \ z=3$

$z=4$ *için* $x^2+y^2+16=25 \ \Rightarrow \ x^2+y^2=9$

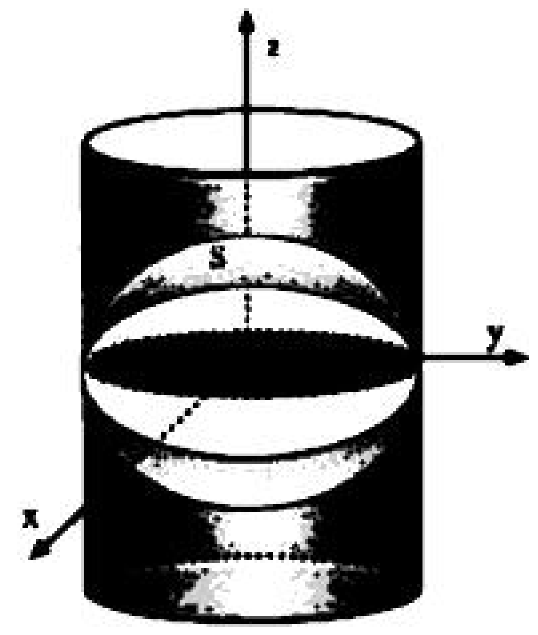
$$z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, \quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$



$$A=\iint_S ds=\iint_B \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{25-x^2-y^2}}dxdy=5\iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$

$$=5\int_0^{2\pi}\int_3^{\sqrt{21}}(25-r^2)^{-1/2}\,rdrd\varphi=-5\int_0^{2\pi}(25-r^2)^{1/2}\Big|_3^{\sqrt{21}}d\varphi=20\pi \ \ br^2$$

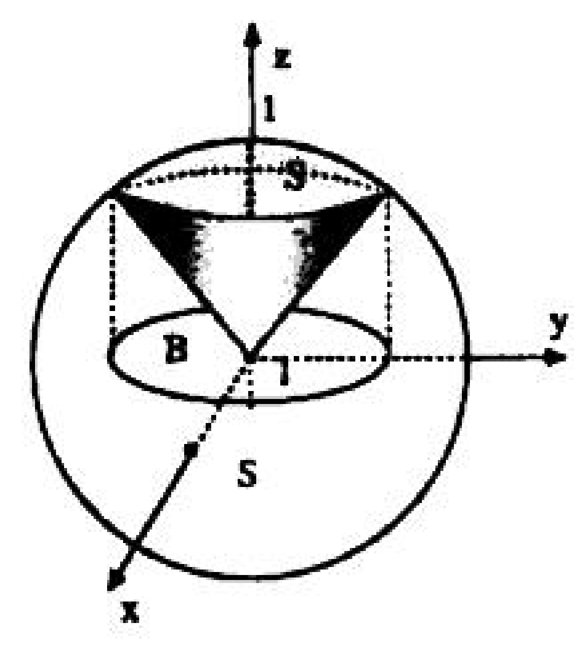
12. $$A=2\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dxdy=2\iint_B\frac{5dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$



$$=10\int_0^{2\pi}\int_0^5\frac{r}{\sqrt2}.\frac{drd\varphi}{\sqrt{25-r^2}}=\frac{40}{\sqrt2}\int_0^{\pi/2}(25-r^2)^{1/2}\Big|_0^5d\varphi$$

$$=\frac{200}{\sqrt2}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{200}{\sqrt2}.\frac{\pi}{2}=50\sqrt2\pi \ \ br^2$$

13. $$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2=1\\ z^2=x^2+y^2\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+y^2=\frac12$$



$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$1+z_x^2+z_y^2=1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}=\frac{1}{1-x^2-y^2}$$

$\sigma(x,y,z)=k(sabit)$

$$M=\iint_S\sigma ds=k\iint_B\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=k\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{\sqrt2}{2}}(1-r^2)^{-1/2}\,rdrd\varphi$$

$$=-k\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{1/2}\Big|_0^{\sqrt2/2}d\varphi=-k(\frac{\sqrt2}{2}-1)2\pi=(2-\sqrt2)k\pi$$

Levha homojen ve z eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{x}=\bar{y}=0$ dır.

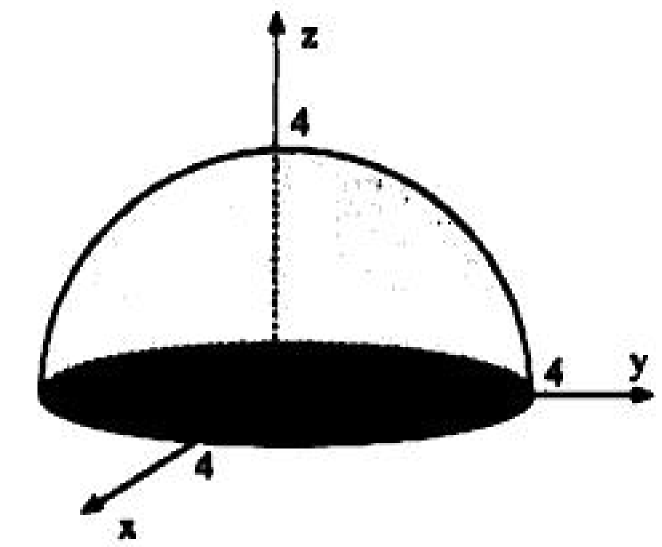
$$\bar{z}=\frac1M\iint_S z\sigma ds=\frac1M\iint_B k\sqrt{1-x^2-y^2}.\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{k}{(2-\sqrt2)k\pi}\iint_B dxdy$$

$$=\frac{1}{(2-\sqrt2)\pi}.\pi.\frac12=\frac{1}{2(2-\sqrt2)}=\frac{2+\sqrt2}{4}$$

olur. Şu halde ağırlık merkezi $G(0,0,\frac{2+\sqrt2}{4})$ noktasıdır.

14. $\sigma(x,y,z)=z^2$

$$x^2+y^2+z^2=16, \quad z=0 \Rightarrow x^2+y^2=16$$



$$M=\iint_S \sigma(x,y,z)dS=\iint_S z^2 ds$$

$$=2\iint_B (16-x^2-y^2).\frac{4dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}=4\iint_B \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{16-r^2}\,rdrd\varphi=-4\int_0^{2\pi}(16-r^2)^{3/2}\Big|_0^4\ 2\pi$$

$$=\frac{4}{3}.64.2\pi=\frac{512}{3}\pi$$

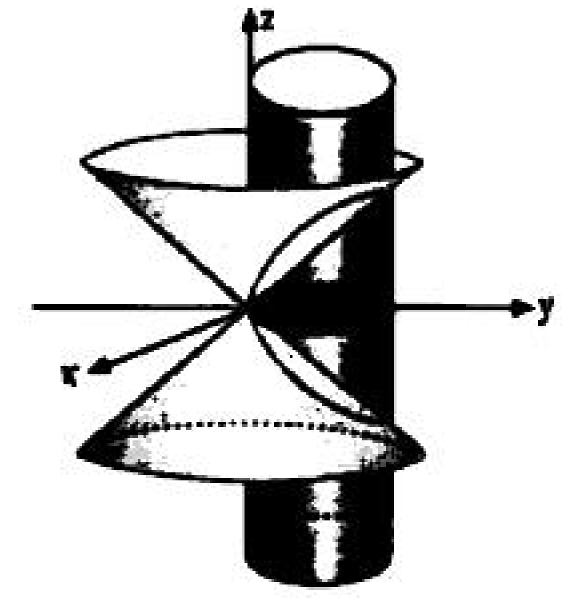
Yoğunluk sadece z'ye bağlı ve yüzey z eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{x},\ \bar{y}=0$ dır.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_S z^2.zds=\frac{1}{M}\iint_B z^3.\frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}=\frac{1}{M}\iint_B (16-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (16-r^2)rdrd\varphi=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}(8r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^4 d\varphi=\frac{3}{512\pi}64.2\pi=\frac{3}{4}$$

bulunur. Şu halde ağırlık merkezi $G(0,0,\frac{3}{4})$ noktasıdır.

15. $A=\iint_S ds=2\int_B\int \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

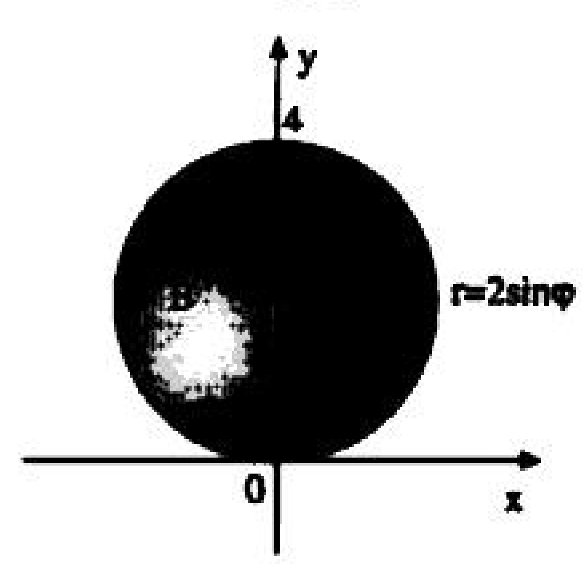


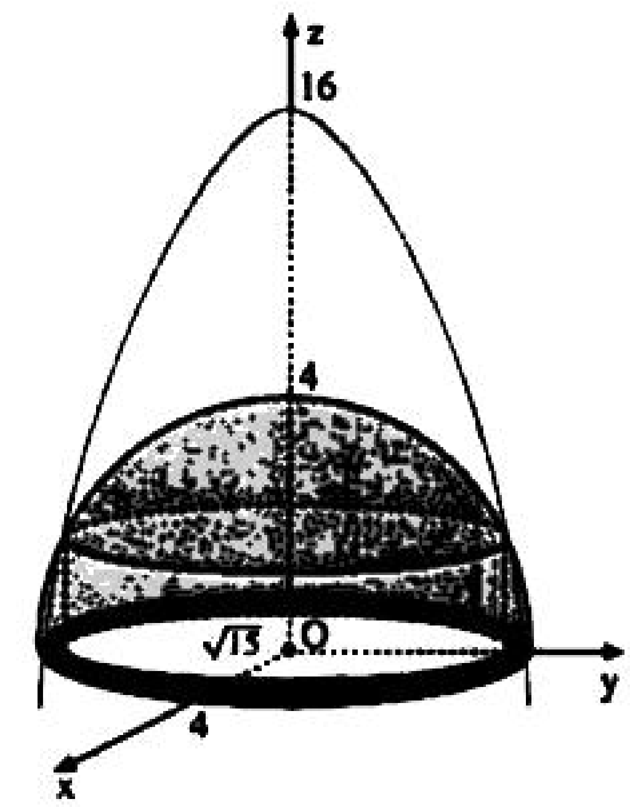
$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}, \quad z_x=\frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y=\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A=2\iint_B \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{3(x^2+y^2)}}dxdy=2.\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_B dxdy$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi}=\frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi}=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\quad br^2$$





16. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=16 \\ z=16-x^2-y^2 \end{array}\right\} z^2-z=0 \Rightarrow z=0 \ \vee \ z=1$

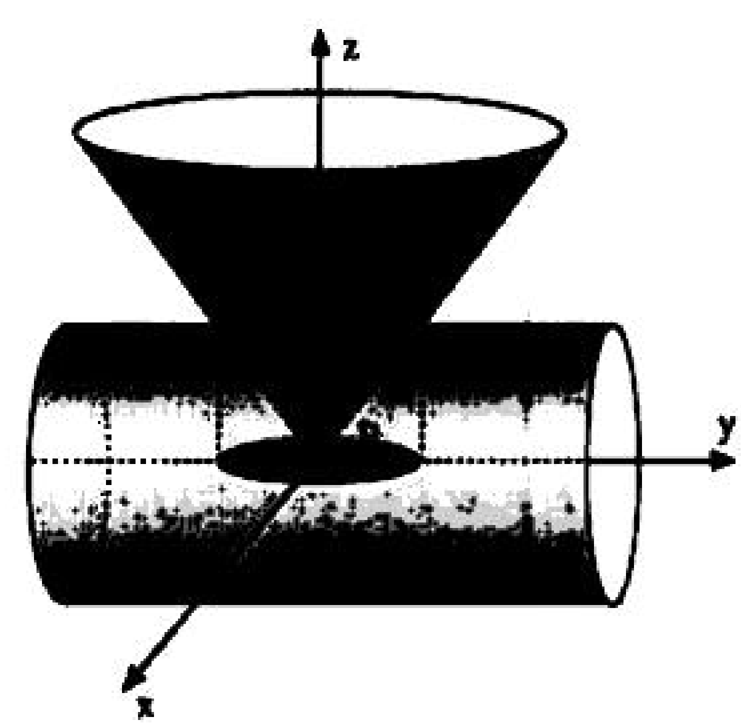
$z=0$ için $x^2+y^2=16$, $z=1$ için $x^2+y^2=15$

bulunur. B bölgesi $x^2+y^2=15$ ve $x^2+y^2=16$ çemberleri arasında kalan bölgedir.

$$A=\iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_B \frac{4\,dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$=4\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{15}}^{4}\frac{dr d\varphi}{\sqrt{16-r^2}}=4.4\int_0^{\pi/2}(-16-r^2)^{1/2}\Big|_{\sqrt{15}}^{4}d\varphi$$

$$=16.1.2\pi=32\pi \ \ br^2 \ \ olur.$$



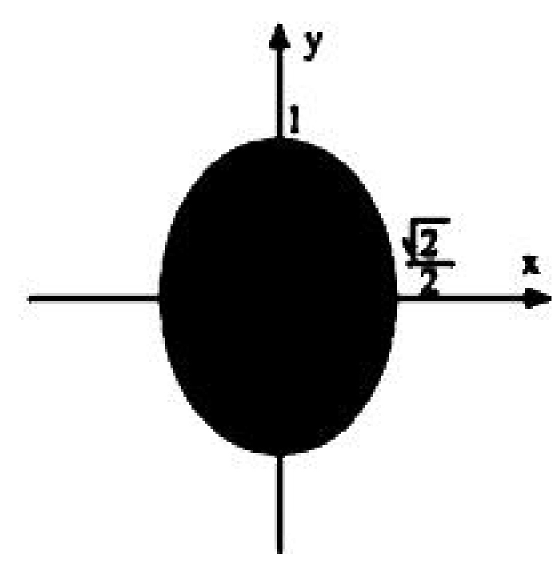
17. $\left.\begin{array}{l} x^2+z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2+y^2=14$

B bölgesi $2x^2+y^2=1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I_o=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\sigma(x,y,z)ds=\iint_S (x^2+y^2+1-x^2).\sqrt{1+x^2}dS$$

$$=\iint_S (y^2+1)\sqrt{1-x^2}ds=\iint_B (y^2+1)dxdy$$

$$=\iint_B (y^2+1)\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dxdy=\iint_B (y^2+1)dxdy$$



olur. $x=\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa $J=\frac{r}{\sqrt{2}}$ olacağından

$$I_o=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(r^2\sin^2\varphi+1)\frac{r}{\sqrt{2}}drd\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\frac{r^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{r^2}{2})\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\sin^2\varphi+\frac{1}{2})d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}(1+\cos 2\varphi)+\frac{1}{2}\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{5}{8}.2\pi=\frac{5\sqrt{2}}{8}\pi$$

BÖLÜM PROBLEMLERI

1. $F=(x^2+z)i-(y^2+x)j+(z^2+y)k$ *ve C de*

$x^2+y^2+z^2=1$ küresi ile $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin arakesitidir.

C nin yönü, üstten bakıldığında, saat yönünün ters yönü olduğuna göre, Stokes teoreminden yararlanarak $\int_C F.dr$ integralini hesaplayınız.

2. *Stokes teoreminden yararlanarak, aşağıda verilen F vektör alanları ile S yüzeyleri için*

$\iint_S (\nabla\times F).n\,ds$ *integrallerini hesaplayınız.*

(a) $F=xz^2\,i+x^3\,j+\cos xz\,k$,

S yüzeyi $x^2+y^2+3z^2=1$ elipsoidinin x O y düzleminin üst tarafında bulunan parçası olup n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.

(b) $F=xz\,i+(y^2+2z)\,j+x\,k$,

S yüzeyi $z=9-x^2-y^2$ paraboloidinin x O y düzleminin üst tarafında bulunan parçası olup n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.

3. $F(x,y,z)=x^3y^2z\,i-x^4yz\,j$ *ve*

$D=\{x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 1\}$

$$\iiint_D divF\;dxdydz$$

integralini Divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

4. *S yüzeyinin denklemi $g(x,y,z)=0$ biçiminde verildiğinde*

$$n=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{(g_x,g_y,g_z)}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}$$

$$=\left(\frac{g_x}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}},\frac{g_y}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}},\frac{g_z}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}\right)$$

$=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

olsun. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ dir. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sayılarına n nin doğrultman kosinüsleri adı verilir.

$F=Pi+Qj+Rk$ için

$$\iint_S F.n\,ds=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$,

Burada S yzeyi $x+y+z=2$ düzleminin birinci bölgedeki parçasıdır.

(b) $\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$,

Burada S, $x^2+y^2+4z=4$ paraboloidinin ikinci bölgedeki ($x<0$, $y>0$, $z>0$) parçasıdır.

(c) $\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$,

Burada S üzeyi, $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresidir.

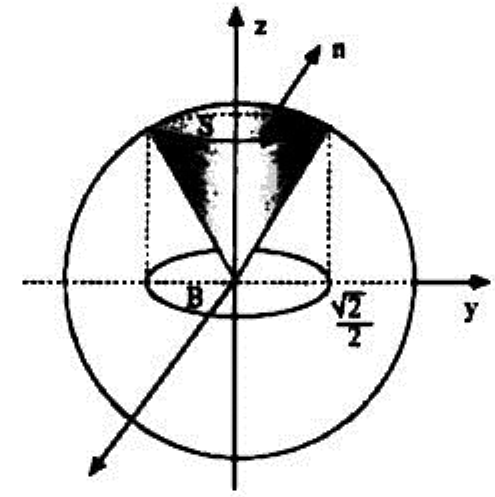
5. $K=\{(x,y,z):0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$ *küpünün yüzeyi ince bir metalle kaplanıyor. Her bir (x, y, z) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x,y,z)=xyz$ olduğuna göre metalin kütlesini bulunuz.*

6. *$az=x^2+y^2$, $0\le z\le a$ paraboloid parçası biçimindeki homogen ince metal bir tabakanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.*

7. *$x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin, $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ küresi içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.*

ÇÖZÜMLER

1. $\int_C F.dr = \iint_S curlF.n\,ds$



$$n = \frac{-z_x i - z_y j + k}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad ds = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$curlF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+z & y^2+x & z^2+y \end{vmatrix} = i+j+k$$

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

olacağından

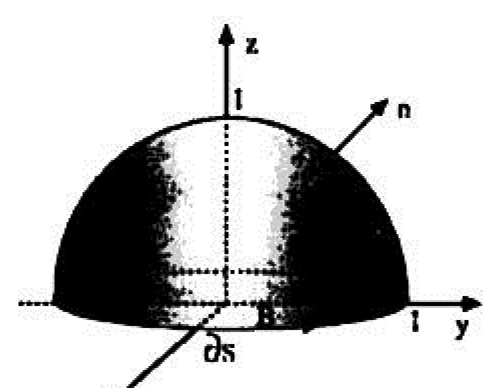
$$\int_C F.dr = \iint_S curlF.n\,ds = \iint_B (i+j+k).(\frac{-xi}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{yj}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + k)dxdy$$

$$= \iint_B \left(\frac{-x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1\right)dxdy = -\iint_B \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\,dxdy + \iint_B dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\,rdrd\varphi + \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right](\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi + \frac{\pi^2}{2} = 0\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

2. (a) $\iint_S (\nabla \times F).n\,ds = \iint_{\partial s} F.d\,r$



∂s : $r(t) = \cos t\; i + \sin t\; j + o\; k, \quad 0 \le t \le 2\pi$

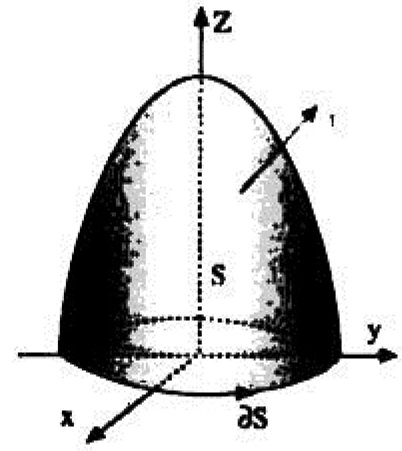
$$\int_{\partial s} F.dr = \int_{\partial s} (xz^2\, i + x^3\, j + \cos xz\; k).dr$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t\; j + k).(-\sin t\; i + \cos t\; j)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+cuos\,2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos 3t + \frac{+\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{3}{2}.2\pi = \frac{3\pi}{4}$$

(b) $\iint_S (\nabla \times F).n\,ds = \int_{\partial s} F.d\,r$



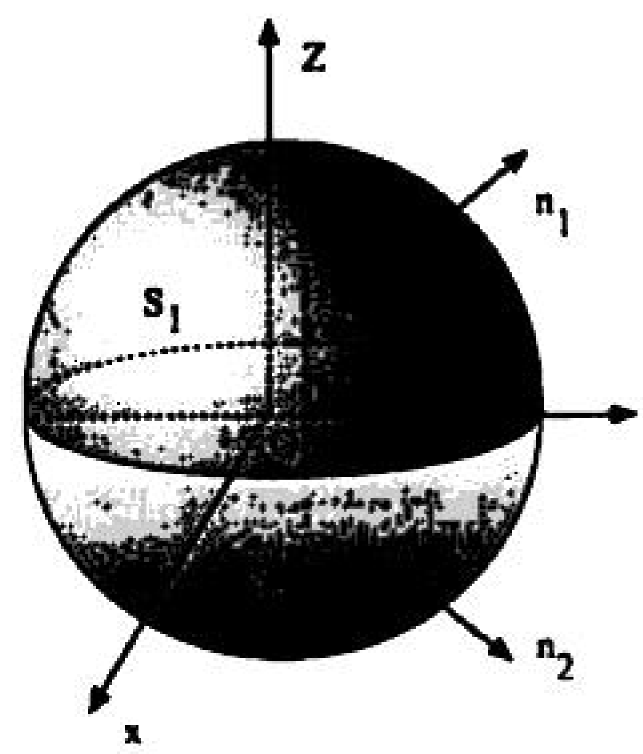
∂S : $x^2 + y^2 = 9 \;\Rightarrow\; r(t) = 3\cos t\; i + 3\sin t\; j + o.k, \quad 0 \le t \le 2\pi$

$r'(t) = -3\sin t\, i + 3\cos t\, k$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}\left[(9\sin^2 t + 6\cos t)\,\boldsymbol{j} + 3\cos t\,\boldsymbol{k}\right].(-3\sin t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j})\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(27\sin^2 t\cos t + 18\cos^2 t)dt = (9\sin^3 t + 9t + \frac{9}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

3. $$\iiint_D div\,F\,dxdydz = \iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}ds = \iint_{S_1} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}_1 ds + \iint_{S_2} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}_2 ds$$



S_1 yüzeyinin denklemi $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ olacağından

bunun dışarı doğru yönlendirilmiş normali

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{-z_x\,\boldsymbol{i} - z_y\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$$

olur. Buna göre,

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}_1 ds = \iint_{S_1}(x^3y^2z\,\boldsymbol{i} - x^4yz\,\boldsymbol{j}).(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k})\,ds$$

$$= \iint_{S_1}(x^4y^2z - x^4y^2z)ds = \iint_{S_1} 0\,ds = 0$$

bulunur. Benzer şekilde S_2 nin denkleminin $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ olduğu gözönüne alınarak, $\boldsymbol{n}_2 = -(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k})$ ve

$\iint_{S_2} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}_2 ds = 0$ bulunur. Ohalde

$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,ds = 0$ dır.

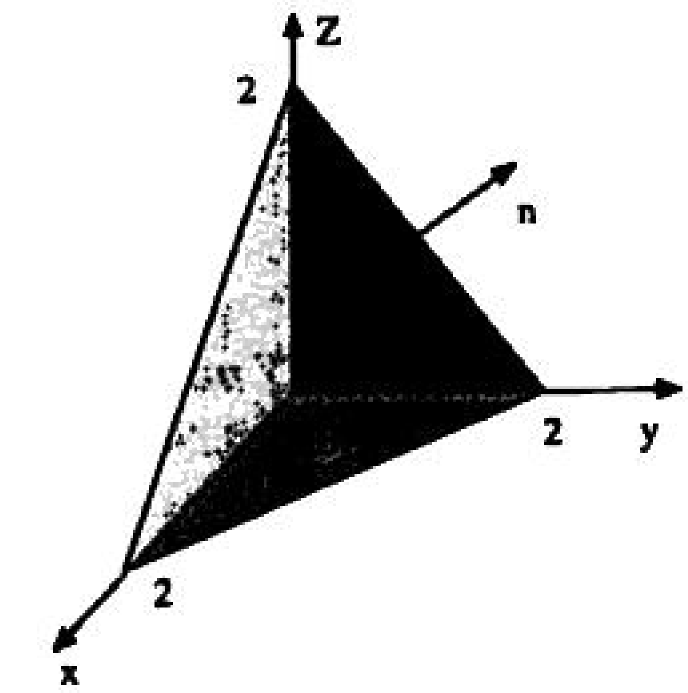
4. $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ve $F = P\,\boldsymbol{i} + Q\,\boldsymbol{j} + R\,\boldsymbol{k}$ ise

$\boldsymbol{F}.\boldsymbol{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ olacağından

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,ds = \iint_S (P\cos\alpha + \cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

bulunur.

(a) $g(x,y,z) = x + y + z - 2,\ \nabla g = (1,1,1) \quad \|\nabla g\| = \sqrt{3}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

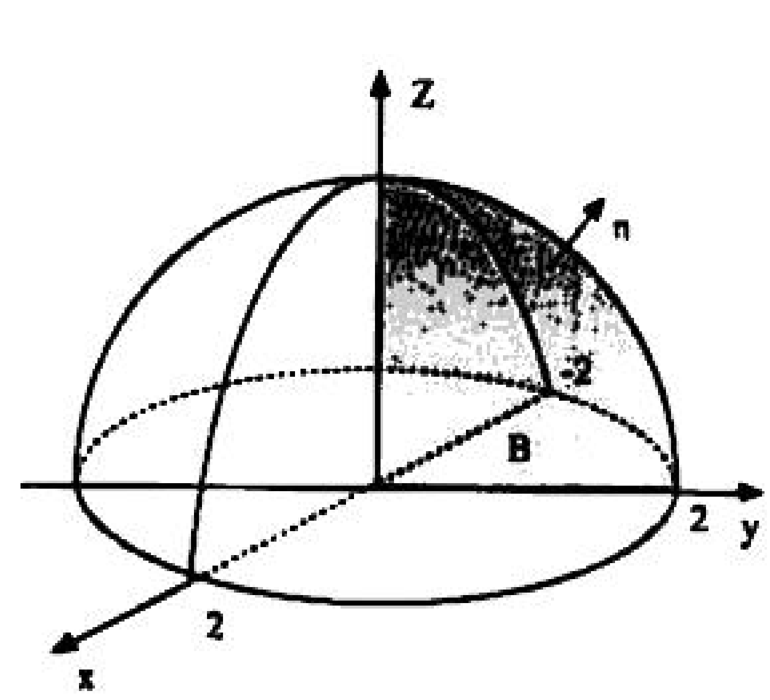


$$\therefore \iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (x + y + z)ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_B (x + y + 2 - x - y)\sqrt{1+1+1}\,dxdy$$

$$= 2\iint_B dxdy = 2.\frac{1}{2}.2.2 = 4$$

(b) $z=1-\frac{1}{4}(x^2+y^2),\quad z_x=-\frac{x}{2},\ z_y=-\frac{y}{2}$

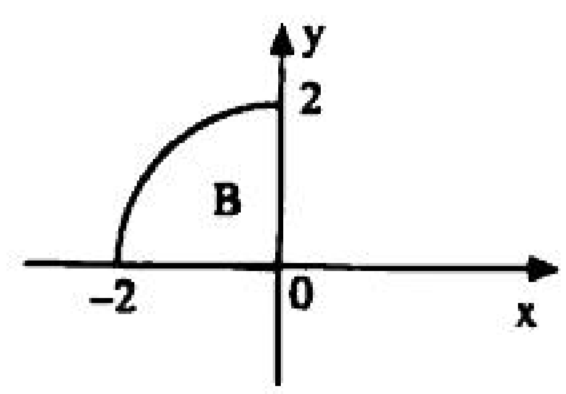


$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}\,dxdy=\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$n=\frac{\frac{x}{2}i+\frac{y}{2}j+k}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}}=\frac{xi+yj+2k}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$$

$$=\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$$

$$=\iint_B\frac{x^2.x+y^2.y+z^2.2}{\sqrt{4+x^2+y^2}}.\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2+y^2}\,dxdy$$



$$=\frac{1}{2}\iint_B(x^3+y^3+2z^2)dxdy=\frac{1}{2}\iint_B\left[(x+y)(x^2+y^2-xy)+2(1-\frac{x^2+y^2}{4})^2\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^2\left[(r\cos\varphi+r\sin\varphi)(r^2-r^2\sin\varphi\cos\varphi)+2(1-\frac{r^2}{4})^2\right]rdrd\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^2 r^4dr\right)(\cos\varphi+\sin\varphi)(1bihcob)r\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^2 r(4-r^2)^2drd\varphi$$

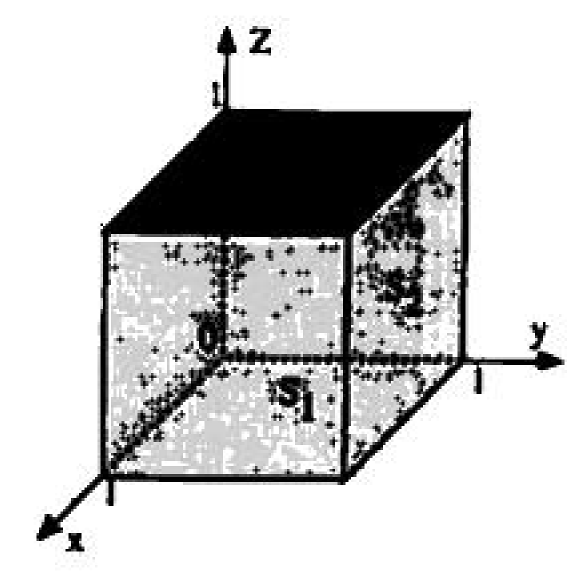
$$=\frac{32}{10}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi)d\varphi+\frac{8}{3}\pi$$

$$=\frac{16}{5}(\sin\varphi-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi}+\frac{8}{3}\pi=\frac{8\pi}{3}$$

(c) (a) ve (b) şıklarındaki yolla hesaplanır.

5. $M=\iint_S\sigma(x,y,z)ds=\iint_S xyzds$

xoy düzleminde $z = 0 \Rightarrow xyz = 0$ olacağından, bu düzlem üzerinde yüzey integrali sıfırdır. xoz düzleminde $y = 0$ ve yOz düzleminde $x = 0$ olacağından bu yüzeyler üzerinde de integral sıfırdır. Şimdi denklemi $x = 1$ olan S_1, $y = 1$ olan S_2 ve $z = 1$ olan S_3 yüzeyleri üzerindeki integralleri hesaplayalım:



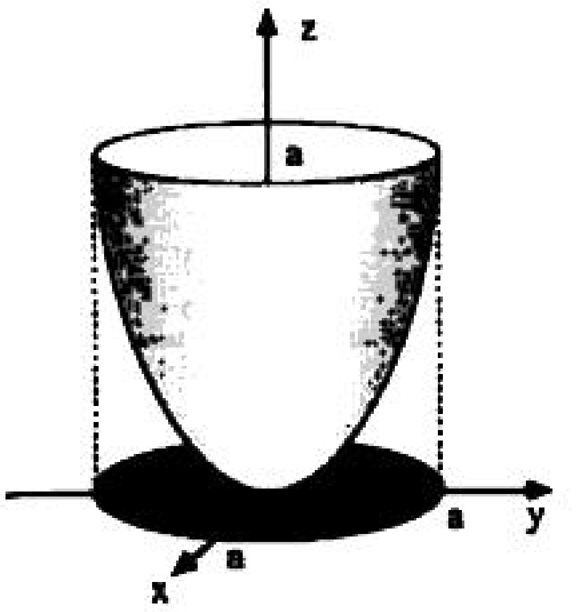
$$\iint_{S_1}xyzds=\iint_{S_1}yz.\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz=\int_0^1\int_0^1 yzdydz=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

olur. Benzer şekilde

$$\iint_{S_2}xyzds=\iint_{S_3}xyzds=\frac{1}{4}$$

olacağı açıktır. O halde $\iint_S xyzds=3.\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *olur.*

6. Yüzey Oz-eksenine göre simetrik ve homogen olduğundan $\bar{x} = \bar{y} = 0$ dır.



$$M = \iint_S kds = k\iint_B \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2}}\; dxdy$$

$$= \frac{k}{a}\iint_B \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)}\; dxdy$$

$$= \frac{k}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(a^2 + 4r^2)^{1/2}\, rdrd\varphi$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{8}(a^2 + 4r^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^a .2\pi = \frac{k\pi a^3}{12}(5\sqrt{5} - 1)$$

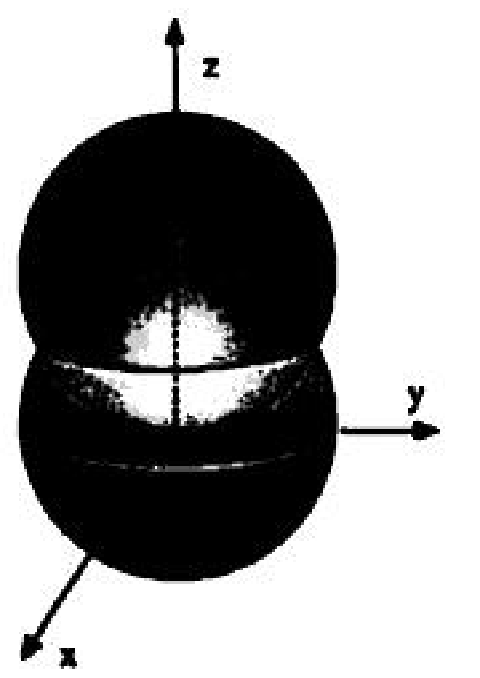
$$\bar{z} = \frac{k}{M}\iint_S z\,ds = \frac{k}{M}\iint_B \frac{1}{a}(x^2 + y^2)\frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)}\; dxdy$$

$$= \frac{k}{Ma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sqrt{a^2 + 4r^2}\,.rdrd\varphi = \frac{k}{Ma^2}.\int_a^{2\pi}\left(\int_{a^2}^{5a^2}\frac{t - a^2}{4}.t^{1/2}.\frac{1}{8}dt\right)d\varphi$$

bulunur. İntegraller hesaplanır ve $M = \frac{k\pi a^3}{12}(5\sqrt{5} - 1)$ olduğu

gözönüne alınırsa $\bar{z} = \frac{25\sqrt{5}}{25\sqrt{5} - 1}$ bulunur.

7. $$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2 = (z - a)^2 \Rightarrow z = \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{3}{4}a^2$$



$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,, \quad z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$A = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy = a\iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= a\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -a\int_0^{2\pi}(a^2 - r^2)^{1/2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}d\varphi = \pi a^2$$

THOMAS CALCULUS SORULAR ve COZUMLERI

Bolum	soru sayfası	Soru No	Cevap sayfası
16.1	1147-1148	1-22	997-998
16.2	1158	1-4, 7-19, 37-41	1001-
16.3	1168	1-28	1008-
16.4	1179	1-20	1012-
16,7	1209	1-6,9,10,20 22	1035
16.8	1220	5-16	1039

1158 de Bolum 16.2 7-19 sorularda, F kuvvetinin r(t) yolu boyunca yaptığı işi bulun şeklindeki sorular F vectörünün r(t) üzerindeki integralini hesaplayın demektir.

1168 de Bolum 16.3 soru 17-23 de bahsedilen ornek 4 asagada verılmıstır.
1179 da Bolum 16.4 de soru1-4 de bahsedilen (3) (4) denklemleri asagada verılmıstır.
1179 da Bolum 16.4 de soru 15-16 da yapilan isi bulun demek F vectörünün r(t) üzerindeki integralini hesaplayın demektir.

Benzer sekilde Bolum 16.2 1159 de 37-41 sorularda, akışı bulun, akıyı bulun şeklindeki sorular F vectörünün r(t) üzerindeki integralini hesaplayın demektir.
F=P(x.y.z)i+Q(x.y.z)j+R(x.y.z)k seklindeki ifadeler. Burada F=M(x.y.z)i+N(x.y.z)j+P(x.y.z)k seklindedir.
konservative =korumalı Not konservative =korumalı değil

Bolum 16.7 sayfa 1209 soru 1,2,5 de x-y duzlemindeki izdusum verilmistir. normal denklemi n=k olarak verilmistir.

-- --

1179 da Bolum 16.4 de bahsedilen (3) (4) denklemleri

TEOREM 3 Green Teoremi (Akı-Diverjans veya Normal Form)

Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanının basit kapalı bir C eğrisi üzerinden dışarıya doğru akısı div $\mathbf{F}$'nin C'nin çevrelediği R bölgesindeki iki katlı integraline eşittir.

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds}_{\text{Dışarıya doğru akı}} = \oint_C M\,dy - N\,dx = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy}_{\text{Diverjans integrali}} \qquad (3)$$

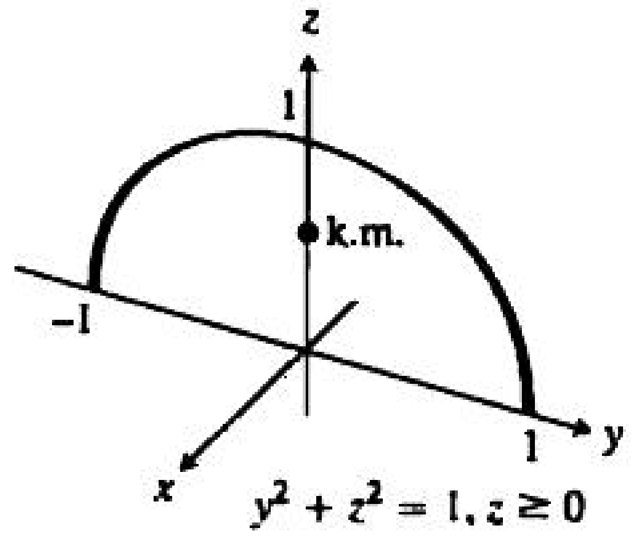
TEOREM 4 Green Teoremi (Dolaşım-Rotasyonel veya Teğet Form)

Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanının düzlemde basit kapalı bir C eğrisi etrafındaki saat yönünün tersine dolaşımı, $\mathbf{F}$'nin rotasyonelinin C eğrisinin çevrelediği R bölgesindeki iki katlı integraline eşittir:

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds}_{\text{Saat yönünün tersi dolaşımı}} = \oint_C M\,dx + N\,dy = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy}_{\text{Rot integrali}} \qquad (4)$$

konservative =korumalı, Not konservative =korumalı değil

z-ekseni etrafındaki jirasyon yarıçapının helisin etrafında döndüğü silindirin yarıçapı olduğuna dikkat edin. ■



ŞEKİL 16.5 Örnek 4, değişken yoğunluklu dairesel bir yayın kütle merkezinin nasıl bulunacağını gösterir.

ÖRNEK 4 Bir Yayın Kütle Merkezini Bulmak

Alt tarafı üst tarafından daha yoğun olan ince bir metal yay yz-düzleminde $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, yarım çemberinin üzerinde bulunmaktadır (Şekil 16.5). Yay üzerindeki (x, y, z) noktasında yoğunluk $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ise, yayın kütle merkezini bulun.

Çözüm Yay, kütlesi z-eksenine göre simetrik dağılmış şekilde yz-düzleminde bulunduğu için $\bar{x} = 0$ ve $\bar{y} = 0$ olduğunu biliyoruz. $\bar{z}$'yi bulmak için, çemberi

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

olarak parametreleriz. Bu parametreleme ile

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

bulunur. Bu durumda, Tablo 16.1'deki formüller

$$M = \int_C \delta\, ds = \int_C (2 - z)\, ds = \int_0^{\pi} (2 - \sin t)(1)\, dt = 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_C z(2 - z)\, ds = \int_0^{\pi} (\sin t)(2 - \sin t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin^2 t)\, dt = \frac{8 - \pi}{2}$$

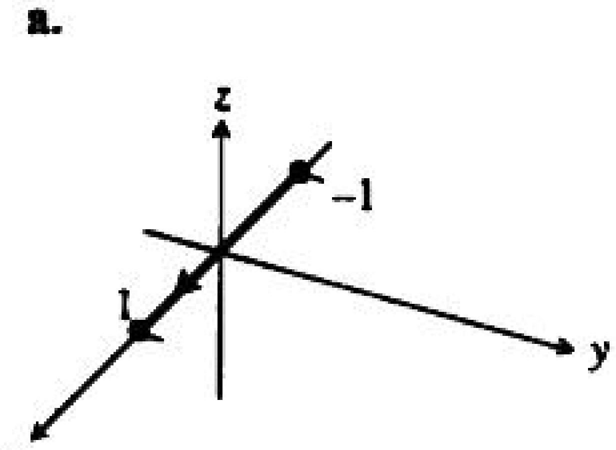
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0.57$$

verir. Yüzde bir hassaslıkla, $\bar{z}$ kütle merkezi (0, 0, 0.57)'dedir. ■

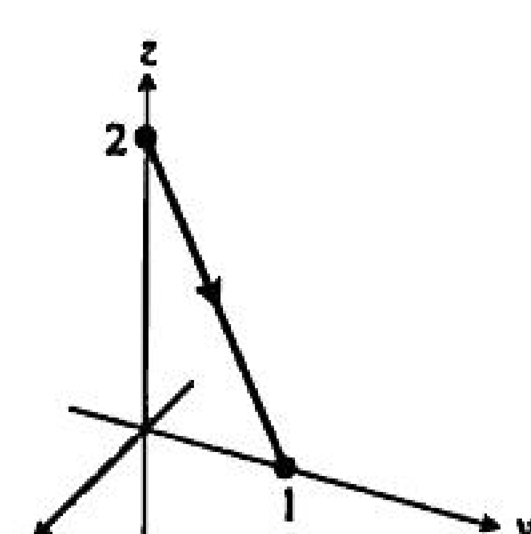
Vektör Denklemlerin Grafikleri

1–8 alıştırmalarındaki vektör denklemleri (a)-(h)'deki grafiklerle eşleştirin.

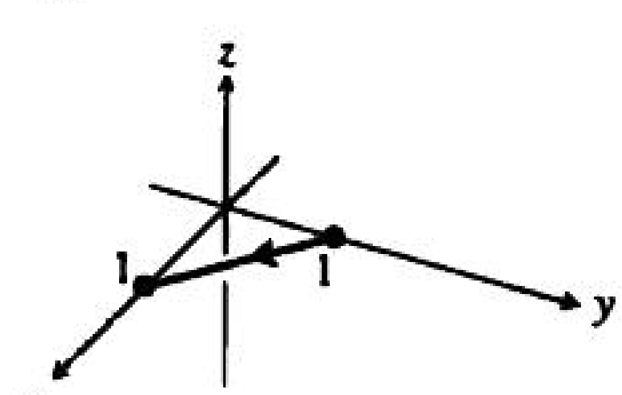
a.



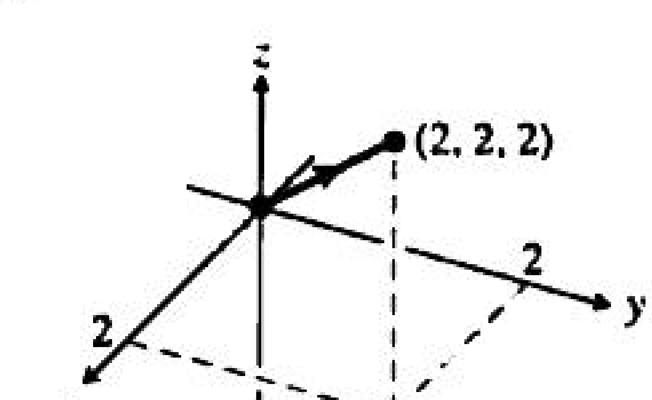
b.



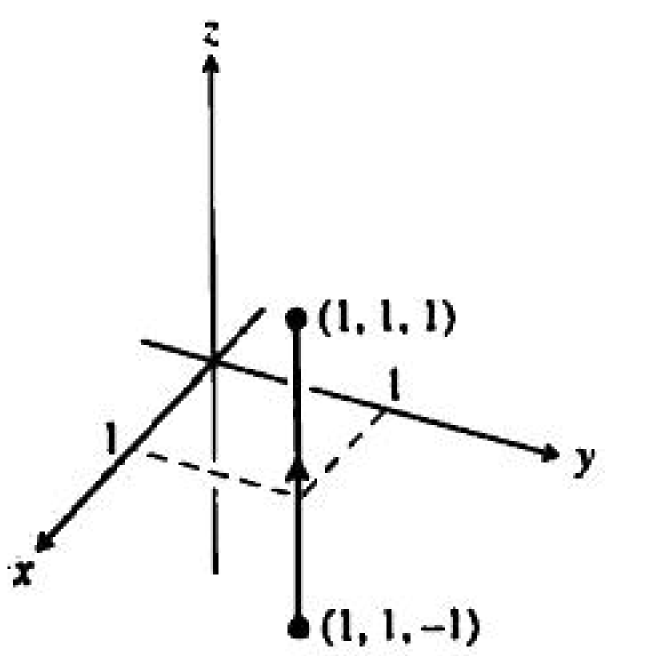
c.



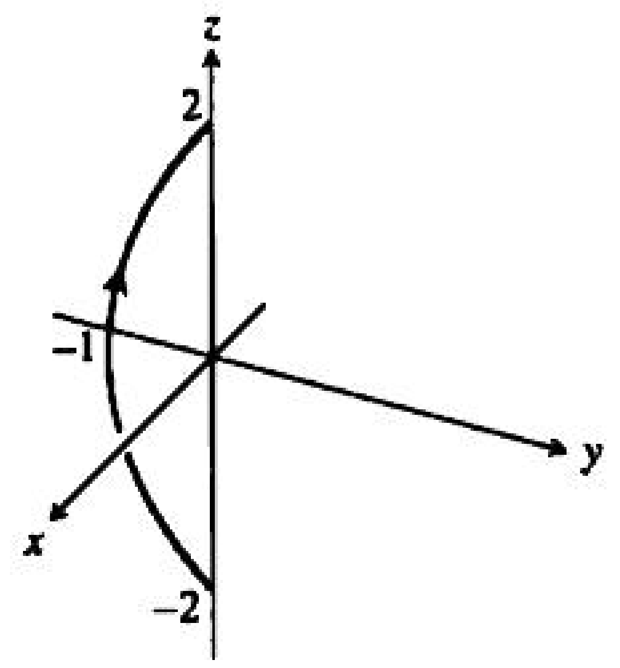
d.



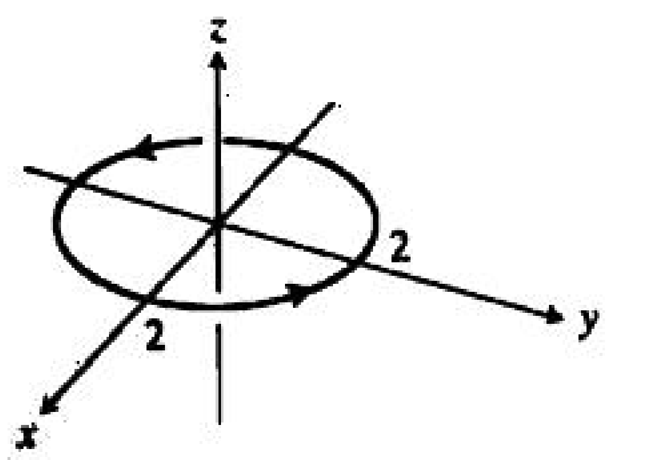
e.



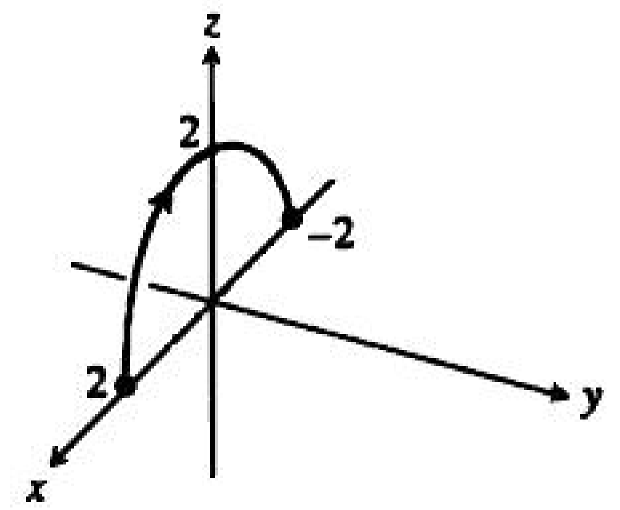
f.

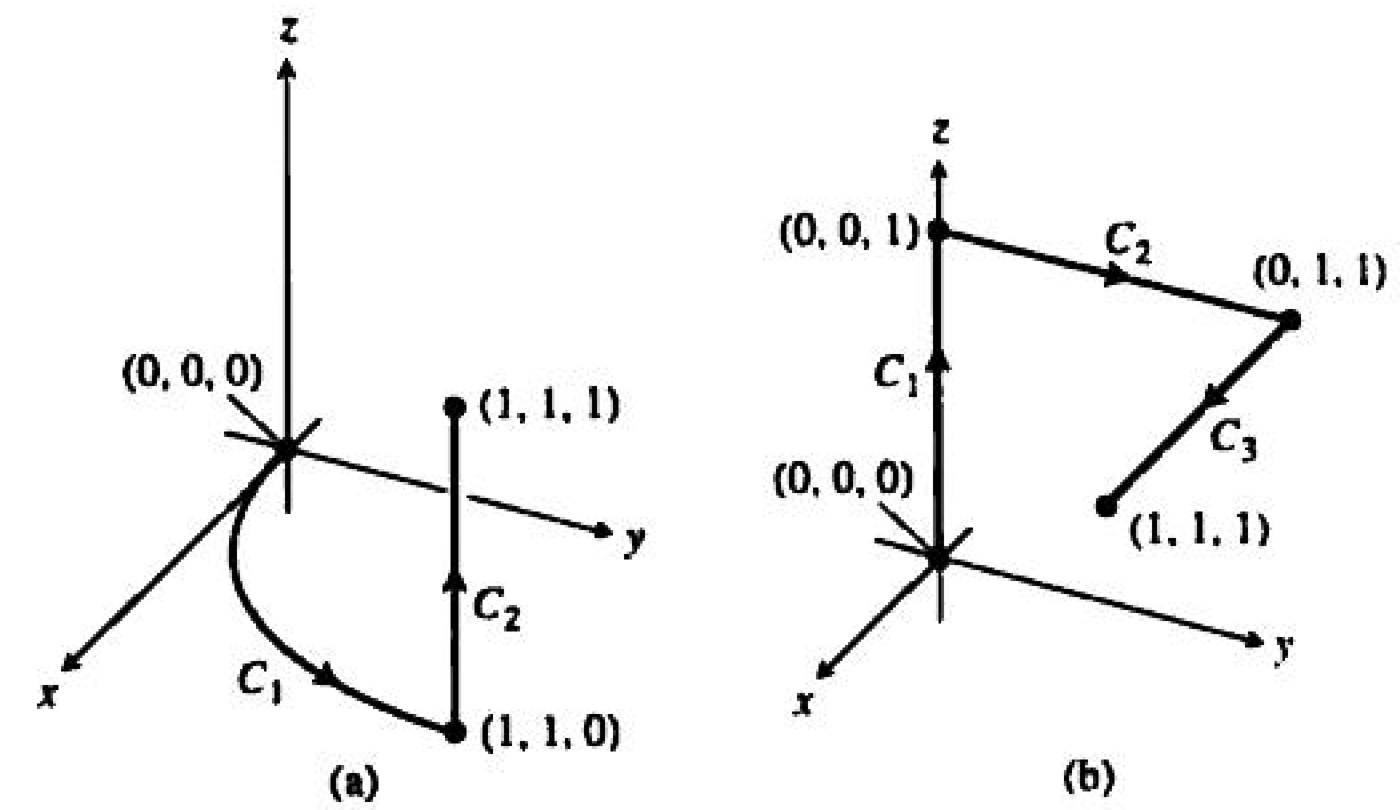


g.



h.





ŞEKİL 16.6 15 ve 16 alıştırmalarındaki integrasyon yolları.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
2. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$
3. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$
4. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \le t \le 1$
5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$
6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$
7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$
8. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

Uzay Eğrileri Üzerinde Eğrisel İntegraller Hesaplamak

9. C, $(0, 1, 0)$'dan $(1, 0, 0)$'a giden $x = t,\ y = (1 - t),\ z = 0$ doğru parçası olmak üzere, $\int_C (x + y)\,ds$'yi hesaplayın.
10. C, $(0, 1, 1)$'den $(1, 0, 1)$'e giden $x = t,\ y = (1 - t),\ z = 1$ doğru parçası olmak üzere, $\int_C (x - y + z - 2)\,ds$'yi hesaplayın.
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$, eğrisi üzerinde $\int_C (xy + y + z)\,ds$'yi hesaplayın.
12. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k},\ -2\pi \le t \le 2\pi$, eğrisi üzerinde $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$'yi hesaplayın.
13. $f(x, y, z) = x + y + z$'nin $(1, 2, 3)$'ten $(0, -1, 1)$'e giden doğru parçası üzerindeki eğrisel integralini bulun.
14. $f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2)$'nin $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $1 \le t \le \infty$, eğrisi üzerindeki eğrisel integralini bulun.
15. $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$'yi $(0,0,0)$'dan $(1,1,1)$'e (Şekil 16.6a)

$$C_1:\ \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2:\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

ile verilen yol üzerinde integre edin.

16. $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$'yi $(0,0,0)$'dan $(1,1,1)$'e (Şekil 16.6b)

$$C_1:\ \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2:\ \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_3:\ \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

ile verilen yol üzerinde integre edin.

17. $f(x, y, z) = (x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$'yi $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 < a \le t \le b$, eğrisi üzerinde integre edin.
18. $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$'yi

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

çemberi üzerinde integre edin.

Düzlem Eğrileri Üzerinde Eğrisel İntegraller

19–22 alıştırmalarında f'yi verilen eğri üzerinde integre edin.

19. $f(x, y) = x^3/y$, C: $y = x^2/2$, $0 \le x \le 2$
20. $f(x, y) = (x + y^2)/\sqrt{1 + x^2}$, C: $(1, 1^2/2)$'den $(0, 0)$'a kadar $y = x^2/2$
21. $f(x, y) = x + y$, C: Birinci dörtte bir bölgede $(2, 0)$'dan $(0, 2)$'ye kadar $x^2 + y^2 = 4$
22. $f(x, y) = x^2 - y$, C: Birinci dörtte bir bölgede $(0, 2)$'den $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$'ye kadar $x^2 + y^2 = 4$

Kütle ve Momentler

23. **Bir telin kütlesi** Yoğunluğu $\delta = (3/2)t$ ise, $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ eğrisi üzerinde bulunan bir telin kütlesini bulun.
24. **Eğrisel bir telin kütle merkezi** $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$ yoğunluklu bir tel $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$, eğrisinin üzerindedir. Kütle merkezini bulun. Sonra eğriyi ve kütle merkezini birlikte çizin.
25. **Değişken yoğunluklu bir telin kütle merkezi** Yoğunluğu (a) $\delta = 3t$ ve (b) $\delta = 1$ ise, $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, eğrisinin üzerindeki ince bir telin kütlesini bulun.

26. **Değişken yoğunluklu bir telin kütle merkezi** Yoğunluğu $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ise, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$, eğrisinin üzerindeki ince bir telin kütle merkezini bulun.

27. **Bir tel kasnağın eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı** Sabit δ yoğunluklu dairesel telden bir kasnak xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin üzerindedir. Kasnağın z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

28. **İnce bir çubuğun eylemsizliği ve jirasyon yarıçapı** Sabit yoğunluklu ince bir çubuk yz-düzlemindeki $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, doğru parçasının üzerindedir. Çubuğun üç koordinat ekseni etrafındaki eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçaplarını bulun.

29. **Sabit yoğunluklu iki yay** Sabit δ yoğunluklu bir yay aşağıdaki helisin üzerindedir.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

a. I_z ve R_z'yi bulun.

b. Elinizde (a)'daki telin iki katı uzunluğunda ve helis üzerinde $0 \le t \le 4\pi$ aralığında bulunan sabit δ yoğunluğunda başka bir yay olduğunu varsayın. I_z ve R_z'nin uzun yay için de kısa yayınkilerle aynı olmasını mı beklersiniz, yoksa farklı mı olmalıdırlar? Tahminlerinizi, uzun yay için I_z ve R_z'yi hesaplayarak kontrol edin.

30. **Sabit yoğunluklu bir tel** Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu bir tel

$$\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

eğrisi üzerindedir. $\bar{z}$, I_z ve R_z'yi bulun.

31. **Örnek 4'teki yay** Örnek 4'teki yay için I_x ve R_x'i bulun.

32. **Değişken yoğunluk ile kütle merkezi, eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçapları** Yoğunluğu $\delta = 1/(t+1)$ ise,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2.$$

eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütle merkezini ve koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleri ile jirasyon yarıçaplarını bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Eğrisel İntegralleri Sayısal Olarak Hesaplamak

33–36 alıştırmalarında, eğrisel integralleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek hesaplamak için bir BCS kullanın.

a. $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ yolu için $ds = |\mathbf{v}(t)|\,dt$'yi bulun.

b. $f(g(t), h(t), k(t))|\mathbf{v}(t)|$ integrandını t parametresinin bir fonksiyonu olarak ifade edin.

c. Metindeki (2) denklemini kullanarak $\int_C f\,ds$'yi hesaplayın.

33. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

34. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

35. $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

36. $f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.2 Vektör Alanları, İş, Dolaşım ve Akı

Vektörlerle temsil edilen fiziksel olayları incelerken, kapalı aralıklar üzerindeki integraller yerine vektör alanlarından geçen yollar üzerinde integraller alırız. Böyle integralleri, bir cismi bir yol boyunca değişken bir kuvvete karşı hareket ettirmek (dünyanın yerçekimi alanına karşı uzaya gönderilen bir araç) için yapılan işi bulmak veya bir cismi alan içinden geçen bir yol boyunca hareket ettirmek için vektör alanının yaptığı işi (bir parçacığın hızını arttırmak için bir hızlandırıcının yaptığı iş) bulmak için kullanırız. Ayrıca, akışkanların eğriler boyunca ve eğrilerden geçerken akış oranlarını bulmak için de eğrisel integralleri kullanırız.

Vektör Alanları

Düzlemde veya uzayda bir bölgenin, hava veya su gibi hareket eden bir akışkan ile donatıldığını varsayın. Akışkanın çok fazla sayıda partikülden oluştuğunu ve herhangi bir

Çözüm $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, parametrizasyonu çemberi saat yönünün tersine tam bir defa kat eder. Dolayısıyla, (4) denkleminde bu parametrizasyonu kullanabiliriz.

$$M = x - y = \cos t - \sin t, \qquad dy = d(\sin t) = \cos t\, dt$$
$$N = x = \cos t, \qquad dx = d(\cos t) = -\sin t\, dt,$$

ile

$$\text{Akı} = \int_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t)\,dt \qquad \text{(4) denklemi}$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

buluruz. F'nin çemberdeki akısı π'dir. Yanıt pozitif olduğu için, eğri boyunca net akış dışarı doğrudur. İçeri doğru net bir akış negatif bir akı verirdi. ■

ALIŞTIRMALAR 16.2

Vektör ve Gradiyent Alanları

1–4 alıştırmalarında, fonksiyonların gradiyent alanlarını bulun.

1. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
2. $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. $g(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$
4. $g(x, y, z) = xy + yz + xz$
5. $\mathbf{F}$'nin orijine doğru işaret etme ve büyüklüğü (x, y)'den orijine olan uzaklığın karesiyle ters orantılı olma özelliği bulunacak şekilde düzlemde bir vektör alanının $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ formülünü bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).
6. (0, 0)'da $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, başka (a, b) noktalarında $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine teğet ve saat yönünü işaret etme özelliği olan, $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ büyüklüklü bir $\mathbf{F}$ vektör alanının $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ formülünü bulun.

İş

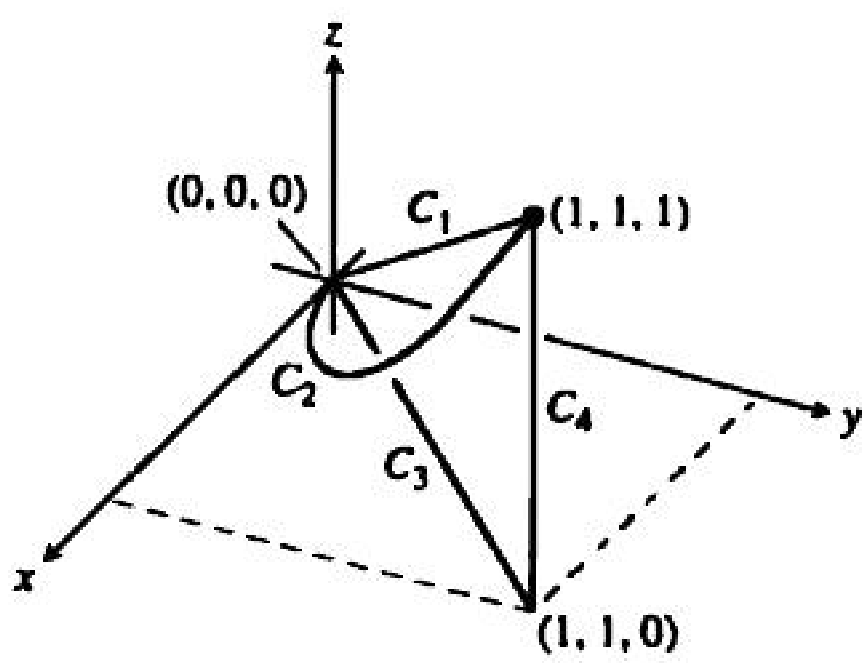
7–12 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ kuvvetinin aşağıdaki yollar üzerinde (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e kadar yaptığı işi bulun (Şekil 16.21).

a. Doğru yol C_1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

b. Eğri yol C_2: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

c. (0, 0, 0)'dan (1, 1, 0)'a giden ve sonra (1, 1, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden doğru parçalarından oluşan $C_3 < C_4$ yolu.

7. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = [1/(x^2 + 1)]\mathbf{j}$
9. $\mathbf{F} = \sqrt{z}\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \sqrt{y}\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (3x^2 - 3x)\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$



ŞEKİL 16.21 (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden yollar.

13–16 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$'nin artan t yönünde eğri boyunca yaptığı işi bulun.

13. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$
14. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
15. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
16. $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

Düzlemde Eğrisel İntegraller ve Vektör Alanları

17. $\int_C xy\,dx + (x + y)\,dy$'yi (−1, 1)'den (2, 4)'e kadar $y = x^2$ eğrisi üzerinde hesaplayın.
18. $\int_C (x - y)\,dx + (x + y)\,dy$'yi köşeleri (0, 0), (1, 0) ve (0, 1)' de olan üçgen üzerinde saat yönünün tersine hesaplayın.

19. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ vektör alanı için $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$'yi (4, 2)'den (1, −1)'e kadar $x = y^2$ eğrisi boyunca hesaplayın.

20. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ vektör alanı için $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'yi (1, 0)'dan (0, 1)'e kadar saat yönünün tersine $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde hesaplayın.

21. **İş** $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ kuvveti tarafından (1, 1)'den (2, 3)'e giden doğru boyunca yapılan işi bulun.

22. **İş** $f(x, y) = (x + y)^2$'nin gradiyentinin $x^2 + y^2 = 4$ çemberi üzerinde (2, 0)'dan (2, 0)'a kadar yaptığı işi bulun.

23. **Dolaşım ve Akı** Aşağıdaki eğrilerin her birinde

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{ve} \quad \mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

alanlarının akı ve dolaşımını bulun.

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ çemberi

b. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ elipsi

24. **Bir çemberden geçen akı**

$$\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \quad \text{ve} \quad \mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

alanlarının

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

çemberi üzerindeki akılarını bulun.

Dolaşım ve Akı

25–28 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ alanının $\mathbf{r}_1(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$, yarım dairesel yayı ve onu izleyen $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i}$, $-a \le t \le a$, doğru parçasından oluşan yarım çembersel yol üzerindeki akı ve dolaşımını bulun.

25. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

26. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

28. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

29. **Akı integralleri** $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ hız alanının akış integralini xy-düzleminde (1, 0)'dan (−1, 0)'a kadar aşağıdaki yollardan her birinde bulun.

a. $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin üst yarısı

b. (1, 0)'dan (−1, 0)'a giden doğru parçası

c. (1, 0)'dan (0, −1)'e giden doğru parçası ve onu izleyen (0, −1)'den (−1, 0)'a giden doğru parçası.

30. **Bir üçgenden geçen akı** Alıştırma 29'daki $\mathbf{F}$ alanının, köşeleri (1, 0), (0, 1) ve (−1, 0)'da bulunan üçgenden dışarı doğru olan akısını bulun.

Düzlemde Alanları Bulmak ve Çizmek

31. **Spin alanı** $x^2 + y^2 = 4$ çemberi boyunca çeşitli temsil noktalarında yatay ve dikey bileşenleriyle birlikte

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

spin alanını çizin (Şekil 16.14'e bakın.)

32. **Radyal alanı** $x^2 + y^2 = 1$ çemberi boyunca çeşitli temsil noktalarındaki yatay ve dikey bileşenleriyle birlikte

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

radyal alanını çizin (Şekil 16.13'e bakın).

33. **Bir teğet vektörler alanı**

a. xy-düzleminde $(a, b) \ne (0, 0)$ olan her nokta için, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine teğet ve saat yönünün tersini gösterme özelliğine sahip, $\sqrt{a^2 + b^2}$ büyüklüğünde bir $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ alanı bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).

b. $\mathbf{G}$, Şekil 16.14'teki $\mathbf{F}$ spin alanı ile nasıl ilişkilidir?

34. **Bir teğet vektörler alanı**

a. xy-düzleminde $(a, b) \ne (0, 0)$ olan her nokta için, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine teğet ve saat yönünü gösterme özelliğine sahip bir $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ alanı bulun.

b. $\mathbf{G}$, Şekil 16.14'teki $\mathbf{F}$ spin alanı ile nasıl ilişkilidir?

35. **Orijine yönlenmiş birim vektörler** xy-düzlemindeki her $(x, y) \ne (0, 0)$ noktasında, $\mathbf{F}$ orijini gösteren bir birim vektör olmak üzere bir $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ alanı bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).

36. **İki "Merkezi" alan** xy-düzlemindeki her $(x, y) \ne (0, 0)$ noktasında, $\mathbf{F}$ orijini gösteren bir birim vektör ve $|\mathbf{F}|$, **(a)** (x, y)'den orijine olan uzaklık, **(b)** (x, y)'den orijine olan uzaklık ile ters orantılı olmak üzere bir $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ alanı bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).

Uzayda Akış İntegralleri

37–40 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ uzayda bir bölgede akan bir akışkanın hız alanıdır. Verilen eğri boyunca artan t yönünde akışı bulun.

37. $\mathbf{F} = -4xy\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

38. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

39. $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + x\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$

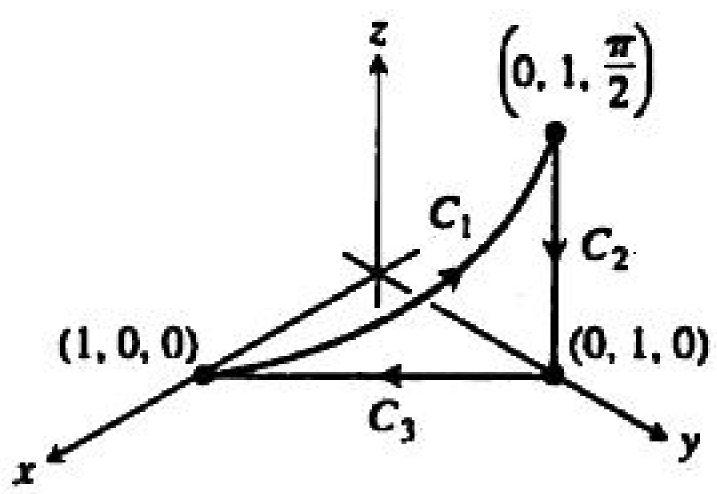
40. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (-2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

41. **Dolaşım** Artan t yönünde ilerleyen aşağıdaki üç eğriden oluşan kapalı yol boyunca $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$'nın dolaşımını bulun:

C_1: $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi/2$

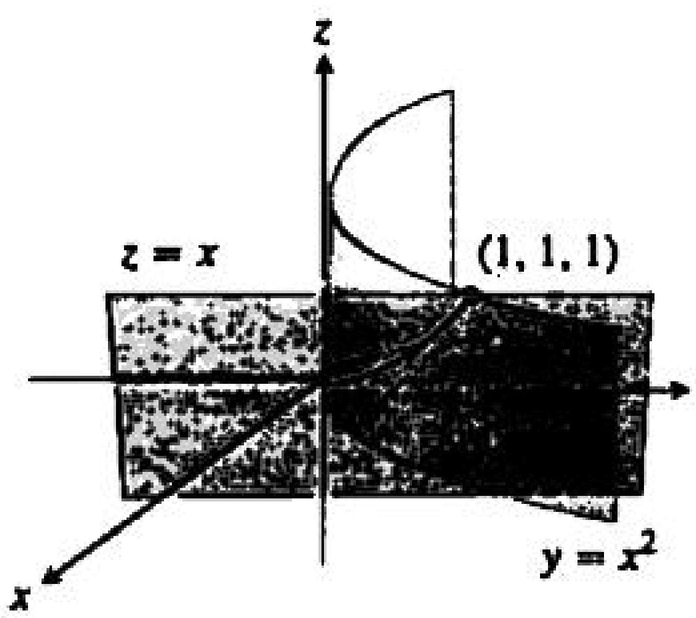
C_2: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{j} + (\pi/2)(1 - t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

C_3: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$



42. Sıfır dolaşım C, $2x + 3y - z = 0$ düzleminin $x^2 + y^2 = 12$ silindiriyle kesiştiği elips olsun. İki eğrisel integrali de doğrudan hesaplamadan, $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alanının C eğrisi etrafındaki dolaşımın iki yönde de sıfır olduğunu gösterin.

43. Bir eğri boyunca akış $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$ alanı uzayda bir akışın hız alanıdır. $y = x^2$ silindiri ile $z = x$ düzleminin kesişim eğrisi üzerinde (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e kadar akışı bulun (*İpucu:* Parametre olarak $t = x$ kullanın).



44. Bir gradiyent alanın akışı $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$ alanının verilen eğrilerdeki akışını bulun.

a. Alıştırma 42'deki C üzerinde, yukarıdan bakıldığında saat yönünde bir defa

b. (1, 1, 1)'den (2, 1, −1)'e giden doğru parçası üzerinde

Teori ve Örnekler

45. İş ve alan $a \le t \le b$ için $f(t)$'nin diferansiyellenebilir ve pozitif olduğunu varsayın. C, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$, yolu ve $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ olsun.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

iş integralinin değeri ile t-ekseni, f'nin grafiği, $t = a$ ve $t = b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı arasında bir ilişki var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

46. Sabit büyüklüklü bir radyal kuvvetin yaptığı iş Bir parçacık düzgün $y = f(x)$ eğrisi üzerinde $(a, f(a))$'dan $(b, f(b))$'ye ilerlemektedir. Parçacığı hareket ettiren kuvvetin büyüklüğü sabit k'dir ve her zaman orijinden uzağı göstermektedir. Kuvvetin yaptığı işin

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = k\left[(b^2 + (f(b))^2)^{1/2} - (a^2 + (f(a))^2)^{1/2}\right]$$

olduğunu gösterin.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Sayısal Olarak İş Bulmak

47–52 alıştırmalarında, bir BCS kullanarak $\mathbf{F}$ kuvvetinin verilen yolda yaptığı işi bulmak için aşağıdaki adımları izleyin.

a. $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ yolu için $d\mathbf{r}$'yi bulun.

b. Yol boyunca $\mathbf{F}$ kuvvetini hesaplayın.

c. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'yi hesaplayın.

47. $\mathbf{F} = xy^6\mathbf{i} + 3x(xy^5 + 2)\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

48. $\mathbf{F} = \dfrac{3}{1 + x^2}\mathbf{i} + \dfrac{2}{1 + y^2}\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$

49. $\mathbf{F} = (y + yz\cos xyz)\mathbf{i} + (x^2 + xz\cos xyz)\mathbf{j} + (z + xy\cos xyz)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

50. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $1 \le t \le 4$

51. $\mathbf{F} = (2y + \sin x)\mathbf{i} + (z^2 + (1/3)\cos y)\mathbf{j} + x^4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

52. $\mathbf{F} = (x^2y)\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (2\sin^2 t - 1)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.3 Yoldan Bağımsızlık, Potansiyel Fonksiyonlar ve Korunmalı Alanlar

Yerçekimi ve elektrik alanlarında, bir kütleyi veya bir yükü bir noktadan diğerine taşımak için gereken iş miktarı, arada hangi yolun izlendiğine değil sadece cismin ilk ve son konumlarına bağlıdır. Bu bölüm iş integrallerinin yoldan bağımsızlığı kavramını tartışmakta ve iş integrallerinin yoldan bağımsız olduğu alanların önemli özelliklerini tanımlamaktadır.

ALIŞTIRMALAR 16.3

Korunmalı Alanları Test Etmek

1–6 alıştırmalarındaki alanların hangileri korunmalı, hangileri değildir?

1. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F} = (y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F} = (z + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \sin y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Potansiyel Fonksiyonları Bulmak

7–12 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ alanı için bir f potansiyel fonksiyonu bulun.

7. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$
10. $\mathbf{F} = (y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\mathbf{i} + \left(\sec^2(x + y) + \dfrac{y}{y^2 + z^2}\right)\mathbf{j} + \dfrac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\dfrac{x}{1 + x^2y^2} + \dfrac{z}{\sqrt{1 - y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2z^2}} + \dfrac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

13–17 alıştırmalarında, integrallerdeki diferansiyel formların tam olduklarını gösterin. Sonra integralleri hesaplayın.

13. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$
14. $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$
15. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz$
16. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1 + z^2}\,dz$
17. $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x\,dx + \cos y \sin x\,dy + dz$

R^3 uzayının tamamında tanımlı olmadıkları halde, 18–22 alıştırmalarına karşı gelen bölgeler basit bağlantılıdır. Alanların korunmalı olduklarını göstermek için bileşen testi kullanılabilir. Her bir alan için bir potansiyel fonksiyon bulun ve integralleri Örnek 4'teki gibi hesaplayın.

18. $\displaystyle\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y\right)dy + \frac{1}{z}\,dz$
19. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,dx + \frac{z^2}{y}\,dy + 2z \ln y\,dz$
20. $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x \ln y - yz)\,dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xy\,dz$
21. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}\,dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}\,dz$
22. $\displaystyle\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$
23. **Örnek 4'ü tekrarlamak** Örnek 4'teki
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$
integralini $(1, 1, 1)$'den $(2, 3, -1)$'e giden doğru parçasının parametrik denklemlerini bulup, doğru üzerinde $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$'nin eğrisel integralini hesaplayarak bulun. $\mathbf{F}$ korunmalı olduğu için, integral yoldan bağımsızdır.
24. $(0, 0, 0)$'ı $(0, 3, 4)$'e bağlayan C doğru parçası üzerinde $\displaystyle\int_C x^2\,dx + yz\,dy + (y^2/2)\,dz$'yi hesaplayın.

Teori, Uygulama ve Örnekler

Bağımsız yol 25 ve 26 alıştırmalarındaki integrallerin değerlerinin A'dan B'ye gidilen yola bağlı olmadığını gösterin.

25. $\displaystyle\int_A^B z^2\,dx + 2y\,dy + 2xz\,dz$
26. $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

27 ve 28 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ için bir potansiyel fonksiyon bulun.

27. $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\dfrac{1 - x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$
28. $\mathbf{F} = (e^x \ln y)\mathbf{i} + \left(\dfrac{e^x}{y} + \sin z\right)\mathbf{j} + (y \cos z)\mathbf{k}$
29. **Farklı yollar üzerinde iş** $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$'nin aşağıdaki yollarda $(1, 0, 0)$'dan $(1, 0, 1)$'e kadar yaptığı işi bulun.
   a. $x = 1, y = 0, 0 \le z \le 1$, doğru parçası
   b. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/2\pi)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, helisi
   c. $(1, 0, 0)$'dan $(0, 0, 0)$'a kadar x-ekseni ve ardından $(0, 0, 0)$'dan $(1, 0, 1)$'e kadar $z = x^2, y = 0$ parabolü
30. **Farklı yollar üzerinde iş** $\mathbf{F} = e^{yz}\mathbf{i} + (xze^{yz} + z \cos y)\mathbf{j} + (xye^{yz} + \sin y)\mathbf{k}$'nin aşağıdaki yollarda $(1, 0, 1)$'den $(1, \pi/2, 0)$'a kadar yaptığı işi bulun.

a. $x = 1, y = \pi t/2, \quad z = 1 - t, \quad 0 \le t \le 1$ doğru parçası

b. $(1, 0, 1)$'den orijine giden doğru parçası ve ardından orijinden $(1, \pi/2, 0)$'a giden doğru parçası

c. $(1, 0, 1)$'den $(1, 0, 0)$'a giden doğru parçası, ardından $(1, 0, 0)$'dan orijine kadar x-ekseni ve ardından orijinden $(1, \pi/2, 0)$'a kadar $y = \pi x^2/2, z = 0$ parabolü.

31. Bir iş integralini iki şekilde hesaplamak $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2)$ ve C de xy-düzleminde $(-1, 1)$'den $(1, 1)$'e, önce $(-1, 1)$'den $(0, 0)$'a ardından $(0, 0)$'dan $(1, 1)$' e giden doğru parçalarından oluşan yol olsun. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'yi iki şekilde hesaplayın:

a. C'yi oluşturan doğru parçalarının parametrizasyonlarını bulun ve integrali hesaplayın.

b. $f(x, y) = x^3y^2$'nin $\mathbf{F}$'nin potansiyel fonksiyonu olmasını kullanın.

32. Farklı yollar boyunca integral $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy$'yi xy-düzleminde aşağıda verilen C yolları boyunca hesaplayın.

a. $(1, 0)$'dan $(0, 1)$'e kadar $y = (x - 1)^2$ parabolü

b. $(-1, \pi)$'den $(1, 0)$'a giden doğru parçası

c. $(-1, 0)$'dan $(1, 0)$'a kadar x-ekseni

d. Saat yönünün tersinde $(1, 0)$'dan yeniden $(1, 0)$'a kadar $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \ 0 \le t \le 2\pi$, astroidi

33. a. Tam diferansiyel form Aşağıdaki diferansiyel form tamsa, a, b ve c arasındaki ilişki nedir?

$$(ay^2 + 2czx)\, dx + y(bx + cz)\, dy + (ay^2 + cx^2)\, dz$$

b. Gradiyent Alan Hangi b ve c değerlerinde

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

bir gradiyent alan olur?

34. Bir eğrisel integralin gradiyenti $\mathbf{F} = \nabla f$'nin korunmalı bir vektör alanı ve

$$g(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

olduğunu varsayın. $\nabla g = \mathbf{F}$ olduğunu gösterin.

35. En az iş yolu Bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanının bir parçacığı iki yer arasında hareket ettirirken en az iş yapacağı yolu bulmanız istenmektedir. Yaptığınız çabuk bir hesap $\mathbf{F}$'nin korunmalı olduğunu gösterir. Nasıl yanıt verirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

36. Açıklayıcı bir deney Deneyle, bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanının bir cismi A'dan B'ye kadar C_1 yolu boyunca götürmekle cismi A'dan B'ye C_2 yolundan götürmekle yapacağı işin yarısını yaptığını buluyorsunuz. $\mathbf{F}$ hakkında ne sonuca varırsınız? Yanıtınızı açıklayın.

37. Sabit kuvvetin işi Sabit $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ kuvvet alanı ile bir parçacığı A'dan B'ye götürmekle yapılan işin $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ olduğunu gösterin.

38. Yer çekimi alanı

a. Aşağıdaki yerçekimi alanı için bir potansiyel fonksiyonu bulun.

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (G,\ m \text{ ve } M \text{ sabit})$$

b. P_1 ve P_2 orijinden s_1 ve s_2 uzaklıkta noktalar olsun. (a)'daki yerçekimi alanının bir parçacığı P_1'den P_2'ye kadar hareket ettirmek için yapması gereken işin

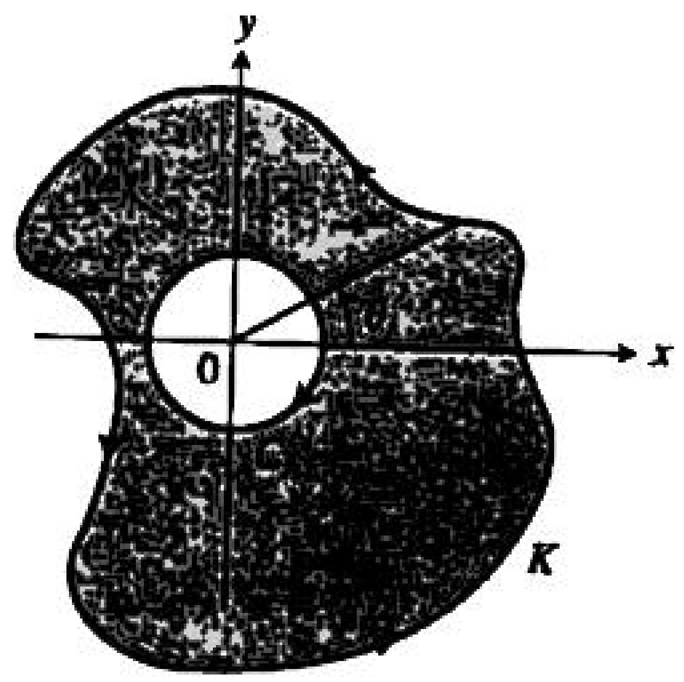
$$GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$$

olduğunu gösterin.

16.4 Düzlemde Green Teoremi

Bölüm 16.2, Tablo 16.2'den her $\int_C M\, dx + N\, dy$ eğrisel integralinin bir $\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ akış integrali olarak yazılabileceğini biliyoruz. İntegral yoldan bağımsız ise yani $\mathbf{F}$ alanı korunmalı ise (temel varsayımların sağlandığı bir bölge üzerinde), alanın bir potansiyel fonksiyonundan integrali kolayca hesaplayabiliriz. Bu bölümde, korunmalı olmayan fakat xy-düzleminde bir akış integrali veya kapalı bir eğri üzerinde akı integrali ise bir vektör alanının integralinin nasıl hesaplanacağı üzerinde duracağız. Bunu yapmanın yolu, eğrisel integrali eğrinin çevrelediği bölge üzerindeki bir iki katlı integrale dönüştüren ve Green Teoremi olarak bilinen sonuçtur.

Akışkan akışlarının hız alanları cinsinden konuşacağız, çünkü akışkan akışlarını resmetmesi kolaydır. Ancak, Green Teoreminin belirli matematiksel koşulları sağlayan herhangi bir vektör alanına uygulanabileceğini unutmamanızı hatırlatırız. Geçerliliği alanın belirli bir fiziksel yorumu olup olmamasına bağlı değildir.



ŞEKİL 16.36 C_h çemberi ve K eğrisiyle sınırlı bölge.

Bu da, bu şekildeki herhangi bir K eğrisi için, şaşırtıcı

$$\oint_K (M\,dx + N\,dy) = 2\pi$$

sonucunu verir. Bu sonucu kutupsal koordinatlara dönerek açıklayabiliriz.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$dx = -r\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr, \qquad dy = r\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dr$$

ile,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta}{r^2} = d\theta$$

elde ederiz ve K'yi bir kere saat yönünün tersine dolaşırsak θ, 2π kadar artar.

ALIŞTIRMALAR 16.4

Green Teoremini Gerçeklemek

1–4 alıştırmalarında, $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanı için (3) ve (4) denklemlerinin iki tarafını da hesaplayarak Green Teoremini gerçekleyin. Her durumda integrasyon bölgelerini R: $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesi ve onu sınırlayan C: $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, çemberi olarak alın.

1. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$
3. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

Saat Yönünün Tersine Dolaşım ve Dışarı Doğru Akı

5–10 alıştırmalarında $\mathbf{F}$'nin C eğrisi üzerinde saat yönünün tersine dolaşımını ve dışarı doğru akısını Green Teoremiyle bulun.

5. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$
   C: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ ile sınırlı kare.
6. $\mathbf{F} = (x^2 + 4y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$
   C: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ ile sınırlı kare.
7. $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
   C: $y = 0, x = 3$ ve $y = x$ ile sınırlı üçgen.
8. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
   C: $y = 0, x = 1$ ve $y = x$ ile sınırlı üçgen.
9. $\mathbf{F} = (x + e^x\sin y)\mathbf{i} + (x + e^x\cos y)\mathbf{j}$
   C: $r^2 = \cos 2\theta$ fiyongunun sağ döngüsü
10. $\mathbf{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j}$
   C: Kutupsal koordinatlarda $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$ eşitsizlikleriyle tanımlı bölgenin sınırı.
11. Birinci bölgede, $y = x^2$ ve $y = x$ eğrileriyle sınırlı bölgenin sınırı üzerinde $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ alanının saat yönünün tersine dolaşımını ve dışarı doğru akısını bulun.
12. Birinci bölgeden $x = \pi/2$ ve $y = \pi/2$ doğrularıyla kesilen kare üzerinde $\mathbf{F} = (-\sin y)\mathbf{i} + (x\cos y)\mathbf{j}$ alanının saat yönünün tersine dolaşımını ve dışarı doğru akısını bulun.
13. $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$, kardioidi üzerinde
   $$\mathbf{F} = \left(3xy - \frac{x}{1 + y^2}\right)\mathbf{i} + (e^x + \tan^{-1}y)\mathbf{j}$$
   alanının dışarıya doğru akısını bulun.
14. Üstten $y = 3 - x^2$ eğrisi ve alttan $y = x^4 + 1$ eğrisi ile sınırlanan bölgenin sınırı üzerinde $\mathbf{F} = (y + e^x\ln y)\mathbf{i} + (e^x/y)\mathbf{j}$ alanının saat yönünün tersine dolaşımını bulun.

İş

15 ve 16 alıştırmalarında, bir parçacığı verilen eğri üzerinde saat yönünün tersine bir tur döndüren $\mathbf{F}$ tarafından yapılan işi bulun.

15. $\mathbf{F} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$
   C: Birinci bölgede x-ekseni, $x = 1$ doğrusu ve $y = x^3$ eğrisiyle çevrelenen "üçgensel" bölgenin sınırı.
16. $\mathbf{F} = (4x - 2y)\mathbf{i} + (2x - 4y)\mathbf{j}$
   C: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ çemberi

Düzlemde Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

17–20 alıştırmalarındaki integralleri Green Teoremini uygulayarak hesaplayın.

17. $\oint_C (y^2\,dx + x^2\,dy)$
   C: $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$ ile sınırlı üçgen
18. $\oint_C (3y\,dx + 2x\,dy)$
   C: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$'in sınırı

19. $\oint_C (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy$

C: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ çemberi

20. $\oint_C (2x + y^2)\,dx + (2xy + 3y)\,dy$

C: Düzlemde Green Teoreminin geçerli olduğu herhangi bir basit kapalı eğri

Green Teoremiyle Alan Hesaplamak

Düzlemde herhangi bir basit kapalı C eğrisi ve onun çevrelediği R bölgesi Green Teoreminin hipotezlerini sağlıyorsa, R'nin alanı aşağıdaki formülle verilir:

Green Teoremi Alan Formülü

$$R\text{'nin alanı} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \qquad [13]$$

Bunun nedeni, (3) denkleminin, tersine döndürüldüğünde,

$$R\text{'nin alanı} = \iint_R dy\,dx = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dy\,dx$$

$$= \oint_C \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx$$

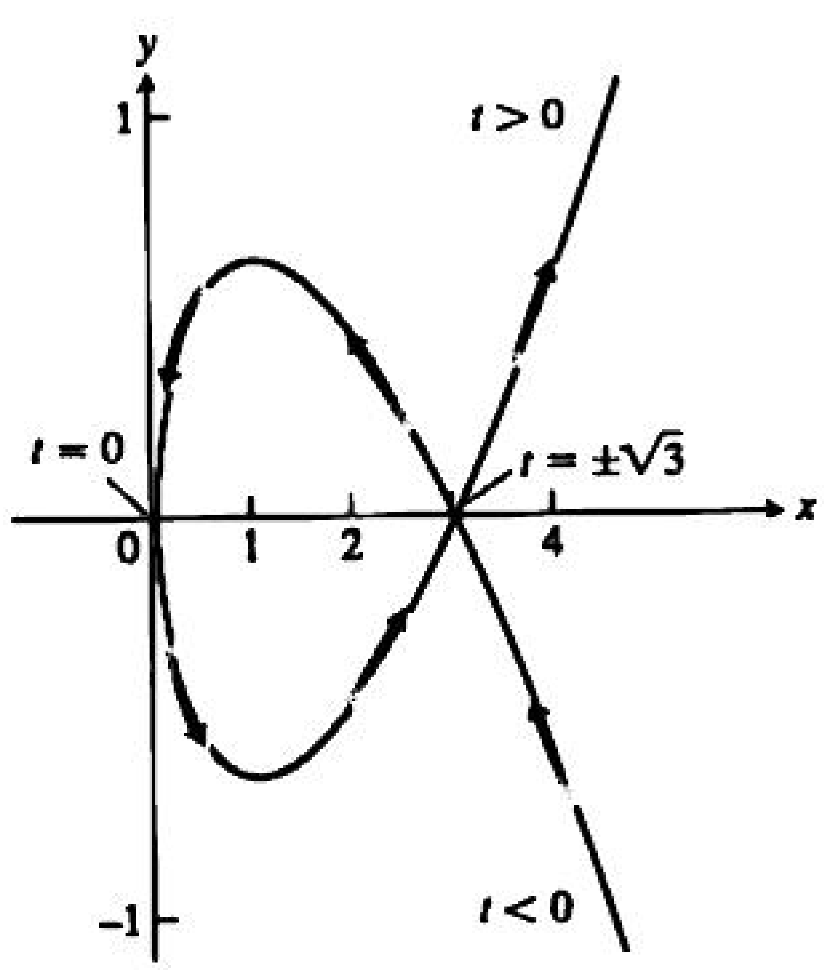
vermesidir. Green Teoremi alan formülünü kullanarak (13 Denklemi) 21–24 alıştırmalarındaki eğrilerle çevrelenen bölgelerin alanlarını bulun.

21. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$, çemberi

22. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (b\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$, elipsi

23. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$, astroidi

24. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + ((t^3/3) - t)\mathbf{j},\quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$ eğrisi (Şekle bakın).



Teori ve Örnekler

25. C, Green Teoreminin geçerli olduğu bir bölgenin sınırı olsun. Aşağıdakileri Green Teoremini kullanarak hesaplayın.

a. $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy$

b. $\oint_C ky\,dx + hx\,dy$ (k ve h birer sabit)

26. Sadece alana bağlı integral Herhangi bir kare üzerinde

$$\oint_C xy^2\,dx + (x^2y + 2x)\,dy$$

integralinin değerinin karenin sadece karenin alanına bağlı olduğunu, düzlemdeki konumuna bağlı olmadığını gösterin.

27.

$$\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy$$

integralinde özel olan şey nedir? Yanıtınızı açıklayın.

28.

$$\oint_C -y^3\,dy + x^3\,dx$$

integralinde özel olan şey nedir? Yanıtınızı açıklayın.

29. Bir eğrisel integral olarak alan R, düzlemde parçalı olarak düzgün, basit bir kapalı C eğrisiyle sınırlı bölge ise,

$$R\text{'nin alanı} = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx$$

olduğunu gösterin.

30. Bir eğrisel integral olarak belirli integral Negatif olmayan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin $[a, b]$'de sürekli olduğunu varsayın. C'de xy-düzleminde alttan x-ekseni, üstten f'nin grafiği ve yanlardan $x = a$ ve $x = b$ doğrularıyla çevrili bölgenin sınırı olsun.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\oint_C y\,dx$$

olduğunu gösterin.

31. Alan ve ağırlık merkezi A, xy-düzleminde parçalı olarak düzgün, basit bir kapalı C eğrisiyle sınırlı bölgenin alanı ve $\bar{x}$ de R'nin ağırlık merkezinin x-koordinatı olsun.

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2\,dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2\,dy - xy\,dx = A\bar{x}$$

olduğunu gösterin.

32. Eylemsizlik momenti I_y Alıştırma 31'deki bölgenin y-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti olsun.

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3\,dy = -\oint_C x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,dy - x^2y\,dx = I_y$$

olduğunu gösterin.

33. Green Teoremi ve Laplace denklemi Gerekli bütün türevlerin var ve sürekli olduğunu varsayarak, $f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, Green Teoreminin uygulanabildiği bütün kapalı C eğrileri için

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0$$

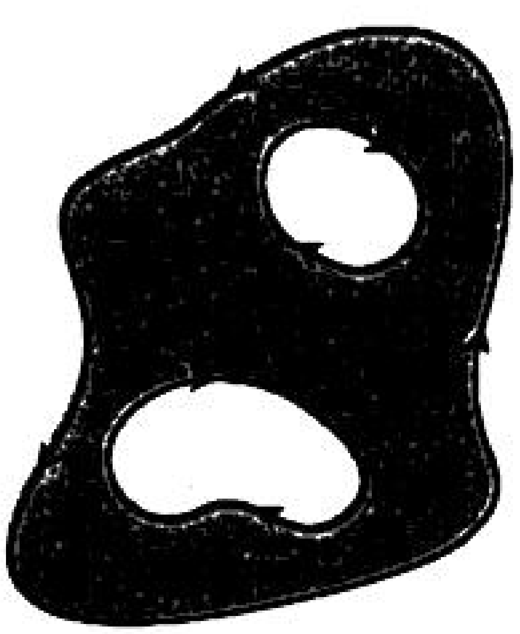
olduğunu gösterin (Tersi de doğrudur: Eğrisel integral her zaman sıfırsa, f Laplace denklemini sağlar).

34. İşi maksimize etmek Düzlemde, saat yönünün tersine yönlenmiş bütün düzgün, basit, kapalı eğriler arasından, üzerinde

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

kuvvetinin yaptığı işin en büyük olduğu eğriyi bulun (*İpucu:* (rot **F**) · **k** nerede pozitiftir?)

35. Delikler içeren bölgeler Green Teoremi, sınır eğrileri düzgün, basit ve kapalı olduğu ve sınırın her bileşeni üzerinde integral alırken R'yi hep solumuzda tutacak bir yön seçtiğimiz sürece, içinde sonlu sayıda delik bulunduran bir R bölgesinde geçerlidir (Şekil 16.37).



ŞEKİL 16.37 Green Teoremi, birden fazla deliği olan bölgelerde de geçerlidir (Alıştırma 35).

a. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ve C'de $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi olsun.

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds$$

akı integralini hesaplayın.

b. K, düzlemde (0, 0)'dan geçmeyen herhangi bir düzgün, basit, kapalı eğri olsun. Green Teoremini kullanarak

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds$$

integralinin, (0, 0)'ın K'nin içinde bulunup bulunmadığına bağlı olarak iki olası değeri olduğunu gösterin.

36. Bendixson kriteri Düzlemsel bir akışkan akışının *akış çizgileri* akışkanın parçacıkları tarafından çizilen düzgün eğrilerdir. Akışkanın hız alanının $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ vektörleri akış çizgilerinin teğet vektörleridir. Akış, basit bağlantılı bir R bölgesinde (içinde delik veya eksik nokta yok) gerçekleşiyorsa ve R içinde $M_x + N_y \neq 0$ ise, R'deki akış çizgilerinin hiçbirinin kapalı olmadığını gösterin. Başka bir deyişle, akışkanın hiçbir parçacığının R'de kapalı bir yörüngesi yoktur. $M_x + N_y \neq 0$ kriterine kapalı yörüngelerin yokluğu için **Bendixson kriteri** denir.

37. Green Teoreminin özel durumunun ispatını tamamlamak için (7) denklemini türetin.

38. Green Teoreminin genişletilmesinin tartışmasını tamamlamak için (10) denklemini türetin.

39. Korunmalı alanların Rot bileşeni Korunmalı iki boyutlu bir vektör alanının rotasyoneli için herhangi bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızın nedenlerini açıklayın.

40. Korunmalı alanların dolaşımı Green Teoremi korunmalı bir alanın dolaşımı hakkında bir şey söyler mi? Bu bildiğiniz herhangi bir şeyle uyuşur mu? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Dolaşım Bulmak

41–44 alıştırmalarında, bir BCS ve Green Teoremini kullanarak, bir **F** alanının basit kapalı bir C eğrisi etrafında saat yönünün tersine dolaşımını bulun. Aşağıdaki BCS adımlarını gerçekleştirin:

a. xy-düzleminde C'yi çizin.

b. Green Teoreminin rotasyonel formu için $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ integrandını belirleyin.

c. (a) şıkkındaki çiziminizden integrasyon sınırlarını (iki katlı integral) belirleyin ve dolaşım için rotasyonel integralini hesaplayın.

41. $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, C: $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi

42. $\mathbf{F} = (2x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$, C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsi

43. $\mathbf{F} = x^{-1}e^y\mathbf{i} + (e^y \ln x + 2x)\mathbf{j}$,

C: $y = 1 + x^4$ (alttan) ve $y = 2$ (üstten) ile tanımlı bölgenin sınırı

44. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + 4x^2 \ln y\,\mathbf{j}$,

C: Köşeleri (0, 0), (2, 0) ve (0, 4)'te olan üçgen.

Bu durumda,

$$M_{xy} = \iint_S z\delta\, d\sigma = \delta \iint_R z\frac{a}{z}\, dA = \delta a \iint_R dA = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

buluruz. Kabuğun kütle merkezi $(0, 0, a/2)$ noktasıdır. ∎

ALIŞTIRMALAR 16.5

Yüzey Alanı

1. $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloidinden $z = 2$ düzlemiyle kesilen yüzeyin alanını bulun.
2. $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloidinden $z = 2$ ve $z = 6$ düzlemleri ile kesilen şeridin alanını bulun.
3. $x + 2y + 2z = 5$ düzleminden duvarları $x = y^2$ ve $x = 2 - y^2$ olan silindirle kesilen bölgenin alanını bulun.
4. $x^2 - 2z = 0$ yüzeyinin, xy-düzleminde $x = \sqrt{3}$, $y = 0$ ve $y = x$ doğrularıyla sınırlı üçgenin üzerinde bulunan kısmının alanını bulun.
5. $x^2 - 2y - 2z = 0$ yüzeyinin, xy-düzleminde $x = 2$, $y = 0$ ve $y = 3x$ doğrularıyla sınırlı üçgenin üzerinde bulunan kısmının alanını bulun.
6. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen kapağın alanını bulun.
7. $z = cx$ (c sabittir) düzleminden $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle kesilen elipsin alanını bulun.
8. $x^2 + z^2 = 1$ silindirinin $x = \pm 1/2$ ve $y = \pm 1/2$ düzlemleri arasında kalan üst parçasının alanını bulun.
9. $x = 4 - y^2 - z^2$ paraboloidinin, yz-düzlemindeki $1 \le y^2 + z^2 \le 4$ halkasının üzerinde kalan kısmının alanını bulun.
10. $x^2 + y + z^2 = 2$ paraboloidinden $y = 0$ düzlemiyle kesilen yüzeyin alanını bulun.
11. $x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ yüzeyinin xy-düzlemindeki R: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ karesi üzerindeki kısmının alanını bulun.
12. $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ yüzeyinin, xy-düzlemindeki R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ karesi üzerindeki kısmının alanını bulun.

Yüzey İntegralleri

13. $g(x, y, z) = x + y + z$'yi birinci sekizde bir bölgeden $x = a$, $y = a$, $z = a$ düzlemleriyle kesilen küp yüzeyi üzerinde integre edin.
14. $g(x, y, z) = y + z$'yi birinci sekizde bir bölgede, koordinat eksenleri ve $x = 2$ ile $y + z = 1$ düzlemleriyle sınırlı takozun yüzeyi üzerinde integre edin.
15. $g(x, y, z) = xyz$'yi birinci sekizde bir bölgeden $x = a$, $y = b$ ve $z = c$ düzlemleriyle kesilen dikdörtgenler prizmasının yüzeyinde integre edin.
16. $g(x, y, z) = xyz$'yi $x = \pm a$, $y = \pm b$ ve $z = \pm c$ düzlemleriyle sınırlı cismin yüzeyi üzerinde integre edin.
17. $g(x, y, z) = x + y + z$'yi $2x + 2y + z = 2$ düzleminin birinci sekizde bir bölgedeki kısmı üzerinde integre edin.
18. $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$'ü $y^2 + 4z = 16$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey üzerinde integre edin.

Bir Yüzeydeki Akı

19 ve 20 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ alanının verilen yüzey üzerinden belirtilen yöndeki akısını bulun.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

    S: $z = 0$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ dikdörtgen yüzeyi, yön $\mathbf{k}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = yx^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

    S: $y = 0$, $-1 \le x \le 2$, $2 \le z \le 7$ dikdörtgen yüzeyi, yön $-\mathbf{j}$

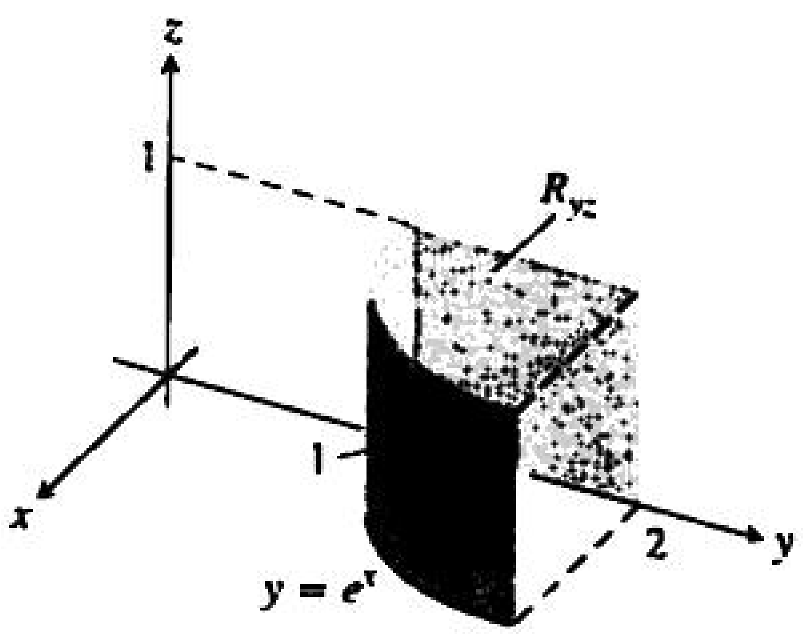
21–26 alıştırmalarında, $\mathbf{F}$ alanının $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgedeki kısmında orijinden uzaklaşan yönde olan akısını bulun.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = zx\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ alanının $z = 4 - y^2$ silindirinden $x = 0$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemiyle kesilen yüzeyden dışarı doğru akısını bulun.

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ alanının $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin dibinden $z = 1$ düzlemiyle kesilen yüzeyden dışarı doğru (z-ekseninden uzağa) akısını bulun.

29. S, $y = e^x$ silindirinin, yz-düzlemine (x-eksenine paralel olarak) izdüşümü R_{yz}: $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$ dikdörtgeni olan, birinci sekizde bir bölgedeki kısmı olsun (Şekle bakın). $\mathbf{n}$ de, S yüzeyinin yz-düzleminden uzaklaşan birim normali olsun. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alanının S üzerinde $\mathbf{n}$ yönündeki akısını bulun.



30. S, $y = \ln x$ silindirinin, xz-düzlemine (y-eksenine paralel olarak) izdüşümü R_{xz}: $1 \le x \le e$, $0 \le z \le 1$ dikdörtgeni olan, birinci sekizde bir bölgedeki kısmı olsun. $\mathbf{n}$ de, S'ye normal ve xz-düzleminden uzaklaşan birim vektör olsun. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$'nin S üzerinde $\mathbf{n}$ yönündeki akısını bulun.

31. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ alanının birinci sekizde bir bölgeden $x = a$, $y = a$, $z = a$ düzlemleriyle kesilen küpün yüzeyinden dışarı doğru akısını bulun.

32. $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ alanının $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ küresinden $z = 3$ düzlemiyle kesilen üst kapağın yüzeyindeki dışarı doğru akısını bulun.

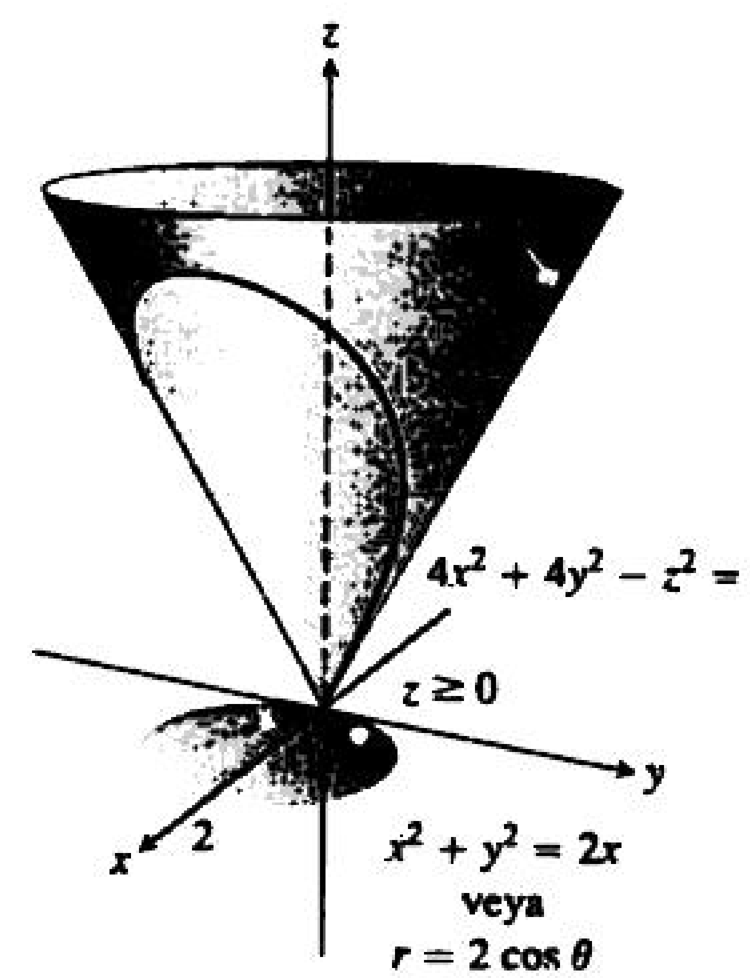
Momentler ve Kütleler

33. **Merkez** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgedeki kısmının merkezini bulun.

34. **Merkez** $y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 0$ silindirinden $x = 0$ ve $x = 3$ düzlemleriyle kesilen yüzeyin merkezini bulun (Örnek 4'teki yüzeye benzer).

35. **Sabit yoğunluklu ince kabuk** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ konisinden $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen sabit δ yoğunluklu ince bir kabuğun kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentiyle jirasyon yarıçapını bulun.

36. **Sabit yoğunluklu konik yüzey** $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, $z \ge 0$ konisinden $x^2 + y^2 = 2x$ dairesel silindiri ile kesilen sabit δ yoğunluklu ince kabuğun z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun (Şekle bakın).



37. **Küresel kabuklar**

a. a yarıçaplı ve sabit δ yoğunluklu ince küresel bir kabuğun bir çapı etrafındaki eylemsizlik momentini bulun (Bir yarım küresel kabukla çalışın ve sonucun iki katını alın).

b. Paralel Eksen Teoremini (Alıştırmalar 15.5) ve (a) şıkkındaki sonucu kullanarak kabuğa teğet bir doğruya göre eylemsizlik momentini bulun.

38. a. **Dondurmalı ve dondurmasız koniler** Taban yarıçapı a ve yüksekliği h olan bir koninin yan yüzeyinin (koni yüzeyi eksi taban yüzeyi) merkezini bulun.

b. Pappus formülünü (Alıştırmalar 15.5) ve (a) şıkkındaki sonucu kullanarak bir koninin bütün yüzeyinin (yan artı taban) merkezini bulun.

c. a yarıçaplı ve h yükseklikli bir koni bir dondurma külahına benzeyen bir yüzey oluşturacak şekilde bir yarım küreyle birleştiriliyor. Pappus formülünü ve (a) şıkkı ile Örnek 5'in sonuçlarını kullanarak S'nin merkezini bulun. Merkezi, yarım küre ve koninin paylaştıkları yüzeye yerleştirmek için koni ne kadar yüksek olmalıdır?

Yüzey Alanı İçin Özel Formüller

S, xy-düzlemindeki bir R_{xy} bölgesinde birinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir $z = f(x, y)$ fonksiyonuyla tanımlanan bir yüzeyse (Şekil 16.49), S aynı zamanda $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ fonksiyonunun, $F(x, y, z) = 0$ seviye yüzeyidir. R_{xy}'nin birim vektörünü $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ olarak almak

$$|\nabla F| = |f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$
$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |(f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1$$

ve

$$\iint_{R_{xy}} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy, \qquad (11)$$

verir.

Benzer şekilde, yz-düzlemindeki bir R_{yz} bölgesinin üzerindeki düzgün bir $x = f(y, z)$ yüzeyinin alanı

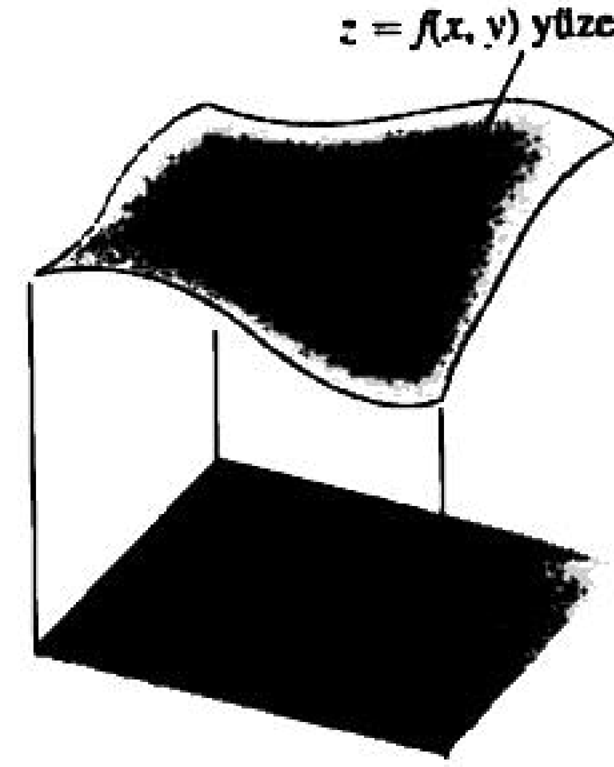
$$A = \iint_{R_{yz}} \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}\, dy\, dz \tag{12}$$

ve xz-düzlemindeki bir R_{xz} bölgesinin üzerindeki düzgün bir $y = f(x, z)$ yüzeyinin alanı

$$A = \iint_{R_{xz}} \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1}\, dx\, dz \tag{13}$$

olur. (11)–(13) denklemlerini kullanarak 39–44 alıştırmalarındaki yüzeylerin alanlarını bulun.

39. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altından $z = 3$ düzlemiyle kesilen yüzey.
40. $x = 1 - y^2 - z^2$ paraboloidinin "burnundan" yz-düzlemiyle kesilen yüzey.
41. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsinin arasında kalan bölgenin üzerindeki kısmı (*İpucu*: Bölgenin alanını bulmak için geometri formülleri kullanın).
42. $2x + 6y + 3z = 6$ düzleminden birinci sekizde bir bölgenin sınır düzlemleriyle kesilen üçgen. Alanı, her alan formülü için bir kere olmak üzere, üç yoldan hesaplayın



ŞEKİL 16.49 Bir $z = f(x, y)$ yüzeyi için, (3) Denklemindeki alan formülü

$$A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy$$

halini alır.

43. $y = (2/3)z^{3/2}$ silindirinden $x = 1$ ve $y = 16/3$ düzlemleriyle kesilen birinci sekizde bir bölgedeki yüzey.
44. $y + z = 4$ düzleminin, xz-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinden $x = 4 - z^2$ parabolüyle kesilen bölgenin üzerindeki kısmı.

16.6 Parametrize Yüzeyler

Düzlemde eğrileri üç farklı şekilde tanımladık:

Açık şekil:	$y = f(x)$
Kapalı şekil:	$F(x, y) = 0$
Parametrik vektör şekil:	$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b$

Uzayda yüzeyler için benzer tanımlarımız vardır:

Açık şekil:	$z = f(x, y)$
Kapalı şekil:	$F(x, y, z) = 0$

Ayrıca bir yüzey üzerindeki bir noktanın konumunu iki değişkenli bir vektör fonksiyonu olarak veren bir parametrik şekil daha vardır. Bu bölüm yüzey alanı ve yüzey integralleri araştırmamızı parametrik olarak tanımlanan yüzeylere genişletir.

Yüzeylerin Parametrizasyonu

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{1}$$

uv-düzleminde bulunan bir R bölgesinde tanımlı ve R'nin içinde bire-bir olan sürekli bir vektör fonksiyon olsun (Şekil 16.50). $\mathbf{r}$'nin görüntü bölgesine, $\mathbf{r}$ tarafından tanımlanan veya çizilen S **yüzeyi** deriz. (1) Denklemi R bölgesi ile birlikte yüzeyin bir **parametrizasyonunu** oluşturur. u ve v değişkenleri **parametreler** ve R **parametre bölgesidir**.

ALIŞTIRMALAR 16.6

Yüzeylerin Parametrizasyonlarını Bulmak

1–16 alıştırmalarında, yüzeyin bir parametrizasyonunu bulun (Bunu yapmanın birçok doğru yolu vardır, o yüzden yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir).

1. $z = x^2 + y^2, z \leq 4$ paraboloidi
2. $z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$ paraboloidi
3. **Kesik koni** $z = \sqrt{x^2 + y^2}/2$ konisinin birinci sekizde bir bölgede, $z = 0$ ve $z = 3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
4. **Kesik koni** $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 2$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan kısmı
5. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen kapak
6. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin birinci sekizde bir bölgede xy-düzlemi ile $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi arasında kalan kısmı
7. **Küresel şerit** $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ küresinin $z = \sqrt{3}/2$ ve $z = -\sqrt{3}/2$ düzlemleri arasında kalan kısmı
8. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ küresinden $z = -2$ düzlemiyle kesilen üst parça
9. **Düzlemler arasında parabolik silindir** $z = 4 - y^2$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 2$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey
10. **Düzlemler arasında parabolik silindir** $y = x^2$ parabolik silindirinden $z = 0$, $z = 3$ ve $y = 2$ düzlemleriyle kesilen yüzey
11. **Dairesel silindirik şerit** $y^2 + z^2 = 9$ silindirinin $x = 0$ ve $x = 3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
12. **Dairesel silindirik şerit** $x^2 + z^2 = 4$ silindirinin $y = -2$ ve $y = 2$ düzlemleri arasında kalan xy-düzleminin üzerindeki kısmı
13. **Silindir içinde düzlem** $x + y + z = 1$ düzleminin
    a. $x^2 + y^2 = 9$ silindirinin içindeki kısmı
    b. $y^2 + z^2 = 9$ silindirinin içindeki kısmı
14. **Silindir içinde düzlem** $x - y + 2z = 2$ düzleminin
    a. $x^2 + z^2 = 3$ silindirinin içindeki kısmı
    b. $y^2 + z^2 = 2$ silindirinin içindeki kısmı
15. **Dairesel silindirik şerit** $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ silindirinin $y = 0$ ve $y = 3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
16. **Dairesel silindirik şerit** $y^2 + (z - 5)^2 = 25$ silindirinin $x = 0$ ve $x = 10$ düzlemleri arasında kalan kısmı

Parametrize Yüzeylerin Alanları

17–26 alıştırmalarında, yüzeyin alanını iki katlı bir integral olarak ifade etmek için bir parametrizasyon kullanın. Sonra integrali hesaplayın (İntegralleri kurmanın birçok doğru yolu vardır, o yüzden yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir. Ancak değerleri aynı olmalıdır).

17. **Silindir içinde düzlem** $y + 2z = 2$ düzleminin, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin içindeki kısmı
18. **Silindir içinde düzlem** $z = -x$ düzleminin, $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin içindeki kısmı
19. **Kesik koni** $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 2$ ve $z = 6$ düzlemleri arasında kalan kısmı
20. **Kesik koni** $z = \sqrt{x^2 + y^2}/3$ konisinin $z = 1$ ve $z = 4/3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
21. **Dairesel silindirik şerit** $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 1$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan kısmı
22. **Dairesel silindirik şerit** $x^2 + z^2 = 10$ silindirinin $y = -1$ ve $y = 1$ düzlemleri arasında kalan kısmı
23. **Parabolik kapak** $z = 2 - x^2 - y^2$ paraboloidinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen kapak
24. **Parabolik şerit** $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 1$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan kısmı
25. **Kesik küre** $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen alt bölüm
26. **Küresel şerit** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z = -1$ ve $z = \sqrt{3}$ düzlemleri arasındaki kısmı

Parametrize Yüzeyler Üzerinde İntegraller

27–34 alıştırmalarında, verilen fonksiyonu verilen yüzey üzerinde integre edin.

27. **Parabolik silindir** $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, parabolik silindiri üzerinde $G(x, y, z) = x$
28. **Dairesel silindir** $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, $1 \leq x \leq 4$, silindirik yüzeyi üzerinde $G(x, y, z) = z$
29. **Küre** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresi üzerinde $G(x, y, z) = x^2$
30. **Yarı küre** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ yarım küresi üzerinde $G(x, y, z) = z^2$
31. **Düzlem parçası** $x + y + z = 4$ düzleminin, xy-düzlemindeki $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, karesinin üzerinde bulunan kısmı üzerinde $F(x, y, z) = z$
32. **Koni** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ konisi üzerinde $F(x, y, z) = z - x$
33. **Parabolik kubbe** $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ parabolik kubbesi üzerinde $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$,
34. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi üzerinde bulunan kısmı üzerinde $H(x, y, z) = yz$

Parametrize Yüzeyler Üzerinde Akı

35–44 Alıştırmalarında, $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ akısını yüzeyde verilen yönde bulmak için bir parametrizasyon kullanın.

35. Parabolik silindir $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$, $z = 4 - y^2$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzeyden dışarı doğru (x-ekseninden uzaklaşan normal)

36. Parabolik silindir $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, $y = x^2, -1 \le x \le 1$, parabolik silindirinden $z = 0$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen yüzeyden dışarı doğru (yz-düzleminden uzaklaşan normali)

37. Küre $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$, birinci sekizde bir bölgede $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinden orijinden uzaklaşan yönde

38. Küre $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinden orijinden uzaklaşan yönde

39. Düzlem $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$, $x + y + z = 2a$ düzleminin, xy-düzlemindeki $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, karesinin üzerinde bulunan kısmından yukarı doğru

40. Silindir $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = a$ düzlemleriyle kesilen kısmından dışarı doğru.

41. Koni $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$, konisinden dışarı doğru (z-ekseninden uzaklaşan normal)

42. Koni $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$, konisinden dışarı doğru (z-ekseninden uzaklaşan normal)

43. Kesik koni $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen parçasından dışarı doğru (z-ekseninden uzaklaşan normal yönünde)

44. Paraboloid $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $z = x^2 + y^2$, paraboloidinin altından $z = 1$ düzlemiyle kesilen yüzeyinden dışarı (z-ekseninden uzaklaşan normal yönünde)

Kütle ve Momentler

45. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgedeki kısmının merkezini bulun.

46. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ konisinden $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen sabit δ yoğunluklu ince kabuğun kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentiyle jirasyon yarıçapını bulun.

47. Sabit δ yoğunluklu ince bir küresel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ kabuğunun z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

48. Sabit δ yoğunluklu ince bir konik $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$. kabuğunun z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Parametrize Yüzeylere Teğet Düzlemler

Parametrize bir $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ yüzeyinin bir $P_0(f(u_0, v_0), g(u_0, v_0), h(u_0, v_0))$ noktasındaki teğet düzlemi, P_0'dan geçen ve P_0'daki teğet vektörler $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ ve $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$'ın vektörel çarpımı olan, $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ vektörüne normal olan düzlemdir. 49–52 alıştırmalarında, verilen P_0 noktasında yüzeye teğet olan düzlemi bulun. Sonra yüzeyin Kartezyen denklemini bulun ve yüzeyle teğet düzlemi birlikte çizin.

49. Koni $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, konisi, $(r, \theta) = (2, \pi/4)$'e karşı gelen $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ noktasında

50. Yarı küre $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (4\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (4\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, yarı küre yüzeyi, $(\phi, \theta) = (\pi/6, \pi/4)$'e karşılık gelen $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ noktasında

51. Dairesel silindir $\mathbf{r}(\theta, z) = (3\sin 2\theta)\mathbf{i} + (6\sin^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le \pi$, silindiri, $(\theta, z) = (\pi/3, 0)$'a karşılık gelen $P_0(3\sqrt{3}/2, 9/2, 0)$ noktasında (Örnek 3'e bakın).

52. Parabolik silindir $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ parabolik silindir yüzeyi, $(x, y) = (1, 2)$'ye karşılık gelen $P_0(1, 2, -1)$ noktasında

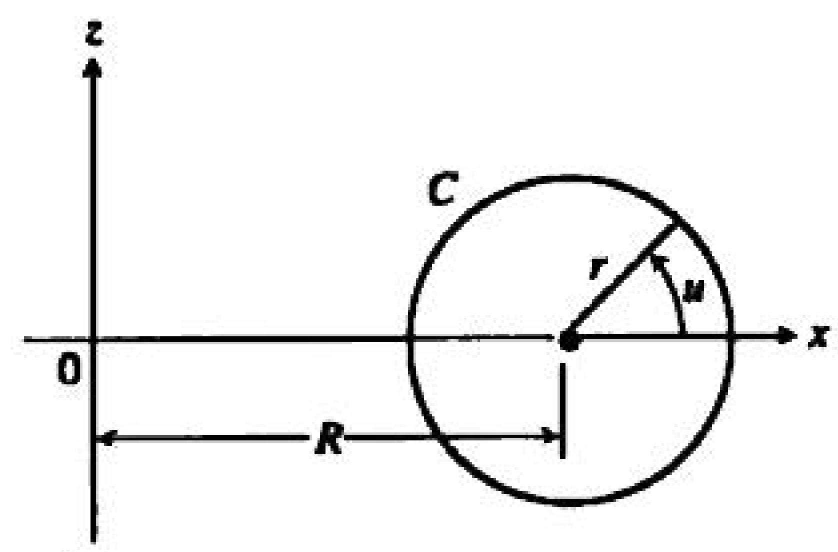
Parametrizasyonun Başka Örnekleri

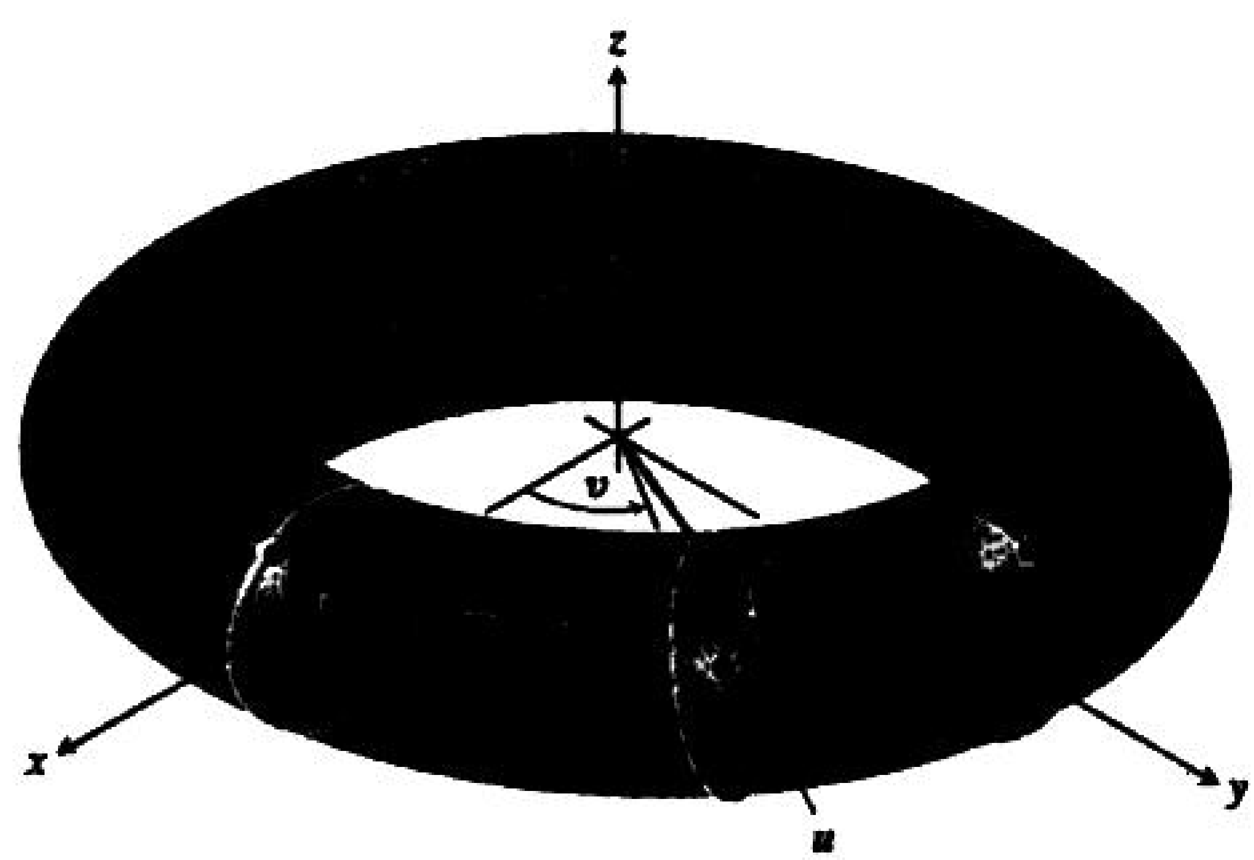
53. a. Bir *dönel torus* (simit) xz-düzlemindeki bir C çemberinin uzayda z-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeydir. (Şekle bakın) C'nin yarıçapı $r > 0$ ve merkezi $(R, 0, 0)$ ise, torusun bir parametrizasyonunun, $0 \le u \le 2\pi$ ve $0 \le v \le 2\pi$ şekildeki açılar olmak üzere

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v)\mathbf{i} + ((R + r\cos u)\sin v)\mathbf{j} + (r\sin u)\mathbf{k}$$

olduğunu gösterin.

b. Torusun yüzey alanının $A = 4\pi^2 Rr$ olduğunu gösterin.



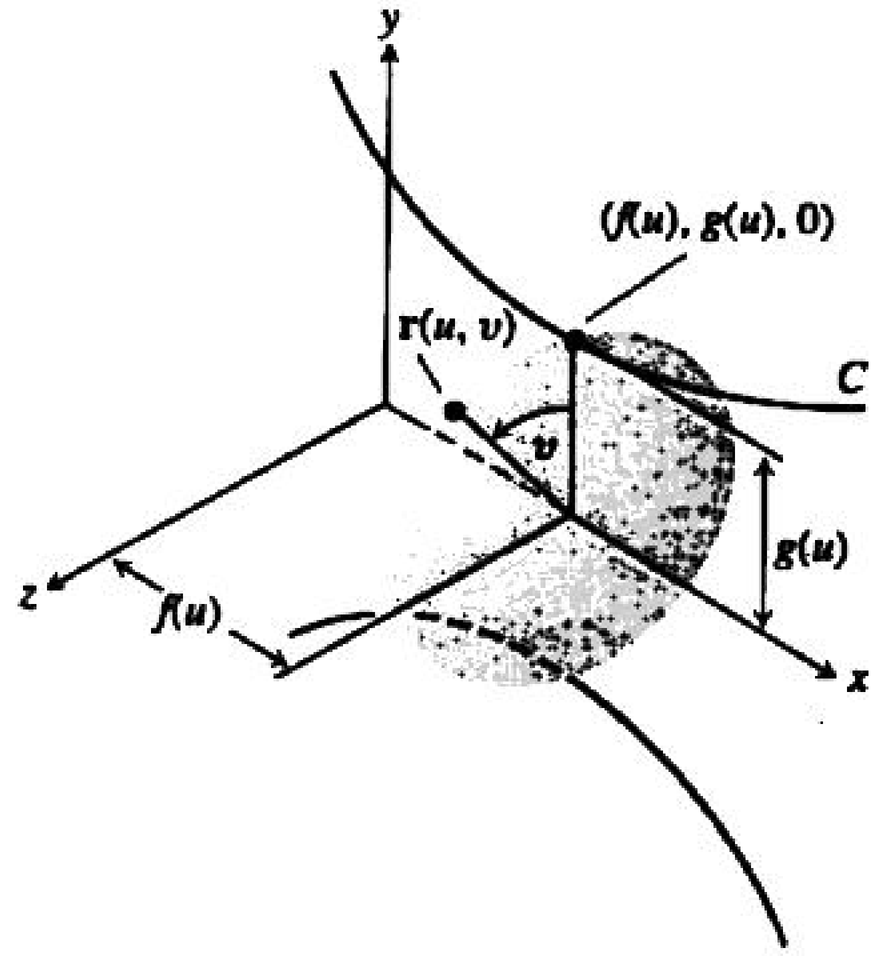


54. Bir dönel yüzeyin parametrelenmesi $a \le u \le b$ için $g(u) > 0$ olmak üzere, parametrelenmiş C: $(f(u), g(u))$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürüldüğünü varsayın.

a. $0 \le v \le 2\pi$, xy-düzlemiyle yüzey üzerindeki $\mathbf{r}(u, v)$ noktası arasındaki açı olmak üzere, ortaya çıkan dönel yüzeyin bir parametrizasyonunun

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{i} + (g(u)\cos v)\mathbf{j} + (g(u)\sin v)\mathbf{k}$$

olduğunu gösterin (Aşağıdaki şekle bakın). $f(u)$'nun dönme ekseni *boyunca* uzaklığı, $g(u)$'nun ise dönme *ekseninden* uzaklığı ölçtüğüne dikkat edin.



b. $x = y^2, y \ge 0$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin parametrizasyonunu bulun.

55. a. Bir elipsoidin parametrelenmesi $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ elipsinin $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, parametrizasyonunu hatırlayın (Bölüm 3.5, Örnek 13). θ ve ϕ açılarını küresel koordinatlarda tanımlandığı gibi kullanarak, $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ elipsoidinin bir parametrizasyonunun

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (b\sin\theta\cos\phi)\mathbf{j} + (c\sin\phi)\mathbf{k}$$

olduğunu gösterin.

b. Elipsoidin yüzey alanı için bir integral yazın, ama integrali hesaplamayın.

56. Tek parçalı hiperboloid

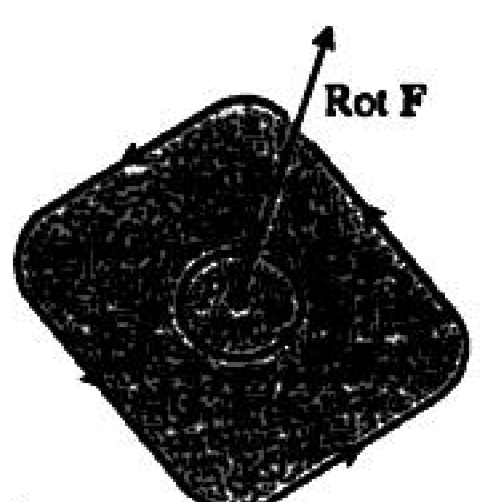
a. Tek parçadan ibaret $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperboloidi için, $x^2 + y^2 = r^2$ çemberi ile ilişkili θ açısı ve $r^2 - z^2 = 1$ hiperbolik fonksiyonuyla ilişkili hiperbolik u parametresi cinsinden bir parametrizasyon bulun. (Bölüm 7.8, Alıştırma 84'e bakın.)

b. (a) şıkkındaki sonucu $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ hiperboloidine genelleştirin.

57. (*Alıştırma 56'nın devamı*) $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ hiperboloidine, $x_0^2 + y_0^2 = 25$ olmak üzere, $(x_0, y_0, 0)$ noktasında teğet olan düzlemin Kartezyen denklemini bulun.

58. İki parçalı hiperboloid $(z^2/c^2) - (x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperboloidinin bir parametrizasyonunu bulun.

16.7 Stokes Teoremi



ŞEKİL 16.59 Üç boyutlu bir akışkan akışında bir düzlemin bir P noktasındaki dolaşım vektörü. Dolaşım eğrisiyle sağ el kuralına uygun ilişkisine dikkat edin.

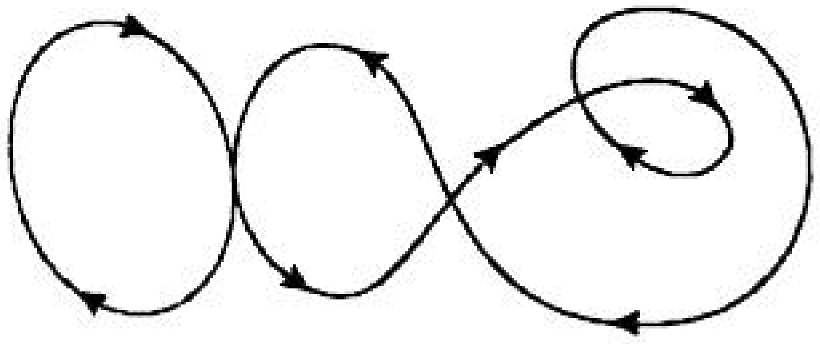
Bölüm 16.4'te gördüğümüz gibi, iki boyutlu bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanının bir (x, y) noktasındaki dolaşım yoğunluğu veya rotasyonel bileşeni, $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ skaler büyüklüğü ile tanımlanır. Üç boyutta, bir düzlemin bir P noktası etrafındaki dolaşım bir vektörle tanımlanır. Bu vektör dolaşım düzlemine normaldir (Şekil 16.59) ve kendisine, dolaşım eğrisiyle sağ el kuralına uygun bir ilişki sağlayan bir yönü gösterir. Vektörün uzunluğu akışın dönüş hızını verir ve genellikle dolaşım düzleminin P'deki eğikliği ile değişir. $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ alanı ile bir akıştaki en büyük dolaşımlı vektörün

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{1}$$

rotasyonel vektörü olduğu görülür. Bu bilgiyi, Green teoreminin dolaşım–rotasyonel şeklinin uzaya genelleştirilmesi olan Stokes Teoreminden alırız.

$(\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ ifadesinin, Bölüm 16.4'te $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ iken yapmış olduğumuz tanımla uyuştuğuna dikkat edin. (1) Denklemindeki rot $\mathbf{F}$ formülü genellikle aşağıdaki sembolik operatör kullanılarak yazılır:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$



ŞEKİL 16.68 Basit bağlantılı açık bir bölgede, kendilerini kesen türetilebilir eğriler Stokes Teoreminin uygulanabileceği döngülere ayrıştırılabilir.

sindeki her türetilebilir basit kapalı C eğrisinin, yine D içinde bulunan düzgün iki-yüzlü bir S bölgesinin sınırı olduğunu söyler. Dolayısıyla, Stokes Teoreminden,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

bulunur.

İkinci adım Şekil 16.68'deki gibi kendilerini kesen eğriler içindir. Amaç, bunları yönlendirilebilir yüzeyleri çevreleyen basit döngülere ayırmak, her seferinde bir döngüye Stokes Teoremini uygulamak ve sonuçları toplamaktır. ■

Aşağıdaki diyagram bağlantılı ve basit bağlantılı açık bölgelerde tanımlı korunmalı alanlar için sonuçları özetler.

$$\begin{array}{ccc}
\text{D üzerinde $\mathbf{F}$ korunmalı} & \xLeftrightarrow{\text{Teorem 1, Bölüm 16.3}} & \text{D üzerinde } \mathbf{F} = \nabla f \\
\Big\Updownarrow \text{ Teorem 2, Bölüm13.3} & & \Big\Updownarrow \text{ Vektör bagıntısı (8 Denk.) (sürekli ikinci mertebe kısmi türevler)} \\
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = 0 \text{ D'deki herhangi bir kapalı yolda} & \xLeftarrow[\text{Teorem 6, Tanım kümesinin basit bağlantılılığı ve Stokes teoremi}]{} & \text{D boyunca } \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}
\end{array}$$

ALIŞTIRMALAR 16.7

Stokes Teoremiyle Dolaşım Hesaplamak

1–6 Alıştırmalarında, Stokes Teoremindeki yüzey integralini kullanarak $\mathbf{F}$ alanının C eğrisi üzerinde belirtilen yönde dolaşımını hesaplayın.

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   C: xy-düzlemindeki $4x^2 + y^2 = 4$ elipsi, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

2. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

   C: xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 9$ çemberi, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

   C: $x + y + z = 1$ düzleminden birinci sekizde bir bölgeyle kesilen üçgenin sınırı, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

4. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

   C: $x + y + z = 1$ düzleminden birinci sekizde bir bölgeyle kesilen üçgenin sınırı, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

5. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

   C: xy-düzleminde $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla sınırlanan kare, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

6. $\mathbf{F} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$

   C: $x^2 + y^2 = 4$ silindiriyle $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$, yarım küresinin kesişimi, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

Rotasyonelin Akısı

7. $\mathbf{n}$,

   $$S:\quad 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \qquad z \ge 0$$

   eliptik kabuğunun dış birim normali ve

   $$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/2}\sin e^{\sqrt{xyz}}\,\mathbf{k}$$

   olsun.

   $$\iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

   integralinin değerini bulun. (*İpucu*: Kabuğun tabanındaki elipsin bir parametrelenişi $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$'dir.)

8. $\mathbf{n}$,

   $$S:\quad 4x^2 + y + z^2 = 4, \qquad y \ge 0$$

   eliptik kabuğunun dış birim normali (orijinden uzaklaşan normal) ve

$$\mathbf{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\mathbf{i} + (\tan^{-1} y)\mathbf{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\mathbf{k}$$

olsun.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralinin değerini bulun.

9. S, tepesi $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = h$ ile birlikte $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le h$, silindiri ve $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ olsun. Stokes Teoremini kullanarak $\nabla \times \mathbf{F}$'nin S'den dışarı doğru akısını bulun.

10. S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ yarım küresi olmak üzere,

$$\iint_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralini hesaplayın.

11. **Rotasyonelin Akısı** C'nin sınırladığı bütün yönlenmiş ve C üzerinde aynı pozitif yöne neden olan S yüzeyleri için

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralinin değerinin aynı olduğunu gösterin.

12. $\mathbf{F}$, düzgün kapalı yönlendirilmiş bir S yüzeyini ve içini kapsayan bir bölgede tanımlı ve türetilebilir bir vektör alanı olsun. $\mathbf{n}$ de S'nin birim normal vektör alanı olsun. S'nin düzgün basit kapalı bir C eğrisiyle birleşen S_1 ve S_2 yüzeylerinin bileşimi olduğunu varsayın.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

Parametrize Yüzeylerde Stokes Teoremi

13–18 alıştırmalarında, Stokes Teoremindeki yüzey integralini kullanarak, $\mathbf{F}$ alanının rotasyonelinin, dış birim normal $\mathbf{n}$ yönünde, S yüzeyi üzerindeki akısını bulun.

13. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}$,
$0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

14. $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (9 - r^2)\mathbf{k}$,
$0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$

15. $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$,
$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

16. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (5 - r)\mathbf{k}$,
$0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le 2\pi$

17. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + (5 - 2x)\mathbf{j} + (z^2 - 2)\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (\sqrt{3}\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

18. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\cos\phi)\mathbf{k}$,
$0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

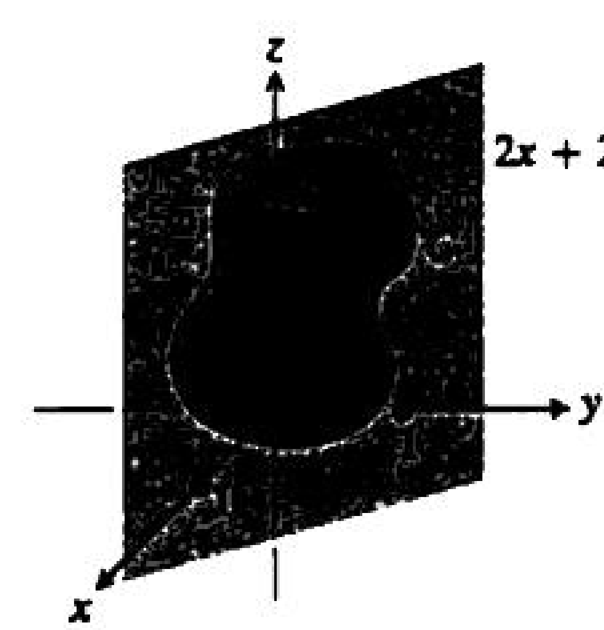
Teori ve Örnekler

19. **Sıfır dolaşım** $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ bağıntısını (metindeki (8) denklemi) ve Stokes Teoremini kullanarak, aşağıdaki alanların uzaydaki herhangi bir düzgün yönlendirilebilir yüzeyin sınırındaki dolaşımlarının sıfır olduğunu gösterin.
   a. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$
   b. $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$
   c. $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
   d. $\mathbf{F} = \nabla f$

20. **Sıfır dolaşım** $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ olsun. $\mathbf{F} = \nabla f$ alanının, xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi üzerinde saat yönünde dolaşımının sıfır olduğunu aşağıdaki yollardan bulun:
   a. $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ alıp ve $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'yi çember üzerinde integre ederek
   b. Stokes Teoremini uygulayarak

21. C, $2x + 2y + z = 2$ düzleminde, aşağıdaki gibi yönlendirilmiş basit kapalı düzgün bir eğri olsun.

$$\oint_C 2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz$$



integralinin, C'nin konumuna veya şeklinde değil, sadece C'nin çevrelediği bölgenin alanına bağlı olduğunu gösterin.

22. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ise, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ olduğunu gösterin.

23. Bileşenleri iki kere türetilebilen ve rotasyoneli $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olan bir vektör alanı bulun veya böyle bir alan bulunmadığını ispatlayın.

24. Stokes Teoremi, rotasyoneli sıfır olan bir alanın dolaşımı hakkında özel bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

25. R, xy-düzleminde parçalı olarak düzgün basit kapalı bir C eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun ve R'nin x ve y-eksenleri etrafındaki

eylemsizlik momentlerinin I_x ve I_y olduğunu varsayın. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmak üzere,

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \mathbf{n}\, ds$$

integralini I_x ve I_y cinsinden hesaplayın

26. Sıfır rotasyonel, lakin alan korunmalı değil

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

alanının rotasyonelinin sıfır olduğunu, ama C, xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberiyse

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

integralinin sıfır olmadığını gösterin (Teorem 6 burada geçerli değildir, çünkü **F**'nin tanım bölgesi basit bağlantılı değildir. **F** alanı z-ekseni boyunca tanımlı değildir, dolayısıyla **F**'nin tanım bölgesinden çıkmadan C'yi bir noktaya büzmek mümkün değildir).

16.8 Diverjans Teoremi ve Bir Birleştirilmiş Teori

Düzlemde Green Teoreminin diverjans şekli, bir vektör alanının basit kapalı bir eğriden dışarı doğru net akısının, alanın diverjansının eğrinin çevrelediği bölgede integre edilmesiyle hesaplanabileceğini ifade eder. Buna üç boyutta karşılık gelen ve Diverjans Teoremi denilen teorem, bir vektör alanının uzayda kapalı bir yüzeydeki dışarı doğru net akısının, alanın diverjansının yüzeyin çevrelediği bölgede integre edilerek hesaplanabileceğini ifade eder. Bu bölümde, Diverjans Teoremini ispat edecek ve bunun akının hesaplanmasını nasıl kolaylaştırdığını göstereceğiz. Ayrıca bir elektrik alandaki akı için Gauss yasasını ve hidrodinamikteki süreklilik denklemini türeteceğiz. Son olarak, bölümün vektör integral teoremlerini tek bir temel teoreme indirgeyeceğiz.

Üç Boyutta Diverjans

Bir $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ vektör alanının **diverjansı**

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \qquad (1)$$

skaler fonksiyonudur. "div **F**" sembolü "**F**'nin diverjansı" veya "div **F**" olarak okunur. $\nabla \cdot \mathbf{F}$ gösterimi "del nokta **F**" olarak okunur.

Üç boyutta div **F**'nin fiziksel yorumu iki boyuttakiyle aynıdır. **F** bir akışkan akışının hız alanıysa, div **F**'nin bir (x, y, z) noktasındaki değeri akışkanın (x, y, z)'de pompalandığı veya boşaltıldığı hızdır. Diverjans birim hacim başına akı veya o noktadaki akı yoğunluğudur.

ÖRNEK 1 Diverjans Bulmak

$\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$'nin diverjansını bulun.

Çözüm **F**'nin diverjansı

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$

olarak bulunur. ■

Analizin Temel Teoremi, Green Teoreminin akı formu ve Diverjans Teoreminin hepsi, bir bölgede bir **F** alanına etki eden $\nabla\cdot$ diferansiyel operatörünün integralinin, bölgenin sınırındaki normal alan bileşenlerinin toplamına eşit olduğunu söyler (Burada, Green Teoremindeki eğrisel integrali ve Diverjans Teoremindeki yüzey intergalini, sınır üzerindeki "toplamlar" olarak yorumluyoruz).

Stokes Teoremi ve Green Teoreminin teğet formu, her şey düzgün olarak yönlendirildiğinde, bir alana uygulanan rotasyonelin normal bileşeninin integralinin, yüzeyin sınırındaki teğet alan bileşenlerinin toplamına eşit olduğunu söyler.

Bu yorumların güzelliği, altlarında, aşağıdaki gibi ifade edebileceğimiz harika bir gözlemin yatmasındadır.

> Bir alana etki eden diferansiyel bir operatörün bir bölgedeki integrali, o operatöre uygun, alan bileşenlerinin bölgenin sınırındaki toplamına eşittir.

ALIŞTIRMALAR 16.8

Diverjans Hesaplama

1–4 alıştırmalarında, alanın diverjansını bulun.

1. Şekil 16.14'teki spin alanı.
2. Şekil 16.13'teki radyal alan.
3. Şekil 16.9'daki yerçekimi alanı.
4. Şekil 16.12'deki hız alanı.

Dışarı Doğru Akıyı Hesaplamak İçin Diverjans Teoremini Kullanmak

5–16 alıştırmalarında, Diverjans Teoremini kullanarak, **F**'nin D bölgesinin sınırı üzerinde, dışarı doğru akısını bulun.

5. **Küp** $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$

   D: $x = \pm 1, y = \pm 1$ ve $z = \pm 1$ düzlemleriyle sınırlı küp

6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   a. **Küp** D: Birinci sekizde bir bölgeden $x = 1, y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp

   b. **Küp** D: $x = \pm 1, y = \pm 1$ ve $z = \pm 1$ düzlemleriyle sınırlı küp

   c. **Silindirik kutu** D: $x^2 + y^2 \le 4$ silindirinden $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleri ile kesilen bölge

7. **Silindir ve paraboloid** $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

   D: $x^2 + y^2 \le 4$ silindirinin içinde $z = 0$ düzlemiyle $z = x^2 + y^2$ paraboloidi arasında kalan bölge

8. **Küre** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

   D: $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ küresi

9. **Küre parçası** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$

   D: Birinci sekizde bir bölgeden $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresiyle kesilen bölge

10. **Silindirik kutu** $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$

    D: Birinci sekizde bir bölgeden $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ve $z = 3$ düzlemiyle kesilen bölge.

11. **Takoz** $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

    D: Birinci sekizde bir bölgeden $y + z = 4$ düzlemi ve $4x^2 + y^2 = 16$ eliptik silindiriyle kesilen takoz.

12. **Küre** $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

    D: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ bölgesi

13. **Kalın küre** $\mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

    D: $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ bölgesi

14. **Kalın küre** $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

    D: $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ bölgesi

15. **Kalın küre** $\mathbf{F} = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$

    D: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küreleri arasındaki bölge

16. **Kalın silindir** $\mathbf{F} = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} - \left(\dfrac{2z}{x}\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)\mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$

    D: Kalın duvarlı $1 \le x^2 + y^2 \le 2$, $-1 \le z \le 2$ silindiri

Rotasyonel ve Diverjansın Özellikleri

17. div (rot G) sıfırdır

a. $G = Mi + Nj + Pk$ alanının bileşenlerinin gerekli kısmi türevleri sürekliyse, $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} = 0$ olduğunu gösterin.

b. $\nabla \times \mathbf{G}$ alanının kapalı bir yüzeydeki akısı hakkında nasıl bir sonuca varırsınız? Yanıtınızı açıklayın.

18. $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$ türetilebilir vektör alanları ve a ile b de keyfi reel sabitler olsun. Aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$

b. $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$

c. $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$

19. $\mathbf{F}$ türetilebilir bir vektör alanı ve $g(x, y, z)$ de türetilebilir skaler bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$

b. $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$

20. $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ türetilebilir bir vektör alanıysa, $\mathbf{F} \cdot \nabla$ gösterimini

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}$$

olarak tanımlarız. Türetilebilir vektör alanları $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$ için aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$

b. $\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$

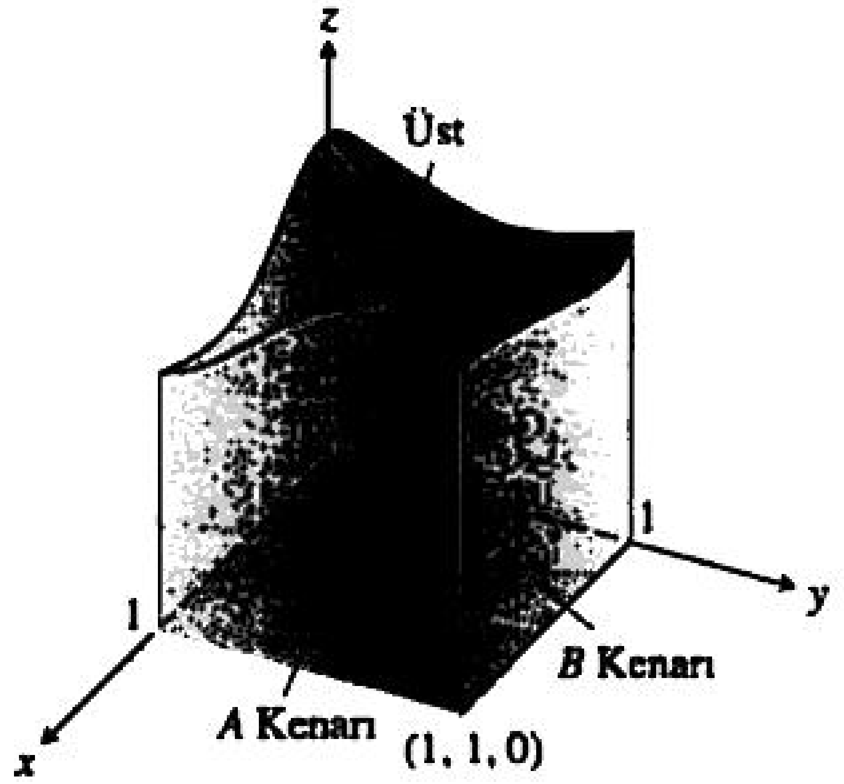
Teori ve Örnekler

21. $\mathbf{F}$, uzayın düzgün kapalı bir S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesini içeren bir parçasında, bileşenlerinin sürekli birinci mertebe kısmi türevleri var olan bir alan olsun. $|\mathbf{F}| \le 1$ ise,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

integralinin büyüklüğü üzerine bir sınır konulabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

22. Şekilde gösterilen kapalı küpe benzer cismin tabanı xy-düzlemindeki birim karedir. Dört kenar $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ ve $y = 1$ düzlemlerinde bulunur. Üstü, bağıntısı bilinmeyen keyfi bir düzgün yüzeydir. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}$ olsun ve $\mathbf{F}$'nin A kenarından dışarı doğru akısının 1 ve B kenarından dışarı doğru akısının -3 olduğunu varsayın. Üst taraftan dışarı doğru akı hakkında bir sonuç çıkarabilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.



23. a. Konum vektör alanı $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$'nin düzgün kapalı bir S yüzeyinden dışarı doğru akısının, yüzeyin çevrelediği bölgenin hacminin üç katı olduğunu gösterin.

b. $\mathbf{n}$, S yüzeyinin dışarı doğru birim normal vektör alanı olsun. $\mathbf{F}$'nin, S'nin her noktasında $\mathbf{n}$'ye ortogonal olmasının mümkün olmadığını gösterin.

24. Maksimum akı $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le 1$ eşitsizlikleriyle tanımlı bütün dikdörtgen şekilli cisimler arasından $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$'nin altı yüzeyden dışarı doğru akısının en büyük olduğu cismi bulun. En büyük akı nedir?

25. Bir katı cismin hacmi $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olsun ve S yüzeyinin, Diverjans Teoreminin koşullarını sağladığını varsayın. D'nin hacminin

$$D\text{'nin hacmi} = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

formülüyle verildiğini gösterin.

26. Sabit bir alanın akısı Sabit bir $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ vektör alanının, Diverjans Teoreminin uygulanabileceği herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı doğru akısının sıfır olduğunu gösterin.

27. Harmonik fonksiyonlar Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, f fonksiyonuna D'de *harmonik* denir.

a. f'nin düzgün bir S yüzeyiyle çevrelenen sınırlı bir D bölgesinde harmonik olduğunu ve $\mathbf{n}$'nin S üzerinde seçilen birim normal vektör olduğunu varsayın. $\nabla f \cdot \mathbf{n}$, yani f'nin $\mathbf{n}$ yönündeki türevinin S üzerindeki integralinin sıfırı olduğunu gösterin.

b. f, D üzerinde harmonik ise,

$$\iint_S f\, \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\, dV.$$

olduğunu gösterin.

28. Bir gradiyent alanın akısı S, $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgede bulunan kısmının yüzeyi ve $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. olsun.

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

akısını hesaplayın ($\nabla f \cdot \mathbf{n}$, f'nin $\mathbf{n}$ yönündeki türevidir).

29. Green'in birinci formülü f ve g'nin, parçalı olarak düzgün bir S yüzeyiyle sınırlı, kapalı bir D bölgesinde birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan skaler fonksiyonlar olduklarını varsayın.

$$\iint_S f\,\nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV. \qquad (9)$$

olduğunu gösterin. (9) Denklemi **Green'in birinci formülüdür.** (*İpucu:* $\mathbf{F} = f\,\nabla g$ alanına Diverjans Teoremini uygulayın.)

30. Green'in ikinci formülü (*Alıştırma 29'un devamı.*) (9) Denkleminde f ve g'nin yerlerini değiştirerek benzer bir formül elde edin. Sonra bu formülü (9) Denkleminden çıkararak,

$$\iint_S (f\,\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f\,\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV. \qquad (10)$$

olduğunu gösterin. Bu denklem **Green'in ikinci formülüdür.**

31. Kütle korunumu $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ uzayda bir D bölgesinde sürekli olarak türetilebilen bir vektör alanı ve $p(t, x, y, z)$ de sürekli olarak türetilebilen skaler bir fonksiyon olsun. t değişkeni zaman aralığını gösterir. Kütle Korunumu Yasası, D'yi çevreleyen yüzey S olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\, dV = -\iint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

olduğunu söyler.

a. $\mathbf{v}$ bir hız akış alanı ise ve p de akışkanın t anında (x, y, z) noktasındaki yoğunluğunu temsil ediyorsa, kütle korunumunun fiziksel bir yorumunu yapın.

b. Diverjans Teoremini ve Leibniz kuralını,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\, dV = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\, dV$$

kullanarak, Kütle Korunumu Yasasının

$$\nabla \cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

(süreklilik denklemine eşdeğer olduğunu gösterin (Birinci terim $\nabla \cdot p\mathbf{v}$'de t değişkeninin, ikinci terim $\partial p/\partial t$'de ise D'deki (x, y, z) noktasının sabit tutulduğu varsayılmaktadır).

32. Isı difüzyon denklemi İkinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan $T(t, x, y, z)$'nin, uzayda bir D bölgesini kaplayan bir cismin, t anında (x, y, z) noktasındaki sıcaklığını veren bir fonksiyon olduğunu varsayın. Cismin özgül ısısı ve kütle yoğunluğu sırasıyla c ve ρ ile gösteriliyorsa, $c\rho T$ büyüklüğüne cismin **birim hacimdeki ısı enerjisi** denir.

a. $-\nabla T$'nin neden ısı akışı yönünde olduğunu açıklayın.

b. $-k\nabla T$ **enerji akı vektörünü** göstersin. (k sabitine **iletkenlik** denir.) Alıştırma 31'deki Kütle korunum Yasasında $-k\nabla T = \mathbf{v}$ ve $c\rho T = p$ olduğunu varsayarak, $K = k/(c\rho) > 0$ *yayılma* sabiti olmak üzere,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

difüzyon (ısı) denklemini Türetin ($T(t, x)$ kenarları mükemmel şekilde yalıtılmış düzgün iletken bir çubukta t anında x konumundaki sıcaklığı temsil ediyorsa, $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ olacağına ve difüzyon denkleminin Bölüm 14 Ek Alıştırmalardaki bir-boyutlu ısı denklemine indirgeneceğine dikkat edin).

16 Bölüm Tekrar Soruları

1. Eğrisel integraller nedir? Nasıl hesaplanırlar? Örnekler verin.
2. Yayların kütle merkezini bulmak için eğrisel integralleri nasıl kullanabilirsiniz? Açıklayın.
3. Bir vektör alanı ve bir gradiyent alanı nedir? Örnekler verin.
4. Bir parçacığı bir eğri boyunca hareket ettirmek için bir kuvvetin yaptığı işi nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.
5. Akış, dolaşım ve akı nedir?
6. Yoldan bağımsız alanların özelliği nedir?
7. Bir alanın korunmalı olduğunu nasıl söylersiniz?
8. Bir potansiyel fonksiyon nedir? Örnek vererek, korunmalı bir alanın potansiyel fonksiyonunun nasıl bulunacağını gösterin.
9. Diferansiyel form nedir? Böyle bir formun tam olması ne anlama gelir? Tamlığı nasıl test edersiniz? Örnekler verin.
10. Bir vektör alanının diverjansı nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
11. Bir vektör alanının rotasyoneli nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
12. Green Teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
13. Uzaydaki eğri bir yüzeyin alanını nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

14. Yönlendirilmiş bir yüzey nedir? Üç-boyutlu bir vektör alanının yönlendirilmiş bir yüzeydeki akısını nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

15. Yüzey integralleri nedir? Bunlarla ne hesaplayabilirsiniz? Bir örnek verin.

16. Parametrize bir yüzey nedir? Böyle bir yüzeyin alanını nasıl bulabilirsiniz? Örnekler verin.

17. Bir fonksiyonu parametrize bir yüzeyde nasıl integre edersiniz? Bir örnek verin.

18. Stokes teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?

19. Bölümün korunmalı alanlar üzerine çıkardığı sonuçları özetleyin.

20. Diverjans Teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?

21. Diverjans Teoremi, Green Teormini nasıl genelleştirir?

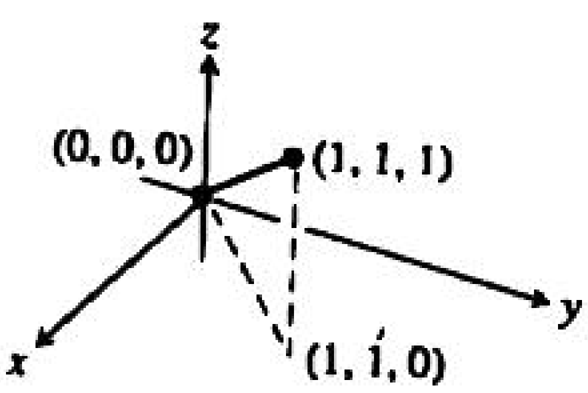
22. Stokes Teoremi, Green Teoremini nasıl genelleştirir?

23. Green Teoremi, Stokes Teoremi ve Diverjans Teoremi tek bir temel teoremin şekilleri olarak nasıl düşünülebilir?

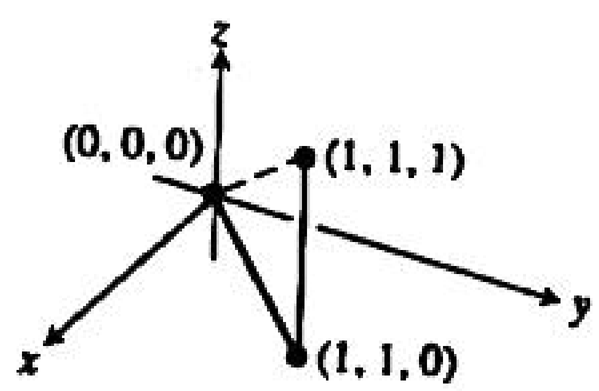
Bölüm Problemler

Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

1. Şekil, uzayda orijini (1, 1, 1) noktasına bağlayan iki çok kenarlı yol göstermektedir. $f(x, y, z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ fonksiyonunu her yol üzerinde integre edin.

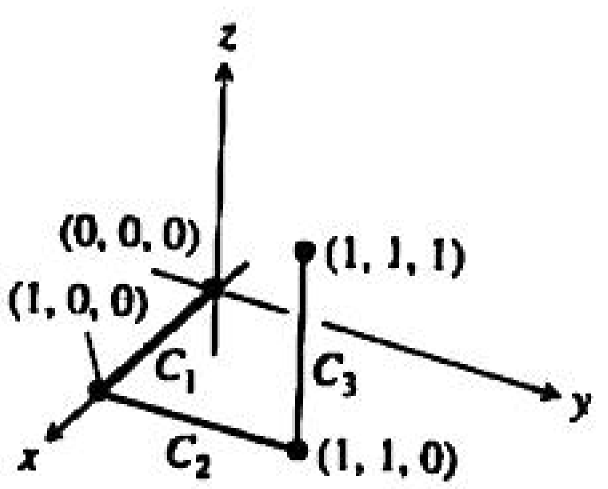


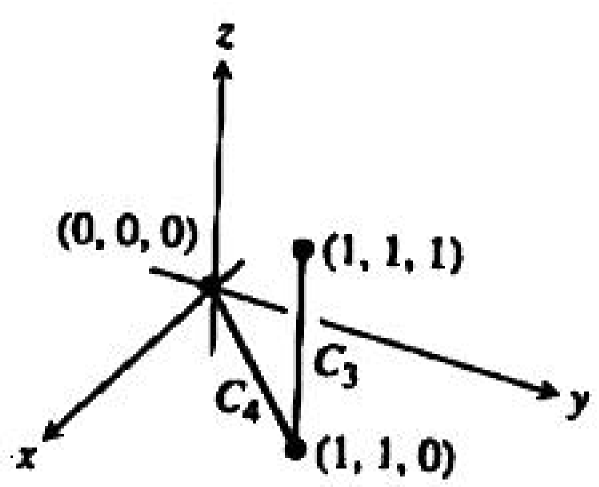
Yol 1

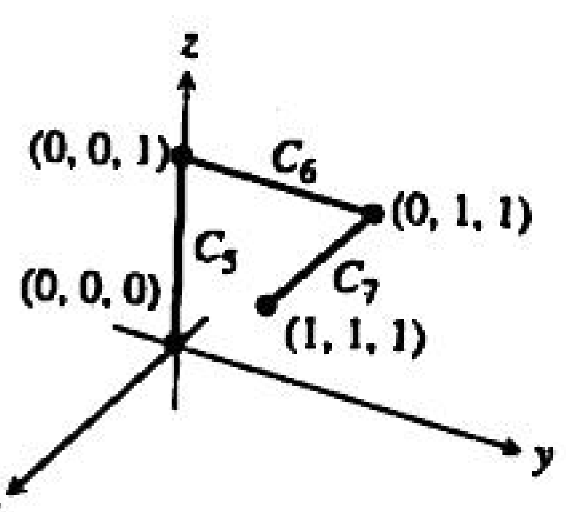


Yol 2

2. Şekil, uzayda orijini (1, 1, 1) noktasına bağlayan üç çok kenarlı yol göstermektedir. $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ fonksiyonunu her yol üzerinde integre edin.







3. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$'yi

$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

çember üzerinde integre edin.

4. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$'yi

$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$

involut eğrisi üzerinde integre edin.

5 ve 6 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

5. $\displaystyle\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx + dy + dz}{\sqrt{x + y + z}}$

6. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{z}}\,dz$

7. $\mathbf{F} = -(y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$'yi $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ küresinden $z = -1$ düzlemiyle kesilen çember üzerinde, yukarıdan bakıldığında saat yönünde integre edin.

8. $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 1)\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$'yi $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinden $x = 2$ düzlemiyle kesilen çember üzerinde integre edin.

9 ve 10 problemlerindeki eğrisel integrallerini hesaplayın.

9. $\displaystyle\int_C 8x \sin y\, dx - 8y \cos x\, dy$

C, birinci dörtte bir bölgeden $x = \pi/2$ ve $y = \pi/2$ doğruları ile kesilen karedir.

10. $\displaystyle\int_C y^2\, dx + x^2\, dy$

C, $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir.

Yüzey İntegrallerini Hesaplamak

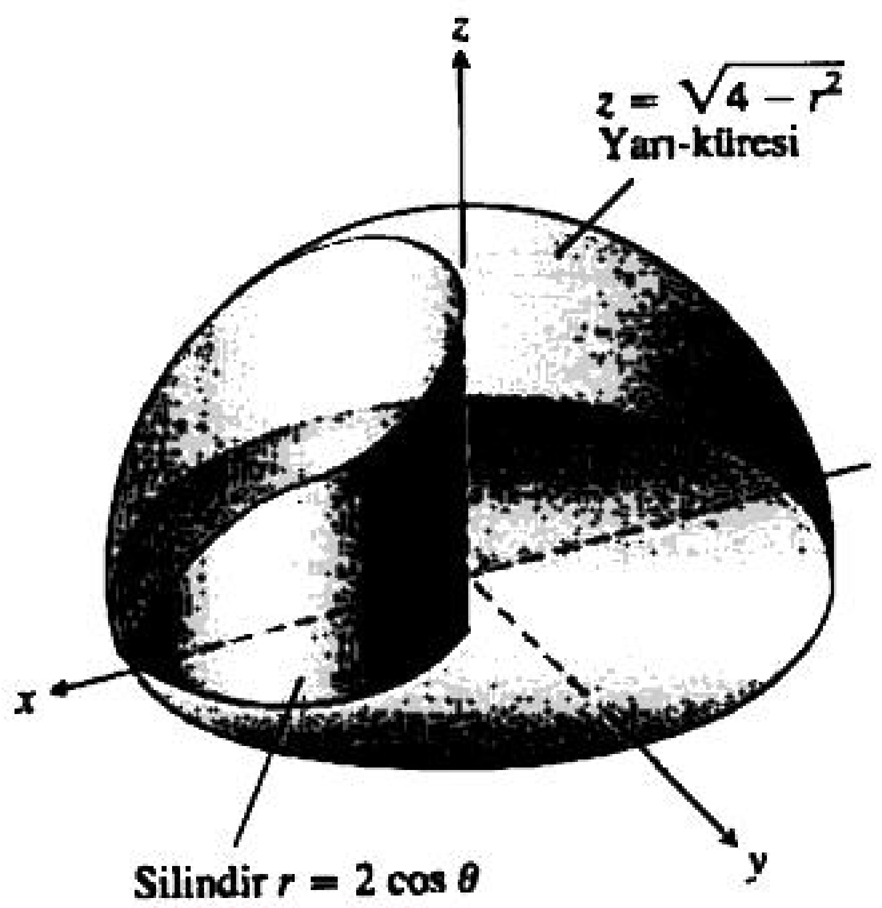
11. **Eliptik bir bölgenin alanı** $x + y + z = 1$ düzleminden $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle kesilen eliptik bölgenin alanını bulun.

12. **Parabolik bir kapağın alanı** alanı $y^2 + z^2 = 3x$ paraboloidinden $x = 1$ düzlemiyle kesilen kapağın alanını bulun.

13. **Küresel bir kapağın alanı** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinden $z = \sqrt{2}/2$ düzlemiyle kesilen kapağın alanını bulun.

14. a. Silindirle kesilen yarı-küre $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, yarı-küresinden $x^2 + y^2 = 2x$ silindiriyle kesilen yüzeyin alanını bulun.

b. Silindirin yarı-küre içinde kalan kısmının alanını bulun (*İpucu:* xz-düzlemi üzerinde izdüşümü alın. Veya h silindirin yüksekliği ve ds de xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 2x$ çemberinin yay uzunluğu elemanı olmak üzere, $\int h\,ds$ integralini hesaplayın).



15. Bir üçgenin alanı $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ $(a, b, c > 0)$ düzleminin birinci sekizde bir bölgeyle kesişimi olan üçgenin alanını bulun. Yanıtınızı uygun bir vektör hesabıyla doğrulayın.

16. Düzlemlerle kesilen parabolik silindir $y^2 - z = 1$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 3$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey üzerinde

a. $g(x, y, z) = \dfrac{yz}{\sqrt{4y^2 + 1}}$ **b.** $g(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{4y^2 + 1}}$

fonksiyonlarını integre edin.

17. Düzlemlerle kesilen dairesel silindir $g(x, y, z) = x^4y(y^2 + z^2)$'yi $y^2 + z^2 = 25$ silindirinin birinci sekizde bir bölgede $x = 0$ ve $x = 1$ düzlemlerinin arasında ve $z = 3$ düzleminin üst tarafında kalan kısmı üzerinde integre edin.

18. Wyoming'in alanı Wyoming eyaleti 111°3′ ve 104°3′ batı meridyenleri ile 41° ve 45° kuzey paralelleri arasındadır. Dünyanın, $R = 3959$ mil yarıçaplı bir küre olduğunu varsayarak, Wyoming'in alanını bulun.

Parametrize Yüzeyler

19–24 problemlerindeki yüzeylerin parametrizasyonlarını bulun (Bunu yapmanın bir çok yolu vardır, dolayısıyla yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir).

19. Silindirik şerit $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ küresinin $z = -3$ ve $z = 3\sqrt{3}$ düzlemleri arasında kalan kısmı.

20. Parabolik kapak $z = -(x^2 + y^2)/2$ paraboloidinin $z = -2$ düzleminin üst tarafında kalan kısmı.

21. Koni $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 3$ konisi

22. Kare üzerinde düzlem $4x + 2y + 4z = 12$ düzleminin birinci dörtte bir bölgedeki $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ karesinin üzerindeki kısmı

23. Paraboloid parçası $y = 2(x^2 + z^2), y \leq 2$, paraboloidinin xy-düzleminin üstünde kalan kısmı

24. Yarı-küre parçası $x^2 + y^2 + z^2 = 10, y \geq 0$, yarı-küresinin birinci sekizde bir bölgede kalan kısmı

25. Yüzey alanı Aşağıdaki yüzeyin alanını bulun.

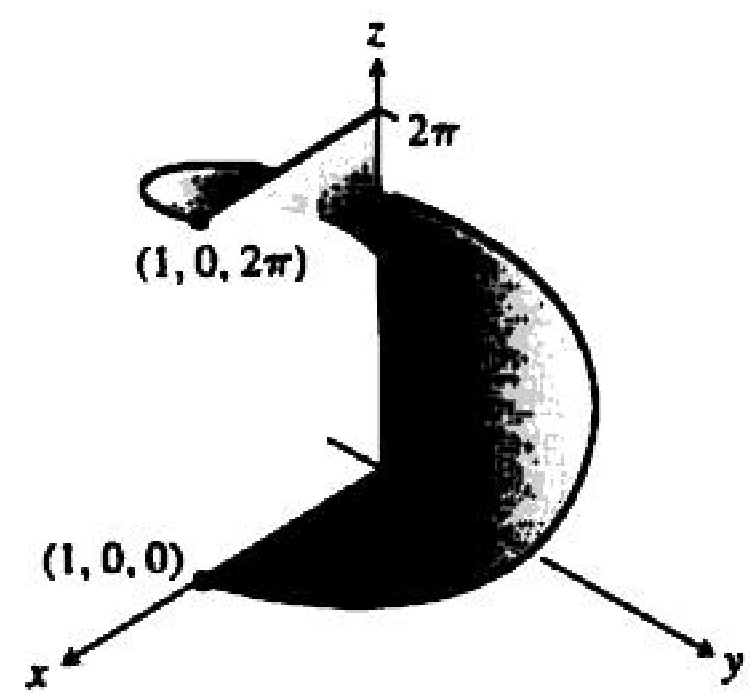
$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k},$$
$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

26. Yüzey integrali $f(x, y, z) = xy - z^2$'yi Problem 25'teki yüzey üzerinde integre edin.

27. Helikoid alanı Aşağıdaki şekilde görülen

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

helikoidinin yüzey alanını bulun.



28. Yüzey integrali $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, d\sigma$ integralini, S yüzeyi Problem 27'deki helikoid olmak üzere, hesaplayın.

Korunmalı Alanlar

29–32 Problemlerindeki alanların hangileri korunmalı, hangileri değildir?

29. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

31. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})/(x + yz)$

33 ve 34 Problemlerindeki alanların potansiyel fonksiyonlarını bulun.

33. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (y + 1)\mathbf{k}$

34. $\mathbf{F} = (z\cos xz)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x\cos xz)\mathbf{k}$

İş ve Dolaşım

35 ve 36 Problemlerinde, Alıştırma 1'deki (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden yollar üzerinde, her bir alanın yaptığı işi bulun.

35. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + \mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ **36.** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. İş'i iki yoldan bulmak $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$ düzlem eğrisi üzerinde $(1, 0)$ noktasından $(e^{2\pi}, 0)$ noktasına kadar

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

kuvvetinin yaptığı işi iki farklı yoldan bulun:

a. İş integralini hesaplamak için eğrinin parametrizasyonunu kullanarak,

b. F'nin bir potansiyel fonkisyonunu hesaplayarak.

38. Farklı yollar üzerinde akış $\mathbf{F} = \nabla(x^2 z e^y)$ alanının akışını aşağıdaki gibi bulun.

a. $x + y + z = 1$ düzleminin $x^2 + z^2 = 25$ silindirini kestiği C elipsi boyunca, pozitif y-ekseninden bakıldığında saat yönünde bir tur,

b. Problem 27'deki helikoidin eğri sınırında $(1, 0, 0)$'dan $(1, 0, 2\pi)$'ye kadar.

39 ve 40 Problemlerinde, Stokes Teoremindeki yüzey integralini kullanarak F'nin C eğrisi üzerinde belirtilen yöndeki dolaşımını bulun.

39. Bir elips üzerinde dolaşım $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$

C: $2x + 6y - 3z = 6$ düzleminin $x^2 + y^2 = 1$ silindirini kestiği elips, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine

40. Bir çember üzerinde dolaşım $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (4y^2 - z)\mathbf{k}$

C: $z = -y$ düzleminin $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresini kestiği çember, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine

Kütle ve Momentler

41. Farklı yoğunluklarda tel t'deki yoğunluğu **(a)** $\delta = 3t$ ve **(b)** $\delta = 1$ ise, $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2t}\mathbf{i} + \sqrt{2t}\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütlesini bulun.

42. Değişken yoğunluklu tel t'deki yoğunluğu $\delta = 3\sqrt{5 + t}$ ise, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$, eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütlesini bulun.

43. Değişken yoğunluklu tel t'deki yoğunluğu $\delta = 1/(t + 1)$ ise,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2,$$

eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütle merkezini, koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulun.

44. Bir yayın kütle merkezi İnce bir metal yay xy-düzlemindeki $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberi üzerinde bulunmaktadır. Yay üzerindeki (x, y) noktasında yoğunluk $\delta(x, y) = 2a - y$'dir. Kütle merkezini bulun.

45. Sabit yoğunluklu tel Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu bir tel, $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \ln 2$, eğrisi üzerindedir. $\bar{z}$, I_z ve R_z'yi bulun.

46. Sabit yoğunluklu helisel tel $\mathbf{r}(t) = (2 \sin t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, helisi üzerinde bulunan sabit δ yoğunluklu telin kütlesini ve kütle merkezini bulun.

47. Bir kabuğun eylemsizliği, jirasyon yarıçapı, kütle merkezi $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresinin üst kısmından $z = 3$ düzlemiyle kesilen ve yoğunluğu $\delta(x,y,z) = z$ olan ince kabuğun kütle merkezini, I_z'yi ve R_z'yi bulun.

48. Bir küpün eylemsizlik momenti Yoğunluğu $\delta = 1$ ise, birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp yüzeyinin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Düzlemsel Bir Eğri veya Yüzeydeki Akı

Green Teoremini kullanarak, 49 ve 50 problemlerindeki alan ve eğriler için saat yönünün tersine dolaşımı ve dışarı doğru akıyı bulun.

49. Kare $\mathbf{F} = (2xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j}$

C: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ ile sınırlı kare

50. Üçgen $\mathbf{F} = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$

C: $y = 0$, $y = x$ ve $x = 1$ doğrularıyla oluşturulan üçgen

51. Sıfır eğrisel integral Green Teoreminin uygulanabildiği herhangi kapalı bir C eğrisi için

$$\oint_C \ln x \sin y \, dy - \frac{\cos y}{x} dx = 0$$

olduğunu gösterin.

52. a. Dışarıya akı ve alan $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ konum vektör alanının, Green Teoreminin uygulanabildiği herhangi bir kapalı eğriden dışarı doğru akısının, eğrinin çevrelediği bölgenin alanının iki katı olduğunu gösterin.

b. $\mathbf{n}$, Green Teoreminin uygulanabildiği kapalı bir eğrinin dışarı doğru birim normal vektörü olsun. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alanının C'nin her noktasında $\mathbf{n}$'ye ortogonal olmasının mümkün olmadığını gösterin.

53–56 Problemlerinde, F alanının, D'nin sınırından dışarı doğru akısını bulun.

53. Küp $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

D: Birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp

54. Küresel kapak $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$

D: $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ küresinden $z = 3$ düzlemiyle kesilen üst kapağın bütün yüzeyi

55. Küresel kapak $\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

D: $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ küresinden $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle kesilen üst bölge

56. Koni ve silindir $\mathbf{F} = (6x + y)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j} + 4yz\mathbf{k}$

D: Birinci sekizde bir bölgede $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve koordinat düzlemleriyle sınırlanan bölge

57. Yarı-küre, silindir ve düzlem S, soldan $x^2+y^2+z^2=a^2, y\le 0$, yarım küresi, ortadan $x^2+z^2=a^2, 0\le y\le a$ silindiri ve sağdan $y=a$ düzlemiyle sınırlı yüzey olsun. $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ alanının S'den dışarı doğru akısını bulun.

58. Silindir ve düzlemler $\mathbf{F}=3xz^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z^3\mathbf{k}$ alanının, birinci sekizde bir bölgede $x^2+4y^2=16$ silindiri ve $y=2z$, $x=0$ ve $z=0$ düzlemleri ile sınırlı cismin yüzeyinden dışarı doğru akısını bulun.

59. Silindirik kutu Diverjans Teoremini kullanarak, $\mathbf{F}=xy^2\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ alanının $x^2+y^2=1$ silindiri, $z=1$ ve $z=-1$ düzlemleriyle çevrili bölgeden dışarı doğru akısını bulun.

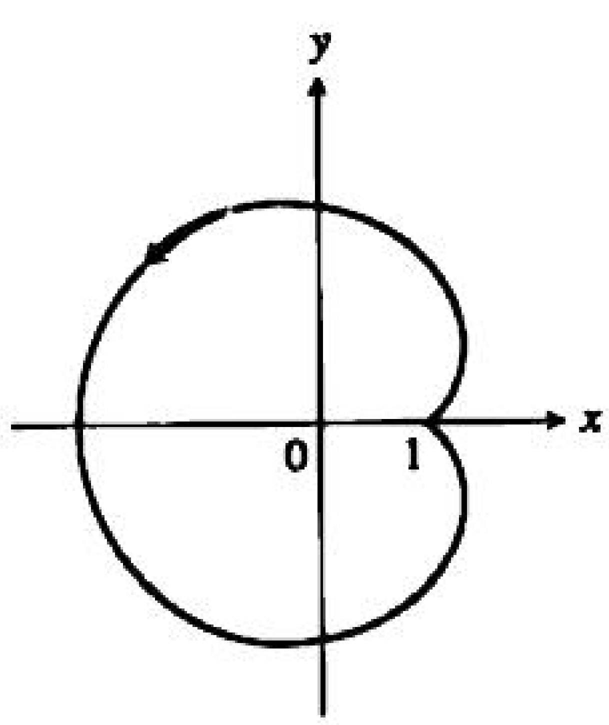
60. Yarı-küre $\mathbf{F}=(3z+1)\mathbf{k}$'nin $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$, yarı-küresinden dışarı doğru akısını **(a)** Diverjans Teoremiyle ve **(b)** integrali doğrudan hesaplayarak bulun.

Bölüm 16 Ek ve İleri Alıştırmalar

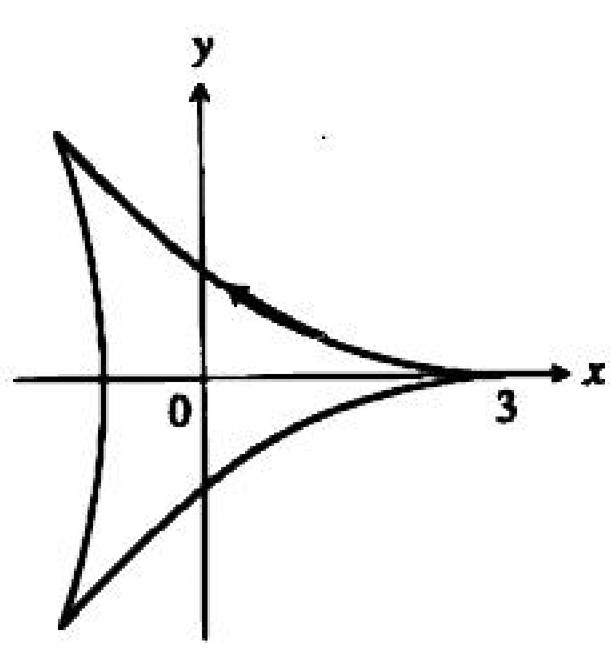
Green Teoremiyle Alan Bulmak

Green Teoremi alan formülünü kullanarak, Alıştırmalar 16.4'teki (13) Denklemi, 1–4 alıştırmalarındaki eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

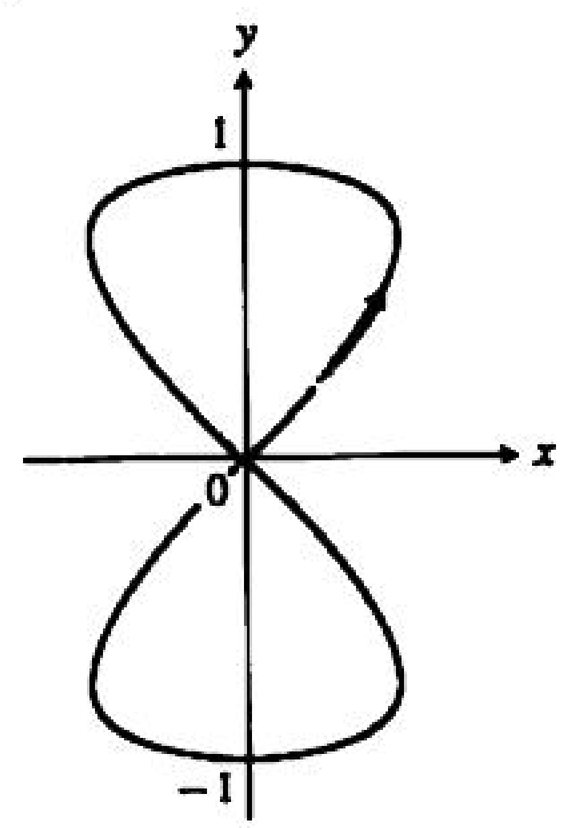
1. $x=2\cos t-\cos 2t,\quad y=2\sin t-\sin 2t,\quad 0\le t\le 2\pi$ limaçonu



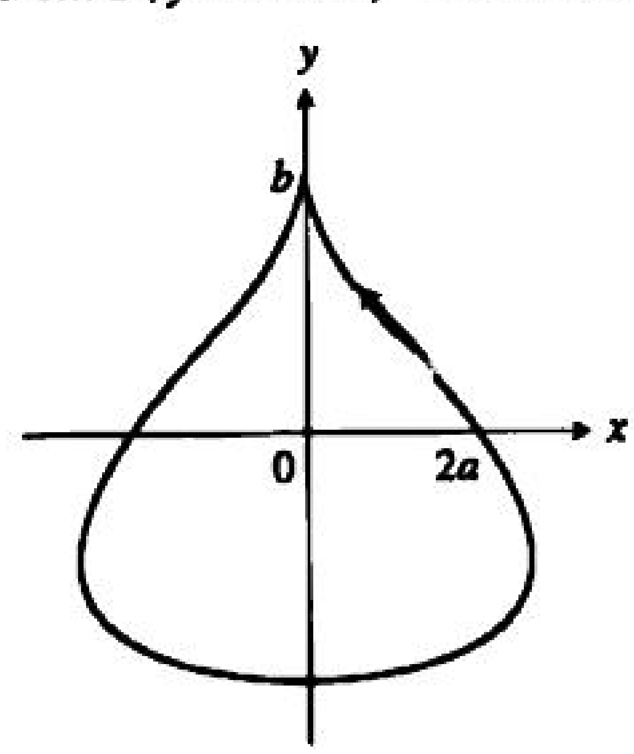
2. $x=2\cos t+\cos 2t,\quad y=2\sin t-\sin 2t,\quad 0\le t\le 2\pi$ deltoidi



3. $x=(1/2)\sin 2t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le \pi$ (bir çevrim) sekiz eğrisi



4. $x=2a\cos t-a\sin 2t, y=b\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$ gözyaşı damlası



Teori ve Uygulamalar

5. a. Sadece bir noktada **0** değerini alan ve rot **F** her yerde sıfırdan farklı olan bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektör alanına bir örnek verin. Noktayı belirlemeyi ve rotasyoneli hesaplamayı unutmayın.

   b. Sadece bir doğru üzerinde **0** değerini alan ve rot **F** her yerde sıfırdan farklı olan bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektör alanına bir örnek verin. Doğruyu belirlemeyi ve rotasyoneli hesaplamayı unutmayın.

   c. Bir yüzeyde **0** değerini alan ve rot **F** her yerde sıfırdan farklı olan bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektör alanına bir örnek verin. Yüzeyi belirlemeyi ve rotasyoneli hesaplamayı unutmayın.

6. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ küresi üzerinde $\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ vektör alanının yüzeye normal olduğu ve $\mathbf{F}(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ olduğu bütün (a, b, c) noktalarını bulun.

7. Yüzeydeki her (x, y, z) noktasında kütle yoğunluğu $\delta(x, y, z)$, yüzey üzerindeki sabit bir (a, b, c) noktasına uzaklık olmak üzere R yarıçaplı bir küresel kabuğun kütlesini bulun.

8. Yoğunluk fonksiyonu $\delta(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ise,
$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}$$
$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, helikoidinin kütlesini bulun. Şekil için Problem 27'ye bakın.

9. $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ dikdörtgen bölgeleri arasından, $\mathbf{F} = (x^2 + 4xy)\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$ alanının, dört kenardan dışarı doğru akısı en küçük olanını bulun. En küçük akı nedir?

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresiyle kesişim çemberi üzerinde, $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ akış alanının dolaşımı maksimum olacak şekilde, orijinden geçen bir düzlem denklemi bulun.

11. Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = 4$ çemberi üzerinde $(2, 0)$'dan $(0, 2)$'ye kadar bir ip bulunmaktadır. İpin yoğunluğu $\rho(x, y) = xy$'dir.

   a. İpi sonlu sayıda alt yaya bölerek, g yerçekimi sabiti olmak üzere, yerçekiminin ipi x-eksenine indirmek için yapacağı işin,
$$\text{İş} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g\, x_k y_k^2 \Delta s_k = \int_C g\, xy^2\, ds$$
olduğunu gösterin.

   b. (a) şıkkındaki eğrisel integrali hesaplayarak yapılan toplam işi bulun.

   c. Yapılan toplam işin, ipin kütle merkezi $(\bar{x}, \bar{y})$'yi x-eksenine indirmek için yapılması gereken işe eşit olduğunu gösterin.

12. İnce bir tabaka, birinci sekizde bir bölgede $x + y + z = 1$ düzleminde bulunmaktadır. Tabakanın yoğunluğu $\delta(x, y, z) = xy$'dir.

   a. Tabakayı sonlu sayıda alt parçalara bölerek, yerçekiminin tabakayı xy-düzlemine indirmek için yapacağı işin, g yerçekimi sabiti olmak üzere,
$$\text{İş} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g\, x_k y_k z_k\, \Delta\sigma_k = \iint_S g\, xyz\, d\sigma$$
olduğunu gösterin.

   b. (a) şıkkındaki yüzey integralini hesaplayarak yapılan toplam işi bulun.

   c. Yapılan toplam işin, tabakanın kütle merkezi $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$'yi xy-düzlemine indirmek için yapılması gereken işe eşit olduğunu gösterin.

13. **Arşimet prensibi** Top gibi bir cisim bir sıvıya yerleştirilirse, ya dibe çökecek, ya yüzecek ya da belirli bir mesafe batacak ve sıvı içinde asılı kalacaktır. Bir sıvının sabit bir w ağırlık yoğunluğu olduğunu ve sıvının yüzeyinin $z = 4$ düzlemiyle çakıştığını varsayın. Küresel bir top sıvı içinde asılı kalır ve $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 1$ bölgesini kaplar.

   a. Sıvının basıncından dolayı top üzerine etkiyen toplam kuvvetin büyüklüğünü veren yüzey integralinin
$$\text{Kuvvet} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w(4 - z_k)\,\Delta\sigma_k = \iint_S w(4 - z)\, d\sigma$$
olduğunu gösterin.

   b. Top hareket etmediği için, sıvının kaldırma kuvveti tarafından tutuluyor olmalıdır. Küre üzerindeki kaldırma kuvvetinin büyüklüğünün, $\mathbf{n}\,(x, y, z)$'de dış birim normal olmak üzere,
$$\text{Kaldırma kuvveti} = \iint_S w(z - 4)\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$
olduğunu gösterin. Bu, su altındaki bir cismin üzerine etkiyen kaldırma kuvvetinin büyüklüğünün yerdeğiştiren suyun ağırlığına eşit olduğunu söyleyen Arşimet prensibinin bir gösterimidir.

   c. Diverjans Teoremini kullanarak (b) şıkkındaki kaldırma kuvvetinin büyüklüğünü bulun.

14. **Eğri bir yüzeyde akışkan kuvveti** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$ yüzeyi şeklindeki bir koni sabit w ağırlık yoğunluklu bir sıvıyla doldurulmuştur. xy-düzleminin "taban seviyesi" olduğunu varsayarak, koninin $z = 1$'den $z = 2$'ye kadar olan kısmı üzerinde, sıvı basıncından dolayı, toplam kuvvetin
$$F = \iint_S w(2 - z)\, d\sigma$$
yüzey integrali olduğunu gösterin. İntegrali hesaplayın.

15. **Faraday yasası** $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ ve $\mathbf{B}(t, x, y, z)$, t anında (x, y, z) noktasındaki elektrik ve manyetik alanları temsil ediyorlarsa, elektromanyetik teorinin temel bir prensibi $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ olduğunu söyler. Bu ifadede, $\nabla \times \mathbf{E}$, t sabit tutularak ve $\partial\mathbf{B}/\partial t$ de (x, y, z) sabit tutularak hesaplanır. Stokes Teoremini kullanarak, Faraday yasasını,
$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$
türetin. Burada C eğrisi, akımın, yüzeyin birim normali $\mathbf{n}$'ye göre, saat yönünün tersine aktığı ve C etrafında
$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$
gerilimine yol açan tel bir döngüyü temsil etmektedir. Denklemin sağ tarafındaki yüzey integraline *manyetik akı* denir ve S de sınırı C olan herhangi bir yönlendirilmiş yüzeydir.

16.

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

$\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ için tanımlı çekim kuvvet alanı olsun. Bölüm 16.8' deki Gauss Yasasını kullanarak, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{H}$ denklemini sağlayan sürekli olarak türetilebilir bir $\mathbf{H}$ vektör alanı bulunmadığını gösterin.

17. $f(x, y, z)$ ve $g(x, y, z)$ sınırı C eğrisi olan yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde tanımlı sürekli olarak türetilebilen skaler fonksiyonlarsa,

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_C f\, \nabla g \cdot d\mathbf{r}$$

olduğunu ispatlayın.

18. Dışarı doğru birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesinde $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \nabla \cdot \mathbf{F}_2$ ve $\nabla \times \mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2$ olduğunu ve S üzerinde $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}$ olduğunu varsayın. D üzerinde $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ olduğunu gösterin.

19. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ve $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ise, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ olduğunu ispatlayın veya olmadığını gösterin.

20. S, $\mathbf{r}(u, v)$ ile parametrize edilen yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $d\boldsymbol{\sigma}$ yüzeye normal bir vektör olmak üzere $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}_u\, du \times \mathbf{r}_v\, dv$ gösterimini tanımlayın. Ayrıca, $d\sigma = |d\boldsymbol{\sigma}|$ büyüklüğü yüzey alanı elemanıdır (Bölüm 16.6'daki 5 Denkleminden dolayı).

$$d\sigma = (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv$$

olmak üzere,

$$E = |\mathbf{r}_u|^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \quad \text{ve} \quad G = |\mathbf{r}_v|^2$$

bağıntısını türetin.

21. Uzayda dışarı doğru birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş bir S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesinin hacmi V'nin, D üzerindeki (x, y, z) noktasının konum vektörü $\mathbf{r}$ olmak üzere,

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

bağıntısını sağladığını gösterin.

Bölüm Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica /Maple Module

Korunmalı ve Korunmalı Olmayan Kuvvet Alanlarında İş

Vektör alanları üzerinde integrali araştırın ve alan içinde farklı yollar boyunca, korunmalı ve korunmalı olmayan kuvvet fonksiyonları ile deneyler yapın.

Mathematica /Maple Module

Green Teoremini Gözünüzde Nasıl Canlandırırsınız?

Vektör alanları üzerinde integrasyonu araştırın ve eğrisel integralleri hesaplamak için parametrizasyonlar kullanın. Green Teoreminin her iki şekli inceleniyor.

Mathematica /Maple Module

Diverjans Teoremini Göz Önüne Getirmek ve Yorumlamak

Belirli diverjansları ve yüzey integrallerini formüle edip hesaplayarak Diverjans Teoremini gerçekleyin.

Rotasyonel ve Diverjansın Özellikleri

17. div (rot G) sıfırdır

a. $G = Mi + Nj + Pk$ alanının bileşenlerinin gerekli kısmi türevleri sürekliyse, $\nabla \bullet \nabla \times \mathbf{G} = 0$ olduğunu gösterin.

b. $\nabla \times \mathbf{G}$ alanının kapalı bir yüzeydeki akısı hakkında nasıl bir sonuca varırsınız? Yanıtınızı açıklayın.

18. $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$ türetilebilir vektör alanları ve a ile b de keyfi reel sabitler olsun. Aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$

b. $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$

c. $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$

19. $\mathbf{F}$ türetilebilir bir vektör alanı ve $g(x, y, z)$ de türetilebilir skaler bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$

b. $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$

20. $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ türetilebilir bir vektör alanıysa, $\mathbf{F} \bullet \nabla$ gösterimini

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}$$

olarak tanımlarız. Türetilebilir vektör alanları $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$ için aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$

b. $\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$

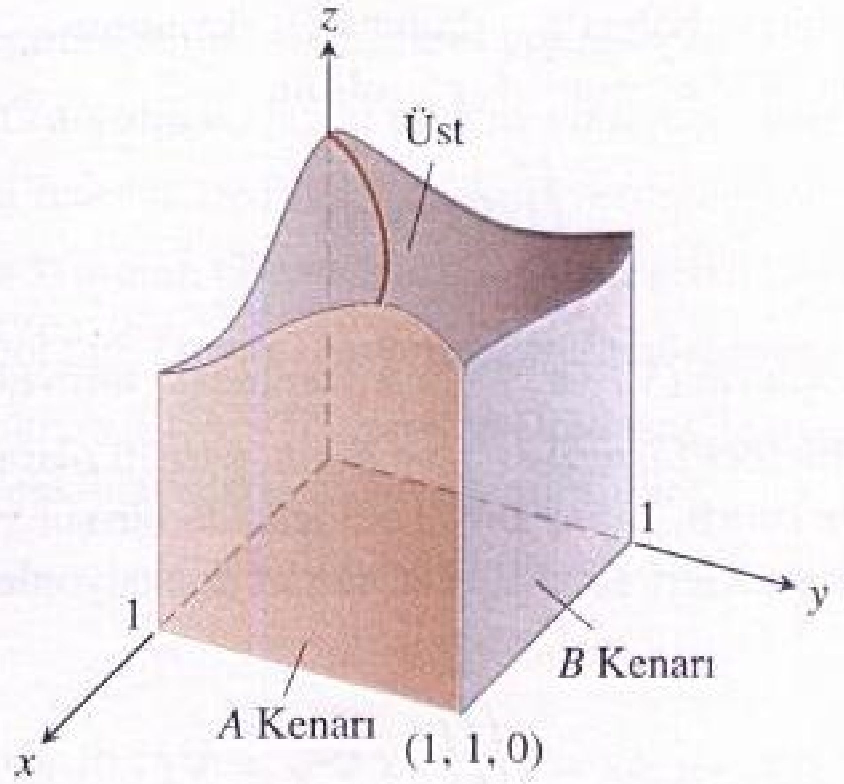
Teori ve Örnekler

21. $\mathbf{F}$, uzayın düzgün kapalı bir S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesini içeren bir parçasında, bileşenlerinin sürekli birinci mertebe kısmi türevleri var olan bir alan olsun. $|\mathbf{F}| \leq 1$ ise,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

integralinin büyüklüğü üzerine bir sınır konulabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

22. Şekilde gösterilen kapalı küpe benzer cismin tabanı xy-düzlemindeki birim karedir. Dört kenar $x = 0, x = 1, y = 0$ ve $y = 1$ düzlemlerinde bulunur. Üstü, bağıntısı bilinmeyen keyfi bir düzgün yüzeydir. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}$ olsun ve $\mathbf{F}$'nin A kenarından dışarı doğru akısının 1 ve B kenarından dışarı doğru akısının -3 olduğunu varsayın. Üst taraftan dışarı doğru akı hakkında bir sonuç çıkarabilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.



23. a. Konum vektör alanı $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$'nin düzgün kapalı bir S yüzeyinden dışarı doğru akısının, yüzeyin çevrelediği bölgenin hacminin üç katı olduğunu gösterin.

b. $\mathbf{n}$, S yüzeyinin dışarı doğru birim normal vektör alanı olsun. $\mathbf{F}$'nin, S'nin her noktasında $\mathbf{n}$'ye ortogonal olmasının mümkün olmadığını gösterin.

24. Maksimum akı $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq 1$ eşitsizlikleriyle tanımlı bütün dikdörtgen şekilli cisimler arasından $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$'nin altı yüzeyden dışarı doğru akısının en büyük olduğu cismi bulun. En büyük akı nedir?

25. Bir katı cismin hacmi $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olsun ve S yüzeyinin, Diverjans Teoreminin koşullarını sağladığını varsayın. D'nin hacminin

$$D\text{'nin hacmi} = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

formülüyle verildiğini gösterin.

26. Sabit bir alanın akısı Sabit bir $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ vektör alanının, Diverjans Teoreminin uygulanabileceği herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı doğru akısının sıfır olduğunu gösterin.

27. Harmonik fonksiyonlar Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, f fonksiyonuna D'de *harmonik* denir.

a. f'nin düzgün bir S yüzeyiyle çevrelenen sınırlı bir D bölgesinde harmonik olduğunu ve $\mathbf{n}$'nin S üzerinde seçilen birim normal vektör olduğunu varsayın. $\nabla f \cdot \mathbf{n}$, yani f'nin $\mathbf{n}$ yönündeki türevinin S üzerindeki integralinin sıfırı olduğunu gösterin.

b. f, D üzerinde harmonik ise,

$$\iint_S f\,\nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\, dV.$$

olduğunu gösterin.

28. Bir gradiyent alanın akısı S, $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgede bulunan kısmının yüzeyi ve $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. olsun.

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

akısını hesaplayın ($\nabla f \cdot \mathbf{n}$, f'nin $\mathbf{n}$ yönündeki türevidir).

29. Green'in birinci formülü f ve g'nin, parçalı olarak düzgün bir S yüzeyiyle sınırlı, kapalı bir D bölgesinde birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan skaler fonksiyonlar olduklarını varsayın.

$$\iint_S f\nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV. \tag{9}$$

olduğunu gösterin. (9) Denklemi **Green'in birinci formülüdür.** (*İpucu:* $\mathbf{F} = f\nabla g$ alanına Diverjans Teoremini uygulayın.)

30. Green'in ikinci formülü (*Alıştırma 29'un devamı.*) (9) Denkleminde f ve g'nin yerlerini değiştirerek benzer bir formül elde edin. Sonra bu formülü (9) Denkleminden çıkararak,

$$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV. \tag{10}$$

olduğunu gösterin. Bu denklem **Green'in ikinci formülüdür.**

31. Kütle korunumu $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ uzayda bir D bölgesinde sürekli olarak türetilebilen bir vektör alanı ve $p(t, x, y, z)$ de sürekli olarak türetilebilen skaler bir fonksiyon olsun. t değişkeni zaman aralığını gösterir. Kütle Korunumu Yasası, D'yi çevreleyen yüzey S olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\, dV = -\iint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

olduğunu söyler.

a. $\mathbf{v}$ bir hız akış alanı ise ve p de akışkanın t anında (x, y, z) noktasındaki yoğunluğunu temsil ediyorsa, kütle korunumunun fiziksel bir yorumunu yapın.

b. Diverjans Teoremini ve Leibniz kuralını,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\, dV = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\, dV$$

kullanarak, Kütle Korunumu Yasasının

$$\nabla \cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

(süreklilik denklemine eşdeğer olduğunu gösterin (Birinci terim $\nabla \cdot p\mathbf{v}$'de t değişkeninin, ikinci terim $\partial p/\partial t$'de ise D'deki (x, y, z) noktasının sabit tutulduğu varsayılmaktadır).

32. Isı difüzyon denklemi İkinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan $T(t, x, y, z)$'nin, uzayda bir D bölgesini kaplayan bir cismin, t anında (x, y, z) noktasındaki sıcaklığını veren bir fonksiyon olduğunu varsayın. Cismin özgül ısısı ve kütle yoğunluğu sırasıyla c ve ρ ile gösteriliyorsa, $c\rho T$ büyüklüğüne cismin **birim hacimdeki ısı enerjisi** denir.

a. $-\nabla T$'nin neden ısı akışı yönünde olduğunu açıklayın.

b. $-k\nabla T$ **enerji akı vektörünü** göstersin. (k sabitine **iletkenlik** denir.) Alıştırma 31'deki Kütle korunum Yasasında $-k\nabla T = \mathbf{v}$ ve $c\rho T = p$ olduğunu varsayarak, $K = k/(c\rho) > 0$ *yayılma* sabiti olmak üzere,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

difüzyon (ısı) denklemini Türetin ($T(t, x)$ kenarları mükemmel şekilde yalıtılmış düzgün iletken bir çubukta t anında x konumundaki sıcaklığı temsil ediyorsa, $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ olacağına ve difüzyon denkleminin Bölüm 14 Ek Alıştırmalardaki bir-boyutlu ısı denklemine indirgeneceğine dikkat edin).

Bölüm 16 Bölüm Tekrar Soruları

1. Eğrisel integraller nedir? Nasıl hesaplanırlar? Örnekler verin.
2. Yayların kütle merkezini bulmak için eğrisel integralleri nasıl kullanabilirsiniz? Açıklayın.
3. Bir vektör alanı ve bir gradiyent alanı nedir? Örnekler verin.
4. Bir parçacığı bir eğri boyunca hareket ettirmek için bir kuvvetin yaptığı işi nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.
5. Akış, dolaşım ve akı nedir?
6. Yoldan bağımsız alanların özelliği nedir?
7. Bir alanın korunmalı olduğunu nasıl söylersiniz?
8. Bir potansiyel fonksiyon nedir? Örnek vererek, korunmalı bir alanın potansiyel fonksiyonunun nasıl bulunacağını gösterin.
9. Diferansiyel form nedir? Böyle bir formun tam olması ne anlama gelir? Tamlığı nasıl test edersiniz? Örnekler verin.
10. Bir vektör alanının diverjansı nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
11. Bir vektör alanının rotasyoneli nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
12. Green Teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
13. Uzaydaki eğri bir yüzeyin alanını nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

14. Yönlendirilmiş bir yüzey nedir? Üç-boyutlu bir vektör alanının yönlendirilmiş bir yüzeydeki akısını nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

15. Yüzey integralleri nedir? Bunlarla ne hesaplayabilirsiniz? Bir örnek verin.

16. Parametrize bir yüzey nedir? Böyle bir yüzeyin alanını nasıl bulabilirsiniz? Örnekler verin.

17. Bir fonksiyonu parametrize bir yüzeyde nasıl integre edersiniz? Bir örnek verin.

18. Stokes teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?

19. Bölümün korunmalı alanlar üzerine çıkardığı sonuçları özetleyin.

20. Diverjans Teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?

21. Diverjans Teoremi, Green Teormini nasıl genelleştirir?

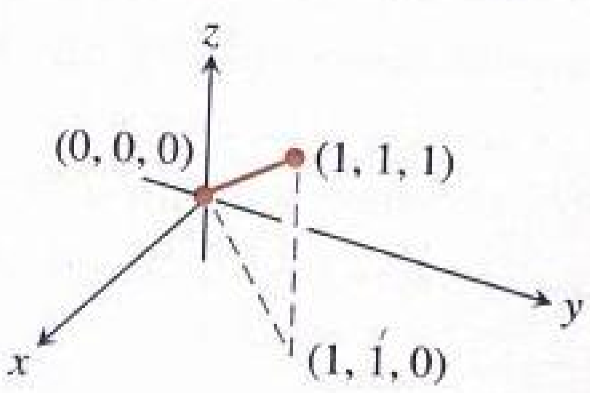
22. Stokes Teoremi, Green Teoremini nasıl genelleştirir?

23. Green Teoremi, Stokes Teoremi ve Diverjans Teoremi tek bir temel teoremin şekilleri olarak nasıl düşünülebilir?

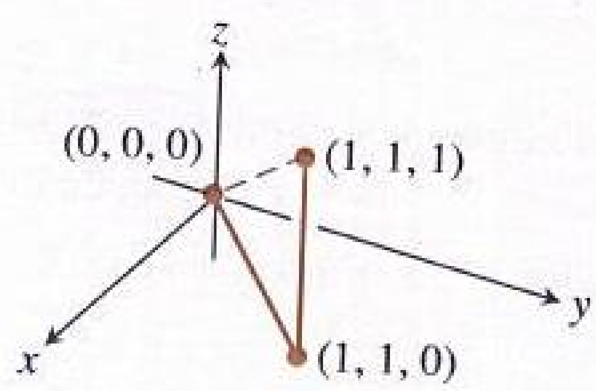
Bölüm 16 Problemler

Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

1. Şekil, uzayda orijini (1, 1, 1) noktasına bağlayan iki çok kenarlı yol göstermektedir. $f(x, y, z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ fonksiyonunu her yol üzerinde integre edin.

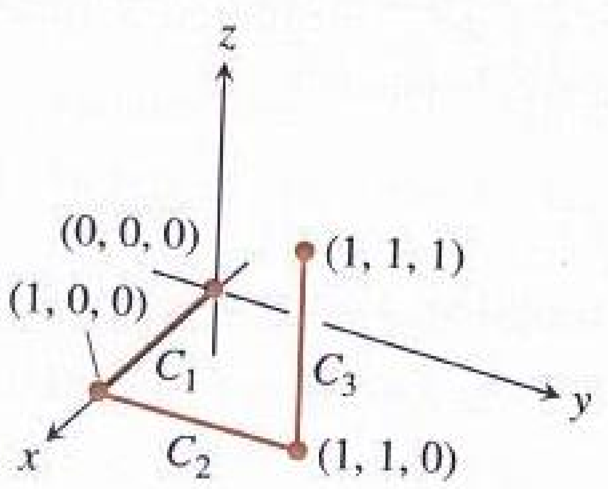


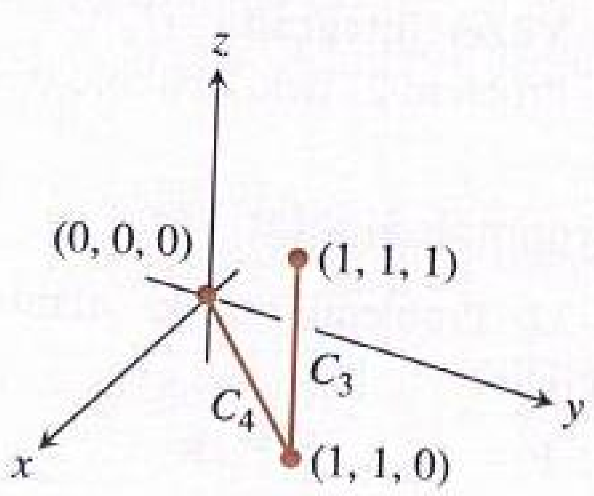
Yol 1

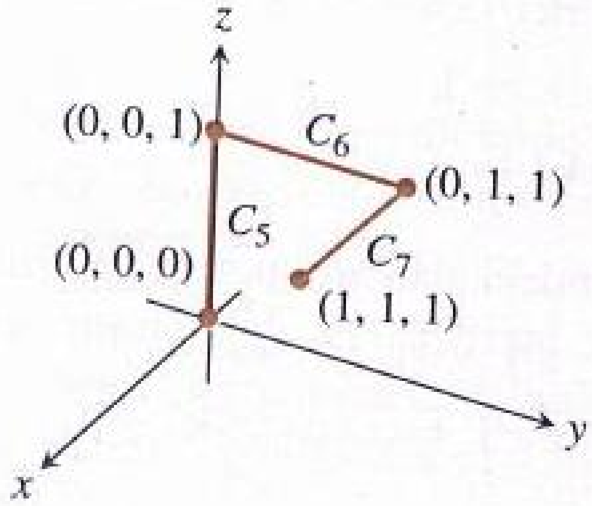


Yol 2

2. Şekil, uzayda orijini (1, 1, 1) noktasına bağlayan üç çok kenarlı yol göstermektedir. $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ fonksiyonunu her yol üzerinde integre edin.







3. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$'yi

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

çember üzerinde integre edin.

4. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$'yi

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

involut eğrisi üzerinde integre edin.

5 ve 6 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

5. $\displaystyle\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx + dy + dz}{\sqrt{x + y + z}}$

6. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}}\, dy - \sqrt{\frac{y}{z}}\, dz$

7. $\mathbf{F} = -(y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$'yi $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ küresinden $z = -1$ düzlemiyle kesilen çember üzerinde, yukarıdan bakıldığında saat yönünde integre edin.

8. $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 1)\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$'yi $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinden $x = 2$ düzlemiyle kesilen çember üzerinde integre edin.

9 ve 10 problemlerindeki eğrisel integrallerini hesaplayın.

9. $\displaystyle\int_C 8x \sin y\, dx - 8y \cos x\, dy$

C, birinci dörtte bir bölgeden $x = \pi/2$ ve $y = \pi/2$ doğruları ile kesilen karedir.

10. $\displaystyle\int_C y^2\, dx + x^2\, dy$

C, $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir.

Yüzey İntegrallerini Hesaplamak

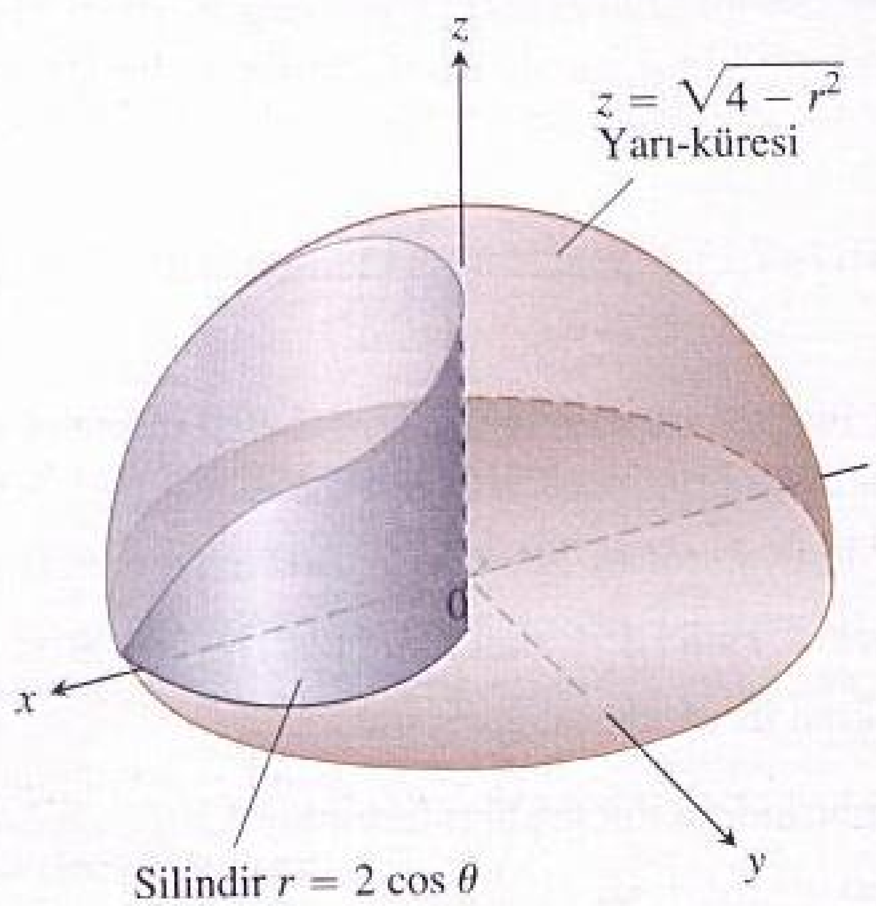
11. Eliptik bir bölgenin alanı $x + y + z = 1$ düzleminden $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle kesilen eliptik bölgenin alanını bulun.

12. Parabolik bir kapağın alanı alanı $y^2 + z^2 = 3x$ paraboloidinden $x = 1$ düzlemiyle kesilen kapağın alanını bulun.

13. Küresel bir kapağın alanı $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinden $z = \sqrt{2}/2$ düzlemiyle kesilen kapağın alanını bulun.

14. a. Silindirle kesilen yarı-küre $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, yarı-küresinden $x^2 + y^2 = 2x$ silindiriyle kesilen yüzeyin alanını bulun.

b. Silindirin yarı-küre içinde kalan kısmının alanını bulun (*İpucu:* xz-düzlemi üzerinde izdüşümü alın. Veya h silindirin yüksekliği ve ds de xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 2x$ çemberinin yay uzunluğu elemanı olmak üzere, $\int h\, ds$ integralini hesaplayın).



15. Bir üçgenin alanı $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ $(a, b, c > 0)$ düzleminin birinci sekizde bir bölgeyle kesişimi olan üçgenin alanını bulun. Yanıtınızı uygun bir vektör hesabıyla doğrulayın.

16. Düzlemlerle kesilen parabolik silindir $y^2 - z = 1$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 3$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey üzerinde

a. $g(x, y, z) = \dfrac{yz}{\sqrt{4y^2 + 1}}$ **b.** $g(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{4y^2 + 1}}$

fonksiyonlarını integre edin.

17. Düzlemlerle kesilen dairesel silindir $g(x, y, z) = x^4y(y^2 + z^2)$'yi $y^2 + z^2 = 25$ silindirinin birinci sekizde bir bölgede $x = 0$ ve $x = 1$ düzlemlerinin arasında ve $z = 3$ düzleminin üst tarafında kalan kısmı üzerinde integre edin.

18. Wyoming'in alanı Wyoming eyaleti $111°3'$ ve $104°3'$ batı meridyenleri ile $41°$ ve $45°$ kuzey paralelleri arasındadır. Dünyanın, $R = 3959$ mil yarıçaplı bir küre olduğunu varsayarak, Wyoming'in alanını bulun.

Parametrize Yüzeyler

19–24 problemlerindeki yüzeylerin parametrizasyonlarını bulun (Bunu yapmanın bir çok yolu vardır, dolayısıyla yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir).

19. Silindirik şerit $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ küresinin $z = -3$ ve $z = 3\sqrt{3}$ düzlemleri arasında kalan kısmı.

20. Parabolik kapak $z = -(x^2 + y^2)/2$ paraboloidinin $z = -2$ düzleminin üst tarafında kalan kısmı.

21. Koni $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 3$ konisi

22. Kare üzerinde düzlem $4x + 2y + 4z = 12$ düzleminin birinci dörtte bir bölgedeki $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ karesinin üzerindeki kısmı

23. Paraboloid parçası $y = 2(x^2 + z^2)$, $y \leq 2$, paraboloidinin xy-düzleminin üstünde kalan kısmı

24. Yarı-küre parçası $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, $y \geq 0$, yarı-küresinin birinci sekizde bir bölgede kalan kısmı

25. Yüzey alanı Aşağıdaki yüzeyin alanını bulun.

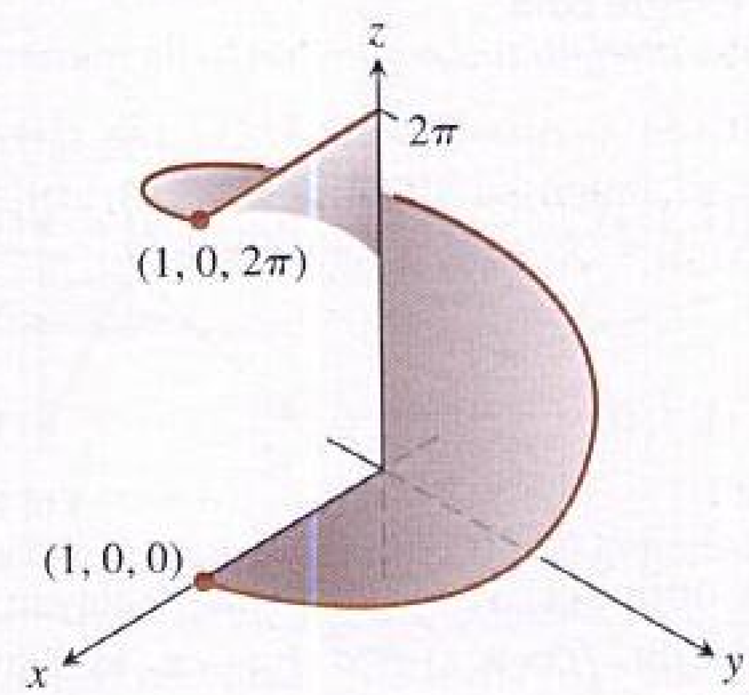
$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k},$$
$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

26. Yüzey integrali $f(x, y, z) = xy - z^2$'yi Problem 25'teki yüzey üzerinde integre edin.

27. Helikoid alanı Aşağıdaki şekilde görülen

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

helikoidinin yüzey alanını bulun.



28. Yüzey integrali $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, d\sigma$ integralini, S yüzeyi Problem 27'deki helikoid olmak üzere, hesaplayın.

Korunmalı Alanlar

29–32 Problemlerindeki alanların hangileri korunmalı, hangileri değildir?

29. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

31. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})/(x + yz)$

33 ve 34 Problemlerindeki alanların potansiyel fonksiyonlarını bulun.

33. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (y + 1)\mathbf{k}$

34. $\mathbf{F} = (z\cos xz)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x\cos xz)\mathbf{k}$

İş ve Dolaşım

35 ve 36 Problemlerinde, Alıştırma 1'deki (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden yollar üzerinde, her bir alanın yaptığı işi bulun.

CHAPTER 16 INTEGRATION IN VECTOR FIELDS

16.1 LINE INTEGRALS

1. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} \Rightarrow x = t$ and $y = 1 - t \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow$ (c)

2. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k} \Rightarrow x = 1, y = 1,$ and $z = t \Rightarrow$ (e)

3. $\mathbf{r} = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow x = 2\cos t$ and $y = 2\sin t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ (g)

4. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} \Rightarrow x = t, y = 0,$ and $z = 0 \Rightarrow$ (a)

5. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \Rightarrow x = t, y = t,$ and $z = t \Rightarrow$ (d)

6. $\mathbf{r} = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k} \Rightarrow y = t$ and $z = 2 - 2t \Rightarrow z = 2 - 2y \Rightarrow$ (b)

7. $\mathbf{r} = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \Rightarrow y = t^2 - 1$ and $z = 2t \Rightarrow y = \frac{z^2}{4} - 1 \Rightarrow$ (f)

8. $\mathbf{r} = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{k} \Rightarrow x = 2\cos t$ and $z = 2\sin t \Rightarrow x^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ (h)

9. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - \mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{2}\,\mathbf{j}$; $x = t$ and $y = 1 - t \Rightarrow x + y = t + (1 - t) = 1$
$\Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 f(t, 1-t, 0)\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_0^1 (1)\left(\sqrt{2}\right) dt = \left[\sqrt{2}t\right]_0^1 = \sqrt{2}$

10. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + \mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - \mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{2}$; $x = t, y = 1 - t,$ and $z = 1 \Rightarrow x - y + z - 2$
$= t - (1-t) + 1 - 2 = 2t - 2 \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 (2t-2)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left[t^2 - 2t\right]_0^1 = -\sqrt{2}$

11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$; $xy + y + z$
$= (2t)t + t + (2-2t) \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 (2t^2 - t + 2)\,3\,dt = 3\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_0^1 = 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{13}{2}$

12. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k},\ -2\pi \le t \le 2\pi \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4\sin t)\mathbf{i} + (4\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9} = 5$; $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t} = 4 \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{-2\pi}^{2\pi} (4)(5)\,dt$
$= \left[20t\right]_{-2\pi}^{2\pi} = 80\pi$

13. $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = (1-t)\mathbf{i} + (2-3t)\mathbf{j} + (3-2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$; $x + y + z = (1-t) + (2-3t) + (3-2t) = 6 - 6t \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds$
$= \int_0^1 (6-6t)\sqrt{14}\,dt = 6\sqrt{14}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \left(6\sqrt{14}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{14}$

14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 1 \le t \le \infty \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{3}}{t^2+t^2+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3t^2}$
$\Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{3}}{3t^2}\right)\sqrt{3}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$

15. C_1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+4t^2}$; $x + \sqrt{y} - z^2 = t + \sqrt{t^2} - 0 = t + |t| = 2t$ since $t \ge 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left[\frac{1}{6}\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(5)^{3/2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$;
C_2: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$; $x + \sqrt{y} - z^2 = 1 + \sqrt{1} - t^2 = 2 - t^2$
$\Rightarrow \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 (2-t^2)(1)\,dt = \left[2t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$; therefore $\int_C f(x,y,z)\,ds$
$= \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds = \frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$

16. C_1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$; $x + \sqrt{y} - z^2 = 0 + \sqrt{0} - t^2 = -t^2$
$\Rightarrow \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 (-t^2)(1)\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$;
C_2: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$; $x + \sqrt{y} - z^2 = 0 + \sqrt{t} - 1 = \sqrt{t} - 1$
$\Rightarrow \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \left(\sqrt{t}-1\right)(1)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - t\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$;
C_3: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$; $x + \sqrt{y} - z^2 = t + \sqrt{1} - 1 = t$
$\Rightarrow \int_{C_3} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 (t)(1)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \int_{C_3} f\,ds = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}$
$= -\frac{1}{6}$

17. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 < a \le t \le b \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{3}$; $\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{t+t+t}{t^2+t^2+t^2} = \frac{1}{t}$
$\Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b \left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{3}\,dt = \left[\sqrt{3}\ln|t|\right]_a^b = \sqrt{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, since $0 < a \le b$

18. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{j} + (a\cos t)\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = |a|$;
$-\sqrt{x^2+z^2} = -\sqrt{0 + a^2\sin^2 t} = \begin{cases} -|a|\sin t, & 0 \le t \le \pi \\ |a|\sin t, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi} -|a|^2\sin t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} |a|^2\sin t\,dt$
$= \left[a^2\cos t\right]_0^{\pi} - \left[a^2\cos t\right]_{\pi}^{2\pi} = \left[a^2(-1) - a^2\right] - \left[a^2 - a^2(-1)\right] = -4a^2$

19. $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + \frac{x^2}{2}\mathbf{j}$, $0 \le x \le 2 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dx}\right| = \sqrt{1+x^2}$; $f(x,y) = f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2x \Rightarrow \int_C f\,ds$
$= \int_0^2 (2x)\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left(5^{3/2} - 1\right) = \frac{10\sqrt{5}-2}{3}$

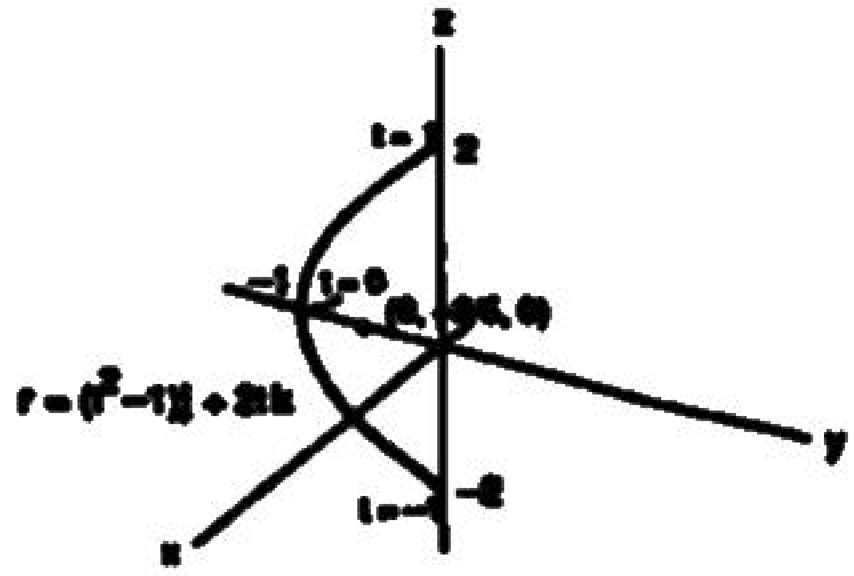
20. $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1-t)^2\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+(1-t)^2}$; $f(x,y) = f\left((1-t), \frac{1}{2}(1-t)^2\right) = \frac{(1-t)+\frac{1}{4}(1-t)^4}{\sqrt{1+(1-t)^2}}$
$\Rightarrow \int_C f\,ds = \int_0^1 \frac{(1-t)+\frac{1}{4}(1-t)^4}{\sqrt{1+(1-t)^2}}\sqrt{1+(1-t)^2}\,dt = \int_0^1 \left((1-t) + \frac{1}{4}(1-t)^4\right)dt = \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{1}{20}(1-t)^5\right]_0^1$
$= 0 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{20}\right) = \frac{11}{20}$

21. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 2$; $f(x,y) = f(2\cos t, 2\sin t)$
$= 2\cos t + 2\sin t \Rightarrow \int_C f\,ds = \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(2)\,dt = \left[4\sin t - 4\cos t\right]_0^{\pi/2} = 4 - (-4) = 8$

22. $\mathbf{r}(t) = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (2\cos t)\mathbf{i} + (-2\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 2$; $f(x,y) = f(2\sin t, 2\cos t)$
$= 4\sin^2 t - 2\cos t \Rightarrow \int_C f\,ds = \int_0^{\pi/4} \left(4\sin^2 t - 2\cos t\right)(2)\,dt = \left[4t - 2\sin 2t - 4\sin t\right]_0^{\pi/4}$
$= \pi - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)$

23. $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{t^2+1};\ M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \delta(t)\left(2\sqrt{t^2+1}\right) dt$
$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t\right)\left(2\sqrt{t^2+1}\right) dt = \left[(t^2+1)^{3/2}\right]_0^1 = 2^{3/2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$

24. $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},\ -1 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{t^2+1};\ M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds$
$= \int_{-1}^1 \left(15\sqrt{(t^2-1)+2}\right)\left(2\sqrt{t^2+1}\right) dt$
$= \int_{-1}^1 30\,(t^2+1)\,dt = \left[30\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\right]_{-1}^1 = 60\left(\frac{1}{3}+1\right) = 80;$
$M_{xz} = \int_C y\delta(x,y,z)\,ds = \int_{-1}^1 (t^2-1)\,[30\,(t^2+1)]\,dt$
$= \int_{-1}^1 30\,(t^4-1)\,dt = \left[30\left(\frac{t^5}{5}-t\right)\right]_{-1}^1 = 60\left(\frac{1}{5}-1\right)$
$= -48 \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = -\frac{48}{80} = -\frac{3}{5};\ M_{yz} = \int_C x\delta(x,y,z)\,ds = \int_C 0\,\delta\,ds = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0;\ \bar{z} = 0$ by symmetry (since δ is independent of z) $\Rightarrow (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0, -\frac{3}{5}, 0\right)$



25. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}t\,\mathbf{j} + (4-t^2)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{2+2+4t^2} = 2\sqrt{1+t^2};$

(a) $M = \int_C \delta\,ds = \int_0^1 (3t)\left(2\sqrt{1+t^2}\right) dt = \left[2\,(1+t^2)^{3/2}\right]_0^1 = 2\left(2^{3/2}-1\right) = 4\sqrt{2} - 2$

(b) $M = \int_C \delta\,ds = \int_0^1 (1)\left(2\sqrt{1+t^2}\right) dt = \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1 = \left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] - (0 + \ln 1)$
$= \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

26. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t^{1/2}\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+4+t} = \sqrt{5+t};$
$M = \int_C \delta\,ds = \int_0^2 \left(3\sqrt{5+t}\right)\left(\sqrt{5+t}\right) dt = \int_0^2 3(5+t)\,dt = \left[\frac{3}{2}(5+t)^2\right]_0^2 = \frac{3}{2}\left(7^2 - 5^2\right) = \frac{3}{2}(24) = 36;$
$M_{yz} = \int_C x\delta\,ds = \int_0^2 t[3(5+t)]\,dt = \int_0^2 (15t + 3t^2)\,dt = \left[\frac{15}{2}t^2 + t^3\right]_0^2 = 30 + 8 = 38;$
$M_{xz} = \int_C y\delta\,ds = \int_0^2 2t[3(5+t)]\,dt = 2\int_0^2 (15t+3t^2)\,dt = 76;\ M_{xy} = \int_C z\delta\,ds = \int_0^2 \frac{2}{3}t^{3/2}[3(5+t)]\,dt$
$= \int_0^2 \left(10t^{3/2} + 2t^{5/2}\right) dt = \left[4t^{5/2} + \frac{4}{7}t^{7/2}\right]_0^2 = 4(2)^{5/2} + \frac{4}{7}(2)^{7/2} = 16\sqrt{2} + \frac{32}{7}\sqrt{2} = \frac{144}{7}\sqrt{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$
$= \frac{38}{36} = \frac{19}{18},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{76}{36} = \frac{19}{9}$, and $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{144\sqrt{2}}{7 \cdot 36} = \frac{4}{7}\sqrt{2}$

27. Let $x = a\cos t$ and $y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Then $\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{dy}{dt} = a\cos t,\ \frac{dz}{dt} = 0$
$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = a\,dt;\ I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\,ds = \int_0^{2\pi} \left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right) a\delta\,dt$
$= \int_0^{2\pi} a^3\delta\,dt = 2\pi\delta a^3;\ M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_0^{2\pi} \delta a\,dt = 2\pi\delta a \Rightarrow R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi a^3\delta}{2\pi a\delta}} = a.$

28. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{5};\ M = \int_C \delta\,ds = \int_0^1 \delta\sqrt{5}\,dt = \delta\sqrt{5};$
$I_x = \int_C (y^2+z^2)\,\delta\,ds = \int_0^1 \left[t^2 + (2-2t)^2\right]\delta\sqrt{5}\,dt = \int_0^1 (5t^2 - 8t + 4)\,\delta\sqrt{5}\,dt = \delta\sqrt{5}\left[\frac{5}{3}t^3 - 4t^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{5}{3}\delta\sqrt{5};$
$I_y = \int_C (x^2+z^2)\,\delta\,ds = \int_0^1 \left[0^2 + (2-2t)^2\right]\delta\sqrt{5}\,dt = \int_0^1 (4t^2 - 8t + 4)\,\delta\sqrt{5}\,dt = \delta\sqrt{5}\left[\frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{4}{3}\delta\sqrt{5};$
$I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\,ds = \int_0^1 (0^2 + t^2)\,\delta\sqrt{5}\,dt = \delta\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\delta\sqrt{5} \Rightarrow R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{5}{3}},\ R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$
and $R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

29. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$;

(a) $M = \int_C \delta\, ds = \int_0^{2\pi} \delta\sqrt{2}\, dt = 2\pi\delta\sqrt{2}$; $I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\delta\sqrt{2}\, dt = 2\pi\delta\sqrt{2}$

$\Rightarrow R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = 1$

(b) $M = \int_C \delta(x,y,z)\, ds = \int_0^{4\pi} \delta\sqrt{2}\, dt = 4\pi\delta\sqrt{2}$ and $I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\, ds = \int_0^{4\pi} \delta\sqrt{2}\, dt = 4\pi\delta\sqrt{2}$

$\Rightarrow R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = 1$

30. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{2t}\,\mathbf{k}$

$\Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{(t+1)^2} = t+1$ for $0 \le t \le 1$; $M = \int_C \delta\, ds = \int_0^1 (t+1)\, dt = \left[\frac{1}{2}(t+1)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{3}{2}$;

$M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_0^1 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\right)(t+1)\, dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \left(t^{5/2} + t^{3/2}\right) dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\frac{2}{7}t^{7/2} + \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_0^1$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{5}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{24}{35}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{35} \Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \left(\frac{16\sqrt{2}}{35}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32\sqrt{2}}{105}$; $I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\, ds$

$= \int_0^1 (t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t)(t+1)\, dt = \int_0^1 (t^3 + t^2)\, dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \Rightarrow R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{7}{18}}$

31. $\delta(x,y,z) = 2 - z$ and $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi \Rightarrow M = 2\pi - 2$ as found in Example 4 of the text; also $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$; $I_x = \int_C (y^2+z^2)\,\delta\, ds = \int_0^\pi (\cos^2 t + \sin^2 t)(2 - \sin t)\, dt = \int_0^\pi (2 - \sin t)\, dt = 2\pi - 2 \Rightarrow R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$
$= 1$

32. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2 \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \sqrt{2}t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1 + 2t + t^2} = \sqrt{(1+t)^2} = 1 + t$ for $0 \le t \le 2$; $M = \int_C \delta\, ds = \int_0^2 \left(\frac{1}{t+1}\right)(1+t)\, dt = \int_0^2 dt = 2$; $M_{yz} = \int_C x\delta\, ds = \int_0^2 t\left(\frac{1}{t+1}\right)(1+t)\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2$;

$M_{xz} = \int_C y\delta\, ds = \int_0^2 \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\, dt = \left[\frac{4\sqrt{2}}{15}t^{5/2}\right]_0^2 = \frac{32}{15}$; $M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_0^2 \frac{t^2}{2}\, dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = 1$,

$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{16}{15}$, and $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2}{3}$; $I_x = \int_C (y^2+z^2)\,\delta\, ds = \int_0^2 \left(\frac{8}{9}t^3 + \frac{1}{4}t^4\right) dt = \left[\frac{2}{9}t^4 + \frac{t^5}{20}\right]_0^2 = \frac{32}{9} + \frac{32}{20} = \frac{232}{45}$;

$I_y = \int_C (x^2+z^2)\,\delta\, ds = \int_0^2 \left(t^2 + \frac{1}{4}t^4\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{20}\right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{32}{20} = \frac{64}{15}$; $I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\, ds$

$= \int_0^2 \left(t^2 + \frac{8}{9}t^3\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2}{9}t^4\right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{32}{9} = \frac{56}{9} \Rightarrow R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{29}{5}}$, $R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\frac{32}{15}}$, and

$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

33-36. Example CAS commands:

Maple:

```
f := (x,y,z) -> sqrt(1+30*x^2+10*y);
g := t -> t;
h := t -> t^2;
k := t -> 3*t^2;
a,b := 0,2;
ds := ( D(g)^2 + D(h)^2 + D(k)^2 )^(1/2):                    # (a)
'ds' = ds(t)*'dt';
F := f(g,h,k):                                                # (b)
'F(t)' = F(t);
Int( f, s=C..NULL ) = Int( simplify(F(t)*ds(t)), t=a..b );    # (c)
`` = value(rhs(%));
```

Mathematica: (functions and domains may vary)

```
Clear[x, y, z, r, t, f]
f[x_,y_,z_]:= Sqrt[1 + 30x^2 + 10y]
```

```
{a,b}= {0, 2};
x[t_]:= t
y[t_]:= t^2
z[t_]:= 3t^2
r[t_]:= {x[t], y[t], z[t]}
v[t_]:= D[r[t], t]
mag[vector_]:=Sqrt[vector.vector]
Integrate[f[x[t],y[t],z[t]] mag[v[t]], {t, a, b}]
N[%]
```

16.2 VECTOR FIELDS, WORK, CIRCULATION, AND FLUX

1. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x) = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$; similarly, $\frac{\partial f}{\partial y} = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ and $\frac{\partial f}{\partial z} = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \Rightarrow \nabla f = \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

2. $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)(2x) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$; similarly, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$ and $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \nabla f = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$

3. $g(x,y,z) = e^z - \ln(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2+y^2}$ and $\frac{\partial g}{\partial z} = e^z$ $\Rightarrow \nabla g = \left(\frac{-2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

4. $g(x,y,z) = xy+yz+xz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial g}{\partial y} = x+z$, and $\frac{\partial g}{\partial z} = y+x \Rightarrow \nabla g = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$

5. $|\mathbf{F}|$ inversely proportional to the square of the distance from (x,y) to the origin $\Rightarrow \sqrt{(M(x,y))^2+(N(x,y))^2}$ $= \frac{k}{x^2+y^2}$, $k>0$; $\mathbf{F}$ points toward the origin $\Rightarrow \mathbf{F}$ is in the direction of $\mathbf{n} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$ $\Rightarrow \mathbf{F} = a\mathbf{n}$, for some constant $a>0$. Then $M(x,y) = \frac{-ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$ and $N(x,y) = \frac{-ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\Rightarrow \sqrt{(M(x,y))^2+(N(x,y))^2} = a \Rightarrow a = \frac{k}{x^2+y^2} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$, for any constant $k>0$

6. Given $x^2+y^2 = a^2+b^2$, let $x = \sqrt{a^2+b^2}\cos t$ and $y = -\sqrt{a^2+b^2}\sin t$. Then $\mathbf{r} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\cos t\right)\mathbf{i} - \left(\sqrt{a^2+b^2}\sin t\right)\mathbf{j}$ traces the circle in a clockwise direction as t goes from 0 to 2π $\Rightarrow \mathbf{v} = \left(-\sqrt{a^2+b^2}\sin t\right)\mathbf{i} - \left(\sqrt{a^2+b^2}\cos t\right)\mathbf{j}$ is tangent to the circle in a clockwise direction. Thus, let $\mathbf{F} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ and $\mathbf{F}(0,0) = \mathbf{0}$.

7. Substitute the parametric representations for $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representing each path into the vector field $\mathbf{F}$, and calculate the work $W = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.
   (a) $\mathbf{F} = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 9t \Rightarrow W = \int_0^1 9t\,dt = \frac{9}{2}$
   (b) $\mathbf{F} = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^4\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 7t^2 + 16t^7 \Rightarrow W = \int_0^1 (7t^2+16t^7)\,dt = \left[\frac{7}{3}t^3 + 2t^8\right]_0^1$ $= \frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$
   (c) $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_1 = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i}+\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 5t \Rightarrow W_1 = \int_0^1 5t\,dt = \frac{5}{2}$; $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 4t \Rightarrow W_2 = \int_0^1 4t\,dt = 2 \Rightarrow W = W_1 + W_2 = \frac{9}{2}$

8. Substitute the parametric representation for $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representing each path into the vector field $\mathbf{F}$, and calculate the work $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(a) $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{t^2+1}\right)\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{t^2+1} \Rightarrow W = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = \left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

(b) $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{t^2+1}\right)\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{2t}{t^2+1} \Rightarrow W = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\, dt = \left[\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \ln 2$

(c) $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_1 = \left(\frac{1}{t^2+1}\right)\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{1}{t^2+1}$; $\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{k}$ $\Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0 \Rightarrow W = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{\pi}{4}$

9. Substitute the parametric representation for $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representing each path into the vector field $\mathbf{F}$, and calculate the work $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(a) $\mathbf{F} = \sqrt{t}\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\sqrt{t} - 2t \Rightarrow W = \int_0^1 (2\sqrt{t} - 2t)\, dt = \left[\frac{4}{3}t^{3/2} - t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

(b) $\mathbf{F} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 4t^4 - 3t^2 \Rightarrow W = \int_0^1 (4t^4 - 3t^2)\, dt = \left[\frac{4}{5}t^5 - t^3\right]_0^1 = -\frac{1}{5}$

(c) $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_1 = -2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -2t \Rightarrow W_1 = \int_0^1 -2t\, dt$ $= -1$; $\mathbf{F}_2 = \sqrt{t}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 1 \Rightarrow W_2 = \int_0^1 dt = 1 \Rightarrow W = W_1 + W_2 = 0$

10. Substitute the parametric representation for $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representing each path into the vector field $\mathbf{F}$, and calculate the work $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(a) $\mathbf{F} = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3t^2 \Rightarrow W = \int_0^1 3t^2\, dt = 1$

(b) $\mathbf{F} = t^3\mathbf{i} - t^6\mathbf{j} + t^5\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = t^3 + 2t^7 + 4t^8 \Rightarrow W = \int_0^1 (t^3 + 2t^7 + 4t^8)\, dt$ $= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^8}{4} + \frac{4}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{17}{18}$

(c) $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_1 = t^2\mathbf{i}$ and $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = t^2 \Rightarrow W_1 = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$; $\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = t \Rightarrow W_2 = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} \Rightarrow W = W_1 + W_2 = \frac{5}{6}$

11. Substitute the parametric representation for $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representing each path into the vector field $\mathbf{F}$, and calculate the work $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(a) $\mathbf{F} = (3t^2 - 3t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3t^2 + 1 \Rightarrow W = \int_0^1 (3t^2 + 1)\, dt = \left[t^3 + t\right]_0^1 = 2$

(b) $\mathbf{F} = (3t^2 - 3t)\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 6t^5 + 4t^3 + 3t^2 - 3t$ $\Rightarrow W = \int_0^1 (6t^5 + 4t^3 + 3t^2 - 3t)\, dt = \left[t^6 + t^4 + t^3 - \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

(c) $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_1 = (3t^2 - 3t)\mathbf{i} + \mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 3t^2 - 3t$ $\Rightarrow W_1 = \int_0^1 (3t^2 - 3t)\, dt = \left[t^3 - \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$; $\mathbf{F}_2 = 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 1 \Rightarrow W_2 = \int_0^1 dt = 1$ $\Rightarrow W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}$

12. Substitute the parametric representation for $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ representing each path into the vector field $\mathbf{F}$, and calculate the work $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(a) $\mathbf{F} = 2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 6t \Rightarrow W = \int_0^1 6t\, dt = \left[3t^2\right]_0^1 = 3$

(b) $\mathbf{F} = (t^2 + t^4)\mathbf{i} + (t^4 + t)\mathbf{j} + (t + t^2)\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 6t^5 + 5t^4 + 3t^2$ $\Rightarrow W = \int_0^1 (6t^5 + 5t^4 + 3t^2)\, dt = \left[t^6 + t^5 + t^3\right]_0^1 = 3$

(c) $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 2t \Rightarrow W_1 = \int_0^1 2t\,dt = 1$;
$\mathbf{F}_2 = (1+t)\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 2 \Rightarrow W_2 = \int_0^1 2\,dt = 2 \Rightarrow W = W_1 + W_2 = 3$

13. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t^3 \Rightarrow \text{work} = \int_0^1 2t^3\,dt = \frac{1}{2}$

14. $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \frac{t}{6}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, and $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$
$\Rightarrow \mathbf{F} = (2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + (\cos t + \sin t)\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
$= 3\cos^2 t - 2\sin^2 t + \frac{1}{6}\cos t + \frac{1}{6}\sin t \Rightarrow \text{work} = \int_0^{2\pi} \left(3\cos^2 t - 2\sin^2 t + \frac{1}{6}\cos t + \frac{1}{6}\sin t\right) dt$
$= \left[\frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{6}\sin t - \frac{1}{6}\cos t\right]_0^{2\pi} = \pi$

15. $\mathbf{r} = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, and $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}$ and
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = t\cos t - \sin^2 t + \cos t \Rightarrow \text{work} = \int_0^{2\pi} (t\cos t - \sin^2 t + \cos t)\,dt$
$= \left[\cos t + t\sin t - \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \sin t\right]_0^{2\pi} = -\pi$

16. $\mathbf{r} = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \frac{t}{6}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, and $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} = t\mathbf{i} + (\cos^2 t)\mathbf{j} + (12\sin t)\mathbf{k}$ and
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = t\cos t - \sin t\cos^2 t + 2\sin t$
$\Rightarrow \text{work} = \int_0^{2\pi} (t\cos t - \sin t\cos^2 t + 2\sin t)\,dt = \left[\cos t + t\sin t + \frac{1}{3}\cos^3 t - 2\cos t\right]_0^{2\pi} = 0$

17. $x = t$ and $y = x^2 = t^2 \Rightarrow \mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 2$, and $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = t^3\mathbf{i} + (t + t^2)\mathbf{j}$ and
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = t^3 + (2t^2 + 2t^3) = 3t^3 + 2t^2 \Rightarrow \int_C xy\,dx + (x+y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_{-1}^{2} (3t^3 + 2t^2)\,dt$
$= \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_{-1}^{2} = \left(12 + \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{45}{4} + \frac{18}{3} = \frac{69}{4}$

18. Along $(0,0)$ to $(1,0)$: $\mathbf{r} = t\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = t$;
Along $(1,0)$ to $(0,1)$: $\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = (1-2t)\mathbf{i} + \mathbf{j}$ and
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t$;
Along $(0,1)$ to $(0,0)$: $\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = (t-1)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$ and
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = t - 1 \Rightarrow \int_C (x-y)\,dx + (x+y)\,dy = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 2t\,dt + \int_0^1 (t-1)\,dt = \int_0^1 (4t-1)\,dt$
$= \left[2t^2 - t\right]_0^1 = 2 - 1 = 1$

19. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $2 \ge y \ge -1$, and $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} = y^4\mathbf{i} - y\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dy} = 2y\mathbf{i} + \mathbf{j}$ and $\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dy} = 2y^5 - y$
$\Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_2^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dy}\,dy = \int_2^{-1} (2y^5 - y)\,dy = \left[\frac{1}{3}y^6 - \frac{1}{2}y^2\right]_2^{-1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{64}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{63}{3} = -\frac{39}{2}$

20. $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, and $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$
$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1 \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-1)\,dt = -\frac{\pi}{2}$

21. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = (1+t)\mathbf{i} + (1+2t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = (1 + 3t + 2t^2)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ and
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 1 + 5t + 2t^2 \Rightarrow \text{work} = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_0^1 (1 + 5t + 2t^2)\,dt = \left[t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{25}{6}$

22. $\mathbf{r} = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, and $\mathbf{F} = \nabla f = 2(x+y)\mathbf{i} + 2(x+y)\mathbf{j}$
$\Rightarrow \mathbf{F} = 4(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + 4(\cos t + \sin t)\mathbf{j}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

$= -8(\sin t\cos t + \sin^2 t) + 8(\cos^2 t + \cos t\sin t) = 8(\cos^2 t - \sin^2 t) = 8\cos 2t \Rightarrow \text{work} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$
$= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} 8\cos 2t\,dt = [4\sin 2t]_0^{2\pi} = 0$

23. (a) $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi,\ \mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, and $\mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$,
$\mathbf{F}_1 = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, and $\mathbf{F}_2 = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ and $\mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$
$\Rightarrow \text{Circ}_1 = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$ and $\text{Circ}_2 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi;\ \mathbf{n} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ and
$\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ and $\text{Flux}_2 = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$
(b) $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (4\cos t)\mathbf{j},\ \mathbf{F}_1 = (\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j}$, and
$\mathbf{F}_2 = (-4\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 15\sin t\cos t$ and $\mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 4 \Rightarrow \text{Circ}_1 = \int_0^{2\pi} 15\sin t\cos t\,dt$
$= \left[\frac{15}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0$ and $\text{Circ}_2 = \int_0^{2\pi} 4\,dt = 8\pi;\ \mathbf{n} = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\cos t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\sin t\right)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}$
$= \frac{4}{\sqrt{17}}\cos^2 t + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin^2 t$ and $\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} = -\frac{15}{\sqrt{17}}\sin t\cos t \Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n})\,|\mathbf{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\sqrt{17}\,dt$
$= 8\pi$ and $\text{Flux}_2 = \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n})\,|\mathbf{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{15}{\sqrt{17}}\sin t\cos t\right)\sqrt{17}\,dt = \left[-\frac{15}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0$

24. $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi,\ \mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$, and $\mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$,
$\mathbf{F}_1 = (2a\cos t)\mathbf{i} - (3a\sin t)\mathbf{j}$, and $\mathbf{F}_2 = (2a\cos t)\mathbf{i} + (a\cos t - a\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{n}\,|\mathbf{v}| = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$,
$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\,|\mathbf{v}| = 2a^2\cos^2 t - 3a^2\sin^2 t$, and $\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}\,|\mathbf{v}| = 2a^2\cos^2 t + a^2\sin t\cos t - a^2\sin^2 t$
$\Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_0^{2\pi} (2a^2\cos^2 t - 3a^2\sin^2 t)\,dt = 2a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} - 3a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -\pi a^2$, and
$\text{Flux}_2 = \int_0^{2\pi} (2a^2\cos^2 t - a^2\sin t\cos t - a^2\sin^2 t)\,dt = 2a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\left[\sin^2 t\right]_0^{2\pi} - a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi a^2$

25. $\mathbf{F}_1 = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j},\ \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Circ}_1 = 0;\ M_1 = a\cos t$,
$N_1 = a\sin t,\ dx = -a\sin t\,dt,\ dy = a\cos t\,dt \Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_C M_1\,dy - N_1\,dx = \int_0^{\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\,dt$
$= \int_0^{\pi} a^2\,dt = a^2\pi;$
$\mathbf{F}_2 = t\mathbf{i},\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = t \Rightarrow \text{Circ}_2 = \int_{-a}^{a} t\,dt = 0;\ M_2 = t,\ N_2 = 0,\ dx = dt,\ dy = 0 \Rightarrow \text{Flux}_2$
$= \int_C M_2\,dy - N_2\,dx = \int_{-a}^{a} 0\,dt = 0$; therefore, $\text{Circ} = \text{Circ}_1 + \text{Circ}_2 = 0$ and $\text{Flux} = \text{Flux}_1 + \text{Flux}_2 = a^2\pi$

26. $\mathbf{F}_1 = (a^2\cos^2 t)\,\mathbf{i} + (a^2\sin^2 t)\,\mathbf{j},\ \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -a^3\sin t\cos^2 t + a^3\cos t\sin^2 t$
$\Rightarrow \text{Circ}_1 = \int_0^{\pi} (-a^3\sin t\cos^2 t + a^3\cos t\sin^2 t)\,dt = -\frac{2a^3}{3};\ M_1 = a^2\cos^2 t,\ N_1 = a^2\sin^2 t,\ dy = a\cos t\,dt$,
$dx = -a\sin t\,dt \Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_C M_1\,dy - N_1\,dx = \int_0^{\pi} (a^3\cos^3 t + a^3\sin^3 t)\,dt = \frac{4}{3}a^3;$
$\mathbf{F}_2 = t^2\mathbf{i},\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = t^2 \Rightarrow \text{Circ}_2 = \int_{-a}^{a} t^2\,dt = \frac{2a^3}{3};\ M_2 = t^2,\ N_2 = 0,\ dy = 0,\ dx = dt$
$\Rightarrow \text{Flux}_2 = \int_C M_2\,dy - N_2\,dx = 0$; therefore, $\text{Circ} = \text{Circ}_1 + \text{Circ}_2 = 0$ and $\text{Flux} = \text{Flux}_1 + \text{Flux}_2 = \frac{4}{3}a^3$

27. $\mathbf{F}_1 = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j},\ \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t = a^2$
$\Rightarrow \text{Circ}_1 = \int_0^{\pi} a^2\,dt = a^2\pi;\ M_1 = -a\sin t,\ N_1 = a\cos t,\ dx = -a\sin t\,dt,\ dy = a\cos t\,dt$
$\Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_C M_1\,dy - N_1\,dx = \int_0^{\pi} (-a^2\sin t\cos t + a^2\sin t\cos t)\,dt = 0;\ \mathbf{F}_2 = t\mathbf{j},\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0$
$\Rightarrow \text{Circ}_2 = 0;\ M_2 = 0,\ N_2 = t,\ dx = dt,\ dy = 0 \Rightarrow \text{Flux}_2 = \int_C M_2\,dy - N_2\,dx = \int_{-a}^{a} -t\,dt = 0$; therefore,
$\text{Circ} = \text{Circ}_1 + \text{Circ}_2 = a^2\pi$ and $\text{Flux} = \text{Flux}_1 + \text{Flux}_2 = 0$

28. $\mathbf{F}_1 = (-a^2 \sin^2 t)\mathbf{i} + (a^2 \cos^2 t)\mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (-a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = a^3 \sin^3 t + a^3 \cos^3 t$

$\Rightarrow \text{Circ}_1 = \int_0^\pi (a^3 \sin^3 t + a^3 \cos^3 t)\, dt = \frac{4}{3} a^3$; $M_1 = -a^2 \sin^2 t$, $N_1 = a^2 \cos^2 t$, $dy = a \cos t\, dt$, $dx = -a \sin t\, dt$

$\Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_C M_1\, dy - N_1\, dx = \int_0^\pi (-a^3 \cos t \sin^2 t + a^3 \sin t \cos^2 t)\, dt = \frac{2}{3} a^3$; $\mathbf{F}_2 = t^2 \mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow \text{Circ}_2 = 0$; $M_2 = 0$, $N_2 = t^2$, $dy = 0$, $dx = dt \Rightarrow \text{Flux}_2 = \int_C M_2\, dy - N_2\, dx = \int_{-a}^{a} -t^2\, dt = -\frac{2}{3} a^3$; therefore, $\text{Circ} = \text{Circ}_1 + \text{Circ}_2 = \frac{4}{3} a^3$ and $\text{Flux} = \text{Flux}_1 + \text{Flux}_2 = 0$

29. (a) $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$ and

$\mathbf{F} = (\cos t + \sin t)\mathbf{i} - (\cos^2 t + \sin^2 t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t - \sin^2 t - \cos t \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$

$= \int_0^\pi (-\sin t \cos t - \sin^2 t - \cos t)\, dt = \left[-\frac{1}{2} \sin^2 t - \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - \sin t\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}$

(b) $\mathbf{r} = (1-2t)\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -2\mathbf{i}$ and $\mathbf{F} = (1-2t)\mathbf{i} - (1-2t)^2 \mathbf{j} \Rightarrow$

$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 4t - 2 \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_0^1 (4t-2)\, dt = [2t^2 - 2t]_0^1 = 0$

(c) $\mathbf{r}_1 = (1-t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ and $\mathbf{F} = (1-2t)\mathbf{i} - (1-2t+2t^2)\mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (2t-1) + (1-2t+2t^2) = 2t^2 \Rightarrow \text{Flow}_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \int_0^1 2t^2\, dt = \frac{2}{3}$; $\mathbf{r}_2 = -t\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$,

$0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ and $\mathbf{F} = -\mathbf{i} - (t^2 + t^2 - 2t + 1)\mathbf{j}$

$= -\mathbf{i} - (2t^2 - 2t + 1)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 1 - (2t^2 - 2t + 1) = 2t - 2t^2 \Rightarrow \text{Flow}_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \int_0^1 (2t - 2t^2)\, dt$

$= \left[t^2 - \frac{2}{3} t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Flow} = \text{Flow}_1 + \text{Flow}_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

30. From $(1,0)$ to $(0,1)$: $\mathbf{r}_1 = (1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$,

$\mathbf{F} = \mathbf{i} - (1 - 2t + 2t^2)\mathbf{j}$, and $\mathbf{n}_1 |\mathbf{v}_1| = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 |\mathbf{v}_1| = 2t - 2t^2 \Rightarrow \text{Flux}_1 = \int_0^1 (2t - 2t^2)\, dt$

$= \left[t^2 - \frac{2}{3} t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$;

From $(0,1)$ to $(-1,0)$: $\mathbf{r}_2 = -t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$,

$\mathbf{F} = (1-2t)\mathbf{i} - (1 - 2t + 2t^2)\mathbf{j}$, and $\mathbf{n}_2 |\mathbf{v}_2| = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 |\mathbf{v}_2| = (2t-1) + (-1 + 2t - 2t^2) = -2 + 4t - 2t^2$

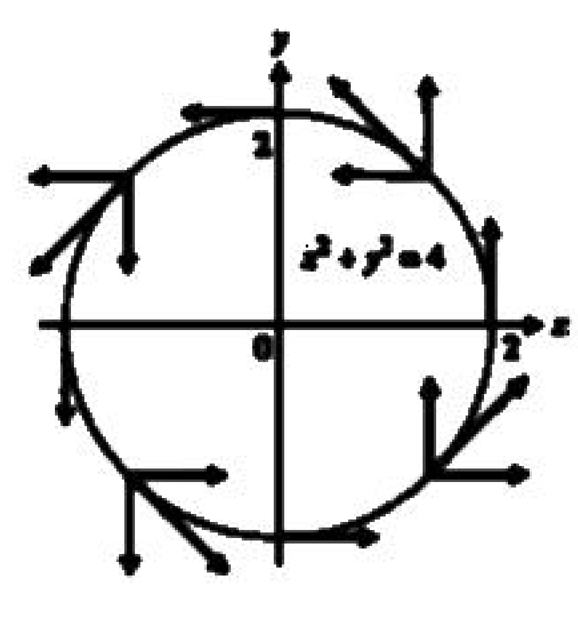
$\Rightarrow \text{Flux}_2 = \int_0^1 (-2 + 4t - 2t^2)\, dt = \left[-2t + 2t^2 - \frac{2}{3} t^3\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$;

From $(-1,0)$ to $(1,0)$: $\mathbf{r}_3 = (-1+2t)\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$, and $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = 2\mathbf{i}$,

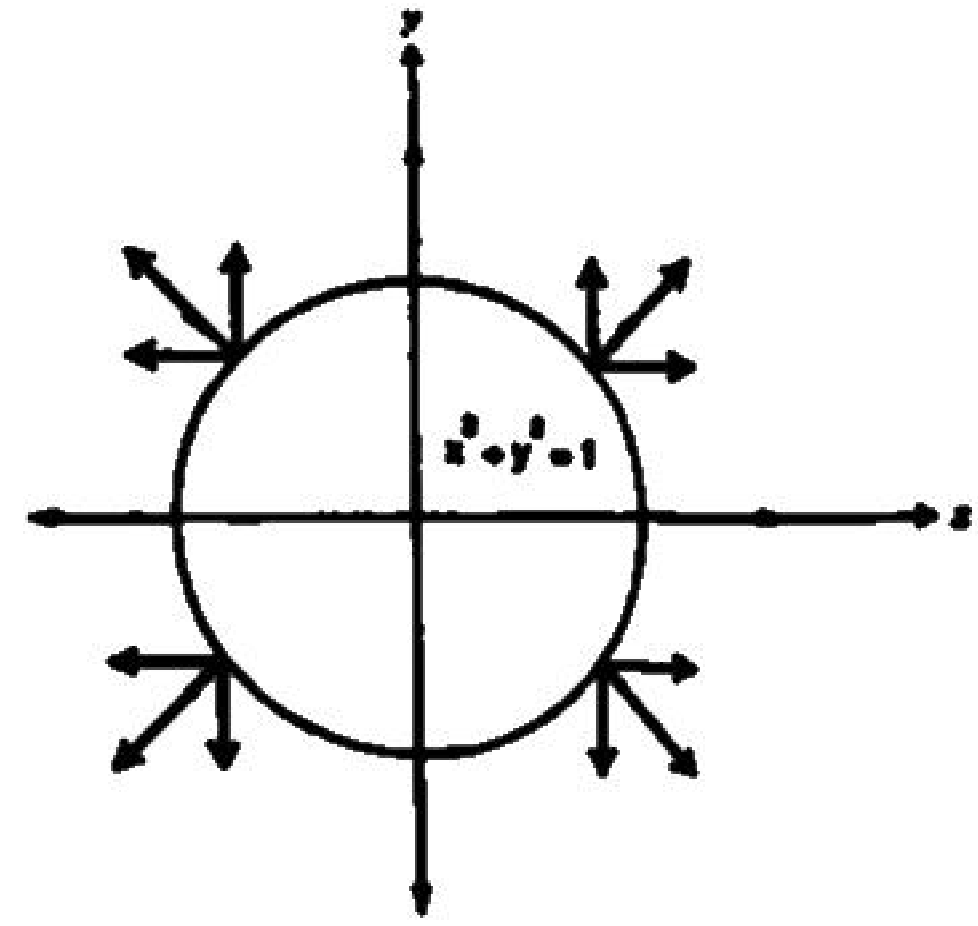
$\mathbf{F} = (-1+2t)\mathbf{i} - (1 - 4t + 4t^2)\mathbf{j}$, and $\mathbf{n}_3 |\mathbf{v}_3| = -2\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_3 |\mathbf{v}_3| = 2(1 - 4t + 4t^2)$

$\Rightarrow \text{Flux}_3 = 2 \int_0^1 (1 - 4t + 4t^2)\, dt = 2\left[t - 2t^2 + \frac{4}{3} t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Flux} = \text{Flux}_1 + \text{Flux}_2 + \text{Flux}_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

31. $\mathbf{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$ on $x^2 + y^2 = 4$;
at $(2,0)$, $\mathbf{F} = \mathbf{j}$; at $(0,2)$, $\mathbf{F} = -\mathbf{i}$; at $(-2,0)$,
$\mathbf{F} = -\mathbf{j}$; at $(0,-2)$, $\mathbf{F} = \mathbf{i}$; at $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$;
at $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\mathbf{F} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; at $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$,
$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$; at $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\mathbf{F} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$



32. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ on $x^2 + y^2 = 1$; at $(1, 0)$, $\mathbf{F} = \mathbf{i}$;
at $(-1, 0)$, $\mathbf{F} = -\mathbf{i}$; at $(0, 1)$, $\mathbf{F} = \mathbf{j}$; at $(0, -1)$,
$\mathbf{F} = -\mathbf{j}$; at $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$;
at $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$;
at $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$;
at $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.



33. (a) $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ is to have a magnitude $\sqrt{a^2 + b^2}$ and to be tangent to $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ in a counterclockwise direction. Thus $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ is the slope of the tangent line at any point on the circle $\Rightarrow y' = -\frac{a}{b}$ at (a, b). Let $\mathbf{v} = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j} \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, with $\mathbf{v}$ in a counterclockwise direction and tangent to the circle. Then let $P(x, y) = -y$ and $Q(x, y) = x$
$\Rightarrow \mathbf{G} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \Rightarrow$ for (a, b) on $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ we have $\mathbf{G} = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ and $|\mathbf{G}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(b) $\mathbf{G} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{F} = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)\mathbf{F}$.

34. (a) From Exercise 33, part a, $-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ is a vector tangent to the circle and pointing in a counterclockwise direction $\Rightarrow y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ is a vector tangent to the circle pointing in a clockwise direction $\Rightarrow \mathbf{G} = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ is a unit vector tangent to the circle and pointing in a clockwise direction.

(b) $\mathbf{G} = -\mathbf{F}$

35. The slope of the line through (x, y) and the origin is $\frac{y}{x} \Rightarrow \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ is a vector parallel to that line and pointing away from the origin $\Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ is the unit vector pointing toward the origin.

36. (a) From Exercise 35, $-\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ is a unit vector through (x, y) pointing toward the origin and we want $|\mathbf{F}|$ to have magnitude $\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2}\left(-\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

(b) We want $|\mathbf{F}| = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ where $C \neq 0$ is a constant $\Rightarrow \mathbf{F} = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(-\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = -C\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}\right)$.

37. $\mathbf{F} = -4t^3\mathbf{i} + 8t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 12t^3 \Rightarrow \text{Flow} = \int_0^2 12t^3\,dt = \left[3t^4\right]_0^2 = 48$

38. $\mathbf{F} = 12t^2\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 72t^2 \Rightarrow \text{Flow} = \int_0^1 72t^2\,dt = \left[24t^3\right]_0^1 = 24$

39. $\mathbf{F} = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t + 1$
$\Rightarrow \text{Flow} = \int_0^\pi (-\sin t \cos t + 1)\,dt = \left[\frac{1}{2}\cos^2 t + t\right]_0^\pi = \left(\frac{1}{2} + \pi\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \pi$

40. $\mathbf{F} = (-2\sin t)\mathbf{i} - (2\cos t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -4\sin^2 t - 4\cos^2 t + 4 = 0$
$\Rightarrow \text{Flow} = 0$

41. C_1: $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{F} = (2\cos t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2\sin t)\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -2\cos t \sin t + 2t\cos t + 2\sin t = -\sin 2t + 2t\cos t + 2\sin t$

$\Rightarrow$ Flow$_1 = \int_0^{\pi/2} (-\sin 2t + 2t\cos t + 2\sin t)\, dt = \left[\frac{1}{2}\cos 2t + 2t\sin t + 2\cos t - 2\cos t\right]_0^{\pi/2} = -1 + \pi$;

C_2: $\mathbf{r} = \mathbf{j} + \frac{\pi}{2}(1-t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \mathbf{F} = \pi(1-t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\pi}{2}\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi$

$\Rightarrow$ Flow$_2 = \int_0^1 -\pi\, dt = [-\pi t]_0^1 = -\pi$;

C_3: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \mathbf{F} = 2t\mathbf{i} + 2(1-t)\mathbf{k}$ and $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t$

$\Rightarrow$ Flow$_3 = \int_0^1 2t\, dt = [t^2]_0^1 = 1 \Rightarrow$ Circulation $= (-1+\pi) - \pi + 1 = 0$

42. $\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, where $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+x^2) \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))$ by the chain rule $\Rightarrow$ Circulation $= \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))\, dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$. Since C is an entire ellipse, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$, thus the Circulation $= 0$.

43. Let $x = t$ be the parameter $\Rightarrow y = x^2 = t^2$ and $z = x = t \Rightarrow \mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ from $(0,0,0)$ to $(1,1,1)$ $\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = t^3 + 2t^3 - t^3 = 2t^3 \Rightarrow$ Flow $= \int_0^1 2t^3\, dt$ $= \frac{1}{2}$

44. (a) $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3) \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt}$, where $f(x,y,z) = xy^2z^3 \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$ $= \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))\, dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = 0$ since C is an entire ellipse.

(b) $\int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int_{(1,1,1)}^{(2,1,-1)} \frac{d}{dt}(xy^2z^3)\, dt = [xy^2z^3]_{(1,1,1)}^{(2,1,-1)} = (2)(1)^2(-1)^3 - (1)(1)^2(1)^3 = -2 - 1 = -3$

45. Yes. The work and area have the same numerical value because work $= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C y\mathbf{i}\cdot d\mathbf{r}$

$= \int_b^a [f(t)\mathbf{i}]\cdot\left[\mathbf{i} + \frac{df}{dt}\mathbf{j}\right] dt$ [On the path, y equals f(t)]

$= \int_a^b f(t)\, dt =$ Area under the curve [because $f(t) > 0$]

46. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$; $\mathbf{F} = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ has constant magnitude k and points away from the origin $\Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dx} = \frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{k\cdot y\cdot f'(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{kx + k\cdot f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{x^2+[f(x)]^2}} = k\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+[f(x)]^2}$, by the chain rule

$\Rightarrow \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dx}\, dx = \int_a^b k\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+[f(x)]^2}\, dx = k\left[\sqrt{x^2+[f(x)]^2}\right]_a^b$

$= k\left(\sqrt{b^2+[f(b)]^2} - \sqrt{a^2+[f(a)]^2}\right)$, as claimed.

47-52. Example CAS commands:

Maple:

```
with( LinearAlgebra );#47
F := r -> < r[1]*r[2]^6 | 3*r[1]*(r[1]*r[2]^5+2) >;
r := t -> < 2*cos(t) | sin(t) >;
a,b := 0,2*Pi;
dr := map(diff,r(t),t);                          # (a)
F(r(t));                                         # (b)
q1 := simplify( F(r(t)) . dr ) assuming t::real;  # (c)
q2 := Int( q1, t=a..b );
value( q2 );
```

Mathematica: (functions and bounds will vary):

Exercises 47 and 48 use vectors in 2 dimensions

```
Clear[x, y, t, f, r, v]
f[x_, y_]:= {x y^6, 3x (x y^5 + 2)}
```

```
{a, b}={0, 2π};
x[t_]:= 2 Cos[t]
y[t_]:= Sin[t]
r[t_]:={x[t], y[t]}
v[t_]:= r'[t]
integrand= f[x[t], y[t]] . v[t] //Simplify
Integrate[integrand,{t, a, b}]
N[%]
```

If the integration takes too long or cannot be done, use NIntegrate to integrate numerically. This is suggested for exercises 49 - 52 that use vectors in 3 dimensions. Be certain to leave spaces between variables to be multiplied.

```
Clear[x, y, z, t, f, r, v]
f[x_, y_, z_]:= {y + y z Cos[x y z], x^2 + x z Cos[x y z], z + x y Cos[x y z]}
{a, b}={0, 2π};
x[t_]:= 2 Cos[t]
y[t_]:= 3 Sin[t]
z[t_]:= 1
r[t_]:={x[t], y[t], z[t]}
v[t_]:= r'[t]
integrand= f[x[t], y[t],z[t]] . v[t] //Simplify
NIntegrate[integrand,{t, a, b}]
```

16.3 PATH INDEPENDENCE, POTENTIAL FUNCTIONS, AND CONSERVATIVE FIELDS

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = z = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative

2. $\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos z = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = y\cos z = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \sin z = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative

3. $\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial z} \Rightarrow$ Not Conservative

4. $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Not Conservative

5. $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \neq 1 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Not Conservative

6. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = 3y \Rightarrow g(y,z) = \frac{3y^2}{2} + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + h(z)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = 4z \Rightarrow h(z) = 2z^2 + C \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

8. $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \Rightarrow f(x,y,z) = (y+z)x + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x + z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = z \Rightarrow g(y,z) = zy + h(z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = (y+z)x + zy + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x + y + h'(z) = x + y \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z)$
$= (y+z)x + zy + C$

9. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y+2z} \Rightarrow f(x,y,z) = xe^{y+2z} + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y+2z} + \frac{\partial g}{\partial y} = xe^{y+2z} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(x,y,z)$
$= xe^{y+2z} + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 2xe^{y+2z} + h'(z) = 2xe^{y+2z} \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z) = xe^{y+2z} + C$

10. $\frac{\partial f}{\partial x} = y\sin z \Rightarrow f(x,y,z) = xy\sin z + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x\sin z + \frac{\partial g}{\partial y} = x\sin z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = xy\sin z + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos z + h'(z) = xy\cos z \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z)$
$= xy\sin z + C$

11. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{y^2+z^2} \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) + g(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = \ln x + \sec^2(x+y) \Rightarrow g(x,y)$ $= (x\ln x - x) + \tan(x+y) + h(y) \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) + (x\ln x - x) + \tan(x+y) + h(y)$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{y^2+z^2} + \sec^2(x+y) + h'(y) = \sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C \Rightarrow f(x,y,z)$ $= \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) + (x\ln x - x) + \tan(x+y) + C$

12. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2} \Rightarrow f(x,y,z) = \tan^{-1}(xy) + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}$ $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}} \Rightarrow g(y,z) = \sin^{-1}(yz) + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = \tan^{-1}(xy) + \sin^{-1}(yz) + h(z)$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + h'(z) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z} \Rightarrow h'(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow h(z) = \ln|z| + C$ $\Rightarrow f(x,y,z) = \tan^{-1}(xy) + \sin^{-1}(yz) + \ln|z| + C$

13. Let $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \Rightarrow g(y,z) = y^2 + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 = h(z)$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + C \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + C \Rightarrow \int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$ $= f(2,3,-6) - f(0,0,0) = 2^2 + 3^2 + (-6)^2 = 49$

14. Let $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = z = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = yz \Rightarrow f(x,y,z) = xyz + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z) \Rightarrow f(x,y,z)$ $= xyz + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = xy + h'(z) = xy \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z) = xyz + C$ $\Rightarrow \int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = f(3,5,0) - f(1,1,2) = 0 - 2 = -2$

15. Let $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - z^2)\mathbf{j} - 2yz\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2z = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - z^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -z^2$ $\Rightarrow g(y,z) = -yz^2 + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = x^2y - yz^2 + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = -2yz + h'(z) = -2yz \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$ $\Rightarrow f(x,y,z) = x^2y - yz^2 + C \Rightarrow \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 2 - 2(3)^2 = -16$

16. Let $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - \left(\frac{4}{1+z^2}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = -y^2 \Rightarrow g(y,z) = -\frac{y^3}{3} + h(z)$ $\Rightarrow f(x,y,z) = x^2 - \frac{y^3}{3} + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = -\frac{4}{1+z^2} \Rightarrow h(z) = -4\tan^{-1} z + C \Rightarrow f(x,y,z)$ $= x^2 - \frac{y^3}{3} - 4\tan^{-1} z + C \Rightarrow \int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1-z^2}\,dz = f(3,3,1) - f(0,0,0)$ $= \left(9 - \frac{27}{3} - 4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - (0 - 0 - 0) = -\pi$

17. Let $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin y \cos x)\mathbf{i} + (\cos y \sin x)\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y \cos x = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y \cos x \Rightarrow f(x,y,z) = \sin y \sin x + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y \sin x + \frac{\partial g}{\partial y}$ $= \cos y \sin x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = \sin y \sin x + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z + C$ $\Rightarrow f(x,y,z) = \sin y \sin x + z + C \Rightarrow \int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x\,dx + \cos y \sin x\,dy + dz = f(0,1,1) - f(1,0,0)$ $= (0+1) - (0+0) = 1$

18. Let $\mathbf{F}(x,y,z) = (2\cos y)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{z}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = -2\sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos y \Rightarrow f(x,y,z) = 2x\cos y + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -2x\sin y + \frac{\partial g}{\partial y}$ $= \frac{1}{y} - 2x\sin y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{y} \Rightarrow g(y,z) = \ln|y| + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = 2x\cos y + \ln|y| + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow h(z) = \ln|z| + C \Rightarrow f(x, y, z) = 2x\cos y + \ln|y| + \ln|z| + C$
$\Rightarrow \int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)dy + \frac{1}{z}\,dz = f\left(1, \frac{\pi}{2}, 2\right) - f(0, 2, 1)$
$= \left(2 \cdot 0 + \ln\frac{\pi}{2} + \ln 2\right) - (0 \cdot \cos 2 + \ln 2 + \ln 1) = \ln\frac{\pi}{2}$

19. Let $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2\mathbf{i} + \left(\frac{z^2}{y}\right)\mathbf{j} + (2z\ln y)\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2z}{y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y}$
$\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow f(x, y, z) = x^3 + g(y, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{z^2}{y} \Rightarrow g(y, z) = z^2\ln y + h(z)$
$\Rightarrow f(x, y, z) = x^3 + z^2\ln y + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 2z\ln y + h'(z) = 2z\ln y \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x, y, z)$
$= x^3 + z^2\ln y + C \Rightarrow \int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,dx + \frac{z^2}{y}\,dy + 2z\ln y\,dz = f(1, 2, 3) - f(1, 1, 1)$
$= (1 + 9\ln 2 + C) - (1 + 0 + C) = 9\ln 2$

20. Let $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x\ln y - yz)\mathbf{i} + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)\mathbf{j} - (xy)\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -x = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = -y = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y} - z = \frac{\partial M}{\partial y}$
$\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln y - yz \Rightarrow f(x, y, z) = x^2\ln y - xyz + g(y, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y} - xz + \frac{\partial g}{\partial y}$
$= \frac{x^2}{y} - xz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = x^2\ln y - xyz + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = -xy + h'(z) = -xy \Rightarrow h'(z) = 0$
$\Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x, y, z) = x^2\ln y - xyz + C \Rightarrow \int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)\,dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xy\,dz$
$= f(2, 1, 1) - f(1, 2, 1) = (4\ln 1 - 2 + C) - (\ln 2 - 2 + C) = -\ln 2$

21. Let $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{y}{z^2}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$
$\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{x}{y} + g(y, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$
$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{z} \Rightarrow g(y, z) = \frac{y}{z} + h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + h'(z) = -\frac{y}{z^2} \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$
$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + C \Rightarrow \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}\,dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}\,dz = f(2, 2, 2) - f(1, 1, 1) = \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + C\right)$
$= 0$

22. Let $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$ $\left(\text{and let } \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}, \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}\right)$
$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{4yz}{\rho^4} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{4xz}{\rho^4} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{4xy}{\rho^4} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact;
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + g(y, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$
$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + h'(z)$
$= \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + C$
$\Rightarrow \int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} = f(2, 2, 2) - f(-1, -1, -1) = \ln 12 - \ln 3 = \ln 4$

23. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = (1 + t)\mathbf{i} + (1 + 2t)\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}, 0 \le t \le 1 \Rightarrow dx = dt, dy = 2\,dt, dz = -2\,dt$
$\Rightarrow \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz = \int_0^1 (2t + 1)\,dt + (t + 1)(2\,dt) + 4(-2)\,dt = \int_0^1 (4t - 5)\,dt = \left[2t^2 - 5t\right]_0^1 = -3$

24. $\mathbf{r} = t(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}), 0 \le t \le 1 \Rightarrow dx = 0, dy = 3\,dt, dz = 4\,dt \Rightarrow \int_{(0,0,0)}^{(0,3,4)} x^2\,dx + yz\,dy + \left(\frac{y^2}{2}\right)dz$
$= \int_0^1 (12t^2)(3\,dt) + \left(\frac{9t^2}{2}\right)(4\,dt) = \int_0^1 54t^2\,dt = \left[18t^3\right]_0^1 = 18$

25. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 2z = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact $\Rightarrow$ **F** is conservative
$\Rightarrow$ path independence

26. $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{yz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{xz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial M}{\partial y}$

$\Rightarrow$ M dx + N dy + P dz is exact $\Rightarrow$ **F** is conservative $\Rightarrow$ path independence

27. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow$ **F** is conservative $\Rightarrow$ there exists an f so that $\mathbf{F} = \nabla f$;
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{y} + g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + g'(y) = \frac{1-x^2}{y^2} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow g(y) = -\frac{1}{y} + C$
$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{y} - \frac{1}{y} + C \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla\left(\frac{x^2-1}{y}\right)$

28. $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos z = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{e^x}{y} = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow$ **F** is conservative $\Rightarrow$ there exists an f so that $\mathbf{F} = \nabla f$;
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \ln y \Rightarrow f(x,y,z) = e^x \ln y + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{e^x}{y} + \sin z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \sin z \Rightarrow g(y,z)$
$= y \sin z + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = e^x \ln y + y \sin z + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = y \cos z + h'(z) = y \cos z \Rightarrow h'(z) = 0$
$\Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z) = e^x \ln y + y \sin z + C \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(e^x \ln y + y \sin z)$

29. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow$ **F** is conservative $\Rightarrow$ there exists an f so that $\mathbf{F} = \nabla f$;
$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = y^2 + x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = y^2 \Rightarrow g(y,z) = \frac{1}{3}y^3 + h(z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = ze^z \Rightarrow h(z) = ze^z - e^z + C \Rightarrow f(x,y,z)$
$= \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + ze^z - e^z + C \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla\left(\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + ze^z - e^z\right)$

(a) work $= \int_A^B \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + ze^z - e^z\right]_{(1,0,0)}^{(1,0,1)} = \left(\frac{1}{3} + 0 + 0 + e - e\right) - \left(\frac{1}{3} + 0 + 0 - 1\right)$
$= 1$

(b) work $= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + ze^z - e^z\right]_{(1,0,0)}^{(1,0,1)} = 1$

(c) work $= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + ze^z - e^z\right]_{(1,0,0)}^{(1,0,1)} = 1$

<u>Note</u>: Since **F** is conservative, $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ is independent of the path from $(1,0,0)$ to $(1,0,1)$.

30. $\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{yz} + xyze^{yz} + \cos y = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = ye^{yz} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = ze^{yz} = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow$ **F** is conservative $\Rightarrow$ there exists an f so that $\mathbf{F} = \nabla f$; $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz} \Rightarrow f(x,y,z) = xe^{yz} + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = xze^{yz} + \frac{\partial g}{\partial y} = xze^{yz} + z\cos y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = z \cos y$
$\Rightarrow g(y,z) = z \sin y + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = xe^{yz} + z \sin y + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = xye^{yz} + \sin y + h'(z) = xye^{yz} + \sin y$
$\Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z) = xe^{yz} + z \sin y + C \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(xe^{yz} + z \sin y)$

(a) work $= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[xe^{yz} + z \sin y\right]_{(1,0,1)}^{(1,\pi/2,0)} = (1+0) - (1+0) = 0$

(b) work $= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[xe^{yz} + z \sin y\right]_{(1,0,1)}^{(1,\pi/2,0)} = 0$

(c) work $= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[xe^{yz} + z \sin y\right]_{(1,0,1)}^{(1,\pi/2,0)} = 0$

<u>Note</u>: Since **F** is conservative, $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ is independent of the path from $(1,0,1)$ to $\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

31. (a) $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2) \Rightarrow \mathbf{F} = 3x^2y^2\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j}$; let C_1 be the path from $(-1,1)$ to $(0,0) \Rightarrow x = t - 1$ and $y = -t + 1$, $0 \le t \le 1 \Rightarrow \mathbf{F} = 3(t-1)^2(-t+1)^2\mathbf{i} + 2(t-1)^3(-t+1)\mathbf{j} = 3(t-1)^4\mathbf{i} - 2(t-1)^4\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_1 = (t-1)\mathbf{i} + (-t+1)\mathbf{j} \Rightarrow d\mathbf{r}_1 = dt\,\mathbf{i} - dt\,\mathbf{j} \Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_0^1 [3(t-1)^4 + 2(t-1)^4]\,dt$
$= \int_0^1 5(t-1)^4\,dt = \left[(t-1)^5\right]_0^1 = 1$; let C_2 be the path from $(0,0)$ to $(1,1) \Rightarrow x = t$ and $y = t$,
$0 \le t \le 1 \Rightarrow \mathbf{F} = 3t^4\mathbf{i} + 2t^4\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_2 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} \Rightarrow d\mathbf{r}_2 = dt\,\mathbf{i} + dt\,\mathbf{j} \Rightarrow \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_0^1 (3t^4 + 2t^4)\,dt$
$= \int_0^1 5t^4\,dt = 1 \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = 2$

(b) Since $f(x,y) = x^3y^2$ is a potential function for **F**, $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(1,1) - f(-1,1) = 2$

32. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$ $\Rightarrow$ **F** is conservative $\Rightarrow$ there exists an f so that $\mathbf{F} = \nabla f$;
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 \cos y + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y + \frac{\partial g}{\partial y} = -x^2 \sin y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2 \cos y + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 \cos y + C \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla (x^2 \cos y)$
(a) $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy = \left[x^2 \cos y\right]_{(1,0)}^{(0,1)} = 0 - 1 = -1$
(b) $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy = \left[x^2 \cos y\right]_{(-1,\pi)}^{(1,0)} = 1 - (-1) = 2$
(c) $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy = \left[x^2 \cos y\right]_{(-1,0)}^{(1,0)} = 1 - 1 = 0$
(d) $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy = \left[x^2 \cos y\right]_{(1,0)}^{(1,0)} = 1 - 1 = 0$

33. (a) If the differential form is exact, then $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \Rightarrow 2ay = cy$ for all y $\Rightarrow 2a = c$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow 2cx = 2cx$ for all x, and $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow by = 2ay$ for all y $\Rightarrow b = 2a$ and $c = 2a$
(b) $\mathbf{F} = \nabla f \Rightarrow$ the differential form with $a = 1$ in part (a) is exact $\Rightarrow b = 2$ and $c = 2$

34. $\mathbf{F} = \nabla f \Rightarrow g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x,y,z) - f(0,0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - 0$, and $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} - 0 \Rightarrow \nabla g = \nabla f = \mathbf{F}$, as claimed

35. The path will not matter; the work along any path will be the same because the field is conservative.

36. The field is not conservative, for otherwise the work would be the same along C_1 and C_2.

37. Let the coordinates of points A and B be (x_A, y_A, z_A) and (x_B, y_B, z_B), respectively. The force $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ is conservative because all the partial derivatives of M, N, and P are zero. Therefore, the potential function is $f(x,y,z) = ax + by + cz + C$, and the work done by the force in moving a particle along any path from A to B is $f(B) - f(A) = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A) = (ax_B + by_B + cz_B + C) - (ax_A + by_A + cz_A + C)$
$= a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{BA}$

38. (a) Let $-GmM = C \Rightarrow \mathbf{F} = C\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\right]$
$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-3yzC}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{-3xzC}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-3xyC}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$ for some f; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xC}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow f(x,y,z) = -\frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{yC}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial g}{\partial y}$
$= \frac{yC}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{zC}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + h'(z) = \frac{zC}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$
$\Rightarrow h(z) = C_1 \Rightarrow f(x,y,z) = -\frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C_1$. Let $C_1 = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ is a potential function for **F**.
(b) If s is the distance of (x, y, z) from the origin, then $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. The work done by the gravitational field **F** is work $= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_{P_1}^{P_2} = \frac{GmM}{s_2} - \frac{GmM}{s_1} = GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$, as claimed.

16.4 GREEN'S THEOREM IN THE PLANE

1. $M = -y = -a \sin t$, $N = x = a \cos t$, $dx = -a \sin t\, dt$, $dy = a \cos t\, dt \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, and $\frac{\partial N}{\partial y} = 0$;
Equation (11): $\oint_C M\, dy - N\, dx = \int_0^{2\pi} [(-a \sin t)(a \cos t) - (a \cos t)(-a \sin t)]\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$;
$\iint\limits_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_R 0\, dx\, dy = 0$, Flux

Equation (12): $\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_0^{2\pi} [(-a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t)(a\cos t)]\,dt = \int_0^{2\pi} a^2\,dt = 2\pi a^2$;
$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} 4\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}$
$= 2a^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2a^2\pi$, Circulation

2. $M = y = a\sin t$, $N = 0$, $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, and $\frac{\partial N}{\partial y} = 0$;
Equation (11): $\oint_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} a^2 \sin t\cos t\,dt = a^2\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0$; $\iint_R 0\,dx\,dy = 0$, Flux
Equation (12): $\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_0^{2\pi} (-a^2\sin^2 t)\,dt = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -\pi a^2$; $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$
$= \iint_R -1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a -r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{a^2}{2}\,d\theta = -\pi a^2$, Circulation

3. $M = 2x = 2a\cos t$, $N = -3y = -3a\sin t$, $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, and $\frac{\partial N}{\partial y} = -3$;
Equation (11): $\oint_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} [(2a\cos t)(a\cos t) + (3a\sin t)(-a\sin t)]\,dt$
$= \int_0^{2\pi} (2a^2\cos^2 t - 3a^2\sin^2 t)\,dt = 2a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} - 3a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 - 3\pi a^2 = -\pi a^2$;
$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \iint_R -1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a -r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{a^2}{2}\,d\theta = -\pi a^2$, Flux
Equation (12): $\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_0^{2\pi} [(2a\cos t)(-a\sin t) + (-3a\sin t)(a\cos t)]\,dt$
$= \int_0^{2\pi} (-2a^2\sin t\cos t - 3a^2\sin t\cos t)\,dt = -5a^2\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0$; $\iint_R 0\,dx\,dy = 0$, Circulation

4. $M = -x^2 y = -a^3\cos^2 t$, $N = xy^2 = a^3\cos t\sin^2 t$, $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$
$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = -2xy$, $\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = y^2$, and $\frac{\partial N}{\partial y} = 2xy$;
Equation (11): $\oint_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} (-a^4\cos^3 t\sin t + a^4\cos t\sin^3 t) = \left[\frac{a^4}{4}\cos^4 t + \frac{a^4}{4}\sin^4 t\right]_0^{2\pi} = 0$;
$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R (-2xy + 2xy)\,dx\,dy = 0$, Flux
Equation (12): $\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_0^{2\pi} (a^4\cos^2 t\sin^2 t + a^4\cos^2 t\sin^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (2a^4\cos^2 t\sin^2 t)\,dt$
$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^4\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{4\pi}\sin^2 u\,du = \frac{a^4}{4}\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{4\pi} = \frac{\pi a^4}{2}$; $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R (y^2 + x^2)\,dx\,dy$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4}\,d\theta = \frac{\pi a^4}{2}$, Circulation

5. $M = x - y$, $N = y - x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 1 \Rightarrow$ Flux $= \iint_R 2\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 2\,dx\,dy = 2$;
Circ $= \iint_R [-1 - (-1)]\,dx\,dy = 0$

6. $M = x^2 + 4y$, $N = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 4$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 2y \Rightarrow$ Flux $= \iint_R (2x + 2y)\,dx\,dy$
$= \int_0^1\int_0^1 (2x + 2y)\,dx\,dy = \int_0^1 [x^2 + 2xy]_0^1\,dy = \int_0^1 (1 + 2y)\,dy = [y + y^2]_0^1 = 2$; Circ $= \iint_R (1 - 4)\,dx\,dy$
$= \int_0^1\int_0^1 -3\,dx\,dy = -3$

7. $M = y^2 - x^2, N = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = -2x, \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x, \frac{\partial N}{\partial y} = 2y \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R (-2x + 2y)\,dx\,dy$
$= \int_0^3 \int_0^x (-2x + 2y)\,dy\,dx = \int_0^3 (-2x^2 + x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = -9;\ \text{Circ} = \iint_R (2x - 2y)\,dx\,dy$
$= \int_0^3 \int_0^x (2x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = 9$

8. $M = x + y, N = -(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 1, \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -2x, \frac{\partial N}{\partial y} = -2y \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R (1 - 2y)\,dx\,dy$
$= \int_0^1 \int_0^x (1 - 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6};\ \text{Circ} = \iint_R (-2x - 1)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x (-2x - 1)\,dy\,dx$
$= \int_0^1 (-2x^2 - x)\,dx = -\frac{7}{6}$

9. $M = x + e^x \sin y, N = x + e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 1 + e^x \sin y, \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y, \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + e^x \cos y, \frac{\partial N}{\partial y} = -e^x \sin y$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iint_R dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2};$
$\text{Circ} = \iint_R (1 + e^x \cos y - e^x \cos y)\,dx\,dy = \iint_R dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}$

10. $M = \tan^{-1}\frac{y}{x}, N = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \int_0^\pi \int_1^2 \left(\frac{r \sin\theta}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = 2;$
$\text{Circ} = \iint_R \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \int_0^\pi \int_1^2 \left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \cos\theta\,d\theta = 0$

11. $M = xy, N = y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = y, \frac{\partial M}{\partial y} = x, \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \frac{\partial N}{\partial y} = 2y \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R (y + 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x 3y\,dy\,dx$
$= \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{3x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{5};\ \text{Circ} = \iint_R -x\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x -x\,dy\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x^3)\,dx = -\frac{1}{12}$

12. $M = -\sin y, N = x\cos y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \frac{\partial M}{\partial y} = -\cos y, \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y, \frac{\partial N}{\partial y} = -x\sin y$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iint_R (-x\sin y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (-x\sin y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\pi^2}{8}\sin y\right) dy = -\frac{\pi^2}{8};$
$\text{Circ} = \iint_R [\cos y - (-\cos y)]\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 2\cos y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \pi\cos y\,dy = [\pi \sin y]_0^{\pi/2} = \pi$

13. $M = 3xy - \frac{x}{1+y^2}, N = e^x + \tan^{-1} y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 3y - \frac{1}{1+y^2}, \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(3y - \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}\right) dx\,dy = \iint_R 3y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1-\cos\theta)} (3r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi} a^3(1 + \cos\theta)^3(\sin\theta)\,d\theta = \left[-\frac{a^3}{4}(1 + \cos\theta)^4\right]_0^{2\pi} = -4a^3 - (-4a^3) = 0$

14. $M = y + e^x \ln y, N = \frac{e^x}{y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \frac{e^x}{y}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{e^x}{y} \Rightarrow \text{Circ} = \iint_R \left[\frac{e^x}{y} - \left(1 + \frac{e^x}{y}\right)\right] dx\,dy = \iint_R (-1)\,dx\,dy$
$= \int_{-1}^1 \int_{x^4+1}^{3-x^2} -\,dy\,dx = -\int_{-1}^1 [(3 - x^2) - (x^4 + 1)]\,dx = \int_{-1}^1 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = -\frac{44}{15}$

15. $M = 2xy^3, N = 4x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2, \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^2 \Rightarrow \text{work} = \oint_C 2xy^3\,dx + 4x^2y^2\,dy = \iint_R (8xy^2 - 6xy^2)\,dx\,dy$
$= \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^{10}\,dx = \frac{2}{33}$

16. $M = 4x - 2y, N = 2x - 4y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2, \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \Rightarrow \text{work} = \oint_C (4x - 2y)\,dx + (2x - 4y)\,dy$
$= \iint_R [2 - (-2)]\,dx\,dy = 4 \iint_R dx\,dy = 4(\text{Area of the circle}) = 4(\pi \cdot 4) = 16\pi$

17. $M = y^2, N = x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow \oint_C y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_R (2x - 2y)\,dy\,dx$
$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x - 1)\,dx = \left[-x^3 + 2x^2 - x\right]_0^1 = -1 + 2 - 1 = 0$

18. $M = 3y, N = 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3, \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \Rightarrow \oint_C 3y\,dx + 2x\,dy = \iint_R (2 - 3)\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} -1\,dy\,dx$
$= -\int_0^\pi \sin x\,dx = -2$

19. $M = 6y + x, N = y + 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 6, \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \Rightarrow \oint_C (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy = \iint_R (2 - 6)\,dy\,dx$
$= -4(\text{Area of the circle}) = -16\pi$

20. $M = 2x + y^2, N = 2xy + 3y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \Rightarrow \oint_C (2x + y^2)\,dx + (2xy + 3y)\,dy = \iint_R (2y - 2y)\,dx\,dy = 0$

21. $M = x = a\cos t, N = y = a\sin t \Rightarrow dx = -a\sin t\,dt, dy = a\cos t\,dt \Rightarrow \text{Area} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\,dt = \pi a^2$

22. $M = x = a\cos t, N = y = b\sin t \Rightarrow dx = -a\sin t\,dt, dy = b\cos t\,dt \Rightarrow \text{Area} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$

23. $M = x = a\cos^3 t, N = y = \sin^3 t \Rightarrow dx = -3\cos^2 t\sin t\,dt, dy = 3\sin^2 t\cos t\,dt \Rightarrow \text{Area} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\sin^2 t\cos^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\sin^2 t\cos^2 t)\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3}{16}\int_0^{4\pi} \sin^2 u\,du$
$= \frac{3}{16}\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{4\pi} = \frac{3}{8}\pi$

24. $M = x = t^2, N = y = \frac{t^3}{3} - t \Rightarrow dx = 2t\,dt, dy = (t^2 - 1)\,dt \Rightarrow \text{Area} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[t^2(t^2 - 1) - \left(\frac{t^3}{3} - t\right)(2t)\right]dt = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}t^4 + t^2\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{15}t^5 + -\frac{1}{3}t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{15}\left(9\sqrt{3} + 15\sqrt{3}\right)$
$= \frac{8}{5}\sqrt{3}$

25. (a) $M = f(x), N = g(y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$
$= \iint_R 0\,dx\,dy = 0$

(b) $M = ky, N = hx \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = k, \frac{\partial N}{\partial x} = h \Rightarrow \oint_C ky\,dx + hx\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$
$= \iint_R (h - k)\,dx\,dy = (h - k)(\text{Area of the region})$

26. $M = xy^2, N = x^2y + 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy, \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy + 2 \Rightarrow \oint_C xy^2\,dx + (x^2y + 2x)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$
$= \iint_R (2xy + 2 - 2xy)\,dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy = 2 \text{ times the area of the square}$

27. The integral is 0 for any simple closed plane curve C. The reasoning: By the tangential form of Green's Theorem, with $M = 4x^3y$ and $N = x^4$, $\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^4) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y)\right] dx\,dy$ $= \iint_R \underbrace{(4x^3 - 4x^3)}_{0}\,dx\,dy = 0.$

28. The integral is 0 for any simple closed curve C. The reasoning: By the normal form of Green's theorem, with $M = x^3$ and $N = -y^3$, $\oint_C -y^3\,dy + x^3\,dx = \iint_R \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(-y^3)}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x^3)}_{0}\right] dx\,dy = 0.$

29. Let $M = x$ and $N = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 1$ and $\frac{\partial N}{\partial y} = 0 \Rightarrow \oint_C M\,dy - N\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy \Rightarrow \oint_C x\,dy$ $= \iint_R (1+0)\,dx\,dy \Rightarrow$ Area of $R = \iint_R dx\,dy = \oint_C x\,dy$; similarly, $M = y$ and $N = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$ and $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\,dx \Rightarrow \oint_C y\,dx = \iint_R (0-1)\,dy\,dx \Rightarrow -\oint_C y\,dx$ $= \iint_R dx\,dy =$ Area of R

30. $\int_a^b f(x)\,dx =$ Area of $R = -\oint_C y\,dx$, from Exercise 29

31. Let $\delta(x,y) = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_R \delta(x,y)\,dA} = \frac{\iint_R x\,dA}{\iint_R dA} = \frac{\iint_R x\,dA}{A} \Rightarrow A\bar{x} = \iint_R x\,dA = \iint_R (x+0)\,dx\,dy$ $= \oint_C \frac{x^2}{2}\,dy$, $A\bar{x} = \iint_R x\,dA = \iint_R (0+x)\,dx\,dy = -\oint_C xy\,dx$, and $A\bar{x} = \iint_R x\,dA = \iint_R \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\right) dx\,dy$ $= \oint_C \frac{1}{3}x^2\,dy - \frac{1}{3}xy\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\oint_C x^2\,dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2\,dy - xy\,dx = A\bar{x}$

32. If $\delta(x,y) = 1$, then $I_y = \iint_R x^2\,\delta(x,y)\,dA = \iint_R x^2\,dA = \iint_R (x^2+0)\,dy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^3\,dy$, $\iint_R x^2\,dA = \iint_R (0+x^2)\,dy\,dx = -\oint_C x^2y\,dx$, and $\iint_R x^2\,dA = \iint_R \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2\right) dy\,dx$ $= \oint_C \frac{1}{4}x^3\,dy - \frac{1}{4}x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,dy - x^2y\,dx \Rightarrow \frac{1}{3}\oint_C x^3\,dy = -\oint_C x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,dy - x^2y\,dx = I_y$

33. $M = \frac{\partial f}{\partial y}$, $N = -\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Rightarrow \oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = \iint_R \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\,dy = 0$ for such curves C

34. $M = \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3$, $N = x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{4}x^2 + y^2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow$ Curl $= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - \left(\frac{1}{4}x^2 + y^2\right) > 0$ in the interior of the ellipse $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ work $= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2\right) dx\,dy$ will be maximized on the region $R = \{(x,y)\,|\,\text{curl } \mathbf{F}\} \ge 0$ or over the region enclosed by $1 = \frac{1}{4}x^2 + y^2$

35. (a) $\nabla f = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j} \Rightarrow M = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $N = \frac{2y}{x^2+y^2}$; since M, N are discontinuous at (0, 0), we compute $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds$ directly since Green's Theorem does not apply. Let $x = a\cos t$, $y = a\sin t \Rightarrow dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $M = \frac{2}{a}\cos t$, $N = \frac{2}{a}\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, so $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds = \int_C M\,dy - N\,dx$ $= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2}{a}\cos t\right)(a\cos t) - \left(\frac{2}{a}\sin t\right)(-a\sin t)\right] dt = \int_0^{2\pi} 2(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 4\pi$. Note that this holds for any

$a > 0$, so $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds = 4\pi$ for any circle C centered at (0, 0) traversed counterclockwise and $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds = -4\pi$ if C is traversed clockwise.

(b) If K does not enclose the point (0, 0) we may apply Green's Theorem: $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C M\, dy - N\, dx$ $= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \left(\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\, dy = \iint_R 0\, dx\, dy = 0$. If K does enclose the point (0, 0) we proceed as in Example 6:

Choose a small enough so that the circle C centered at (0, 0) of radius a lies entirely within K. Green's Theorem applies to the region R that lies between K and C. Thus, as before, $0 = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$

$= \int_K M\, dy - N\, dx + \int_C M\, dy - N\, dx$ where K is traversed counterclockwise and C is traversed clockwise. Hence by part (a) $0 = \left[\int_K M\, dy - N\, dx\right] - 4\pi \Rightarrow 4\pi = \int_K M\, dy - N\, dx = \int_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds$. We have shown:

$$\int_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds = \begin{cases} 0 & \text{if } (0,0) \text{ lies inside K} \\ 4\pi & \text{if } (0,0) \text{ lies outside K} \end{cases}$$

36. Assume a particle has a closed trajectory in R and let C_1 be the path $\Rightarrow$ C_1 encloses a simply connected region $R_1 \Rightarrow C_1$ is a simple closed curve. Then the flux over R_1 is $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = 0$, since the velocity vectors $\mathbf{F}$ are tangent to C_1. But $0 = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_{C_-} M\, dy - N\, dx = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy \Rightarrow M_x + N_y = 0$, which is a contradiction. Therefore, C_1 cannot be a closed trajectory.

37. $\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy = N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y) \Rightarrow \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}\, dx\right) dy = \int_c^d [N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y)]\, dy$
$= \int_c^d N(g_2(y), y)\, dy - \int_c^d N(g_1(y), y)\, dy = \int_c^d N(g_2(y), y)\, dy + \int_d^c N(g_1(y), y)\, dy = \int_{C_2} N\, dy + \int_{C_1} N\, dy$
$= \oint_C dy \Rightarrow \oint_C N\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy$

38. $\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b [M(x, d) - M(x, c)]\, dx = \int_a^b M(x, d)\, dx + \int_b^a M(x, c)\, dx = -\int_{C_3} M\, dx - \int_{C_1} M\, dx$.
Because x is constant along C_2 and C_4, $\int_{C_2} M\, dx = \int_{C_4} M\, dx = 0$
$\Rightarrow -\left(\int_{C_1} M\, dx + \int_{C_2} M\, dx + \int_{C_3} M\, dx + \int_{C_4} M\, dx\right) = -\oint_C M\, dx \Rightarrow \int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx = -\oint_C M\, dx$.

39. The curl of a conservative two-dimensional field is zero. The reasoning: A two-dimensional field $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ can be considered to be the restriction to the xy-plane of a three-dimensional field whose $\mathbf{k}$ component is zero, and whose $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ components are independent of z. For such a field to be conservative, we must have $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ by the component test in Section 16.3 $\Rightarrow$ curl $\mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$.

40. Green's theorem tells us that the circulation of a conservative two-dimensional field around any simple closed curve in the xy-plane is zero. The reasoning: For a conservative field $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, we have $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ (component test for conservative fields, Section 16.3, Eq. (2)), so curl $\mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$. By Green's theorem, the counterclockwise circulation around a simple closed plane curve C must equal the integral of curl $\mathbf{F}$ over the region R enclosed by C. Since curl $\mathbf{F} = 0$, the latter integral is zero and, therefore, so is the circulation.
The circulation $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ is the same as the work $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ done by $\mathbf{F}$ around C, so our observation that circulation of a conservative two-dimensional field is zero agrees with the fact that the work done by a conservative field around a closed curve is always 0.

41-44. Example CAS commands:

Maple:

```
with( plots );#41
M := (x,y) -> 2*x-y;
N := (x,y) -> x+3*y;
C := x^2 + 4*y^2 = 4;
implicitplot( C, x=-2..2, y=-2..2, scaling=constrained, title="#41(a) (Section 16.4)" );
curlF_k := D[1](N) - D[2](M):                    # (b)
'curlF_k' = curlF_k(x,y);
top,bot := solve( C, y );                        # (c)
left,right := -2, 2;
q1 := Int( Int( curlF_k(x,y), y=bot..top ), x=left..right );
value( q1 );
```

Mathematica: (functions and bounds will vary)

The **ImplicitPlot** command will be useful for 41 and 42, but is not needed for 43 and 44. In 44, the equation of the line from (0, 4) to (2, 0) must be determined first.

```
Clear[x, y, f]
<<Graphics`ImplicitPlot`
f[x_, y_]:= {2x − y, x + 3y}
curve= x^2 + 4y^2 ==4
ImplicitPlot[curve, {x, −3, 3},{y, −2, 2}, AspectRatio → Automatic, AxesLabel → {x, y}];
ybounds= Solve[curve, y]
{y1, y2}=y/.ybounds;
integrand:=D[f[x,y][[2]], x] − D[f[x,y][[1]], y]//Simplify
Integrate[integrand, {x, −2, 2}, {y, y1, y2}]
N[%]
```

Bounds for y are determined differently in 43 and 44. In 44, note equation of the line from (0, 4) to (2, 0).

```
Clear[x, y, f]
f[x_, y_]:= {x Exp[y], 4x^2 Log[y]}
ybound = 4 − 2x
Plot[{0, ybound}, {x, 0,2. 1}, AspectRatio → Automatic, AxesLabel → {x, y}];
integrand:=D[f[x, y][[2]], x] − D[f[x, y][[1]], y]//Simplify
Integrate[integrand, {x, 0, 2}, {y, 0, ybound}]
N[%]
```

16.5 SURFACE AREA AND SURFACE INTEGRALS

1. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1$; $z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$; thus $S = \iint\limits_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint\limits_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy$
$= \iint\limits_R \sqrt{4r^2 \cos^2\theta + 4r^2 \sin^2\theta + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}\left(4r^2 + 1\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta$
$= \int_0^{2\pi} \frac{13}{6}\, d\theta = \frac{13}{3}\pi$

2. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1$; $2 \le x^2 + y^2 \le 6$
$\Rightarrow S = \iint\limits_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint\limits_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy = \iint\limits_R \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$
$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}\left(4r^2 + 1\right)^{3/2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{49}{6}\, d\theta = \frac{49}{3}\pi$

3. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = 3$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2$; $x = y^2$ and $x = 2 - y^2$ intersect at $(1, 1)$ and $(1, -1)$
$\Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \frac{3}{2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{2-y^2} \frac{3}{2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} (3 - 3y^2)\, dy = 4$

4. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} - 2\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4} = 2\sqrt{x^2 + 1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2 \Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA$
$= \iint_R \frac{2\sqrt{x^2+1}}{2}\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{x} \sqrt{x^2 + 1}\, dy\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2 + 1}\, dx = \left[\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}(4)^{3/2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

5. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{(2x)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4x^2 + 8} = 2\sqrt{x^2 + 2}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2$
$\Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \frac{2\sqrt{x^2+2}}{2}\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{3x} \sqrt{x^2 + 2}\, dy\, dx = \int_0^2 3x\sqrt{x^2 + 2}\, dx = \left[(x^2 + 2)^{3/2}\right]_0^2$
$= 6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

6. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ and $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$; thus, $S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\, dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{1}{z}\, dA$
$= \sqrt{2} \iint_R \frac{1}{\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}}\, dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r\, dr\, d\theta}{\sqrt{2 - r^2}} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(-1 + \sqrt{2}\right) d\theta = 2\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$

7. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = c\mathbf{i} - \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{c^2 + 1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \sqrt{c^2 + 1}\, dx\, dy$
$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{c^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{c^2+1}}{2}\, d\theta = \pi\sqrt{c^2 + 1}$

8. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{(2x)^2 + (2z)^2} = 2$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$ for the upper surface, $z \ge 0$
$\Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \frac{2}{2z}\, dA = \iint_R \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dy\, dx = 2\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dy\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$
$= \left[\sin^{-1} x\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$

9. $\mathbf{p} = \mathbf{i}$, $\nabla f = \mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{1^2 + (2y)^2 + (2z)^2} = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1$; $1 \le y^2 + z^2 \le 4$
$\Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2 \cos^2\theta + 4r^2 \sin^2\theta}\, r\, dr\, d\theta$
$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\right]_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$

10. $\mathbf{p} = \mathbf{j}$, $\nabla f = 2x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1$; $y = 0$ and $x^2 + y + z^2 = 2 \Rightarrow x^2 + z^2 = 2$; thus, $S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}\, dx\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{13}{6}\, d\theta = \frac{13}{3}\pi$

11. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = \left(2x - \frac{2}{x}\right)\mathbf{i} + \sqrt{15}\mathbf{j} - \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{\left(2x - \frac{2}{x}\right)^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 8 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\left(2x + \frac{2}{x}\right)^2}$
$= 2x + \frac{2}{x}$, on $1 \le x \le 2$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R (2x + 2x^{-1})\, dx\, dy$
$= \int_0^1 \int_1^2 (2x + 2x^{-1})\, dx\, dy = \int_0^1 \left[x^2 + 2\ln x\right]_1^2 dy = \int_0^1 (3 + 2\ln 2)\, dy = 3 + 2\ln 2$

12. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, $\nabla f = 3\sqrt{x}\,\mathbf{i} + 3\sqrt{y}\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{9x + 9y + 9} = 3\sqrt{x + y + 1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 3$
$\Rightarrow S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_R \sqrt{x + y + 1}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x + y + 1}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x + y + 1)^{3/2}\right]_0^1 dy$
$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(y + 2)^{3/2} - \frac{2}{3}(y + 1)^{3/2}\right] dy = \left[\frac{4}{15}(y + 2)^{5/2} - \frac{4}{15}(y + 1)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\left[(3)^{5/2} - (2)^{5/2} - (2)^{5/2} + 1\right]$

$= \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right)$

13. The bottom face S of the cube is in the xy-plane $\Rightarrow z = 0 \Rightarrow g(x,y,0) = x + y$ and $f(x,y,z) = z = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$ and $\nabla f = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_R (x + y)\,dx\,dy$
$= \int_0^a \int_0^a (x + y)\,dx\,dy = \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} + ay\right) dy = a^3$. Because of symmetry, we also get a^3 over the face of the cube in the xz-plane and a^3 over the face of the cube in the yz-plane. Next, on the top of the cube, $g(x,y,z)$
$= g(x,y,a) = x + y + a$ and $f(x,y,z) = z = a \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$ and $\nabla f = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\,dy$
$\iint_S g\,d\sigma = \iint_R (x + y + a)\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^a (x + y + a)\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^a (x + y)\,dx\,dy + \int_0^a \int_0^a a\,dx\,dy = 2a^3$.
Because of symmetry, the integral is also $2a^3$ over each of the other two faces. Therefore,
$\iint_{\text{cube}} (x + y + z)\,d\sigma = 3\left(a^3 + 2a^3\right) = 9a^3$.

14. On the face S in the xz-plane, we have $y = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = y = 0$ and $g(x,y,z) = g(x,0,z) = z \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{j}$ and $\nabla f = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\,dz \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S (y + z)\,d\sigma = \int_0^1 \int_0^2 z\,dx\,dz = \int_0^1 2z\,dz$
$= 1$.
On the face in the xy-plane, we have $z = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = z = 0$ and $g(x,y,z) = g(x,y,0) = y \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$ and $\nabla f = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S y\,d\sigma = \int_0^1 \int_0^2 y\,dx\,dy = 1$.
On the triangular face in the plane $x = 2$ we have $f(x,y,z) = x = 2$ and $g(x,y,z) = g(2,y,z) = y + z \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{i}$ and $\nabla f = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dz\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S (y + z)\,d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-y} (y + z)\,dz\,dy$
$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1 - y^2\right) dy = \frac{1}{3}$.
On the triangular face in the yz-plane, we have $x = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = x = 0$ and $g(x,y,z) = g(0,y,z) = y + z$
$\Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{i}$ and $\nabla f = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dz\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S (y + z)\,d\sigma$
$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (y + z)\,dz\,dy = \frac{1}{3}$.
Finally, on the sloped face, we have $y + z = 1 \Rightarrow f(x,y,z) = y + z = 1$ and $g(x,y,z) = y + z = 1 \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$ and $\nabla f = \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{2}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = \sqrt{2}\,dx\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S (y + z)\,d\sigma$
$= \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{2}\,dx\,dy = 2\sqrt{2}$. Therefore, $\iint_{\text{wedge}} g(x,y,z)\,d\sigma = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} = \frac{8}{3} + 2\sqrt{2}$

15. On the faces in the coordinate planes, $g(x,y,z) = 0 \Rightarrow$ the integral over these faces is 0.
On the face $x = a$, we have $f(x,y,z) = x = a$ and $g(x,y,z) = g(a,y,z) = ayz \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{i}$ and $\nabla f = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dy\,dz \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S ayz\,d\sigma = \int_0^c \int_0^b ayz\,dy\,dz = \frac{ab^2c^2}{4}$.
On the face $y = b$, we have $f(x,y,z) = y = b$ and $g(x,y,z) = g(x,b,z) = bxz \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{j}$ and $\nabla f = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\,dz \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S bxz\,d\sigma = \int_0^c \int_0^a bxz\,dx\,dz = \frac{a^2bc^2}{4}$.
On the face $z = c$, we have $f(x,y,z) = z = c$ and $g(x,y,z) = g(x,y,c) = cxy \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$ and $\nabla f = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dy\,dx \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S cxy\,d\sigma = \int_0^b \int_0^a cxy\,dx\,dy = \frac{a^2b^2c}{4}$. Therefore,
$\iint_S g(x,y,z)\,d\sigma = \frac{abc(ab + ac + bc)}{4}$.

16. On the face $x = a$, we have $f(x,y,z) = x = a$ and $g(x,y,z) = g(a,y,z) = ayz \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{i}$ and $\nabla f = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla f| = 1$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dz\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S ayz\,d\sigma = \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} ayz\,dz\,dy = 0$. Because of the symmetry of g on all the other faces, all the integrals are 0, and $\iint_S g(x,y,z)\,d\sigma = 0$.

17. $f(x,y,z) = 2x + 2y + z = 2 \Rightarrow \nabla f = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $g(x,y,z) = x + y + (2 - 2x - 2y) = 2 - x - y \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$, $|\nabla f| = 3$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = 3\,dy\,dx$; $z = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 2 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \iint_S (2 - x - y)\,d\sigma$ $= 3\int_0^1\int_0^{1-x}(2 - x - y)\,dy\,dx = 3\int_0^1 \left[(2 - x)(1 - x) - \frac{1}{2}(1 - x)^2\right] dx = 3\int_0^1 \left(\frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 2$

18. $f(x,y,z) = y^2 + 4z = 16 \Rightarrow \nabla f = 2y\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4y^2 + 16} = 2\sqrt{y^2 + 4}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 4$ $\Rightarrow d\sigma = \frac{2\sqrt{y^2+4}}{4}\,dx\,dy \Rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \int_{-4}^{4}\int_0^1 \left(x\sqrt{y^2 + 4}\right)\left(\frac{\sqrt{y^2+4}}{2}\right) dx\,dy = \int_{-4}^{4}\int_0^1 \frac{x(y^2+4)}{2}\,dx\,dy$ $= \int_{-4}^{4} \frac{1}{4}(y^2 + 4)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} + 4y\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} + 16\right) = \frac{56}{3}$

19. $g(x,y,z) = z$, $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow \nabla g = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = 1$ and $|\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R (\mathbf{F}\cdot\mathbf{k})\,dA$ $= \int_0^2\int_0^3 3\,dy\,dx = 18$

20. $g(x,y,z) = y$, $\mathbf{p} = -\mathbf{j} \Rightarrow \nabla g = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = 1$ and $|\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R (\mathbf{F}\cdot -\mathbf{j})\,dA$ $= \int_{-1}^{2}\int_2^7 2\,dz\,dx = \int_{-1}^{2} 2(7 - 2)\,dx = 10(2 + 1) = 30$

21. $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a$; $\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{z^2}{a}$; $|\nabla g \cdot \mathbf{k}| = 2z \Rightarrow d\sigma = \frac{2a}{2z}\,dA \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{z^2}{a}\right)\left(\frac{a}{z}\right) dA = \iint_R z\,dA = \iint_R \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}\,dx\,dy$ $= \int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi a^3}{6}$

22. $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a$; $\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{-xy}{a} + \frac{xy}{a}$ $= 0$; $|\nabla g \cdot \mathbf{k}| = 2z \Rightarrow d\sigma = \frac{2a}{2z}\,dA \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S 0\,d\sigma = 0$

23. From Exercise 21, $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$ and $d\sigma = \frac{a}{z}\,dA \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{xy}{a} - \frac{xy}{a} + \frac{z}{a} = \frac{z}{a} \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{z}{a}\right)\left(\frac{a}{z}\right) dA$ $= \iint_R 1\,dA = \frac{\pi a^2}{4}$

24. From Exercise 21, $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$ and $d\sigma = \frac{a}{z}\,dA \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{zx^2}{a} + \frac{zy^2}{a} + \frac{z^3}{a} = z\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a}\right) = az$ $\Rightarrow \text{Flux} = \iint_R (za)\left(\frac{a}{z}\right) dx\,dy = \iint_R a^2\,dx\,dy = a^2(\text{Area of R}) = \frac{1}{4}\pi a^4$

25. From Exercise 21, $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$ and $d\sigma = \frac{a}{z}\,dA \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a} = a \Rightarrow \text{Flux}$ $= \iint_R a\left(\frac{a}{z}\right) dA = \iint_R \frac{a^2}{z}\,dA = \iint_R \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}}\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,r\,dr\,d\theta$ $= \int_0^{\pi/2} a^2\left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^a d\theta = \frac{\pi a^3}{2}$

26. From Exercise 21, $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$ and $d\sigma = \frac{a}{z}\,dA \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{\left(\frac{x^2}{a}\right)+\left(\frac{y^2}{a}\right)+\left(\frac{z^2}{a}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\left(\frac{a^2}{a}\right)}{a} = 1$

$\Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R \frac{a}{z}\,dx\,dy = \iint\limits_R \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$

27. $g(x,y,z) = y^2+z = 4 \Rightarrow \nabla g = 2y\mathbf{j}+\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{4y^2+1} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{2y\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2+1}}$

$\Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{2xy-3z}{\sqrt{4y^2+1}}$; $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g\cdot\mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = \sqrt{4y^2+1}\,dA \Rightarrow$ Flux

$= \iint\limits_R \left(\frac{2xy-3z}{\sqrt{4y^2+1}}\right)\sqrt{4y^2+1}\,dA = \iint\limits_R (2xy-3z)\,dA$; $z=0$ and $z = 4-y^2 \Rightarrow y^2 = 4$

$\Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R [2xy-3(4-y^2)]\,dA = \int_0^1\int_{-2}^2 (2xy-12+3y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy^2-12y+y^3\right]_{-2}^2\,dx$

$= \int_0^1 -32\,dx = -32$

28. $g(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0 \Rightarrow \nabla g = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{4x^2+4y^2+1} = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}$

$\Rightarrow \mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{8x^2+8y^2-2}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}$; $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g\cdot\mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA$

$\Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R \left(\frac{8x^2+8y^2-2}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\right)\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA = \iint\limits_R (8x^2+8y^2-2)\,dA$; $z=1$ and $x^2+y^2 = z$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow$ Flux $= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (8r^2-2)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi$

29. $g(x,y,z) = y-e^x = 0 \Rightarrow \nabla g = -e^x\mathbf{i}+\mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{e^{2x}+1} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{e^x\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{e^{2x}+1}} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{-2e^x-2y}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; $\mathbf{p} = \mathbf{i}$

$\Rightarrow |\nabla g\cdot\mathbf{p}| = e^x \Rightarrow d\sigma = \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{e^x}\,dA \Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R \left(\frac{-2e^x-2y}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right)\left(\frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{e^x}\right)dA = \iint\limits_R \frac{-2e^x-2e^x}{e^x}\,dA$

$= \iint\limits_R -4\,dA = \int_0^1\int_1^2 -4\,dy\,dz = -4$

30. $g(x,y,z) = y-\ln x = 0 \Rightarrow \nabla g = -\frac{1}{x}\mathbf{i}+\mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ since $1 \le x \le e$

$\Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{1}{x}\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)}{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)} = \frac{-\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}}$; $\mathbf{p} = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g\cdot\mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dA$

$\Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R \left(\frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)dA = \int_0^1\int_1^e 2y\,dx\,dz = \int_1^e\int_0^1 2\ln x\,dz\,dx = \int_1^e 2\ln x\,dx$

$= 2\left[x\ln x - x\right]_1^e = 2(e-e)-2(0-1) = 2$

31. On the face $z = a$: $g(x,y,z) = z \Rightarrow \nabla g = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = 1$; $\mathbf{n} = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 2xz = 2ax$ since $z = a$;
$d\sigma = dx\,dy \Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R 2ax\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^a 2ax\,dx\,dy = a^4$.
On the face $z = 0$: $g(x,y,z) = z \Rightarrow \nabla g = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = 1$; $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2xz = 0$ since $z = 0$;
$d\sigma = dx\,dy \Rightarrow$ Flux $= \iint\limits_R 0\,dx\,dy = 0$.
On the face $x = a$: $g(x,y,z) = x \Rightarrow \nabla g = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla g| = 1$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 2xy = 2ay$ since $x = a$;
$d\sigma = dy\,dz \Rightarrow$ Flux $= \int_0^a\int_0^a 2ay\,dy\,dz = a^4$.
On the face $x = 0$: $g(x,y,z) = x \Rightarrow \nabla g = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla g| = 1$; $\mathbf{n} = -\mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2xy = 0$ since $x = 0$
$\Rightarrow$ Flux $= 0$.
On the face $y = a$: $g(x,y,z) = y \Rightarrow \nabla g = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = 1$; $\mathbf{n} = \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 2yz = 2az$ since $y = a$;
$d\sigma = dz\,dx \Rightarrow$ Flux $= \int_0^a\int_0^a 2az\,dz\,dx = a^4$.
On the face $y = 0$: $g(x,y,z) = y \Rightarrow \nabla g = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = 1$; $\mathbf{n} = -\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2yz = 0$ since $y = 0$
$\Rightarrow$ Flux $= 0$. Therefore, Total Flux $= 3a^4$.

32. Across the cap: $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 25 \Rightarrow \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 10$
$\Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{5} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2 z}{5} + \frac{y^2 z}{5} + \frac{z}{5}; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 2z$ since $z \ge 0 \Rightarrow d\sigma = \frac{10}{2z}\, dA$
$\Rightarrow \text{Flux}_{\text{cap}} = \iint\limits_{\text{cap}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{R} \left(\frac{x^2 z}{5} + \frac{y^2 z}{5} + \frac{z}{5}\right)\left(\frac{5}{z}\right) dA = \iint\limits_{R} (x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (r^2 + 1)\, r\, dr\, d\theta$
$= \int_0^{2\pi} 72\, d\theta = 144\pi.$
Across the bottom: $g(x,y,z) = z = 3 \Rightarrow \nabla g = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = 1 \Rightarrow \mathbf{n} = -\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -1; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1$
$\Rightarrow d\sigma = dA \Rightarrow \text{Flux}_{\text{bottom}} = \iint\limits_{\text{bottom}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{R} -1\, dA = -1(\text{Area of the circular region}) = -16\pi.$ Therefore,
$\text{Flux} = \text{Flux}_{\text{cap}} + \text{Flux}_{\text{bottom}} = 128\pi$

33. $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$ since $z \ge 0 \Rightarrow d\sigma = \frac{2a}{2z}\, dA$
$= \frac{a}{z}\, dA; M = \iint\limits_{S} \delta\, d\sigma = \frac{\delta}{8}(\text{surface area of sphere}) = \frac{\delta\pi a^2}{2}; M_{xy} = \iint\limits_{S} z\delta\, d\sigma = \delta \iint\limits_{R} z\left(\frac{a}{z}\right) dA$
$= a\delta \iint\limits_{R} dA = a\delta \int_0^{\pi/2}\int_0^a r\, dr\, d\theta = \frac{\delta\pi a^3}{4} \Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \left(\frac{\delta\pi a^3}{4}\right)\left(\frac{2}{\delta\pi a^2}\right) = \frac{a}{2}$. Because of symmetry, $\bar{x} = \bar{y}$
$= \frac{a}{2} \Rightarrow$ the centroid is $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

34. $\nabla f = 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4y^2 + 4z^2} = \sqrt{4(y^2 + z^2)} = 6; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = 2z$ since $z \ge 0 \Rightarrow d\sigma = \frac{6}{2z}\, dA$
$= \frac{3}{z}\, dA; M = \iint\limits_{S} 1\, d\sigma = \int_{-3}^{3}\int_0^3 \frac{3}{z}\, dx\, dy = \int_{-3}^{3}\int_0^3 \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy = 9\pi; M_{xy} = \iint\limits_{S} z\, d\sigma$
$= \int_{-3}^{3}\int_0^3 z\left(\frac{3}{z}\right) dx\, dy = 54; M_{xz} = \iint\limits_{S} y\, d\sigma = \int_{-3}^{3}\int_0^3 y\left(\frac{3}{z}\right) dx\, dy = \int_{-3}^{3}\int_0^3 \frac{3y}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy = 0;$
$M_{yz} = \iint\limits_{S} x\, d\sigma = \int_{-3}^{3}\int_0^3 \frac{3x}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy = \frac{27}{2}\pi.$ Therefore, $\bar{x} = \frac{\left(\frac{27}{2}\pi\right)}{9\pi} = \frac{3}{2}, \bar{y} = 0$, and $\bar{z} = \frac{54}{9\pi} = \frac{6}{\pi}$

35. Because of symmetry, $\bar{x} = \bar{y} = 0; M = \iint\limits_{S} \delta\, d\sigma = \delta \iint\limits_{S} d\sigma = (\text{Area of S})\delta = 3\pi\sqrt{2}\,\delta; \nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
$\Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z \Rightarrow d\sigma = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2z}\, dA$
$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)}}{z}\, dA = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\, dA \Rightarrow M_{xy} = \delta \iint\limits_{R} z\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) dA$
$= \delta \iint\limits_{R} \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \delta \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{2}\, r^2\, dr\, d\theta = \frac{14\pi\sqrt{2}}{3}\delta \Rightarrow \bar{z} = \frac{\left(\frac{14\pi\sqrt{2}}{3}\delta\right)}{3\pi\sqrt{2}\,\delta} = \frac{14}{9}$
$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$. Next, $I_z = \iint\limits_{S} (x^2 + y^2)\,\delta\, d\sigma = \iint\limits_{R} (x^2 + y^2)\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)\delta\, dA$
$= \delta\sqrt{2} \iint\limits_{R} (x^2 + y^2)\, dA = \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\, dr\, d\theta = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta \Rightarrow R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

36. $f(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow \nabla f = 8x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{64x^2 + 64y^2 + 4z^2}$
$= 2\sqrt{16x^2 + 16y^2 + z^2} = 2\sqrt{4z^2 + z^2} = 2\sqrt{5}\,z$ since $z \ge 0; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z \Rightarrow d\sigma = \frac{2\sqrt{5}\,z}{2z}\, dA = \sqrt{5}\, dA$
$\Rightarrow I_z = \iint\limits_{S} (x^2 + y^2)\,\delta\, d\sigma = \delta\sqrt{5} \iint\limits_{R} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \delta\sqrt{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^3\, dr\, d\theta = \frac{3\sqrt{5}\pi\delta}{2}$

37. (a) Let the diameter lie on the z-axis and let $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \ge 0$ be the upper hemisphere
$\Rightarrow \nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a, a > 0; \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$ since $z \ge 0$
$\Rightarrow d\sigma = \frac{a}{z}\, dA \Rightarrow I_z = \iint\limits_{S} \delta(x^2 + y^2)\left(\frac{a}{z}\right) d\sigma = a\delta \iint\limits_{R} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}\, dA = a\delta \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta$
$= a\delta \int_0^{2\pi} \left[-r^2\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^a d\theta = a\delta \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}a^3\, d\theta = \frac{4\pi}{3}a^4\delta \Rightarrow$ the moment of inertia is $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ for

the whole sphere

(b) $I_L = I_{c.m.} + mh^2$, where m is the mass of the body and h is the distance between the parallel lines; now, $I_{c.m.} = \frac{8\pi}{3} a^4 \delta$ (from part a) and $\frac{m}{2} = \iint\limits_S \delta \, d\sigma = \delta \iint\limits_R \left(\frac{a}{z}\right) dA = a\delta \iint\limits_R \frac{1}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} \, dy \, dx$
$= a\delta \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \, r \, dr \, d\theta = a\delta \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a d\theta = a\delta \int_0^{2\pi} a \, d\theta = 2\pi a^2 \delta$ and $h = a$
$\Rightarrow I_L = \frac{8\pi}{3} a^4 \delta + 4\pi a^2 \delta a^2 = \frac{20\pi}{3} a^4 \delta$

38. (a) Let $z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ be the cone from $z = 0$ to $z = h$, $h > 0$. Because of symmetry, $\overline{x} = 0$ and $\overline{y} = 0$;
$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2) - z^2 = 0 \Rightarrow \nabla f = \frac{2xh^2}{a^2}\mathbf{i} + \frac{2yh^2}{a^2}\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
$\Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{\frac{4x^2h^4}{a^4} + \frac{4y^2h^4}{a^4} + 4z^2} = 2\sqrt{\frac{h^4}{a^4}(x^2+y^2) + \frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)} = 2\sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2}\right)(x^2+y^2)\left(\frac{h^2}{a^2}+1\right)}$
$= 2\sqrt{z^2\left(\frac{h^2+a^2}{a^2}\right)} = \left(\frac{2z}{a}\right)\sqrt{h^2+a^2}$ since $z \ge 0$; $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z \Rightarrow d\sigma = \frac{\left(\frac{2z}{a}\right)\sqrt{h^2+a^2}}{2z} \, dA$
$= \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a} \, dA$; $M = \iint\limits_S d\sigma = \iint\limits_R \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a} \, dA = \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}(\pi a^2) = \pi a\sqrt{h^2+a^2}$;
$M_{xy} = \iint\limits_S z \, d\sigma = \iint\limits_R z\left(\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}\right) dA = \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a} \iint\limits_R \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \frac{h\sqrt{h^2+a^2}}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \, dr \, d\theta$
$= \frac{2\pi a h\sqrt{h^2+a^2}}{3} \Rightarrow \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2h}{3} \Rightarrow$ the centroid is $\left(0, 0, \frac{2h}{3}\right)$

(b) The base is a circle of radius a and center at $(0,0,h) \Rightarrow (0,0,h)$ is the centroid of the base and the mass is $M = \iint\limits_S d\sigma = \pi a^2$. In Pappus' formula, let $\mathbf{c}_1 = \frac{2h}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{c}_2 = h\mathbf{k}$, $m_1 = \pi a\sqrt{h^2+a^2}$, and $m_2 = \pi a^2$
$$\Rightarrow \mathbf{c} = \frac{\pi a\sqrt{h^2+a^2}\left(\frac{2h}{3}\right)\mathbf{k} + \pi a^2 h\mathbf{k}}{\pi a\sqrt{h^2+a^2} + \pi a^2} = \frac{2h\sqrt{h^2+a^2}+3ah}{3\left(\sqrt{h^2+a^2}+a\right)}\mathbf{k} \Rightarrow \text{the centroid is } \left(0, 0, \frac{2h\sqrt{h^2+a^2}+3ah}{3\left(\sqrt{h^2+a^2}+a\right)}\right)$$

(c) If the hemisphere is sitting so its base is in the plane $z = h$, then its centroid is $\left(0, 0, h + \frac{a}{2}\right)$ and its mass is $2\pi a^2$. In Pappus' formula, let $\mathbf{c}_1 = \frac{2h}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{c}_2 = \left(h + \frac{a}{2}\right)\mathbf{k}$, $m_1 = \pi a\sqrt{h^2+a^2}$, and $m_2 = 2\pi a^2$
$$\Rightarrow \mathbf{c} = \frac{\pi a\sqrt{h^2+a^2}\left(\frac{2h}{3}\right)\mathbf{k} + 2\pi a^2\left(h+\frac{a}{2}\right)\mathbf{k}}{\pi a\sqrt{h^2+a^2} + 2\pi a^2} = \frac{2h\sqrt{h^2+a^2}+6ah+3a^2}{3\left(\sqrt{h^2+a^2}+2a\right)}\mathbf{k} \Rightarrow \text{the centroid is}$$
$\left(0, 0, \frac{2h\sqrt{h^2+a^2}+6ah+3a^2}{3\left(\sqrt{h^2+a^2}+2a\right)}\right)$. Thus, for the centroid to be in the plane of the bases we must have $z = h$
$\Rightarrow \frac{2h\sqrt{h^2+a^2}+6ah+3a^2}{3\left(\sqrt{h^2+a^2}+2a\right)} = h \Rightarrow 2h\sqrt{h^2+a^2} + 6ah + 3a^2 = 3h\sqrt{h^2+a^2} + 6ah \Rightarrow 3a^2 = h\sqrt{h^2+a^2}$
$\Rightarrow 9a^4 = h^2(h^2+a^2) \Rightarrow h^4 + a^2h^2 - 9a^4 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{\left(\sqrt{37}-1\right)a^2}{2}$ (the positive root) $\Rightarrow h = \frac{\sqrt{2\sqrt{37}-2}}{2}\,a$

39. $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{4x^2+4y^2+1} \Rightarrow \text{Area} = \iint\limits_R \sqrt{4x^2+4y^2+1} \, dx \, dy$
$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4r^2+1} \, r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 1\right)$

40. $f_y(y,z) = -2y$, $f_z(y,z) = -2z \Rightarrow \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1} = \sqrt{4y^2+4z^2+1} \Rightarrow \text{Area} = \iint\limits_R \sqrt{4y^2+4z^2+1} \, dy \, dz$
$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2+1} \, r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

41. $f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$
$\Rightarrow \text{Area} = \iint\limits_{R_{xy}} \sqrt{2} \, dx \, dy = \sqrt{2}(\text{Area between the ellipse and the circle}) = \sqrt{2}(6\pi - \pi) = 5\pi\sqrt{2}$

42. Over R_{xy}: $z = 2 - \frac{2}{3}x - 2y \Rightarrow f_x(x,y) = -\frac{2}{3}, f_y(x,y) = -2 \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{9} + 4 + 1} = \frac{7}{3}$
$\Rightarrow$ Area $= \iint\limits_{R_{xy}} \frac{7}{3}\, dA = \frac{7}{3}$(Area of the shadow triangle in the xy-plane) $= \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$.
Over R_{xz}: $y = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}z \Rightarrow f_x(x,z) = -\frac{1}{3}, f_z(x,z) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{7}{6}$
$\Rightarrow$ Area $= \iint\limits_{R_{xz}} \frac{7}{6}\, dA = \frac{7}{6}$(Area of the shadow triangle in the xz-plane) $= \left(\frac{7}{6}\right)(3) = \frac{7}{2}$.
Over R_{yz}: $x = 3 - 3y - \frac{3}{2}z \Rightarrow f_y(y,z) = -3, f_z(y,z) = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1} = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + 1} = \frac{7}{2}$
$\Rightarrow$ Area $= \iint\limits_{R_{yz}} \frac{7}{2}\, dA = \frac{7}{2}$(Area of the shadow triangle in the yz-plane) $= \left(\frac{7}{2}\right)(1) = \frac{7}{2}$.

43. $y = \frac{2}{3}z^{3/2} \Rightarrow f_x(x,z) = 0, f_z(x,z) = z^{1/2} \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1} = \sqrt{z+1}$; $y = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{16}{3} = \frac{2}{3}z^{3/2} \Rightarrow z = 4$
$\Rightarrow$ Area $= \int_0^4 \int_0^1 \sqrt{z+1}\, dx\, dz = \int_0^4 \sqrt{z+1}\, dz = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

44. $y = 4 - z \Rightarrow f_x(x,z) = 0, f_z(x,z) = -1 \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow$ Area $= \iint\limits_{R_{xz}} \sqrt{2}\, dA = \int_0^2 \int_0^{4-z^2} \sqrt{2}\, dx\, dz$
$= \sqrt{2} \int_0^2 (4 - z^2)\, dz = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

16.6 PARAMETRIZED SURFACES

1. In cylindrical coordinates, let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = r^2$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k}$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

2. In cylindrical coordinates, let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = 9 - x^2 - y^2 = 9 - r^2$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (9 - r^2)\mathbf{k}$; $z \ge 0 \Rightarrow 9 - r^2 \ge 0 \Rightarrow r^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$. But $-3 \le r \le 0$ gives the same points as $0 \le r \le 3$, so let $0 \le r \le 3$.

3. In cylindrical coordinates, let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \Rightarrow z = \frac{r}{2}$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$. For $0 \le z \le 3$, $0 \le \frac{r}{2} \le 3 \Rightarrow 0 \le r \le 6$; to get only the first octant, let $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

4. In cylindrical coordinates, let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = 2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 2r$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + 2r\mathbf{k}$. For $2 \le z \le 4$, $2 \le 2r \le 4 \Rightarrow 1 \le r \le 2$, and let $0 \le \theta \le 2\pi$.

5. In cylindrical coordinates, let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ since $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow z^2 = 9 - (x^2+y^2) = 9 - r^2$ $\Rightarrow z = \sqrt{9 - r^2}$, $z \ge 0$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$. Let $0 \le \theta \le 2\pi$. For the domain of r: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 9 \Rightarrow 2(x^2+y^2) = 9 \Rightarrow 2r^2 = 9$ $\Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 \le r \le \frac{3}{\sqrt{2}}$.

6. In cylindrical coordinates, $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \sqrt{4 - r^2}\,\mathbf{k}$ (see Exercise 5 above with $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, instead of $x^2 + y^2 + z^2 = 9$). For the first octant, let $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. For the domain of r: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 4 \Rightarrow 2(x^2+y^2) = 4 \Rightarrow 2r^2 = 4 \Rightarrow r = \sqrt{2}$. Thus, let $\sqrt{2} \le r \le 2$ (to get the portion of the sphere between the cone and the xy-plane).

7. In spherical coordinates, $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \rho^2 = 3 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}$ $\Rightarrow z = \sqrt{3}\cos\phi$ for the sphere; $z = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$; $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cos\phi$ $\Rightarrow \cos\phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$. Then $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \left(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{3}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{2\pi}{3}$ and $0 \le \theta \le 2\pi$.

8. In spherical coordinates, $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \rho^2 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow x = 2\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta$, $y = 2\sqrt{2}\sin\phi\sin\theta$, and $z = 2\sqrt{2}\cos\phi$. Thus let $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \left(2\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(2\sqrt{2}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}\cos\phi\right)\mathbf{k}$; $z = -2 \Rightarrow -2 = 2\sqrt{2}\cos\phi$ $\Rightarrow \cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$; $z = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = 1 \Rightarrow \phi = 0$. Thus $0 \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$ and $0 \le \theta \le 2\pi$.

9. Since $z = 4 - y^2$, we can let $\mathbf{r}$ be a function of x and y $\Rightarrow \mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4-y^2)\mathbf{k}$. Then $z = 0$ $\Rightarrow 0 = 4 - y^2 \Rightarrow y = \pm 2$. Thus, let $-2 \le y \le 2$ and $0 \le x \le 2$.

10. Since $y = x^2$, we can let $\mathbf{r}$ be a function of x and z $\Rightarrow \mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Then $y = 2$ $\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Thus, let $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ and $0 \le z \le 3$.

11. When $x = 0$, let $y^2 + z^2 = 9$ be the circular section in the yz-plane. Use polar coordinates in the yz-plane $\Rightarrow y = 3\cos\theta$ and $z = 3\sin\theta$. Thus let $x = u$ and $\theta = v \Rightarrow \mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + (3\cos v)\mathbf{j} + (3\sin v)\mathbf{k}$ where $0 \le u \le 3$, and $0 \le v \le 2\pi$.

12. When $y = 0$, let $x^2 + z^2 = 4$ be the circular section in the xz-plane. Use polar coordinates in the xz-plane $\Rightarrow x = 2\cos\theta$ and $z = 2\sin\theta$. Thus let $y = u$ and $\theta = v \Rightarrow \mathbf{r}(u,v) = (2\cos v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (3\sin v)\mathbf{k}$ where $-2 \le u \le 2$, and $0 \le v \le \pi$ (since we want the portion above the xy-plane).

13. (a) $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$. In cylindrical coordinates, let $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$ $\Rightarrow z = 1 - r\cos\theta - r\sin\theta \Rightarrow \mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\theta - r\sin\theta)\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ and $0 \le r \le 3$.

    (b) In a fashion similar to cylindrical coordinates, but working in the yz-plane instead of the xy-plane, let $y = u\cos v$, $z = u\sin v$ where $u = \sqrt{y^2+z^2}$ and v is the angle formed by (x,y,z), $(x,0,0)$, and $(x,y,0)$ with $(x,0,0)$ as vertex. Since $x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow x = 1 - u\cos v - u\sin v$, then $\mathbf{r}$ is a function of u and v $\Rightarrow \mathbf{r}(u,v) = (1 - u\cos v - u\sin v)\mathbf{i} + (u\cos v)\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$ and $0 \le v \le 2\pi$.

14. (a) In a fashion similar to cylindrical coordinates, but working in the xz-plane instead of the xy-plane, let $x = u\cos v$, $z = u\sin v$ where $u = \sqrt{x^2+z^2}$ and v is the angle formed by (x,y,z), $(y,0,0)$, and $(x,y,0)$ with vertex $(y,0,0)$. Since $x - y + 2z = 2 \Rightarrow y = x + 2z - 2$, then $\mathbf{r}(u,v)$ $= (u\cos v)\mathbf{i} + (u\cos v + 2u\sin v - 2)\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le \sqrt{3}$ and $0 \le v \le 2\pi$.

    (b) In a fashion similar to cylindrical coordinates, but working in the yz-plane instead of the xy-plane, let $y = u\cos v$, $z = u\sin v$ where $u = \sqrt{y^2+z^2}$ and v is the angle formed by (x,y,z), $(x,0,0)$, and $(x,y,0)$ with vertex $(x,0,0)$. Since $x - y + 2z = 2 \Rightarrow x = y - 2z + 2$, then $\mathbf{r}(u,v)$ $= (u\cos v - 2u\sin v + 2)\mathbf{i} + (u\cos v)\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le \sqrt{2}$ and $0 \le v \le 2\pi$.

15. Let $x = w\cos v$ and $z = w\sin v$. Then $(x-2)^2 + z^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + z^2 = 0 \Rightarrow w^2\cos^2 v - 4w\cos v + w^2\sin^2 v$ $= 0 \Rightarrow w^2 - 4w\cos v = 0 \Rightarrow w = 0$ or $w - 4\cos v = 0 \Rightarrow w = 0$ or $w = 4\cos v$. Now $w = 0 \Rightarrow x = 0$ and $y = 0$, which is a line not a cylinder. Therefore, let $w = 4\cos v \Rightarrow x = (4\cos v)(\cos v) = 4\cos^2 v$ and $z = 4\cos v\sin v$. Finally, let $y = u$. Then $\mathbf{r}(u,v) = (4\cos^2 v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (4\cos v\sin v)\mathbf{k}$, $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$ and $0 \le u \le 3$.

16. Let $y = w\cos v$ and $z = w\sin v$. Then $y^2 + (z-5)^2 = 25 \Rightarrow y^2 + z^2 - 10z = 0$
$\Rightarrow w^2\cos^2 v + w^2\sin^2 v - 10w\sin v = 0 \Rightarrow w^2 - 10w\sin v = 0 \Rightarrow w(w - 10\sin v) = 0 \Rightarrow w = 0$ or $w = 10\sin v$. Now $w = 0 \Rightarrow y = 0$ and $z = 0$, which is a line not a cylinder. Therefore, let $w = 10\sin v$
$\Rightarrow y = 10\sin v\cos v$ and $z = 10\sin^2 v$. Finally, let $x = u$. Then $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + (10\sin v\cos v)\mathbf{j} + (10\sin^2 v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 10$ and $0 \le v \le \pi$.

17. Let $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{2 - r\sin\theta}{2}\right)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ and $0 \le \theta \le 2\pi$
$\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{\sin\theta}{2}\right)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r\cos\theta}{2}\right)\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{\sin\theta}{2} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -\frac{r\cos\theta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-r\sin\theta\cos\theta}{2} + \frac{(\sin\theta)(r\cos\theta)}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{r\sin^2\theta}{2} + \frac{r\cos^2\theta}{2}\right)\mathbf{j} + (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\mathbf{k} = \frac{r}{2}\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \frac{\sqrt{5}r}{2} \Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}r}{2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sqrt{5}r^2}{4}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$$

18. Let $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta \Rightarrow z = -x = -r\cos\theta$, $0 \le r \le 2$ and $0 \le \theta \le 2\pi$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - (r\cos\theta)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} - (\cos\theta)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} + (r\sin\theta)\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= (r\sin^2\theta + r\cos^2\theta)\,\mathbf{i} + (r\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta)\mathbf{j} + (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\mathbf{k} = r\mathbf{i} + r\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} \Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2\sqrt{2}}{2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\,d\theta = 4\pi\sqrt{2}$$

19. Let $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta \Rightarrow z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$, $1 \le r \le 3$ and $0 \le \theta \le 2\pi$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + 2r\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-2r\cos\theta)\mathbf{i} - (2r\sin\theta)\mathbf{j} + (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\,\mathbf{k}$$

$$= (-2r\cos\theta)\mathbf{i} - (2r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_1^3 r\sqrt{5}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2\sqrt{5}}{2}\right]_1^3 d\theta = \int_0^{2\pi} 4\sqrt{5}\,d\theta = 8\pi\sqrt{5}$$

20. Let $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta \Rightarrow z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3} = \frac{r}{3}$, $3 \le r \le 4$ and $0 \le \theta \le 2\pi$. Then $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{3}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{3}\right)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{1}{3} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3}r\cos\theta\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{3}r\sin\theta\right)\mathbf{j} + (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\,\mathbf{k}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}r\cos\theta\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{3}r\sin\theta\right)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{\frac{1}{9}r^2\cos^2\theta + \frac{1}{9}r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{\frac{10r^2}{9}} = \frac{r\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_3^4 \frac{r\sqrt{10}}{3}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2\sqrt{10}}{6}\right]_3^4 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{7\sqrt{10}}{6}\,d\theta = \frac{7\pi\sqrt{10}}{3}$$

21. Let $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 = 1$, $1 \le z \le 4$ and $0 \le \theta \le 2\pi$. Then $\mathbf{r}(z,\theta) = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_z = \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\,\mathbf{j} \Rightarrow |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_1^4 1\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} 3\,d\theta = 6\pi$

22. Let $x = u\cos v$ and $z = u\sin v \Rightarrow u^2 = x^2 + z^2 = 10$, $-1 \le y \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$. Then
$\mathbf{r}(y, v) = (u\cos v)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k} = \left(\sqrt{10}\cos v\right)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(\sqrt{10}\sin v\right)\mathbf{k}$
$\Rightarrow \mathbf{r}_v = \left(-\sqrt{10}\sin v\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{10}\cos v\right)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sqrt{10}\sin v & 0 & \sqrt{10}\cos v \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
$= \left(-\sqrt{10}\cos v\right)\mathbf{i} - \left(\sqrt{10}\sin v\right)\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{10} \Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 \sqrt{10}\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\left[\sqrt{10}u\right]_{-1}^1 dv$
$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{10}\,dv = 4\pi\sqrt{10}$

23. $z = 2 - x^2 - y^2$ and $z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 2 - z^2 \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow z = -2$ or $z = 1$. Since $z = \sqrt{x^2+y^2} \ge 0$, we get $z = 1$ where the cone intersects the paraboloid. When $x = 0$ and $y = 0$, $z = 2 \Rightarrow$ the vertex of the paraboloid is $(0, 0, 2)$. Therefore, z ranges from 1 to 2 on the "cap" $\Rightarrow$ r ranges from 1 (when $x^2 + y^2 = 1$) to 0 (when $x = 0$ and $y = 0$ at the vertex). Let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, and $z = 2 - r^2$. Then
$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (2 - r^2)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} - 2r\mathbf{k}$ and
$\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
$= (2r^2\cos\theta)\mathbf{i} + (2r^2\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2} = r\sqrt{4r^2+1}$
$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\right)d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

24. Let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $z = x^2 + y^2 = r^2$. Then $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k}$, $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + 2r\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j}$
$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2\cos\theta)\mathbf{i} - (2r^2\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|$
$= \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2} = r\sqrt{4r^2+1} \Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_1^2 d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}\right)d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$

25. Let $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, and $z = \rho\cos\phi \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ on the sphere. Next, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ and $z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2 + z^2 = 2 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = 1$ since $z \ge 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$. For the lower portion of the sphere cut by the cone, we get $\phi = \pi$. Then
$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \left(\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{2}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{4} \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$
$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = \left(\sqrt{2}\cos\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\cos\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} - \left(\sqrt{2}\sin\phi\right)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = \left(-\sqrt{2}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{j}$
$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2}\cos\phi\cos\theta & \sqrt{2}\cos\phi\sin\theta & -\sqrt{2}\sin\phi \\ -\sqrt{2}\sin\phi\sin\theta & \sqrt{2}\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
$= (2\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$
$\Rightarrow |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{4\sin^4\phi\cos^2\theta + 4\sin^4\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{4\sin^2\phi} = 2|\sin\phi| = 2\sin\phi$
$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2+\sqrt{2}\right)d\theta = \left(4+2\sqrt{2}\right)\pi$

26. Let $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, and $z = \rho\cos\phi \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$ on the sphere. Next, $z = -1 \Rightarrow -1 = 2\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$; $z = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 2\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$. Then

$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\cos\phi)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{2\pi}{3}$, $0 \le \theta \le 2\pi$
$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (2\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (2\sin\phi)\mathbf{k}$ and
$\mathbf{r}_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (4\sin^2\phi\cos\theta)\,\mathbf{i} + (4\sin^2\phi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (4\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$
$\Rightarrow |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{16\sin^4\phi\cos^2\theta + 16\sin^4\phi\sin^2\theta + 16\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{16\sin^2\phi} = 4\,|\sin\phi| = 4\sin\phi$
$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{2\pi/3} 4\sin\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2 + 2\sqrt{3}\right) d\theta = \left(4 + 4\sqrt{3}\right)\pi$

27. Let the parametrization be $\mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_z = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
$= 2x\mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{4x^2+1} \Rightarrow \iint_S G(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^3\int_0^2 x\sqrt{4x^2+1}\, dx\, dz = \int_0^3 \left[\frac{1}{12}\left(4x^2+1\right)^{3/2}\right]_0^2 dz$
$= \int_0^3 \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 1\right) dz = \frac{17\sqrt{17}-1}{4}$

28. Let the parametrization be $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{4-y^2}\,\mathbf{k}$, $-2 \le y \le 2 \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i}$ and $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} - \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}} \end{vmatrix} = \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\frac{y^2}{4-y^2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}$$

$\Rightarrow \iint_S G(x,y,z)\, d\sigma = \int_1^4\int_{-2}^2 \sqrt{4-y^2}\left(\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\right) dy\, dx = 24$

29. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}$ (spherical coordinates with $\rho = 1$ on the sphere), $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (\sin\phi)\mathbf{k}$ and

$$\mathbf{r}_\theta = (-\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (\sin^2\phi\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\sin^2\phi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{\sin^4\phi\cos^2\theta + \sin^4\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi}$
$= \sin\phi$; $x = \sin\phi\cos\theta \Rightarrow G(x,y,z) = \cos^2\theta\sin^2\phi \Rightarrow \iint_S G(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi (\cos^2\theta\sin^2\phi)(\sin\phi)\, d\phi\, d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi (\cos^2\theta)(1 - \cos^2\phi)(\sin\phi)\, d\phi\, d\theta$; $\begin{bmatrix} u = \cos\phi \\ du = -\sin\phi\, d\phi \end{bmatrix} \to \int_0^{2\pi}\int_1^{-1} (\cos^2\theta)(u^2 - 1)\, du\, d\theta$
$= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta)\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{-1} d\theta = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}$

30. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}$ (spherical coordinates with $\rho = a$, $a \ge 0$, on the sphere), $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ (since $z \ge 0$), $0 \le \theta \le 2\pi$
$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (a\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (a\sin\phi)\mathbf{k}$ and

$$\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\,\mathbf{i} + (a^2\sin^2\phi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (a^2\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$
$\Rightarrow |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = a^2\sin\phi$; $z = a\cos\phi$
$\Rightarrow G(x,y,z) = a^2\cos^2\phi \Rightarrow \iint_S G(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (a^2\cos^2\phi)(a^2\sin\phi)\, d\phi\, d\theta = \frac{2}{3}\pi a^4$

31. Let the parametrization be $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4-x-y)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{3} \Rightarrow \iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 (4-x-y)\sqrt{3}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{3}\left[4y - xy - \tfrac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \sqrt{3}\left(\tfrac{7}{2} - x\right) dx = \sqrt{3}\left[\tfrac{7}{2}x - \tfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = 3\sqrt{3}$$

32. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ (since $0 \le z \le 1$) and $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ and } \mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{(-r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2 + r^2} = r\sqrt{2};\ z = r \text{ and } x = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = r - r\cos\theta \Rightarrow \iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r\cos\theta)\left(r\sqrt{2}\right) dr\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-\cos\theta)\, r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \tfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

33. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (1-r^2)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ (since $0 \le z \le 1$) and $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} - 2r\mathbf{k} \text{ and } \mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2r^2\cos\theta)\mathbf{i} + (2r^2\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{(2r^2\cos\theta)^2 + (2r^2\sin\theta) + r^2} = r\sqrt{1+4r^2};\ z = 1 - r^2 \text{ and}$$

$$x = r\cos\theta \Rightarrow H(x,y,z) = (r^2\cos^2\theta)\sqrt{1+4r^2} \Rightarrow \iint_S H(x,y,z)\, d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta)\left(\sqrt{1+4r^2}\right)\left(r\sqrt{1+4r^2}\right) dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(1+4r^2)\cos^2\theta\, dr\, d\theta = \tfrac{11\pi}{12}$$

34. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\cos\phi)\mathbf{k}$ (spherical coordinates with $\rho = 2$ on the sphere), $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ and $z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \sqrt{2}$ (since $z \ge 0$) $\Rightarrow 2\cos\phi = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$, $0 \le \theta \le 2\pi$; $\mathbf{r}_\phi = (2\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (2\sin\phi)\mathbf{k}$

$$\text{and } \mathbf{r}_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (4\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (4\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{16\sin^4\phi\cos^2\theta + 16\sin^4\phi\sin^2\theta + 16\sin^2\phi\cos^2\phi} = 4\sin\phi;\ y = 2\sin\phi\sin\theta \text{ and}$$

$$z = 2\cos\phi \Rightarrow H(x,y,z) = 4\cos\phi\sin\phi\sin\theta \Rightarrow \iint_S H(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (4\cos\phi\sin\phi\sin\theta)(4\sin\phi)\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 16\sin^2\phi\cos\phi\sin\theta\, d\phi\, d\theta = 0$$

35. Let the parametrization be $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4-y^2)\mathbf{k}$, $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$; $z = 0 \Rightarrow 0 = 4 - y^2$

$$\Rightarrow y = \pm 2;\ \mathbf{r}_x = \mathbf{i} \text{ and } \mathbf{r}_y = \mathbf{j} - 2y\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2y\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \mathbf{F}\cdot\tfrac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\, dy\, dx = (2xy - 3z)\, dy\, dx = [2xy - 3(4-y^2)]\, dy\, dx \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \int_0^1\int_{-2}^2 (2xy + 3y^2 - 12)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[xy^2 + y^3 - 12y\right]_{-2}^2 dx = \int_0^1 -32\, dx = -32$$

36. Let the parametrization be $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le z \le 2 \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_z = \mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|\, dz\, dx = -x^2\, dz\, dx$$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{-1}^{1} \int_0^2 -x^2\, dz\, dx = -\frac{4}{3}$$

37. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a \cos\phi)\mathbf{k}$ (spherical coordinates with $\rho = a$, $a \ge 0$, on the sphere), $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ (for the first octant), $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (for the first octant)

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (a \cos\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \cos\phi \sin\theta)\mathbf{j} - (a \sin\phi)\mathbf{k} \text{ and } \mathbf{r}_\theta = (-a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 \sin^2\phi \cos\theta)\,\mathbf{i} + (a^2 \sin^2\phi \sin\theta)\,\mathbf{j} + (a^2 \sin\phi \cos\phi)\,\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, d\theta\, d\phi$$

$$= a^3 \cos^2\phi \sin\phi\, d\theta\, d\phi \text{ since } \mathbf{F} = z\mathbf{k} = (a\cos\phi)\mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{\pi a^3}{6}$$

38. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a \cos\phi)\mathbf{k}$ (spherical coordinates with $\rho = a$, $a \ge 0$, on the sphere), $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (a \cos\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \cos\phi \sin\theta)\mathbf{j} - (a \sin\phi)\mathbf{k} \text{ and } \mathbf{r}_\theta = (-a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 \sin^2\phi \cos\theta)\,\mathbf{i} + (a^2 \sin^2\phi \sin\theta)\,\mathbf{j} + (a^2 \sin\phi \cos\phi)\,\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, d\theta\, d\phi$$

$$= (a^3 \sin^3\phi \cos^2\phi + a^3 \sin^3\phi \sin^2\theta + a^3 \sin\phi \cos^2\phi)\, d\theta\, d\phi = a^3 \sin\phi\, d\theta\, d\phi \text{ since } \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$= (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^3$$

39. Let the parametrization be $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (2a - x - y)\mathbf{k}$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\, dy\, dx$$

$$= [2xy + 2y(2a - x - y) + 2x(2a - x - y)]\, dy\, dx \text{ since } \mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$$

$$= 2xy\mathbf{i} + 2y(2a - x - y)\mathbf{j} + 2x(2a - x - y)\mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \int_0^a \int_0^a [2xy + 2y(2a - x - y) + 2x(2a - x - y)]\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^a (4ay - 2y^2 + 4ax - 2x^2 - 2xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{4}{3}a^3 + 3a^2x - 2ax^2\right) dx = \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) a^4 = \frac{13a^4}{6}$$

40. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le z \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (where $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ on the cylinder) $\Rightarrow \mathbf{r}_\theta = (-\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_z = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|} |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\, dz\, d\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, dz\, d\theta = dz\, d\theta, \text{ since } \mathbf{F} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^a 1\, dz\, d\theta = 2\pi a$$

41. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ (since $0 \le z \le 1$) and $0 \le \theta \le 2\pi$ $\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}$ $= (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r}{|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|}|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|\,d\theta\,dr = (r^3\sin\theta\cos^2\theta + r^2)\,d\theta\,dr$ since $\mathbf{F} = (r^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathbf{i} - r\mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\sin\theta\cos^2\theta + r^2)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\theta\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)d\theta$ $= \left[-\frac{1}{12}\cos^3\theta + \frac{\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

42. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + 2r\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ (since $0 \le z \le 2$) and $0 \le \theta \le 2\pi$ $\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2 \end{vmatrix}$ $= (2r\cos\theta)\mathbf{i} + (2r\sin\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r}{|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|}|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|\,d\theta\,dr$ $= (2r^3\sin^2\theta\cos\theta + 4r^3\cos\theta\sin\theta + r)\,d\theta\,dr$ since $\mathbf{F} = (r^2\sin^2\theta)\,\mathbf{i} + (2r^2\cos\theta)\,\mathbf{j} - \mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^3\sin^2\theta\cos\theta + 4r^3\cos\theta\sin\theta + r)\,dr\,d\theta$ $= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta = \left[\frac{1}{6}\sin^3\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = \pi$

43. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $1 \le r \le 2$ (since $1 \le z \le 2$) and $0 \le \theta \le 2\pi$ $\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}$ $= (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r}{|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|}|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|\,d\theta\,dr = (-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta - r^3)\,d\theta\,dr$ $= (-r^2 - r^3)\,d\theta\,dr$ since $\mathbf{F} = (-r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (-r^2 - r^3)\,dr\,d\theta = -\frac{73\pi}{6}$

44. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ (since $0 \le z \le 1$) and $0 \le \theta \le 2\pi$ $\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + 2r\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \end{vmatrix}$ $= (2r^2\cos\theta)\,\mathbf{i} + (2r^2\sin\theta)\,\mathbf{j} - r\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r}{|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|}|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_r|\,d\theta\,dr = (8r^3\cos^2\theta + 8r^3\sin^2\theta - 2r)\,d\theta\,dr$ $= (8r^3 - 2r)\,d\theta\,dr$ since $\mathbf{F} = (4r\cos\theta)\mathbf{i} + (4r\sin\theta)\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (8r^3 - 2r)\,dr\,d\theta = 2\pi$

45. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (a\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (a\sin\phi)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j}$ $\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$ $= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\,\mathbf{i} + (a^2\sin^2\phi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (a^2\sin\phi\cos\phi)\,\mathbf{k}$ $\Rightarrow |\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\sin^2\phi} = a^2\sin\phi$. The mass is $M = \iint_S d\sigma = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(a^2\sin\phi)\,d\phi\,d\theta = \frac{a^2\pi}{2}$; the first moment is $M_{yz} = \iint_S x\,d\sigma$ $= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(a\sin\phi\cos\theta)(a^2\sin\phi)\,d\phi\,d\theta = \frac{a^3\pi}{4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\left(\frac{a^3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{a^2\pi}{2}\right)} = \frac{a}{2} \Rightarrow$ the centroid is located at $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ by symmetry

46. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $1 \le r \le 2$ (since $1 \le z \le 2$) and $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = r\sqrt{2}$. The mass is

$M = \iint_S \delta\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta r\sqrt{2}\, dr\, d\theta = \left(3\sqrt{2}\right)\pi\delta$; the first moment is $M_{xy} = \iint_S \delta z\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta r\left(r\sqrt{2}\right) dr\, d\theta$

$= \frac{\left(14\sqrt{2}\right)\pi\delta}{3} \Rightarrow \bar{z} = \frac{\left(\frac{\left(14\sqrt{2}\right)\pi\delta}{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)\pi\delta} = \frac{14}{9} \Rightarrow$ the center of mass is located at $\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ by symmetry. The

moment of inertia is $I_z = \iint_S \delta\left(x^2+y^2\right) d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta r^2\left(r\sqrt{2}\right) dr\, d\theta = \frac{\left(15\sqrt{2}\right)\pi\delta}{2} \Rightarrow$ the radius of gyration is

$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

47. Let the parametrization be $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi = (a\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (a\sin\phi)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

$= \left(a^2\sin^2\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(a^2\sin^2\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(a^2\sin\phi\cos\phi\right)\mathbf{k}$

$\Rightarrow |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\sin^2\phi} = a^2\sin\phi$. The moment of

inertia is $I_z = \iint_S \delta\left(x^2+y^2\right) d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \delta\left[(a\sin\phi\cos\theta)^2 + (a\sin\phi\sin\theta)^2\right]\left(a^2\sin\phi\right) d\phi\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \delta\left(a^2\sin^2\phi\right)\left(a^2\sin\phi\right) d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \delta a^4\sin^3\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \delta a^4\left[\left(-\frac{1}{3}\cos\phi\right)\left(\sin^2\phi + 2\right)\right]_0^{\pi} d\theta = \frac{8\delta\pi a^4}{3}$

48. Let the parametrization be $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$ (since $0 \le z \le 1$) and $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = r\sqrt{2}$. The moment of inertia is

$I_z = \iint_S \delta\left(x^2+y^2\right) d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta r^2\left(r\sqrt{2}\right) dr\, d\theta = \frac{\pi\delta\sqrt{2}}{2}$

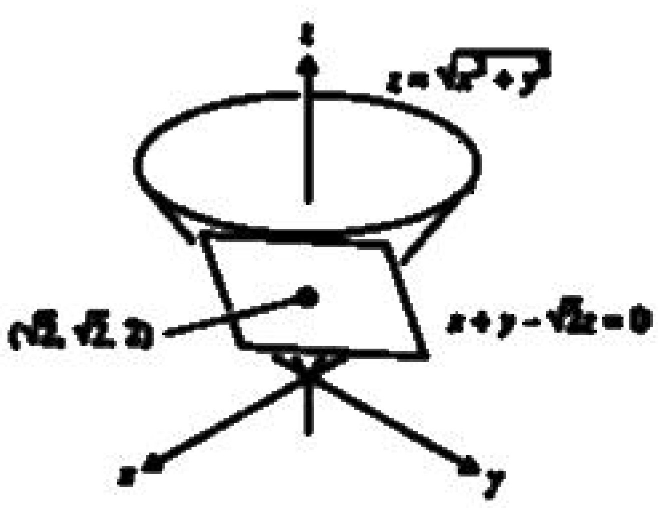
49. The parametrization $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$

at $P_0 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 2$,

$\mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and

$\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$

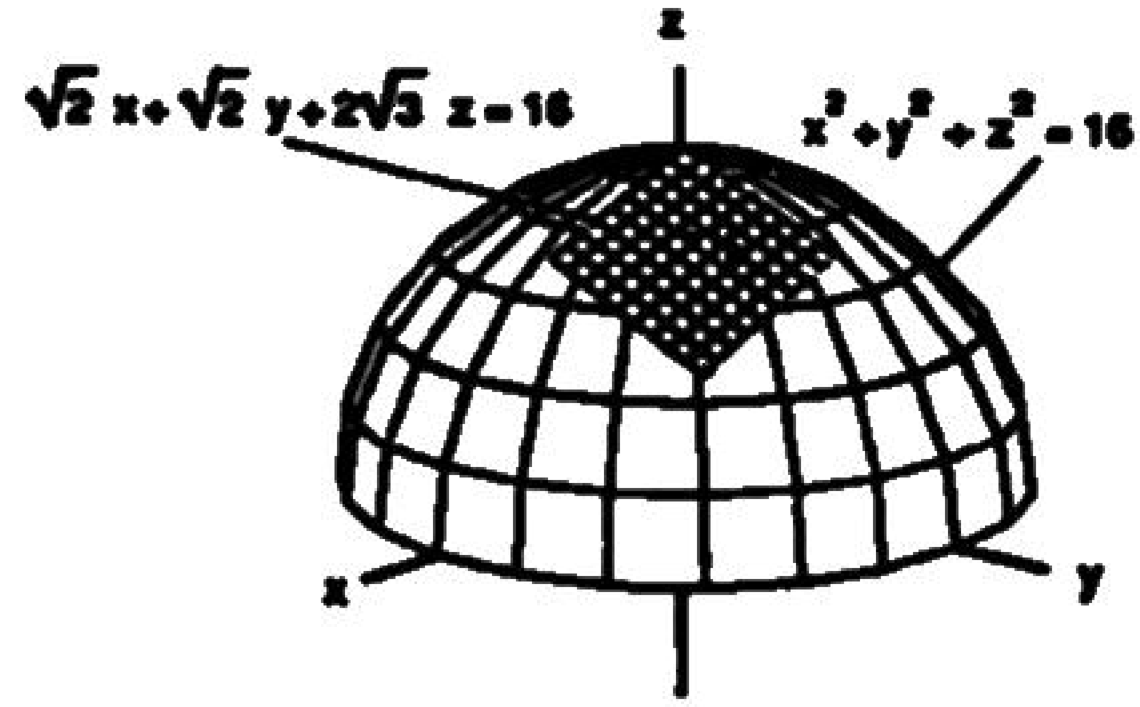


$= -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow$ the tangent plane is

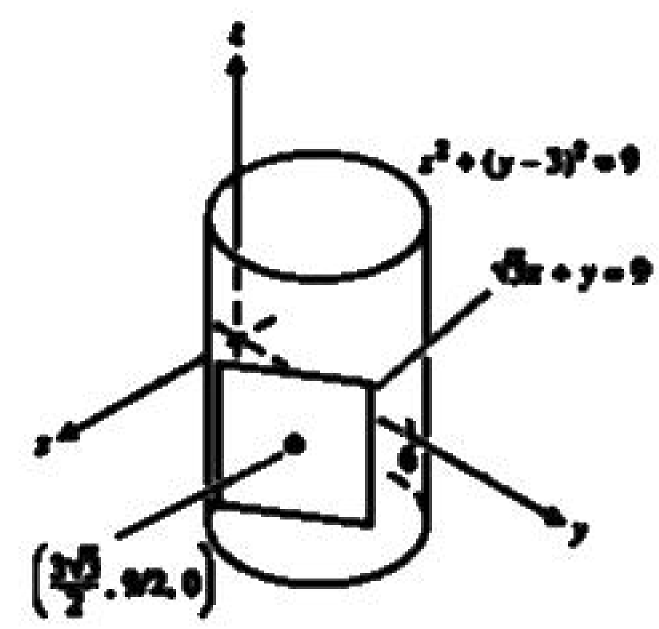
$0 = \left(-\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\right) \cdot \left[\left(x - \sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(y - \sqrt{2}\right)\mathbf{j} + (z-2)\mathbf{k}\right] \Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z = 0$, or $x + y - \sqrt{2}z = 0$.

The parametrization $\mathbf{r}(r,\theta) \Rightarrow x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $z = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = z^2 \Rightarrow$ the surface is $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

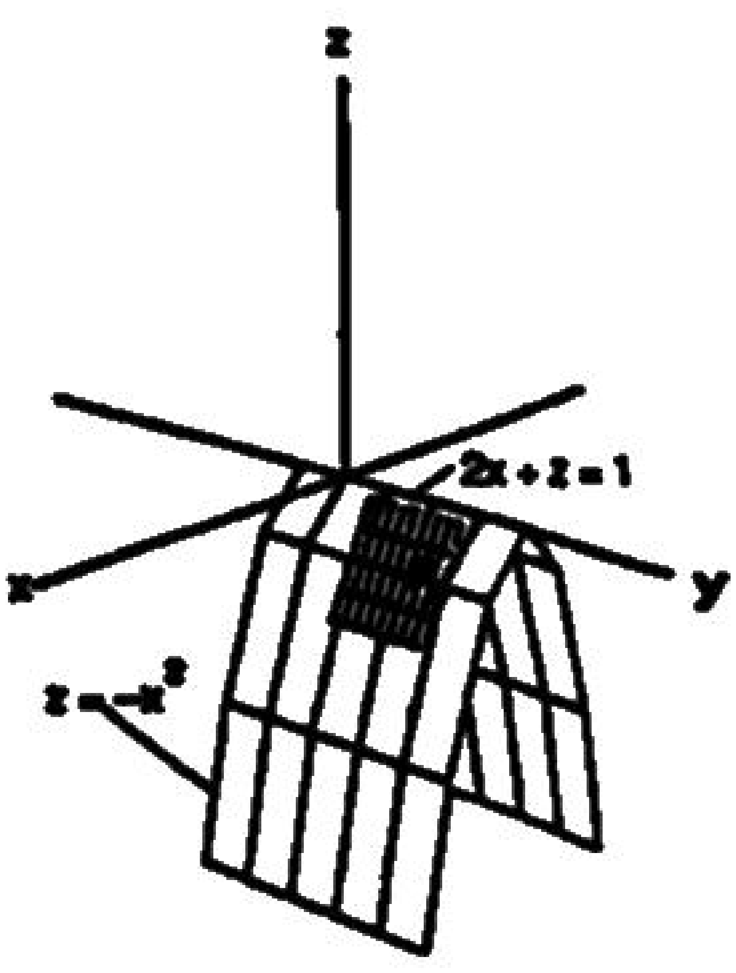
50. The parametrization $\mathbf{r}(\phi, \theta)$
$= (4 \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (4 \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (4 \cos \phi)\mathbf{k}$
at $P_0 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right) \Rightarrow \rho = 4$ and $z = 2\sqrt{3}$
$= 4 \cos \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$; also $x = \sqrt{2}$ and $y = \sqrt{2}$
$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Then $\mathbf{r}_\phi$
$= (4 \cos \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (4 \cos \phi \sin \theta)\mathbf{j} - (4 \sin \phi)\mathbf{k}$
$= \sqrt{6}\mathbf{i} + \sqrt{6}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ and
$\mathbf{r}_\theta = (-4 \sin \phi \sin \theta)\mathbf{i} + (4 \sin \phi \cos \theta)\mathbf{j}$
$= -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$ at $P_0 \Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$
$= 2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} + 4\sqrt{3}\mathbf{k} \Rightarrow$ the tangent plane is
$\left(2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} + 4\sqrt{3}\mathbf{k}\right) \cdot \left[\left(x - \sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(y - \sqrt{2}\right)\mathbf{j} + \left(z - 2\sqrt{3}\right)\mathbf{k}\right] = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{3}z = 16,$
or $x + y + \sqrt{6}z = 8\sqrt{2}$. The parametrization $\Rightarrow x = 4 \sin \phi \cos \theta, y = 4 \sin \phi \sin \theta, z = 4 \cos \phi$
$\Rightarrow$ the surface is $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$.



51. The parametrization $\mathbf{r}(\theta, z) = (3 \sin 2\theta)\mathbf{i} + (6 \sin^2 \theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
at $P_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ and $z = 0$. Then
$\mathbf{r}_\theta = (6 \cos 2\theta)\mathbf{i} + (12 \sin \theta \cos \theta)\mathbf{j}$
$= -3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_z = \mathbf{k}$ at P_0
$\Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$\Rightarrow$ the tangent plane is
$\left(3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\right) \cdot \left[\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i} + \left(y - \frac{9}{2}\right)\mathbf{j} + (z - 0)\mathbf{k}\right] = 0$
$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 9$. The parametrization $\Rightarrow x = 3 \sin 2\theta$
and $y = 6 \sin^2 \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \sin^2 2\theta + (6 \sin^2 \theta)^2$
$= 9(4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + 36 \sin^4 \theta = 6(6 \sin^2 \theta) = 6y \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9$



52. The parametrization $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ at
$P_0 = (1, 2, -1) \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i} - 2x\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_y = \mathbf{j}$ at P_0
$\Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k} \Rightarrow$ the tangent plane
is $(2\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot [(x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}] = 0$
$\Rightarrow 2x + z = 1$. The parametrization $\Rightarrow x = x, y = y$ and
$z = -x^2 \Rightarrow$ the surface is $z = -x^2$



53. (a) An arbitrary point on the circle C is $(x, z) = (R + r \cos u, r \sin u) \Rightarrow (x, y, z)$ is on the torus with
$x = (R + r \cos u) \cos v, y = (R + r \cos u) \sin v$, and $z = r \sin u, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

(b) $\mathbf{r}_u = (-r\sin u\cos v)\mathbf{i} - (r\sin u\sin v)\mathbf{j} + (r\cos u)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_v = (-(R + r\cos u)\sin v)\mathbf{i} + ((R + r\cos u)\cos v)\mathbf{j}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -(R+r\cos u)\sin v & (R+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$= -(R + r\cos u)(r\cos v\cos u)\mathbf{i} - (R + r\cos u)(r\sin v\cos u)\mathbf{j} + (-r\sin u)(R + r\cos u)\mathbf{k}$

$\Rightarrow |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = (R + r\cos u)^2 (r^2\cos^2 v\cos^2 u + r^2\sin^2 v\cos^2 u + r^2\sin^2 u) \Rightarrow |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = r(R + r\cos u)$

$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (rR + r^2\cos u)\,du\,dv = \int_0^{2\pi} 2\pi rR\,dv = 4\pi^2 rR$

54. (a) The point (x, y, z) is on the surface for fixed $x = f(u)$ when $y = g(u)\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ and $z = g(u)\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ $\Rightarrow x = f(u)$, $y = g(u)\cos v$, and $z = g(u)\sin v \Rightarrow \mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{i} + (g(u)\cos v)\mathbf{j} + (g(u)\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le v \le 2\pi$, $a \le u \le b$

(b) Let $u = y$ and $x = u^2 \Rightarrow f(u) = u^2$ and $g(u) = u \Rightarrow \mathbf{r}(u, v) = u^2\mathbf{i} + (u\cos v)\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le v \le 2\pi$, $0 \le u$

55. (a) Let $w^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$ where $w = \cos\phi$ and $\frac{z}{c} = \sin\phi \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\phi \Rightarrow \frac{x}{a} = \cos\phi\cos\theta$ and $\frac{y}{b} = \cos\phi\sin\theta$

$\Rightarrow x = a\cos\theta\cos\phi$, $y = b\sin\theta\cos\phi$, and $z = c\sin\phi$

$\Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (b\sin\theta\cos\phi)\mathbf{j} + (c\sin\phi)\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (b\cos\theta\cos\phi)\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_\phi = (-a\cos\theta\sin\phi)\mathbf{i} - (b\sin\theta\sin\phi)\mathbf{j} + (c\cos\phi)\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin\theta\cos\phi & b\cos\theta\cos\phi & 0 \\ -a\cos\theta\sin\phi & -b\sin\theta\sin\phi & c\cos\phi \end{vmatrix}$$

$= (bc\cos\theta\cos^2\phi)\,\mathbf{i} + (ac\sin\theta\cos^2\phi)\,\mathbf{j} + (ab\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$

$\Rightarrow |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi|^2 = b^2c^2\cos^2\theta\cos^4\phi + a^2c^2\sin^2\theta\cos^4\phi + a^2b^2\sin^2\phi\cos^2\phi$, and the result follows.

$A \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi|\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[a^2b^2\sin^2\phi\cos^2\phi + b^2c^2\cos^2\theta\cos^4\phi + a^2c^2\sin^2\theta\cos^4\phi\right]^{1/2} d\phi\,d\theta$

56. (a) $\mathbf{r}(\theta, u) = (\cosh u\cos\theta)\mathbf{i} + (\cosh u\sin\theta)\mathbf{j} + (\sinh u)\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(\theta, u) = (a\cosh u\cos\theta)\mathbf{i} + (b\cosh u\sin\theta)\mathbf{j} + (c\sinh u)\mathbf{k}$

57. $\mathbf{r}(\theta, u) = (5\cosh u\cos\theta)\mathbf{i} + (5\cosh u\sin\theta)\mathbf{j} + (5\sinh u)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_\theta = (-5\cosh u\sin\theta)\mathbf{i} + (5\cosh u\cos\theta)\mathbf{j}$ and $\mathbf{r}_u = (5\sinh u\cos\theta)\mathbf{i} + (5\sinh u\sin\theta)\mathbf{j} + (5\cosh u)\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5\cosh u\sin\theta & 5\cosh u\cos\theta & 0 \\ 5\sinh u\cos\theta & 5\sinh u\sin\theta & 5\cosh u \end{vmatrix}$$

$= (25\cosh^2 u\cos\theta)\,\mathbf{i} + (25\cosh^2 u\sin\theta)\,\mathbf{j} - (25\cosh u\sinh u)\mathbf{k}$. At the point $(x_0, y_0, 0)$, where $x_0^2 + y_0^2 = 25$ we have $5\sinh u = 0 \Rightarrow u = 0$ and $x_0 = 25\cos\theta$, $y_0 = 25\sin\theta \Rightarrow$ the tangent plane is $5(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + z\mathbf{k}] = 0 \Rightarrow x_0 x - x_0^2 + y_0 y - y_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 x + y_0 y = 25$

58. Let $\frac{z^2}{c^2} - w^2 = 1$ where $\frac{z}{c} = \cosh u$ and $w = \sinh u \Rightarrow w^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x}{a} = w\cos\theta$ and $\frac{y}{b} = w\sin\theta$

$\Rightarrow x = a\sinh u\cos\theta$, $y = b\sinh u\sin\theta$, and $z = c\cosh u$

$\Rightarrow \mathbf{r}(\theta, u) = (a\sinh u\cos\theta)\mathbf{i} + (b\sinh u\sin\theta)\mathbf{j} + (c\cosh u)\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\infty < u < \infty$

16.7 STOKES' THEOREM

1. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2x & z^2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (2 - 0)\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \mathbf{k} \Rightarrow \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 2 \Rightarrow d\sigma = dx\,dy$

$\Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R 2\,dA = 2(\text{Area of the ellipse}) = 4\pi$

2. $\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = \mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \mathbf{k} \Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\,dy$

$\Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R dx\,dy = \text{Area of circle} = 9\pi$

3. $\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & x^2 \end{vmatrix} = -x\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-x - 2x + z - 1) \Rightarrow d\sigma = \frac{\sqrt{3}}{1}\,dA \Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{1}{\sqrt{3}}(-3x + z - 1)\sqrt{3}\,dA$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} [-3x + (1 - x - y) - 1]\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-4x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 -\left[4x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx$

$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 3x - \frac{7}{2}x^2\right) dx = -\frac{5}{6}$

4. $\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2z)\mathbf{i} + (2z - 2x)\mathbf{j} + (2x - 2y)\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2y - 2z + 2z - 2x + 2x - 2y) = 0 \Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S 0\,d\sigma = 0$

5. $\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+y^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + (2z - 2x)\mathbf{j} + (2x - 2y)\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

$\Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 2x - 2y \Rightarrow d\sigma = dx\,dy \Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x - 2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 [x^2 - 2xy]_{-1}^{1}\,dy$

$= \int_{-1}^1 -4y\,dy = 0$

6. $\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3x^2y^2\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{4}$

$\Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{3}{4}x^2y^2z$; $d\sigma = \frac{4}{z}\,dA$ (Section 16.5, Example 5, with $a = 4$) $\Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$= \iint_R \left(-\frac{3}{4}x^2y^2z\right)\left(\frac{4}{z}\right) dA = -3\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2\cos^2\theta)(r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = -3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 (\cos\theta\sin\theta)^2\,d\theta$

$= -32\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta = -4\int_0^{4\pi}\sin^2 u\,du = -4\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{4\pi} = -8\pi$

7. $x = 3\cos t$ and $y = 2\sin t \Rightarrow \mathbf{F} = (2\sin t)\mathbf{i} + (9\cos^2 t)\mathbf{j} + (9\cos^2 t + 16\sin^4 t)\sin e^{\sqrt{(6\sin t\cos t)(0)}}\mathbf{k}$ at the base of the shell; $\mathbf{r} = (3\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow d\mathbf{r} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -6\sin^2 t + 18\cos^3 t$

$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}(-6\sin^2 t + 18\cos^3 t)\,dt = \left[-3t + \frac{3}{2}\sin 2t + 6(\sin t)(\cos^2 t + 2)\right]_0^{2\pi} = -6\pi$

8. $\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z + \frac{1}{2+x} & \tan^{-1} y & x + \frac{1}{4+z} \end{vmatrix} = -2\mathbf{j}$; $f(x,y,z) = 4x^2 + y + z^2 \Rightarrow \nabla f = 8x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

$\Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\,dA = |\nabla f|\,dA$; $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla f|}(-2\mathbf{j} \cdot \nabla f) = \frac{-2}{|\nabla f|}$

$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma = -2\,dA \Rightarrow \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R -2\,dA = -2(\text{Area of R}) = -2(\pi \cdot 1 \cdot 2) = -4\pi$, where R is the elliptic region in the xz-plane enclosed by $4x^2 + z^2 = 4$.

9. Flux of $\nabla \times \mathbf{F} = \iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, so let C be parametrized by $\mathbf{r} = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$,
$0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = ay \sin t + ax \cos t = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t = a^2$
$\Rightarrow$ Flux of $\nabla \times \mathbf{F} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} a^2\, dt = 2\pi a^2$

10. $\nabla \times (y\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{k}\,;\ \mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
$\Rightarrow \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} = -z$; $d\sigma = \frac{1}{z}\, dA$ (Section 16.5, Example 5, with $a = 1$) $\Rightarrow \iint\limits_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$
$= \iint\limits_R (-z)\left(\frac{1}{z}\, dA\right) = -\iint\limits_R dA = -\pi$, where R is the disk $x^2 + y^2 \le 1$ in the xy-plane.

11. Let S_1 and S_2 be oriented surfaces that span C and that induce the same positive direction on C. Then
$\iint\limits_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1\, d\sigma_1 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, d\sigma_2$

12. $\iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint\limits_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, and since S_1 and S_2 are joined by the simple closed curve C, each of the above integrals will be equal to a circulation integral on C. But for one surface the circulation will be counterclockwise, and for the other surface the circulation will be clockwise. Since the integrands are the same, the sum will be 0 $\Rightarrow \iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$.

13. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 3x & 5y \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\,;\ \mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} - 2r\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j}$
$\Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2\cos\theta)\,\mathbf{i} + (2r^2\sin\theta)\,\mathbf{j} + r\mathbf{k}\,;\ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|}$ and $d\sigma = |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\, dr\, d\theta$
$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)\, dr\, d\theta = (10r^2\cos\theta + 4r^2\sin\theta + 3r)\, dr\, d\theta \Rightarrow \iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (10r^2\cos\theta + 4r^2\sin\theta + 3r)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{10}{3}r^3\cos\theta + \frac{4}{3}r^3\sin\theta + \frac{3}{2}r^2\right]_0^2 d\theta$
$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{80}{3}\cos\theta + \frac{32}{3}\sin\theta + 6\right) d\theta = 6(2\pi) = 12\pi$

14. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x + z \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\,;\ \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = (2r^2\cos\theta)\,\mathbf{i} + (2r^2\sin\theta)\,\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ and
$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)\, dr\, d\theta$ (see Exercise 13 above) $\Rightarrow \iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (-2r^2\cos\theta - 4r^2\sin\theta - 2r)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}r^3\cos\theta - \frac{4}{3}r^3\sin\theta - r^2\right]_0^3 d\theta$
$= \int_0^{2\pi} (-18\cos\theta - 36\sin\theta - 9)\, d\theta = -9(2\pi) = -18\pi$

15. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2y^3z & 3z \end{vmatrix} = -2y^3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}\,;\ \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
$= (-r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ and $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)\, dr\, d\theta$ (see Exercise 13 above)
$\Rightarrow \iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_R (2ry^3\cos\theta - rx^2)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^4\sin^3\theta\cos\theta - r^3\cos^2\theta)\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{1}{4}\cos^2\theta\right) d\theta = \left[\frac{1}{10}\sin^4\theta - \frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}$

16. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & y-z & z-x \end{vmatrix} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
$= (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ and $\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot(\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta)\,dr\,d\theta$ (see Exercise 13 above)
$\Rightarrow \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^5 (r\cos\theta + r\sin\theta + r)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[(\cos\theta+\sin\theta+1)\frac{r^2}{2}\right]_0^5 d\theta = \left(\frac{25}{2}\right)(2\pi) = 25\pi$

17. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 5-2x & z^2-2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i}+0\mathbf{j}-5\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{3}\cos\phi\cos\theta & \sqrt{3}\cos\phi\sin\theta & -\sqrt{3}\sin\phi \\ -\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta & \sqrt{3}\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
$= (3\sin^2\phi\cos\theta)\,\mathbf{i} + (3\sin^2\phi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (3\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$; $\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta)\,d\phi\,d\theta$ (see Exercise 13 above) $\Rightarrow \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} -15\cos\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{15}{2}\cos^2\phi\right]_0^{\pi/2} d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{15}{2}\,d\theta = -15\pi$

18. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x \end{vmatrix} = -2z\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
$= (4\sin^2\phi\cos\theta)\,\mathbf{i} + (4\sin^2\phi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (4\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$; $\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta)\,d\phi\,d\theta$ (see Exercise 13 above) $\Rightarrow \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R (-8z\sin^2\phi\cos\theta - 4\sin^2\phi\sin\theta - 8y\sin\phi\cos\theta)\,d\phi\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (-16\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta - 4\sin^2\phi\sin\theta - 16\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta)\,d\phi\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{16}{3}\sin^3\phi\cos\theta - 4\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}\right)(\sin\theta) - 16\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}\right)(\sin\theta\cos\theta)\right]_0^{\pi/2} d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{16}{3}\cos\theta - \pi\sin\theta - 4\pi\sin\theta\cos\theta\right) d\theta = \left[-\frac{16}{3}\sin\theta + \pi\cos\theta - 2\pi\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} = 0$

19. (a) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S 0\,d\sigma = 0$

(b) Let $f(x,y,z) = x^2y^2z^3 \Rightarrow \nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow \text{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$
$= \iint_S 0\,d\sigma = 0$

(c) $\mathbf{F} = \nabla\times(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S 0\,d\sigma = 0$

(d) $\mathbf{F} = \nabla f \Rightarrow \nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S 0\,d\sigma = 0$

20. $\mathbf{F} = \nabla f = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x)\mathbf{i} - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2y)\mathbf{j} - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2z)\mathbf{k}$
$= -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\mathbf{i} - y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\mathbf{j} - z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$
$\Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(-a\sin t) - y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(a\cos t)$
$= \left(-\frac{a\cos t}{a^3}\right)(-a\sin t) - \left(\frac{a\sin t}{a^3}\right)(a\cos t) = 0 \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$

(b) $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S \nabla \times \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S \mathbf{0}\cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S 0\, d\sigma = 0$

21. Let $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} - x\mathbf{k} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3z & -x \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}$

$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2 \Rightarrow \oint_C 2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S -2\,d\sigma$

$= -2\iint_S d\sigma$, where $\iint_S d\sigma$ is the area of the region enclosed by C on the plane S: $2x + 2y + z = 2$

22. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

23. Suppose $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ exists such that $\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Then $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} = 1$. Likewise, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = 1$ and $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y} = 1$. Summing the calculated equations

$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y}\right) = 3$ or $0 = 3$ (assuming the second mixed partials are equal). This result is a contradiction, so there is no field $\mathbf{F}$ such that curl $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

24. Yes: If $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, then the circulation of $\mathbf{F}$ around the boundary C of any oriented surface S in the domain of $\mathbf{F}$ is zero. The reason is this: By Stokes's theorem, circulation $= \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \mathbf{0}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$

$= 0$.

25. $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r^4 = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(r^4) = 4x(x^2+y^2)\mathbf{i} + 4y(x^2+y^2)\mathbf{j} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$

$\Rightarrow \oint_C \nabla(r^4)\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy$

$= \iint_R [4(x^2+y^2) + 8x^2 + 4(x^2+y^2) + 8y^2]\,dA = \iint_R 16(x^2+y^2)\,dA = 16\iint_R x^2\,dA + 16\iint_R y^2\,dA$

$= 16I_y + 16I_x$.

26. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial N}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$ curl $\mathbf{F} = \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathbf{k} = \mathbf{0}$.
However, $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{F} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$ which is not zero.

16.8 THE DIVERGENCE THEOREM AND A UNIFIED THEORY

1. $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{F} = \frac{xy-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

2. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{F} = 1 + 1 = 2$

3. $\mathbf{F} = -\frac{GM(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{F} = -GM\left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$

$- GM\left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] - GM\left[\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$

$= -GM\left[\frac{3(x^2+y^2+z^2)^2-3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}\right] = 0$

4. $z = a^2 - r^2$ in cylindrical coordinates $\Rightarrow z = a^2 - (x^2+y^2) \Rightarrow \mathbf{v} = (a^2 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

5. $\frac{\partial}{\partial x}(y-x) = -1,\ \frac{\partial}{\partial y}(z-y) = -1,\ \frac{\partial}{\partial z}(y-x) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = -2 \Rightarrow \text{Flux} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -2\,dx\,dy\,dz = -2\,(2^3)$
$= -16$

6. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x,\ \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y,\ \frac{\partial}{\partial x}(z^2) = 2z \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2y + 2z$
(a) $\text{Flux} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \left[x^2 + 2x(y+z)\right]_0^1 dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 (1+2y+2z)\,dy\,dz$
$= \int_0^1 \left[y(1+2z) + y^2\right]_0^1 dz = \int_0^1 (2+2z)\,dz = \left[2z + z^2\right]_0^1 = 3$
(b) $\text{Flux} = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \left[x^2 + 2x(y+z)\right]_{-1}^1 dy\,dz = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (4y+4z)\,dy\,dz$
$= \int_{-1}^1 \left[2y^2 + 4yz\right]_{-1}^1 dz = \int_{-1}^1 8z\,dz = \left[4z^2\right]_{-1}^1 = 0$
(c) In cylindrical coordinates, $\text{Flux} = \iiint\limits_D (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz$
$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r\cos\theta + 2r\sin\theta + 2z)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^1\int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{2}{3}r^3\sin\theta + zr^2\right]_0^2 d\theta\,dz$
$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3}\cos\theta + \frac{16}{3}\sin\theta + 4z\right) d\theta\,dz = \int_0^1 \left[\frac{16}{3}\sin\theta - \frac{16}{3}\cos\theta + 4z\theta\right]_0^{2\pi} dz = \int_0^1 8\pi z\,dz = \left[4\pi z^2\right]_0^1 = 4\pi$

7. $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x,\ \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = x - 1;\ z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2$ in cylindrical coordinates
$\Rightarrow \text{Flux} = \iiint\limits_D (x-1)\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} (r\cos\theta - 1)\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^3\cos\theta - r^2)\,r\,dr\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\cos\theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{32}{5}\cos\theta - 4\right) d\theta = \left[\frac{32}{5}\sin\theta - 4\theta\right]_0^{2\pi} = -8\pi$

8. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x,\ \frac{\partial}{\partial y}(xz) = 0,\ \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 3 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 3 \Rightarrow \text{Flux} = \iiint\limits_D (2x+3)\,dV$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 (2\rho\sin\phi\cos\theta + 3)(\rho^2\sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{2}\sin\phi\cos\theta + \rho^3\right]_0^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (8\sin\phi\cos\theta + 8)\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[8\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}\right)\cos\theta - 8\cos\phi\right]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} (4\pi\cos\theta + 16)\,d\theta$
$= 32\pi$

9. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x,\ \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) = -2x,\ \frac{\partial}{\partial z}(3xz) = 3x \Rightarrow \text{Flux} = \iiint\limits_D 3x\,dx\,dy\,dz$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (3\rho\sin\phi\cos\theta)(\rho^2\sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 12\sin^2\phi\cos\theta\,d\phi\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 3\pi\cos\theta\,d\theta = 3\pi$

10. $\frac{\partial}{\partial x}(6x^2 + 2xy) = 12x + 2y,\ \frac{\partial}{\partial y}(2y + x^2z) = 2,\ \frac{\partial}{\partial z}(4x^2y^3) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 12x + 2y + 2$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iiint\limits_D (12x + 2y + 2)\,dV = \int_0^3\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (12r\cos\theta + 2r\sin\theta + 2)r\,dr\,d\theta\,dz$
$= \int_0^3\int_0^{\pi/2} \left(32\cos\theta + \frac{16}{3}\sin\theta + 4\right) d\theta\,dz = \int_0^3 \left(32 + 2\pi + \frac{16}{3}\right) dz = 112 + 6\pi$

11. $\frac{\partial}{\partial x}(2xz) = 2z,\ \frac{\partial}{\partial y}(-xy) = -x,\ \frac{\partial}{\partial z}(-z^2) = -2z \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = -x \Rightarrow \text{Flux} = \iiint\limits_D -x\,dV$
$= \int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4x^2}}\int_0^{4-y} -x\,dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4x^2}} (xy - 4x)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x(16 - 4x^2) - 4x\sqrt{16-4x^2}\right] dx$
$= \left[4x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}(16 - 4x^2)^{3/2}\right]_0^2 = -\frac{40}{3}$

12. $\frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2$, $\frac{\partial}{\partial y}(y^3) = 3y^2$, $\frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3z^2 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$
$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2(\rho^2 \sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^5}{5}\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\frac{2a^5}{5}\,d\theta = \frac{12\pi a^5}{5}$

13. Let $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Then $\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho x) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)x + \rho = \frac{x^2}{\rho} + \rho$, $\frac{\partial}{\partial y}(\rho y) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)y + \rho$
$= \frac{y^2}{\rho} + \rho$, $\frac{\partial}{\partial z}(\rho z) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)z + \rho = \frac{z^2}{\rho} + \rho \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho} + 3\rho = 4\rho$, since $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D 4\rho\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} (4\rho)(\rho^2\sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} 6\,d\theta = 12\pi$

14. Let $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Then $\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} - \left(\frac{x}{\rho^2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}$. Similarly,
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}$ and $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{3}{\rho} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^3} = \frac{2}{\rho}$
$\Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D \frac{2}{\rho}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\left(\frac{2}{\rho}\right)(\rho^2\sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} 6\,d\theta = 12\pi$

15. $\frac{\partial}{\partial x}(5x^3 + 12xy^2) = 15x^2 + 12y^2$, $\frac{\partial}{\partial y}(y^3 + e^y \sin z) = 3y^2 + e^y \sin z$, $\frac{\partial}{\partial z}(5z^3 + e^y\cos z) = 15z^2 - e^y \sin z$
$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 15x^2 + 15y^2 + 15z^2 = 15\rho^2 \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D 15\rho^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} (15\rho^2)(\rho^2\sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(12\sqrt{2} - 3\right)\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(24\sqrt{2} - 6\right)d\theta = \left(48\sqrt{2} - 12\right)\pi$

16. $\frac{\partial}{\partial x}[\ln(x^2+y^2)] = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2z}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \left(-\frac{2z}{x}\right)\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] = -\frac{2z}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(z\sqrt{x^2+y^2}\right) = \sqrt{x^2+y^2}$
$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2z}{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2z}{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right) dz\,dy\,dx$
$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}\left(\frac{2r\cos\theta}{r^2} - \frac{2z}{r^2} + r\right) dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\left(6\cos\theta - \frac{3}{r} + 3r^2\right) dr\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi}\left[6\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\theta - 3\ln\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1\right] d\theta = 2\pi\left(-\frac{3}{2}\ln 2 + 2\sqrt{2} - 1\right)$

17. (a) $\mathbf{G} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{G} = \text{curl}\,\mathbf{G} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{k} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G}$
$= \text{div}(\text{curl}\,\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$
$= \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y} = 0$ if all first and second partial derivatives are continuous

(b) By the Divergence Theorem, the outward flux of $\nabla \times \mathbf{G}$ across a closed surface is zero because outward flux of $\nabla \times \mathbf{G} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}\,d\sigma$
$= \iiint_D \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G}\,dV$ [Divergence Theorem with $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$]
$= \iiint_D (0)\,dV = 0$ [by part (a)]

18. (a) Let $\mathbf{F}_1 = M_1\mathbf{i} + N_1\mathbf{j} + P_1\mathbf{k}$ and $\mathbf{F}_2 = M_2\mathbf{i} + N_2\mathbf{j} + P_2\mathbf{k} \Rightarrow a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2$
$= (aM_1 + bM_2)\mathbf{i} + (aN_1 + bN_2)\mathbf{j} + (aP_1 + bP_2)\mathbf{k} \Rightarrow \nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2)$
$= \left(a\frac{\partial M_1}{\partial x} + b\frac{\partial M_2}{\partial x}\right) + \left(a\frac{\partial N_1}{\partial y} + b\frac{\partial N_2}{\partial y}\right) + \left(a\frac{\partial P_1}{\partial z} + b\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)$
$= a\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z}\right) + b\left(\frac{\partial M_2}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial P_2}{\partial z}\right) = a(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + b(\nabla \cdot \mathbf{F}_2)$

(b) Define $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_2$ as in part a $\Rightarrow \nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2)$
$= \left[\left(a\frac{\partial P_1}{\partial y} + b\frac{\partial P_2}{\partial y}\right) - \left(a\frac{\partial N_1}{\partial z} + b\frac{\partial N_2}{\partial z}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\left(a\frac{\partial M_1}{\partial z} + b\frac{\partial M_2}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial P_1}{\partial x} + b\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)\right]\mathbf{j}$

$+\left[\left(a\frac{\partial N_1}{\partial x}+b\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)-\left(a\frac{\partial M_1}{\partial y}+b\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)\right]\mathbf{k}=a\left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial M_1}{\partial z}-\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}-\frac{\partial M_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$
$+b\left[\left(\frac{\partial P_2}{\partial y}-\frac{\partial N_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial M_2}{\partial z}-\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial N_2}{\partial x}-\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]=a\nabla\times\mathbf{F}_1+b\nabla\times\mathbf{F}_2$

(c) $\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\M_1&N_1&P_1\\M_2&N_2&P_2\end{vmatrix}=(N_1P_2-P_1N_2)\mathbf{i}-(M_1P_2-P_1M_2)\mathbf{j}+(M_1N_2-N_1M_2)\mathbf{k}\Rightarrow\nabla\cdot(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2)$
$=\nabla\cdot[(N_1P_2-P_1N_2)\mathbf{i}-(M_1P_2-P_1M_2)\mathbf{j}+(M_1N_2-N_1M_2)\mathbf{k}]$
$=\frac{\partial}{\partial x}(N_1P_2-P_1N_2)-\frac{\partial}{\partial y}(M_1P_2-P_1M_2)+\frac{\partial}{\partial z}(M_1N_2-N_1M_2)=\left(P_2\frac{\partial N_1}{\partial x}+N_1\frac{\partial P_2}{\partial x}-N_2\frac{\partial P_1}{\partial x}-P_1\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)$
$-\left(M_1\frac{\partial P_2}{\partial y}+P_2\frac{\partial M_1}{\partial y}-P_1\frac{\partial M_2}{\partial y}-M_2\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)+\left(M_1\frac{\partial N_2}{\partial z}+N_2\frac{\partial M_1}{\partial z}-N_1\frac{\partial M_2}{\partial z}-M_2\frac{\partial N_1}{\partial z}\right)$
$=M_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial z}\right)+N_2\left(\frac{\partial M_1}{\partial z}-\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)+P_2\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}-\frac{\partial M_1}{\partial y}\right)+M_1\left(\frac{\partial N_2}{\partial z}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)+N_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}-\frac{\partial M_2}{\partial z}\right)$
$+P_1\left(\frac{\partial M_2}{\partial y}-\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)=\mathbf{F}_2\cdot\nabla\times\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_1\cdot\nabla\times\mathbf{F}_2$

19. (a) $\operatorname{div}(g\mathbf{F})=\nabla\cdot g\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(gM)+\frac{\partial}{\partial y}(gN)+\frac{\partial}{\partial z}(gP)=\left(g\frac{\partial M}{\partial x}+M\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\left(g\frac{\partial N}{\partial y}+N\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\left(g\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial g}{\partial z}\right)$
$=\left(M\frac{\partial g}{\partial x}+N\frac{\partial g}{\partial y}+P\frac{\partial g}{\partial z}\right)+g\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)=g\nabla\cdot\mathbf{F}+\nabla g\cdot\mathbf{F}$

(b) $\nabla\times(g\mathbf{F})=\left[\frac{\partial}{\partial y}(gP)-\frac{\partial}{\partial z}(gN)\right]\mathbf{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(gM)-\frac{\partial}{\partial x}(gP)\right]\mathbf{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(gN)-\frac{\partial}{\partial y}(gM)\right]\mathbf{k}$
$=\left(P\frac{\partial g}{\partial y}+g\frac{\partial P}{\partial y}-N\frac{\partial g}{\partial z}-g\frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(M\frac{\partial g}{\partial z}+g\frac{\partial M}{\partial z}-P\frac{\partial g}{\partial x}-g\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(N\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial N}{\partial x}-M\frac{\partial g}{\partial y}-g\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$
$=\left(P\frac{\partial g}{\partial y}-N\frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(g\frac{\partial P}{\partial y}-g\frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(M\frac{\partial g}{\partial z}-P\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(g\frac{\partial M}{\partial z}-g\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(N\frac{\partial g}{\partial x}-M\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$
$+\left(g\frac{\partial N}{\partial x}-g\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}=g\nabla\times\mathbf{F}+\nabla g\times\mathbf{F}$

20. Let $\mathbf{F}_1=M_1\mathbf{i}+N_1\mathbf{j}+P_1\mathbf{k}$ and $\mathbf{F}_2=M_2\mathbf{i}+N_2\mathbf{j}+P_2\mathbf{k}$.

(a) $\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2=(N_1P_2-P_1N_2)\mathbf{i}+(P_1M_2-M_1P_2)\mathbf{j}+(M_1N_2-N_1M_2)\mathbf{k}\Rightarrow\nabla\times(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2)$
$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(M_1N_2-N_1M_2)-\frac{\partial}{\partial z}(P_1M_2-M_1P_2)\right]\mathbf{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(N_1P_2-P_1N_2)-\frac{\partial}{\partial x}(M_1N_2-N_1M_2)\right]\mathbf{j}$
$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(P_1M_2-M_1P_2)-\frac{\partial}{\partial y}(N_1P_2-P_1N_2)\right]\mathbf{k}$
and consider the **i**-component only: $\frac{\partial}{\partial y}(M_1N_2-N_1M_2)-\frac{\partial}{\partial z}(P_1M_2-M_1P_2)$
$=N_2\frac{\partial M_1}{\partial y}+M_1\frac{\partial N_2}{\partial y}-M_2\frac{\partial N_1}{\partial y}-N_1\frac{\partial M_2}{\partial y}-M_2\frac{\partial P_1}{\partial z}-P_1\frac{\partial M_2}{\partial z}+P_2\frac{\partial M_1}{\partial z}+M_1\frac{\partial P_2}{\partial z}$
$=\left(N_2\frac{\partial M_1}{\partial y}+P_2\frac{\partial M_1}{\partial z}\right)-\left(N_1\frac{\partial M_2}{\partial y}+P_1\frac{\partial M_2}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)M_1-\left(\frac{\partial N_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)M_2$
$=\left(M_2\frac{\partial M_1}{\partial x}+N_2\frac{\partial M_1}{\partial y}+P_2\frac{\partial M_1}{\partial z}\right)-\left(M_1\frac{\partial M_2}{\partial x}+N_1\frac{\partial M_2}{\partial y}+P_1\frac{\partial M_2}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial M_2}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)M_1$
$-\left(\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial N_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)M_2$. Now, **i**-comp of $(\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1=\left(M_2\frac{\partial}{\partial x}+N_2\frac{\partial}{\partial y}+P_2\frac{\partial}{\partial z}\right)M_1$
$=\left(M_2\frac{\partial M_1}{\partial x}+N_2\frac{\partial M_1}{\partial y}+P_2\frac{\partial M_1}{\partial z}\right)$; likewise, **i**-comp of $(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2=\left(M_1\frac{\partial M_2}{\partial x}+N_1\frac{\partial M_2}{\partial y}+P_1\frac{\partial M_2}{\partial z}\right)$;
i-comp of $(\nabla\cdot\mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1=\left(\frac{\partial M_2}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)M_1$ and **i**-comp of $(\nabla\cdot\mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2=\left(\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial N_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)M_2$.
Similar results hold for the **j** and **k** components of $\nabla\times(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2)$. In summary, since the corresponding components are equal, we have the result
$\nabla\times(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2)=(\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1-(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2+(\nabla\cdot\mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1-(\nabla\cdot\mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$

(b) Here again we consider only the **i**-component of each expression. Thus, the **i**-comp of $\nabla(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2)$
$=\frac{\partial}{\partial x}(M_1M_2+N_1N_2+P_1P_2)=\left(M_1\frac{\partial M_2}{\partial x}+M_2\frac{\partial M_1}{\partial x}+N_1\frac{\partial N_2}{\partial x}+N_2\frac{\partial N_1}{\partial x}+P_1\frac{\partial P_2}{\partial x}+P_2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)$
i-comp of $(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2=\left(M_1\frac{\partial M_2}{\partial x}+N_1\frac{\partial M_2}{\partial y}+P_1\frac{\partial M_2}{\partial z}\right)$,
i-comp of $(\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1=\left(M_2\frac{\partial M_1}{\partial x}+N_2\frac{\partial M_1}{\partial y}+P_2\frac{\partial M_1}{\partial z}\right)$,
i-comp of $\mathbf{F}_1\times(\nabla\times\mathbf{F}_2)=N_1\left(\frac{\partial N_2}{\partial x}-\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)-P_1\left(\frac{\partial M_2}{\partial z}-\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)$, and

$\mathbf{i}$-comp of $\mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1) = N_2\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial y}\right) - P_2\left(\frac{\partial M_1}{\partial z} - \frac{\partial P_1}{\partial x}\right)$.

Since corresponding components are equal, we see that

$\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$, as claimed.

21. The integral's value never exceeds the surface area of S. Since $|\mathbf{F}| \le 1$, we have $|\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}| = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{n}| \le (1)(1) = 1$ and

$$\begin{aligned}\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,d\sigma &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma && \text{[Divergence Theorem]}\\ &\le \iint_S |\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}|\,d\sigma && \text{[A property of integrals]}\\ &\le \iint_S (1)\,d\sigma && [|\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}| \le 1]\\ &= \text{Area of S.}\end{aligned}$$

22. Yes, the outward flux through the top is 5. The reason is this: Since $\nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot(x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z+3)\mathbf{k}$ $= 1 - 2 + 1 = 0$, the outward flux across the closed cubelike surface is 0 by the Divergence Theorem. The flux across the top is therefore the negative of the flux across the sides and base. Routine calculations show that the sum of these latter fluxes is -5. (The flux across the sides that lie in the xz-plane and the yz-plane are 0, while the flux across the xy-plane is -3.) Therefore the flux across the top is 5.

23. (a) $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1,\ \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1,\ \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 3 \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D 3\,dV = 3\iiint_D dV$

$= 3(\text{Volume of the solid})$

(b) If $\mathbf{F}$ is orthogonal to $\mathbf{n}$ at every point of S, then $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0$ everywhere $\Rightarrow$ Flux $= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$.

But the flux is 3(Volume of the solid) $\neq 0$, so $\mathbf{F}$ is not orthogonal to $\mathbf{n}$ at every point.

24. $\nabla\cdot\mathbf{F} = -2x - 4y - 6z + 12 \Rightarrow \text{Flux} = \int_0^a\int_0^b\int_0^1 (-2x - 4y - 6z + 12)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^a\int_0^b (-2x - 4y + 9)\,dy\,dx = \int_0^a (-2xb - 2b^2 + 9b)\,dx = -a^2b - 2ab^2 + 9ab = ab(-a - 2b + 9) = f(a,b)$;
$\frac{\partial f}{\partial a} = -2ab - 2b^2 + 9b$ and $\frac{\partial f}{\partial b} = -a^2 - 4ab + 9a$ so that $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ and $\frac{\partial f}{\partial b} = 0 \Rightarrow b(-2a - 2b + 9) = 0$ and $a(-a - 4b + 9) = 0 \Rightarrow b = 0$ or $-2a - 2b + 9 = 0$, and $a = 0$ or $-a - 4b + 9 = 0$. Now $b = 0$ or $a = 0$ $\Rightarrow$ Flux $= 0$; $-2a - 2b + 9 = 0$ and $-a - 4b + 9 = 0 \Rightarrow 3a - 9 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$ so that $f\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$ is the maximum flux.

25. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D 3\,dV \Rightarrow \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D dV = \text{Volume of D}$

26. $\mathbf{F} = \mathbf{C} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D 0\,dV = 0$

27. (a) From the Divergence Theorem, $\iint_S \nabla f\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\nabla f\,dV = \iiint_D \nabla^2 f\,dV = \iiint_D 0\,dV = 0$

(b) From the Divergence Theorem, $\iint_S f\nabla f\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot f\nabla f\,dV$. Now,

$f\nabla f = \left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(f\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \nabla\cdot f\nabla f = \left[f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] + \left[f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] + \left[f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]$

$= f\nabla^2 f + |\nabla f|^2 = 0 + |\nabla f|^2$ since f is harmonic $\Rightarrow \iint_S f\nabla f\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\,dV$, as claimed.

28. From the Divergence Theorem, $\iint_S \nabla f\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\nabla f\,dV = \iiint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dV$. Now,

$f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
$= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \frac{dV}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{\rho^2 \sin\phi}{\rho^2}\, d\rho\, d\phi\, d\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a \sin\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{\pi/2} [-a\cos\phi]_0^{\pi/2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} a\, d\theta = \frac{\pi a}{2}$

29. $\iint_S f \nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot f \nabla g\, dV = \iiint_D \nabla \cdot \left(f \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + f \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + f \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}\right) dV$
$= \iiint_D \left(f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV$
$= \iiint_D \left[f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right] dV = \iiint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

30. By Exercise 29, $\iint_S f \nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$ and by interchanging the roles of f and g, $\iint_S g \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (g \nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f)\, dV$. Subtracting the second equation from the first yields: $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f)\, dV$ since $\nabla f \cdot \nabla g = \nabla g \cdot \nabla f$.

31. (a) The integral $\iiint_D p(t,x,y,z)\, dV$ represents the mass of the fluid at any time t. The equation says that the instantaneous rate of change of mass is flux of the fluid through the surface S enclosing the region D: the mass decreases if the flux is outward (so the fluid flows out of D), and increases if the flow is inward (interpreting $\mathbf{n}$ as the outward pointing unit normal to the surface).

(b) $\iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\, dV = \frac{d}{dt}\iiint_D p\, dV = -\iint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\iiint_D \nabla \cdot p\mathbf{v}\, dV \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot p\mathbf{v}$
Since the law is to hold for all regions D, $\nabla \cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$, as claimed

32. (a) ∇T points in the direction of maximum change of the temperature, so if the solid is heating up at the point the temperature is greater in a region surrounding the point $\Rightarrow \nabla T$ points away from the point $\Rightarrow -\nabla T$ points toward the point $\Rightarrow -\nabla T$ points in the direction the heat flows.

(b) Assuming the Law of Conservation of Mass (Exercise 31) with $-k\nabla T = p\mathbf{v}$ and $c\rho T = p$, we have $\frac{d}{dt}\iiint_D c\rho T\, dV = -\iint_S -k\nabla T \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \Rightarrow$ the continuity equation, $\nabla \cdot (-k\nabla T) + \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T) = 0$
$\Rightarrow c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k\nabla T) = k\nabla^2 T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\nabla^2 T = K\nabla^2 T$, as claimed

CHAPTER 16 PRACTICE EXERCISES

1. Path 1: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \Rightarrow x = t, y = t, z = t, 0 \le t \le 1 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = 3 - 3t^2$ and $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 1,$
$\frac{dz}{dt} = 1 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{3}\, dt \Rightarrow \int_C f(x,y,z)\, ds = \int_0^1 \sqrt{3}(3 - 3t^2)\, dt = 2\sqrt{3}$
Path 2: $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, 0 \le t \le 1 \Rightarrow x = t, y = t, z = 0 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = 2t - 3t^2 + 3$ and $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 1,$
$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{2}\, dt \Rightarrow \int_{C_1} f(x,y,z)\, ds = \int_0^1 \sqrt{2}(2t - 3t^2 + 3)\, dt = 3\sqrt{2};$
$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k} \Rightarrow x = 1, y = 1, z = t \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = 2 - 2t$ and $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 1$
$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_2} f(x,y,z)\, ds = \int_0^1 (2 - 2t)\, dt = 1$
$\Rightarrow \int_C f(x,y,z)\, ds = \int_{C_1} f(x,y,z)\, ds + \int_{C_2} f(x,y,z) = 3\sqrt{2} + 1$

2. Path 1: $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} \Rightarrow x = t, y = 0, z = 0 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = t^2$ and $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$;

$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + t\mathbf{j} \Rightarrow x = 1, y = t, z = 0 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = 1 + t$ and $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{dz}{dt} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 (1 + t)\, dt = \frac{3}{2}$;

$\mathbf{r}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k} \Rightarrow x = 1, y = 1, z = t \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = 2 - t$ and $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_3} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 (2 - t)\, dt = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \int_{\text{Path 1}} f(x, y, z)\, ds = \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_3} f(x, y, z)\, ds = \frac{10}{3}$

Path 2: $\mathbf{r}_4 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} \Rightarrow x = t, y = t, z = 0 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = t^2 + t$ and $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{dz}{dt} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{2}\, dt \Rightarrow \int_{C_4} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 \sqrt{2}\,(t^2 + t)\, dt = \frac{5}{6}\sqrt{2}$;

$\mathbf{r}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$ (see above) $\Rightarrow \int_{C_3} f(x, y, z)\, ds = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \int_{\text{Path 2}} f(x, y, z)\, ds = \int_{C_4} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_3} f(x, y, z)\, ds = \frac{5}{6}\sqrt{2} + \frac{3}{2} = \frac{5\sqrt{2}+9}{6}$

Path 3: $\mathbf{r}_5 = t\mathbf{k} \Rightarrow x = 0, y = 0, z = t, 0 \le t \le 1 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = -t$ and $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_5} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 -t\, dt = -\frac{1}{2}$;

$\mathbf{r}_6 = t\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow x = 0, y = t, z = 1, 0 \le t \le 1 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = t - 1$ and $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{dz}{dt} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_6} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 (t - 1)\, dt = -\frac{1}{2}$;

$\mathbf{r}_7 = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow x = t, y = 1, z = 1, 0 \le t \le 1 \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = t^2$ and $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = dt \Rightarrow \int_{C_7} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \int_{\text{Path 3}} f(x, y, z)\, ds = \int_{C_5} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_6} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_7} f(x, y, z)\, ds = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

3. $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k} \Rightarrow x = 0, y = a\cos t, z = a\sin t \Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = \sqrt{a^2\sin^2 t} = a\,|\sin t|$ and

$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = -a\sin t, \frac{dz}{dt} = a\cos t \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = a\, dt$

$\Rightarrow \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} a^2\,|\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} a^2 \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} -a^2\sin t\, dt = 4a^2$

4. $\mathbf{r} = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t, z = 0$

$\Rightarrow f(g(t), h(t), k(t)) = \sqrt{(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2} = \sqrt{1 + t^2}$ and $\frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t\cos t$

$= t\cos t, \frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t, \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$

$= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\, dt = |t|\, dt = t\, dt$ since $0 \le t \le \sqrt{3} \Rightarrow \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{7}{3}$

5. $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x + y + z)^{-3/2} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x + y + z)^{-3/2} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x + y + z)^{-3/2} = \frac{\partial M}{\partial y}$

$\Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \Rightarrow f(x, y, z) = 2\sqrt{x + y + z} + g(y, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} + \frac{\partial g}{\partial y}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = 2\sqrt{x + y + z} + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} + h'(z)$

$= \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x, y, z) = 2\sqrt{x + y + z} + C \Rightarrow \int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx + dy + dz}{\sqrt{x+y+z}}$

$= f(4, -3, 0) - f(-1, 1, 1) = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{1} = 0$

6. $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{yz}} = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\,dx + N\,dy + P\,dz$ is exact; $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \Rightarrow f(x,y,z)$
$= x + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = -\sqrt{\frac{z}{y}} \Rightarrow g(y,z) = -2\sqrt{yz} + h(z) \Rightarrow f(x,y,z) = x - 2\sqrt{yz} + h(z)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = -\sqrt{\frac{y}{z}} + h'(z) = -\sqrt{\frac{y}{z}} \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow f(x,y,z) = x - 2\sqrt{yz} + C$
$\Rightarrow \int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{z}}\,dz = f(10,3,3) - f(1,1,1) = (10 - 2\cdot 3) - (1 - 2\cdot 1) = 4 + 1 = 5$

7. $\frac{\partial M}{\partial z} = -y\cos z \neq y\cos z = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \mathbf{F}$ is not conservative; $\mathbf{r} = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} - \mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$
$\Rightarrow d\mathbf{r} = (-2\sin t)\mathbf{i} - (2\cos t)\mathbf{j} \Rightarrow \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [-(-2\sin t)(\sin(-1))(-2\sin t) + (2\cos t)(\sin(-1))(-2\cos t)]\,dt$
$= 4\sin(1)\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 8\pi\sin(1)$

8. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \mathbf{F}$ is conservative $\Rightarrow \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$

9. Let $M = 8x\sin y$ and $N = -8y\cos x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 8x\cos y$ and $\frac{\partial N}{\partial x} = 8y\sin x \Rightarrow \int_C 8x\sin y\,dx - 8y\cos x\,dy$
$= \iint_R (8y\sin x - 8x\cos y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (8y\sin x - 8x\cos y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} (\pi^2\sin x - 8x)\,dx$
$= -\pi^2 + \pi^2 = 0$

10. Let $M = y^2$ and $N = x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$ and $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow \int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_R (2x - 2y)\,dx\,dy$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r\cos\theta - 2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}(\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta = 0$

11. Let $z = 1 - x - y \Rightarrow f_x(x,y) = -1$ and $f_y(x,y) = -1 \Rightarrow \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{3} \Rightarrow$ Surface Area $= \iint_R \sqrt{3}\,dx\,dy$
$= \sqrt{3}$(Area of the circular region in the xy-plane) $= \pi\sqrt{3}$

12. $\nabla f = -3\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{9 + 4y^2 + 4z^2}$ and $|\nabla f\cdot\mathbf{p}| = 3$
$\Rightarrow$ Surface Area $= \iint_R \frac{\sqrt{9+4y^2+4z^2}}{3}\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+4r^2}}{3}\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{4}\sqrt{21} - \frac{9}{4}\right)d\theta = \frac{\pi}{6}\left(7\sqrt{21} - 9\right)$

13. $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$ and $|\nabla f\cdot\mathbf{p}| = |2z| = 2z$ since
$z \ge 0 \Rightarrow$ Surface Area $= \iint_R \frac{2}{2z}\,dA = \iint_R \frac{1}{z}\,dA = \iint_R \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$
$\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\theta = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

14. (a) $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$ and $|\nabla f\cdot\mathbf{p}| = 2z$ since
$z \ge 0 \Rightarrow$ Surface Area $= \iint_R \frac{4}{2z}\,dA = \iint_R \frac{2}{z}\,dA = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 4\pi - 8$

(b) $\mathbf{r} = 2\cos\theta \Rightarrow d\mathbf{r} = -2\sin\theta\,d\theta$; $ds^2 = r^2\,d\theta^2 + dr^2$ (Arc length in polar coordinates)
$\Rightarrow ds^2 = (2\cos\theta)^2\,d\theta^2 + dr^2 = 4\cos^2\theta\,d\theta^2 + 4\sin^2\theta\,d\theta^2 = 4\,d\theta^2 \Rightarrow ds = 2\,d\theta$; the height of the cylinder is $z = \sqrt{4 - r^2} = \sqrt{4 - 4\cos^2\theta} = 2|\sin\theta| = 2\sin\theta$ if $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow$ Surface Area $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h\,ds = 2\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta)(2\,d\theta) = 8$

15. $f(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{1}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{b}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = \frac{1}{c}$ since $c > 0 \Rightarrow$ Surface Area $= \iint_R \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}{\left(\frac{1}{c}\right)}\, dA = c\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \iint_R dA = \frac{1}{2}\, abc\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$, since the area of the triangular region R is $\frac{1}{2}$ ab. To check this result, let $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + c\mathbf{k}$ and $\mathbf{w} = -a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; the area can be found by computing $\frac{1}{2}|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$.

16. (a) $\nabla f = 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4y^2+1}$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = \sqrt{4y^2+1}\, dx\, dy$
$\Rightarrow \iint_S g(x,y,z)\, d\sigma = \iint_R \frac{yz}{\sqrt{4y^2+1}} \sqrt{4y^2+1}\, dx\, dy = \iint_R y(y^2-1)\, dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_0^3 (y^3 - y)\, dx\, dy$
$= \int_{-1}^1 3(y^3 - y)\, dy = 3\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right]_{-1}^1 = 0$

(b) $\iint_S g(x,y,z)\, d\sigma = \iint_R \frac{z}{\sqrt{4y^2+1}} \sqrt{4y^2+1}\, dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_0^3 (y^2-1)\, dx\, dy = \int_{-1}^1 3(y^2-1)\, dy$
$= 3\left[\frac{y^3}{3} - y\right]_{-1}^1 = -4$

17. $\nabla f = 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}, \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4y^2+4z^2} = 2\sqrt{y^2+z^2} = 10$ and $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$ since $z \ge 0$
$\Rightarrow d\sigma = \frac{10}{2z}\, dx\, dy = \frac{5}{z}\, dx\, dy = \iint_S g(x,y,z)\, d\sigma = \iint_R (x^4y)(y^2+z^2)\left(\frac{5}{z}\right) dx\, dy$
$= \iint_R (x^4y)(25)\left(\frac{5}{\sqrt{25-y^2}}\right) dx\, dy = \int_0^4 \int_0^1 \frac{125y}{\sqrt{25-y^2}}\, x^4\, dx\, dy = \int_0^4 \frac{25y}{\sqrt{25-y^2}}\, dy = 50$

18. Define the coordinate system so that the origin is at the center of the earth, the z-axis is the earth's axis (north is the positive z direction), and the xz-plane contains the earth's prime meridian. Let S denote the surface which is Wyoming so then S is part of the surface $z = (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Let R_{xy} be the projection of S onto the xy-plane. The surface area of Wyoming is $\iint_S 1\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$
$\iint_{R_{xy}} \sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{R^2-x^2-y^2} + 1}\, dA = \iint_{R_{xy}} \frac{R}{(R^2-x^2-y^2)^{1/2}}\, dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R\sin 45°}^{R\sin 49°} R(R^2-r^2)^{-1/2}\, r\, dr\, d\theta$
(where θ_1 and θ_2 are the radian equivalent to 104°3′ and 111°3′, respectively)
$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} -R(R^2-r^2)^{1/2}\Big|_{R\sin 45°}^{R\sin 49°} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} R(R^2 - R^2\sin^2 45°)^{1/2} - R(R^2 - R^2\sin^2 49°)^{1/2}\, d\theta$
$= (\theta_2 - \theta_1)R^2(\cos 45° - \cos 49°) = \frac{7\pi}{180} R^2(\cos 45° - \cos 49°) = \frac{7\pi}{180}(3959)^2(\cos 45° - \cos 49°)$
$\approx 97{,}751$ sq. mi.

19. A possible parametrization is $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (6 \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (6\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (6\cos\phi)\mathbf{k}$ (spherical coordinates); now $\rho = 6$ and $z = -3 \Rightarrow -3 = 6\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$ and $z = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} = 6\cos\phi$ $\Rightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{2\pi}{3}$; also $0 \le \theta \le 2\pi$

20. A possible parametrization is $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r^2}{2}\right)\mathbf{k}$ (cylindrical coordinates); now $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = -\frac{r^2}{2}$ and $-2 \le z \le 0 \Rightarrow -2 \le -\frac{r^2}{2} \le 0 \Rightarrow 4 \ge r^2 \ge 0 \Rightarrow 0 \le r \le 2$ since $r \ge 0$; also $0 \le \theta \le 2\pi$

21. A possible parametrization is $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (1+r)\mathbf{k}$ (cylindrical coordinates); now $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 1 + r$ and $1 \le z \le 3 \Rightarrow 1 \le 1 + r \le 3 \Rightarrow 0 \le r \le 2$; also $0 \le \theta \le 2\pi$

22. A possible parametrization is $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(3 - x - \frac{y}{2}\right)\mathbf{k}$ for $0 \le x \le 2$ and $0 \le y \le 2$

23. Let $x = u\cos v$ and $z = u\sin v$, where $u = \sqrt{x^2+z^2}$ and v is the angle in the xz-plane with the x-axis $\Rightarrow \mathbf{r}(u,v) = (u\cos v)\mathbf{i} + 2u^2\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}$ is a possible parametrization; $0 \le y \le 2 \Rightarrow 2u^2 \le 2 \Rightarrow u^2 \le 1$ $\Rightarrow 0 \le u \le 1$ since $u \ge 0$; also, for just the upper half of the paraboloid, $0 \le v \le \pi$

24. A possible parametrization is $\left(\sqrt{10}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{10}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{10}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ and $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

25. $\mathbf{r}_u = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{6}$

$\Rightarrow$ Surface Area $= \iint\limits_{R_{uv}} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{6}\,du\,dv = \sqrt{6}$

26. $\iint\limits_S (xy - z^2)\,d\sigma = \int_0^1\int_0^1 \left[(u+v)(u-v) - v^2\right]\sqrt{6}\,du\,dv = \sqrt{6}\int_0^1\int_0^1 (u^2 - 2v^2)\,du\,dv$

$= \sqrt{6}\int_0^1 \left[\frac{u^3}{3} - 2uv^2\right]_0^1 dv = \sqrt{6}\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - 2v^2\right) dv = \sqrt{6}\left[\frac{1}{3}v - \frac{2}{3}v^3\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{6}}{3} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

27. $\mathbf{r}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= (\sin\theta)\mathbf{i} - (\cos\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + r^2} = \sqrt{1+r^2} \Rightarrow$ Surface Area $= \iint\limits_{R_{r\theta}} |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2}\ln\left(r + \sqrt{1+r^2}\right)\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] d\theta$

$= \pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

28. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+1}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1}\,\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[r + \frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\,d\theta = \frac{8}{3}\pi$

29. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative

30. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}} = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative

31. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \ne ye^z = \frac{\partial N}{\partial z} \Rightarrow$ Not Conservative

32. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{(x+yz)^2} = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{-y}{(x+yz)^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-z}{(x+yz)^2} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ Conservative

33. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \Rightarrow f(x,y,z) = 2x + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = 2y + z \Rightarrow g(y,z) = y^2 + zy + h(z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = 2x + y^2 + zy + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = y + h'(z) = y + 1 \Rightarrow h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z + C$
$\Rightarrow f(x,y,z) = 2x + y^2 + zy + z + C$

34. $\frac{\partial f}{\partial x} = z\cos xz \Rightarrow f(x,y,z) = \sin xz + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = e^y \Rightarrow g(y,z) = e^y + h(z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = \sin xz + e^y + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x\cos xz + h'(z) = x\cos xz \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$
$\Rightarrow f(x,y,z) = \sin xz + e^y + C$

35. Over Path 1: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow$ $x = t, y = t, z = t$ and $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F} = 2t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
$\Rightarrow$ $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (3t^2 + 1)\,dt$ $\Rightarrow$ $\text{Work} = \int_0^1 (3t^2 + 1)\,dt = 2$;
Over Path 2: $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow$ $x = t, y = t, z = 0$ and $d\mathbf{r}_1 = (\mathbf{i} + \mathbf{j})\,dt$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_1 = 2t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
$\Rightarrow$ $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = (2t^2 + 1)\,dt$ $\Rightarrow$ $\text{Work}_1 = \int_0^1 (2t^2 + 1)\,dt = \frac{5}{3}$; $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow$ $x = 1, y = 1, z = t$ and $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{k}\,dt$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = dt$ $\Rightarrow$ $\text{Work}_2 = \int_0^1 dt = 1$ $\Rightarrow$ $\text{Work} = \text{Work}_1 + \text{Work}_2 = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$

36. Over Path 1: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow$ $x = t, y = t, z = t$ and $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F} = 2t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\Rightarrow$ $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (3t^2 + 1)\,dt$ $\Rightarrow$ $\text{Work} = \int_0^1 (3t^2 + 1)\,dt = 2$;
Over Path 2: Since f is conservative, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ around any simple closed curve C. Thus consider $\int_{\text{curve}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, where C_1 is the path from $(0,0,0)$ to $(1,1,0)$ to $(1,1,1)$ and C_2 is the path from $(1,1,1)$ to $(0,0,0)$. Now, from Path 1 above, $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -2$ $\Rightarrow$ $0 = \int_{\text{curve}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + (-2)$
$\Rightarrow$ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2$

37. (a) $\mathbf{r} = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$ $\Rightarrow$ $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ from $(1,0)$ to $(e^{2\pi}, 0)$ $\Rightarrow$ $0 \le t \le 2\pi$
$\Rightarrow$ $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (e^t \cos t - e^t \sin t)\,\mathbf{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t)\,\mathbf{j}$ and $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{(e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}}{(e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t)^{3/2}}$
$= \left(\frac{\cos t}{e^{2t}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sin t}{e^{2t}}\right)\mathbf{j}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{\cos^2 t}{e^t} - \frac{\sin t \cos t}{e^t} + \frac{\sin^2 t}{e^t} + \frac{\sin t \cos t}{e^t}\right) = e^{-t}$
$\Rightarrow$ $\text{Work} = \int_0^{2\pi} e^{-t}\,dt = 1 - e^{-2\pi}$
(b) $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = -(x^2+y^2)^{-1/2} + g(y,z)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\partial g}{\partial y}$
$= \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow$ $g(y,z) = C$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = -(x^2+y^2)^{-1/2}$ is a potential function for $\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
$= f(e^{2\pi}, 0) - f(1,0) = 1 - e^{-2\pi}$

38. (a) $\mathbf{F} = \nabla(x^2 z e^y)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F}$ is conservative $\Rightarrow$ $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for <u>any</u> closed path C
(b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(1,0,0)}^{(1,0,2\pi)} \nabla(x^2 z e^y) \cdot d\mathbf{r} = (x^2 z e^y)\big|_{(1,0,2\pi)} - (x^2 z e^y)\big|_{(1,0,0)} = 2\pi - 0 = 2\pi$

39. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -y & 3z^2 \end{vmatrix} = -2y\mathbf{k}$; unit normal to the plane is $\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{3}{7}\mathbf{k}$
$\Rightarrow$ $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{6}{7}y$; $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ and $f(x,y,z) = 2x + 6y - 3z$ $\Rightarrow$ $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 3$ $\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\,dA = \frac{7}{3}\,dA$
$\Rightarrow$ $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_R \frac{6}{7}y\,d\sigma = \iint\limits_R \left(\frac{6}{7}y\right)\left(\frac{7}{3}\,dA\right) = \iint\limits_R 2y\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sin\theta\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sin\theta\,d\theta = 0$

40. $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y & x + y & 4y^2 - z \end{vmatrix} = 8y\mathbf{i}$; the circle lies in the plane $f(x,y,z) = y + z = 0$ with unit normal
$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ $\Rightarrow$ $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ $\Rightarrow$ $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_R 0\,d\sigma = 0$

41. (a) $\mathbf{r} = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{2}t, y = \sqrt{2}t, z = 4 - t^2$ $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}, \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}, \frac{dz}{dt} = -2t$
$\Rightarrow$ $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{4 + 4t^2}\,dt$ $\Rightarrow$ $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_0^1 3t\sqrt{4 + 4t^2}\,dt = \left[\frac{1}{4}(4 + 4t)^{3/2}\right]_0^1$
$= 4\sqrt{2} - 2$

(b) $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \sqrt{4+4t^2}\,dt = \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1 = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

42. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2 \Rightarrow x = t,\ y = 2t,\ z = \frac{2}{3}t^{3/2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = 2,\ \frac{dz}{dt} = t^{1/2}$
$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{t+5}\,dt \Rightarrow M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_0^2 3\sqrt{5+t}\,\sqrt{t+5}\,dt$
$= \int_0^2 3(t+5)\,dt = 36;\ M_{yz} = \int_C x\delta\,ds = \int_0^2 3t(t+5)\,dt = 38;\ M_{xz} = \int_C y\delta\,ds = \int_0^2 6t(t+5)\,dt = 76;$
$M_{xy} = \int_C z\delta\,ds = \int_0^2 2t^{3/2}(t+5)\,dt = \frac{144}{7}\sqrt{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{38}{36} = \frac{19}{18},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{76}{36} = \frac{19}{9},\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\left(\frac{144}{7}\sqrt{2}\right)}{36}$
$= \frac{4}{7}\sqrt{2}$

43. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2 \Rightarrow x = t,\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2},\ z = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}\,t^{1/2},\ \frac{dz}{dt} = t$
$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{1+2t+t^2}\,dt = \sqrt{(t+1)^2}\,dt = |t+1|\,dt = (t+1)\,dt$ on the domain given.
Then $M = \int_C \delta\,ds = \int_0^2 \left(\frac{1}{t+1}\right)(t+1)\,dt = \int_0^2 dt = 2;\ M_{yz} = \int_C x\delta\,ds = \int_0^2 t\left(\frac{1}{t+1}\right)(t+1)\,dt = \int_0^2 t\,dt = 2;$
$M_{xz} = \int_C y\delta\,ds = \int_0^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\right)\left(\frac{1}{t+1}\right)(t+1)\,dt = \int_0^2 \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\,dt = \frac{32}{15};\ M_{xy} = \int_C z\delta\,ds$
$= \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2}\right)\left(\frac{1}{t+1}\right)(t+1)\,dt = \int_0^2 \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{4}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2}{2} = 1;\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\left(\frac{32}{15}\right)}{2} = \frac{16}{15};\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$
$= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{2}{3};\ I_x = \int_C (y^2+z^2)\,\delta\,ds = \int_0^2 \left(\frac{8}{9}t^3 + \frac{t^4}{4}\right)dt = \frac{232}{45};\ I_y = \int_C (x^2+z^2)\,\delta\,ds = \int_0^2 \left(t^2 + \frac{t^4}{4}\right)dt = \frac{64}{15};$
$I_z = \int_C (y^2+x^2)\,\delta\,ds = \int_0^2 \left(t^2 + \frac{8}{9}t^3\right)dt = \frac{56}{9};\ R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{232}{45}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{29}}{3\sqrt{5}};\ R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{64}{15}\right)}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}};$
$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{56}{9}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

44. $\bar{z} = 0$ because the arch is in the xy-plane, and $\bar{x} = 0$ because the mass is distributed symmetrically with respect to the y-axis; $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le \pi \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$
$= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt = a\,dt$, since $a \ge 0$; $M = \int_C \delta\,ds = \int_C (2a-y)\,ds = \int_0^\pi (2a - a\sin t)\,a\,dt$
$= 2a^2\pi - 2a^2;\ M_{xz} = \int_C y\delta\,dt = \int_C y(2a-y)\,ds = \int_0^\pi (a\sin t)(2a - a\sin t)\,dt = \int_0^\pi (2a^2\sin t - a^2\sin^2 t)\,dt$
$= \left[-2a^2\cos t - a^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_0^\pi = 4a^2 - \frac{a^2\pi}{2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\left(4a^2 - \frac{a^2\pi}{2}\right)}{2a^2\pi - 2a^2} = \frac{8-\pi}{4\pi-4} \Rightarrow (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0, \frac{8-\pi}{4\pi-4}, 0\right)$

45. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\,\mathbf{i} + (e^t\sin t)\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k},\ 0 \le t \le \ln 2 \Rightarrow x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (e^t\cos t - e^t\sin t),$
$\frac{dy}{dt} = (e^t\sin t + e^t\cos t),\ \frac{dz}{dt} = e^t \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$
$= \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 + (e^t)^2}\,dt = \sqrt{3e^{2t}}\,dt = \sqrt{3}\,e^t\,dt;\ M = \int_C \delta\,ds = \int_0^{\ln 2} \sqrt{3}\,e^t\,dt$
$= \sqrt{3};\ M_{xy} = \int_C z\delta\,ds = \int_0^{\ln 2} \left(\sqrt{3}\,e^t\right)(e^t)\,dt = \int_0^{\ln 2} \sqrt{3}\,e^{2t}\,dt = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2};$
$I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta\,ds = \int_0^{\ln 2} (e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t)\left(\sqrt{3}\,e^t\right)dt = \int_0^{\ln 2} \sqrt{3}\,e^{3t}\,dt = \frac{7\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$
$= \sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

46. $\mathbf{r}(t) = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow x = 2\sin t,\ y = 2\cos t,\ z = 3t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\cos t,\ \frac{dy}{dt} = -2\sin t,$
$\frac{dz}{dt} = 3 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{4+9}\,dt = \sqrt{13}\,dt;\ M = \int_C \delta\,ds = \int_0^{2\pi} \delta\sqrt{13}\,dt = 2\pi\delta\sqrt{13};$

$M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_0^{2\pi} (3t)\left(\delta\sqrt{13}\right) dt = 6\delta\pi^2\sqrt{13}$; $M_{yz} = \int_C x\delta\, ds = \int_0^{2\pi} (2\sin t)\left(\delta\sqrt{13}\right) dt = 0$;
$M_{xz} = \int_C y\delta\, ds = \int_0^{2\pi} (2\cos t)\left(\delta\sqrt{13}\right) dt = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = 0$ and $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{6\delta\pi^2\sqrt{13}}{2\delta\pi\sqrt{13}} = 3\pi \Rightarrow (0, 0, 3\pi)$ is the center of mass

47. Because of symmetry $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Let $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 25 \Rightarrow \nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$
$\Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 10$ and $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$, since $z \geq 0 \Rightarrow M = \iint_R \delta(x, y, z)\, d\sigma$
$= \iint_R z\left(\frac{10}{2z}\right) dA = \iint_R 5\, dA = 5(\text{Area of the circular region}) = 80\pi$; $M_{xy} = \iint_R z\delta\, d\sigma = \iint_R 5z\, dA$
$= \iint_R 5\sqrt{25 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(5\sqrt{25 - r^2}\right) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{490}{3}\, d\theta = \frac{980}{3}\pi \Rightarrow \bar{z} = \frac{\left(\frac{980}{3}\pi\right)}{80\pi} = \frac{49}{12}$
$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{49}{12}\right)$; $I_z = \iint_R (x^2 + y^2)\,\delta\, d\sigma = \iint_R 5\,(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^4 5r^3\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} 320\, d\theta = 640\pi$;
$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{640\pi}{80\pi}} = 2\sqrt{2}$

48. On the face $z = 1$: $g(x, y, z) = z = 1$ and $\mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow \nabla g = \mathbf{k} \Rightarrow |\nabla g| = 1$ and $|\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dA$
$\Rightarrow I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} r^3\, dr\, d\theta = \frac{2}{3}$; On the face $z = 0$: $g(x, y, z) = z = 0 \Rightarrow \nabla g = \mathbf{k}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{k}$
$\Rightarrow |\nabla g| = 1 \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dA \Rightarrow I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA = \frac{2}{3}$; On the face $y = 0$: $g(x, y, z) = y = 0$
$\Rightarrow \nabla g = \mathbf{j}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = 1 \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dA \Rightarrow I = \iint_R (x^2 + 0)\, dA = \int_0^1\int_0^1 x^2\, dx\, dz = \frac{1}{3}$;
On the face $y = 1$: $g(x, y, z) = y = 1 \Rightarrow \nabla g = \mathbf{j}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{j} \Rightarrow |\nabla g| = 1 \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dA$
$\Rightarrow I = \iint_R (x^2 + 1^2)\, dA = \int_0^1\int_0^1 (x^2 + 1)\, dx\, dz = \frac{4}{3}$; On the face $x = 1$: $g(x, y, z) = x = 1 \Rightarrow \nabla g = \mathbf{i}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{i}$
$\Rightarrow |\nabla g| = 1 \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dA \Rightarrow I = \iint_R (1^2 + y^2)\, dA = \int_0^1\int_0^1 (1 + y^2)\, dy\, dz = \frac{4}{3}$; On the face
$x = 0$: $g(x, y, z) = x = 0 \Rightarrow \nabla g = \mathbf{i}$ and $\mathbf{p} = \mathbf{i} \Rightarrow |\nabla g| = 1 \Rightarrow |\nabla g \cdot \mathbf{p}| = 1 \Rightarrow d\sigma = dA$
$\Rightarrow I = \iint_R (0^2 + y^2)\, dA = \int_0^1\int_0^1 y^2\, dy\, dz = \frac{1}{3} \Rightarrow I_z = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

49. $M = 2xy + x$ and $N = xy - y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 2y + 1$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = y$, $\frac{\partial N}{\partial y} = x - 1 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$
$= \iint_R (2y + 1 + x - 1)\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^1 (2y + x)\, dy\, dx = \frac{3}{2}$; $\text{Circ} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy$
$= \iint_R (y - 2x)\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^1 (y - 2x)\, dy\, dx = -\frac{1}{2}$

50. $M = y - 6x^2$ and $N = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = -12x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 2y \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$
$= \iint_R (-12x + 2y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_y^1 (-12x + 2y)\, dx\, dy = \int_0^1 (4y^2 + 2y - 6)\, dy = -\frac{11}{3}$;
$\text{Circ} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R (1 - 1)\, dx\, dy = 0$

51. $M = -\frac{\cos y}{x}$ and $N = \ln x \sin y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\sin y}{x}$ and $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\sin y}{x} \Rightarrow \oint_C \ln x \sin y\, dy - \frac{\cos y}{x}\, dx$
$= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \left(\frac{\sin y}{x} - \frac{\sin y}{x}\right) dx\, dy = 0$

52. (a) Let $M = x$ and $N = y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 1, \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \frac{\partial N}{\partial y} = 1 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy$

$= \iint_R (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy = 2(\text{Area of the region})$

(b) Let C be a closed curve to which Green's Theorem applies and let **n** be the unit normal vector to C. Let $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ and assume **F** is orthogonal to **n** at every point of C. Then the flux density of **F** at every point of C is 0 since $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0$ at every point of C $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0$ at every point of C

$\Rightarrow \text{Flux} = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R 0\,dx\,dy = 0$. But part (a) above states that the flux is 2(Area of the region) $\Rightarrow$ the area of the region would be 0 $\Rightarrow$ contradiction. Therefore, **F** cannot be orthogonal to **n** at every point of C.

53. $\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y,\ \frac{\partial}{\partial y}(2yz) = 2z,\ \frac{\partial}{\partial z}(2xz) = 2x \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 2y + 2z + 2x \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D (2x + 2y + 2z)\,dV$

$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x + 2y + 2z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 (1 + 2y + 2z)\,dy\,dz = \int_0^1 (2 + 2z)\,dz = 3$

54. $\frac{\partial}{\partial x}(xz) = z,\ \frac{\partial}{\partial y}(yz) = z,\ \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 2z \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D 2z\,r\,dr\,d\theta\,dz$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_3^{\sqrt{25-r^2}} 2z\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r(16 - r^2)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} 64\,d\theta = 128\pi$

55. $\frac{\partial}{\partial x}(-2x) = -2,\ \frac{\partial}{\partial y}(-3y) = -3,\ \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = -4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ and $x^2 + y^2 = z \Rightarrow z = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D -4\,dV = -4\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta = -4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r\sqrt{2-r^2} - r^3\right) dr\,d\theta$

$= -4\int_0^{2\pi}\left(-\frac{7}{12} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) d\theta = \frac{2}{3}\pi\left(7 - 8\sqrt{2}\right)$

56. $\frac{\partial}{\partial x}(6x + y) = 6,\ \frac{\partial}{\partial y}(-x - z) = 0,\ \frac{\partial}{\partial z}(4yz) = 4y \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 6 + 4y;\ z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Rightarrow \text{Flux} = \iiint_D (6 + 4y)\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^r (6 + 4r\sin\theta)\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (6r^2 + 4r^3\sin\theta)\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} (2 + \sin\theta)\,d\theta = \pi + 1$

57. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = 0$

58. $\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^3\mathbf{k} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 3z^2 + 1 - 3z^2 = 1 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$

$= \int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}/2}\int_0^{y/2} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^4 \left(\frac{16-x^2}{16}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{48}\right]_0^4 = \frac{8}{3}$

59. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = y^2 + x^2 + 0 \Rightarrow \text{Flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$

$= \iiint_D (x^2 + y^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^1 r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \pi$

60. (a) $\mathbf{F} = (3z + 1)\mathbf{k} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = 3 \Rightarrow$ Flux across the hemisphere $= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$

$= \iiint_D 3\,dV = 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 2\pi a^3$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$ since $a \ge 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = (3z + 1)\left(\frac{z}{a}\right);\ \mathbf{p} = \mathbf{k} \Rightarrow \nabla f\cdot\mathbf{p} = \nabla f\cdot\mathbf{k} = 2z$

$\Rightarrow |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = 2z$ since $z \geq 0 \Rightarrow d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} = \frac{2a}{2z}\,dA = \frac{a}{z}\,dA \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} (3z+1)\left(\frac{z}{a}\right)\left(\frac{a}{z}\right) dA$
$= \iint_{R_{xy}} (3z+1)\,dx\,dy = \iint_{R_{xy}} \left(3\sqrt{a^2-x^2-y^2}+1\right) dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(3\sqrt{a^2-r^2}+1\right) r\,dr\,d\theta$
$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} + a^3\right) d\theta = \pi a^2 + 2\pi a^3$, which is the flux across the hemisphere. Across the base we find $\mathbf{F} = [3(0)+1]\mathbf{k} = \mathbf{k}$ since $z = 0$ in the xy-plane $\Rightarrow \mathbf{n} = -\mathbf{k}$ (outward normal) $\Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -1 \Rightarrow$ Flux across the base $= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} -1\,dx\,dy = -\pi a^2$. Therefore, the total flux across the closed surface is $(\pi a^2 + 2\pi a^3) - \pi a^2 = 2\pi a^3$.

CHAPTER 16 ADDITIONAL AND ADVANCED EXERCISES

1. $dx = (-2\sin t + 2\sin 2t)\,dt$ and $dy = (2\cos t - 2\cos 2t)\,dt$; Area $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(2\cos t - \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) - (2\sin t - \sin 2t)(-2\sin t + 2\sin 2t)]\,dt$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [6 - (6\cos t\cos 2t + 6\sin t\sin 2t)]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (6 - 6\cos t)\,dt = 6\pi$

2. $dx = (-2\sin t - 2\sin 2t)\,dt$ and $dy = (2\cos t - 2\cos 2t)\,dt$; Area $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(2\cos t + \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) - (2\sin t - \sin 2t)(-2\sin t - 2\sin 2t)]\,dt$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [2 - 2(\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t)]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos 3t)\,dt = \frac{1}{2}\left[2t - \frac{2}{3}\sin 3t\right]_0^{2\pi} = 2\pi$

3. $dx = \cos 2t\,dt$ and $dy = \cos t\,dt$; Area $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\cos t - \sin t\cos 2t\right) dt$
$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\sin t\cos^2 t - (\sin t)(2\cos^2 t - 1)]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (-\sin t\cos^2 t + \sin t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

4. $dx = (-2a\sin t - 2a\cos 2t)\,dt$ and $dy = (b\cos t)\,dt$; Area $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(2ab\cos^2 t - ab\cos t\sin 2t) - (-2ab\sin^2 t - 2ab\sin t\cos 2t)]\,dt$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [2ab - 2ab\cos^2 t\sin t + 2ab(\sin t)(2\cos^2 t - 1)]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2ab + 2ab\cos^2 t\sin t - 2ab\sin t)\,dt$
$= \frac{1}{2}\left[2abt - \frac{2}{3}ab\cos^3 t + 2ab\cos t\right]_0^{2\pi} = 2\pi ab$

5. (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ is $\mathbf{0}$ only at the point $(0,0,0)$, and curl $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ is never $\mathbf{0}$.
(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ is $\mathbf{0}$ only on the line $x = t$, $y = 0$, $z = 0$ and curl $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ is never $\mathbf{0}$.
(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i}$ is $\mathbf{0}$ only when $z = 0$ (the xy-plane) and curl $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{j}$ is never $\mathbf{0}$.

6. $\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{R}$, so $\mathbf{F}$ is parallel to $\mathbf{n}$ when $yz^2 = \frac{cx}{R}$, $xz^2 = \frac{cy}{R}$, and $2xyz = \frac{cz}{R} \Rightarrow \frac{yz^2}{x} = \frac{xz^2}{y} = 2xy \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$ and $z^2 = \pm\frac{c}{R} = 2x^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}x$. Also, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x^2 = R^2 \Rightarrow 4x^2 = R^2 \Rightarrow x = \pm\frac{R}{2}$. Thus the points are: $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$, $\left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$

7. Set up the coordinate system so that $(a, b, c) = (0, R, 0) \Rightarrow \delta(x,y,z) = \sqrt{x^2 + (y-R)^2 + z^2}$
$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2Ry + R^2} = \sqrt{2R^2 - 2Ry}$; let $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ and $\mathbf{p} = \mathbf{i}$
$\Rightarrow \nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \Rightarrow |\nabla f| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2R \Rightarrow d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{i}|}\,dz\,dy = \frac{2R}{2x}\,dz\,dy$

$\Rightarrow$ Mass $= \iint_S \delta(x,y,z)\, d\sigma = \iint_{R_{yz}} \sqrt{2R^2 - 2Ry}\left(\frac{R}{x}\right) dz\, dy = R \iint_{R_{yz}} \frac{\sqrt{2R^2-2Ry}}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}\, dz\, dy$

$= 4R \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{\sqrt{2R^2-2Ry}}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}\, dz\, dy = 4R \int_{-R}^{R} \sqrt{2R^2 - 2Ry}\, \sin^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)\Big|_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dy$

$= 2\pi R \int_{-R}^{R} \sqrt{2R^2-2Ry}\, dy = 2\pi R\left(\frac{-1}{3R}\right)(2R^2-2Ry)^{3/2}\Big|_{-R}^{R} = \frac{16\pi R^3}{3}$

8. $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= (\sin\theta)\mathbf{i} - (\cos\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{1+r^2}$; $\delta = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = 2r$

$\Rightarrow$ Mass $= \iint_S \delta(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{1+r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) d\theta$

$= \frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

9. $M = x^2 + 4xy$ and $N = -6y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 2x + 4y$ and $\frac{\partial N}{\partial x} = -6 \Rightarrow$ Flux $= \int_0^b \int_0^a (2x + 4y - 6)\, dx\, dy$

$= \int_0^b (a^2 + 4ay - 6a)\, dy = a^2b + 2ab^2 - 6ab$. We want to minimize $f(a,b) = a^2b + 2ab^2 - 6ab = ab(a + 2b - 6)$. Thus, $f_a(a,b) = 2ab + 2b^2 - 6b = 0$ and $f_b(a,b) = a^2 + 4ab - 6a = 0 \Rightarrow b(2a + 2b - 6) = 0 \Rightarrow b = 0$ or $b = -a + 3$. Now $b = 0 \Rightarrow a^2 - 6a = 0 \Rightarrow a = 0$ or $a = 6 \Rightarrow (0,0)$ and $(6,0)$ are critical points. On the other hand, $b = -a + 3 \Rightarrow a^2 + 4a(-a+3) - 6a = 0 \Rightarrow -3a^2 + 6a = 0 \Rightarrow a = 0$ or $a = 2 \Rightarrow (0,3)$ and $(2,1)$ are also critical points. The flux at $(0,0) = 0$, the flux at $(6,0) = 0$, the flux at $(0,3) = 0$ and the flux at $(2,1) = -4$. Therefore, the flux is minimized at $(2,1)$ with value -4.

10. A plane through the origin has equation $ax + by + cz = 0$. Consider first the case when $c \neq 0$. Assume the plane is given by $z = ax + by$ and let $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Let C denote the circle of intersection of the plane with the sphere. By Stokes's Theorem, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, where $\mathbf{n}$ is a unit normal to the plane. Let

$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (ax+by)\mathbf{k}$ be a parametrization of the surface. Then $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = -a\mathbf{i} - b\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\Rightarrow d\sigma = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\, dx\, dy = \sqrt{a^2+b^2+1}\, dx\, dy$. Also, $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{n} = \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$

$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} \frac{a+b-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \sqrt{a^2+b^2+1}\, dx\, dy = \iint_{R_{xy}} (a+b-1)\, dx\, dy = (a+b-1)\iint_{R_{xy}} dx\, dy$. Now $x^2 + y^2 + (ax+by)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{a^2+1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{b^2+1}{4}\right)y^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)xy = 1 \Rightarrow$ the region R_{xy} is the interior of the ellipse $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ in the xy-plane, where $A = \frac{a^2+1}{4}$, $B = \frac{ab}{2}$, and $C = \frac{b^2+1}{4}$. By Exercise 47 in Section 10.3, the area of the ellipse is $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = h(a,b) = \frac{4\pi(a+b-1)}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$.

Thus we optimize $H(a,b) = \frac{(a+b-1)^2}{a^2+b^2+1}$: $\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{2(a+b-1)(b^2+1+a-ab)}{(a^2+b^2+1)^2} = 0$ and

$\frac{\partial H}{\partial b} = \frac{2(a+b-1)(a^2+1+b-ab)}{(a^2+b^2+1)^2} = 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0$, or $b^2 + 1 + a - ab = 0$ and $a^2 + 1 + b - ab = 0$

$\Rightarrow a + b - 1 = 0$, or $a^2 - b^2 + (b - a) = 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0$, or $(a-b)(a+b-1) = 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0$ or $a = b$. The critical values $a + b - 1 = 0$ give a saddle. If $a = b$, then $0 = b^2 + 1 + a - ab \Rightarrow a^2 + 1 + a - a^2 = 0$

$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -1$. Thus, the point $(a,b) = (-1,-1)$ gives a local extremum for $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow z = -x - y$

$\Rightarrow x + y + z = 0$ is the desired plane, if $c \neq 0$.

Note: Since $h(-1,-1)$ is negative, the circulation about $\mathbf{n}$ is clockwise, so $-\mathbf{n}$ is the correct pointing normal for the counterclockwise circulation. Thus $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})\, d\sigma$ actually gives the <u>maximum</u> circulation.

If $c = 0$, one can see that the corresponding problem is equivalent to the calculation above when $b = 0$, which does not lead to a local extreme.

11. (a) Partition the string into small pieces. Let $\Delta_i s$ be the length of the i^{th} piece. Let (x_i, y_i) be a point in the i^{th} piece. The work done by gravity in moving the i^{th} piece to the x-axis is approximately $W_i = (gx_iy_i\Delta_i s)y_i$ where $x_iy_i\Delta_i s$ is approximately the mass of the i^{th} piece. The total work done by gravity in moving the string to the x-axis is $\sum_i W_i = \sum_i gx_iy_i^2\Delta_i s \Rightarrow \text{Work} = \int_C gxy^2\, ds$

(b) $\text{Work} = \int_C gxy^2\, ds = \int_0^{\pi/2} g(2\cos t)(4\sin^2 t)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = 16g \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t\, dt$
$= \left[16g\left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{3} g$

(c) $\overline{x} = \frac{\int_C x(xy)\, ds}{\int_C xy\, ds}$ and $\overline{y} = \frac{\int_C y(xy)\, ds}{\int_C xy\, ds}$; the mass of the string is $\int_C xy\, ds$ and the weight of the string is $g\int_C xy\, ds$. Therefore, the work done in moving the point mass at $(\overline{x}, \overline{y})$ to the x-axis is $W = \left(g\int_C xy\, ds\right)\overline{y} = g\int_C xy^2\, ds = \frac{16}{3} g$.

12. (a) Partition the sheet into small pieces. Let $\Delta_i\sigma$ be the area of the i^{th} piece and select a point (x_i, y_i, z_i) in the i^{th} piece. The mass of the i^{th} piece is approximately $x_iy_i\Delta_i\sigma$. The work done by gravity in moving the i^{th} piece to the xy-plane is approximately $(gx_iy_i\Delta_i\sigma)z_i = gx_iy_iz_i\Delta_i\sigma \Rightarrow \text{Work} = \iint_S gxyz\, d\sigma$.

(b) $\iint_S gxyz\, d\sigma = g\iint_{R_{xy}} xy(1 - x - y)\sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dA = \sqrt{3}g \int_0^1 \int_0^{1-x} (xy - x^2y - xy^2)\, dy\, dx$
$= \sqrt{3}g \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3\right]_0^{1-x} dx = \sqrt{3}g \int_0^1 \left[\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4\right] dx$
$= \sqrt{3}g\left[\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{30}x^5\right]_0^1 = \sqrt{3}g\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{30}\right) = \frac{\sqrt{3}g}{20}$

(c) The center of mass of the sheet is the point $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ where $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ with $M_{xy} = \iint_S xyz\, d\sigma$ and $M = \iint_S xy\, d\sigma$. The work done by gravity in moving the point mass at $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ to the xy-plane is $gM\overline{z} = gM\left(\frac{M_{xy}}{M}\right) = gM_{xy} = \iint_S gxyz\, d\sigma = \frac{\sqrt{3}g}{20}$.

13. (a) Partition the sphere $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ into small pieces. Let $\Delta_i\sigma$ be the surface area of the i^{th} piece and let (x_i, y_i, z_i) be a point on the i^{th} piece. The force due to pressure on the i^{th} piece is approximately $w(4 - z_i)\Delta_i\sigma$. The total force on S is approximately $\sum_i w(4 - z_i)\Delta_i\sigma$. This gives the actual force to be $\iint_S w(4 - z)\, d\sigma$.

(b) The upward buoyant force is a result of the **k**-component of the force on the ball due to liquid pressure. The force on the ball at (x, y, z) is $w(4 - z)(-\mathbf{n}) = w(z - 4)\mathbf{n}$, where $\mathbf{n}$ is the outer unit normal at (x, y, z). Hence the **k**-component of this force is $w(z - 4)\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = w(z - 4)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$. The (magnitude of the) buoyant force on the ball is obtained by adding up all these **k**-components to obtain $\iint_S w(z - 4)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$.

(c) The Divergence Theorem says $\iint_S w(z - 4)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \text{div}(w(z - 4)\mathbf{k})\, dV = \iiint_D w\, dV$, where D is $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \le 1 \Rightarrow \iint_S w(z - 4)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = w\iiint_D 1\, dV = \frac{4}{3}\pi w$, the weight of the fluid if it were to occupy the region D.

14. The surface S is $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ from $z = 1$ to $z = 2$. Partition S into small pieces and let $\Delta_i\sigma$ be the area of the i^{th} piece. Let (x_i, y_i, z_i) be a point on the i^{th} piece. Then the magnitude of the force on the i^{th} piece due to liquid pressure is approximately $F_i = w(2 - z_i)\Delta_i\sigma \Rightarrow$ the total force on S is approximately $\sum_i F_i = \Sigma\, w(2 - z_i)\Delta_i\sigma \Rightarrow$ the actual force is $\iint_S w(2 - z)\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} w\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dA$ $= \iint_{R_{xy}} \sqrt{2}\, w\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{2}w(2 - r)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}w\left[r^2 - \frac{1}{3}r^3\right]_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}w}{3}\, d\theta$ $= \frac{4\sqrt{2}\pi w}{3}$

15. Assume that S is a surface to which Stokes's Theorem applies. Then $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ $= \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$. Thus the voltage around a loop equals the negative of the rate of change of magnetic flux through the loop.

16. According to Gauss's Law, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 4\pi GmM$ for any surface enclosing the origin. But if $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{H}$ then the integral over such a closed surface would have to be 0 by the Divergence Theorem since div $\mathbf{F} = 0$.

17. $\oint_C f\nabla g \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ (Stokes's Theorem)

$= \iint_S (f\nabla \times \nabla g + \nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ (Section 16.8, Exercise 19b)

$= \iint_S [(f)(\mathbf{0}) + \nabla f \times \nabla g] \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ (Section 16.7, Equation 8)

$= \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$

18. $\nabla \times \mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2 \Rightarrow \nabla \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ is conservative $\Rightarrow \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = \nabla f$; also, $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \nabla \cdot \mathbf{F}_2$ $\Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = 0 \Rightarrow \nabla^2 f = 0$ (so f is harmonic). Finally, on the surface S, $\nabla f \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{n}$ $= \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$. Now, $\nabla \cdot (f\nabla f) = \nabla f \cdot \nabla f + f\nabla^2 f$ so the Divergence Theorem gives $\iiint_D |\nabla f|^2\, dV + \iiint_D f\nabla^2 f\, dV = \iiint_D \nabla \cdot (f\nabla f)\, dV = \iint_S f\nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$, and since $\nabla^2 f = 0$ we have $\iiint_D |\nabla f|^2\, dV + 0 = 0 \Rightarrow \iiint_D |\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1|^2\, dV = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1$, as claimed.

19. False; let $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$ and $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$

20. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 \sin^2\theta = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2\cos^2\theta = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2$ $\Rightarrow |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \sqrt{EG - F^2} \Rightarrow d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$

21. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{r} = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = 3\iiint_D dV = 3V \Rightarrow V = \frac{1}{3}\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV$ $= \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, by the Divergence Theorem

NOTES: