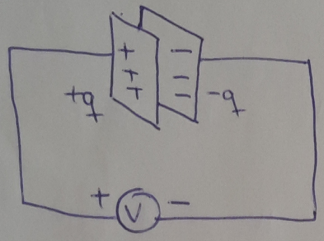
(Kapasitörler ve İndüktörler)

Tanım (Kapasitör):

Bir yalıtkanla ayrılmış iki iletken plakadan oluşan, kendi elektrik alanında enerji depolayan pasif bir devre elemanıdır. Bilgisayar sistemlerindeki dinamik hafiza elemanlarında, radyo alıcılarında, güç sistemlerinde kullanılır.



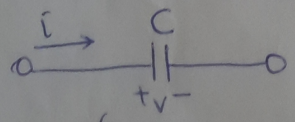
→ $q = C.V$ → voltaj
↓ ↓
yük kapasitans

C; q veya V'ye bağlı değildir. Kapasitörün fiziksel boyutları ve özelliklerine bağlıdır.

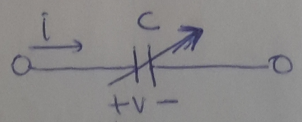
$C = \frac{\varepsilon A}{d}$ 'dir. A = herbir plakanın yüzey alanı
d = plakalar arasındaki uzaklık
ε = elektriksel geçirgenlik

↓

Dolayısıyla, kapasitansın yüksek olması için;
* yüzey alanı büyük * aralarındaki mesafe küçük veya
* elektriksel geçirgenlik yüksek olmalıdır.



↓ sabit kapasitör



↓ değişken kapasitör

Eğer, $(v>0$ ve $i>0)$ veya $(v<0$ ve $i<0)$ ise kapasitör yükleniyor; $vi<0 \Rightarrow$ yüksüzleşiyor

demektir. $q = C \cdot v$ eşitliğinde her iki tarafın t'ye göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial q}{\partial t} = C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{olur.} \quad i = \frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{old.'dan;}$$

$$i = C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{C} \cdot i = \frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow \text{her iki tarafı integre edersek;}$$

$$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i \, dt \quad \text{veya} \quad v = \left(\frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i \, dt \right) + v(t_0)$$

Kapasitördeki anlık güç;

$$p = vi = C \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} \text{ 'dir.}$$

Kapasitörde depolanan enerji;

$$w = \int_{-\infty}^{t} p \, dt = C \int_{-\infty}^{t} v \frac{dv}{dt} \, dt = \frac{1}{2} C v^2 \Big|_{-\infty}^{t}$$

$v(-\infty) = 0 \rightarrow$ yani kapasitör yüksüzdür $(t = -\infty)$ için.

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} C v^2$$

Özellikler:

(1): Kapasitör üzerindeki gerilim değişmediği sürece, kapasitörden akım geçmez. Yani, kapasitör dc'ye göre açık devredir.

(2): İdeal kapasitör, elektrik alanında enerji depolarken devreden güç depolar ve devreye güç veriken bu depolanan enerjiyi verir.

(3): C'nin ölçü birimi Farad'dır.

Ör: 20V gerilim uygulandığında 3-pF'lık kapasitörde tutulan yükü ve kapasitördeki tutulan enerjiyi bulunuz.

Ç: $q = Cv \Rightarrow q = 3.10^{-12} . 20 = 60pC$ → yük.

$w = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} 3.10^{-12} . 400 = 600pJ$ → enerji

Ör: 5μF'lık kapasitördeki voltaj $v(t) = 10.\cos 6000t$ V iken akımı bulunuz.

Ç: $i(t) = C\frac{dv}{dt} = 5.10^{-6} . (-6000) . 10 . \sin 6000t$

$\Rightarrow i = -0.3 . \sin 6000t$ A

Ör: $i(t) = 6.e^{-3000t}$ mA iken 2μF'lık kapasitördeki gerilimi bulunuz. (Kapasitörün başlangıç gerilimini sıfır kabul ediniz.

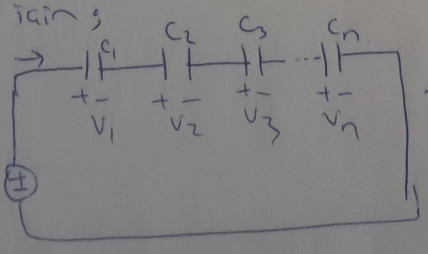
Ç: $v = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v(0)$ ve $v(0) = 0$ old.'dan;

$$v = \frac{1}{2.10^{-6}} \int_0^t 6.e^{-3000t}\,dt \;.10^{-3} = \frac{3.10^3}{-3000} e^{-3000t}\Big|_0^t$$

$\Rightarrow v = (1 - e^{-3000t})$ V

Seri ve Paralel Bağlama:

Seri için;



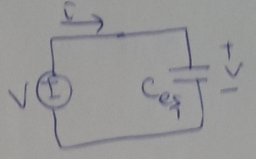
→ KVL uygularsak;

$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$; $V_k = \frac{1}{C_k}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + V_k(t_0)$

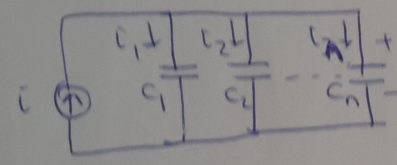
$$\Rightarrow v = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + V_1(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + V_n(t_0)$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right)}_{\frac{1}{C_{eş}}}\left(\int_{t_0}^{t} i(t)dt + \underbrace{(V_1(t_0)+\cdots+V_n(t_0))}_{V(t_0)}\right)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{C_{eş}}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + V(t_0)$$



* Paralel için ;

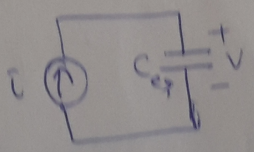


→ KCL'den ;

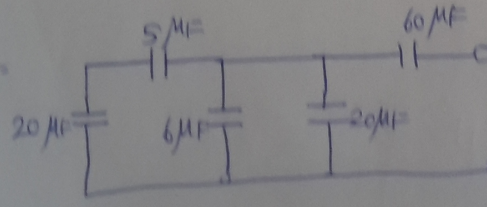
$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ ve $i_k = C_k \frac{dV}{dt}$ old. 'dan ;

$$i = C_1\frac{dV}{dt} + C_2\frac{dV}{dt} + \cdots + C_n\frac{dV}{dt} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\right)}_{C_{eş}}\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow i = C_{eş}\cdot\frac{dV}{dt}$$



Ör.



→ a-b arasındaki $C_{eş}$ = ?

Ç; 5-20 → seriler. $\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \Rightarrow C_{eş} = 4\mu F$

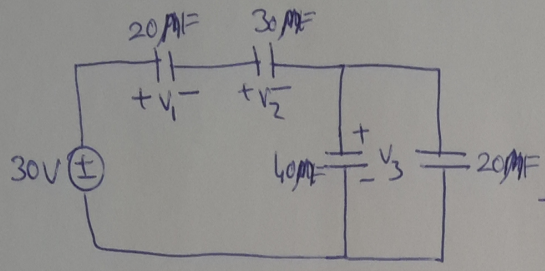
4, 6 ve 20 μF ikiler paralel old. dan;

$C_{eş} = 4 + 6 + 20 = 30\,\mu F$

30 μF ve 60 μF seri old.'dan, $C_{eş} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60}$

$\Rightarrow C_{eş} = 20\,\mu F$

Ör:



→ Her kapasitördeki gerilimi bulunuz.

Ç: 20 - 40 → paralel $\Rightarrow 20 + 40 = 60\,\mu F$

20, 30 ve 60 μF'likler seri → $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{C_{eş}} \Rightarrow C_{eş} = 10\,\mu F$

$q = C_{eş} \cdot V = 10.10^{-3} \cdot 30 = 0.3\,C$

$V_1 = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{0.3}{20.10^{-3}} = 15V$; $V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{0.3}{30.10^{-3}} = 10V$

KVL'den; $V_3 = 30 - V_1 - V_2 = 30 - 25 = 5V$

veya; $V_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{0.3}{60.10^{-3}} = 5V$

İNDÜKTÖR

Manyetik alanında enerji depolayan pasif bir devre elemanıdır. İletken tel sargısından oluşur.

L indüktans o.ü; $V = L \cdot \frac{di}{dt}$ 'dir. L'nin birimi ↓ Henry (H)'dir.

İndüktördeki, indüktans fiziksel boyutuna ve yapısına bağlıdır. $L = \frac{N^2 \mu A}{\ell}$ 'dir.

ℓ : uzunluk
A : kesit alanı
N : sarım sayısı
μ : çekirdeğin geçirgenliği

$$V = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \int \frac{V}{L} dt = \int di \Rightarrow \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(t)\,dt = i$$

veya $i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)$; $i(-\infty) = 0$ 'dır.

İndüktörün gücü → $p = vi = \left(L \frac{di}{dt}\right) i$ ve indüktörün tuttuğu enerji;

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt = \int_{-\infty}^{t} \left(L \frac{di}{dt}\right) i\,dt = L \int_{-\infty}^{t} i\,di = \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(-\infty)$$

($i(-\infty) = 0$)

$i(-\infty) = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{2} L i^2$

Özellikler :

(1) : Akım sabitken indüktör üzerindeki gerilim sıfırdır. Yani, indüktör dc'ye kısa devre gibi davranır.

(2) : Devreden aldığı gücü enerji olarak depolar ve sonradan tekrar bu gücü verir.

Ör : 0.1 H'lik indüktör üzerinden geçen akım $i(t) = 10t \cdot e^{-5t}$ A iken indüktördeki gerilimi ve tutulan enerjiyi hesaplayınız.

Ç : $v = L \frac{di}{dt}$ ve $L = 0.1$ H olsun.

$$v = 0.1 \frac{d}{dt}(10t\,e^{-5t}) = e^{-5t} - 5te^{-5t} = e^{-5t}(1-5t)\,V$$

Ör = $v(t) = \begin{cases} 30t^2, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ iken 5-H'lik

indüktördeki akımı ve t=5 s.'deki tutulan enerjiyi hesaplayınız.

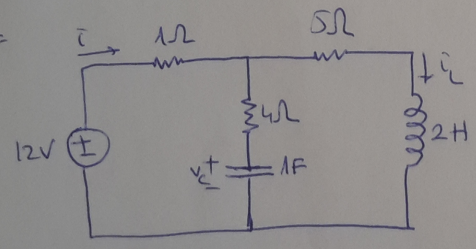
Ç = $i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)$ ve $L=5H$ 'dir.

$\Rightarrow i = \frac{1}{5}\int_0^t 30t^2\,dt + 0 = 2t^3\,A$ ve $p = vi$

$\Rightarrow p = 60t^5$ olur. $w = \int p\,dt = \int_0^5 60t^5\,dt$

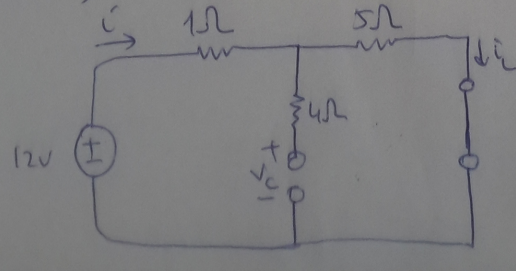
$\Rightarrow p = 60\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_0^5 = 156.25\,kJ$

Ör =



→ i, v_c, i_L, kapasitör ve indüktördeki tutulan enerjiyi bulunuz.

Ç = Kapasitör açık devre ve indüktör kısa devre yapılırsa;



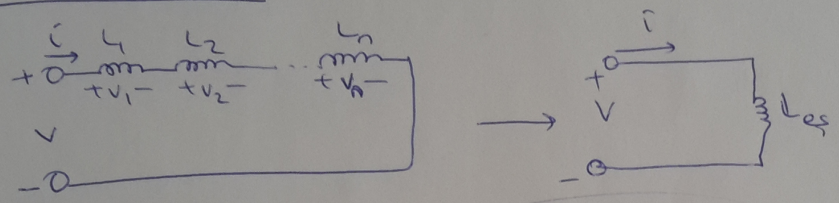
$\Rightarrow i = i_L = \frac{12}{1+5} = 2A$

$V_c = 5i = 10\,V$

$W_c = \frac{1}{2} C v_c^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot (10)^2 = 50J$ ve

$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot (2)^2 = 4J$

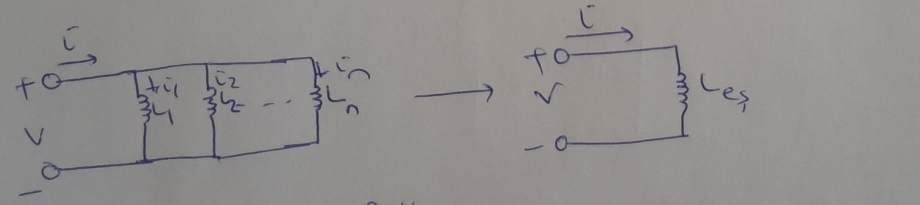
Seri Bağlama :



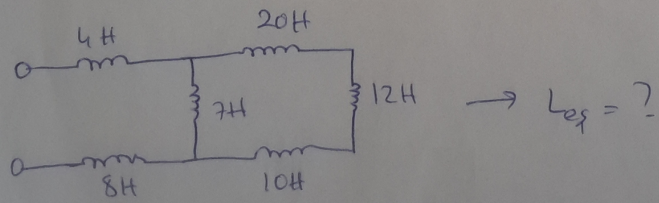
$V = L_{eş} \cdot \frac{di}{dt}$ ve $L_{eş} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$

Paralel Bağlama :

$i = \frac{1}{L_{eş}} \cdot \int_{t_0}^{t} v\,dt + i(t_0)$ ve $\frac{1}{L_{eş}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$



Ör :



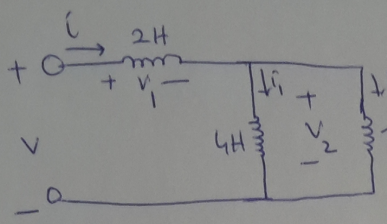
$\longrightarrow L_{eş} = ?$

Ç : 10, 12 ve 20 seridir. $\Rightarrow 10 + 12 + 20 = 42\,H$.

7 ve 42 paraleldir $\Rightarrow \frac{1}{7} + \frac{1}{42} \Rightarrow L_{eş} = 6\,H$.

6, 4 ve 8 seri bağlıdır. $\Rightarrow L_{eş} = 4+6+8 = 18H$

Ör:



$\rightarrow i(t) = 4.(2 - e^{-10t})$ mA

ve $i_2(0) = -1$ mA olsun

Buna göre; (a): $i_1(0) = ?$ (b): $v(t) = ?$ $v_1(t) = ?$ $v_2(t) = ?$

(c): $i_1(t) = ?$ $i_2(t) = ?$

Ç: (a): $i(t) = 4.(2 - e^{-10t}) \Rightarrow i(0) = 4.(2-1) = 4$ mA.

$i = i_1 + i_2$ old.'dan; $i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4 - (-1) = 5$ mA

(b): $L_{eş} = 2 + 4\|12 = 2 + 3 = 5H$.

$v(t) = L_{eş} \cdot \frac{di}{dt} = 5 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-10)\, e^{-10t}$ mV $= 200\, e^{-10t}$ mV

ve $v_1(t) = 2 \cdot \frac{di}{dt} = 2 \cdot (-4) \cdot (-10)\, e^{-10t} = 80\, e^{-10t}$ mV olur.

$v = v_1 + v_2$ old.'dan; $v_2(t) = v(t) - v_1(t) = 120 \cdot e^{-10t}$ mV

(c): $i_1(t) = \frac{1}{4} \int_0^t v_2\, dt + i_1(0) = \frac{120}{4} \int_0^t e^{-10t}\, dt + 5$mA

$\Rightarrow i_1(t) = 8 - 3 \cdot e^{-10t}$ mA

Benzer olarak;

$i_2(t) = \frac{1}{12} \int_0^t v_2\, dt + i_2(0) = \frac{120}{12} \int_0^t e^{-10t}\, dt - 1$

$\Rightarrow i_2(t) = -e^{-10t}$ mA

1. Dereceden Devreler

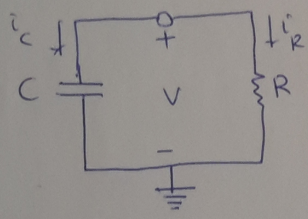
RC ve RL devreleridir.

- RC: Direnç ve kapasitörden oluşur.
- RL: Direnç ve indüktörden oluşur.

Devre kanunlarını uyguladığımızda çözülmesi gereken 1. mertebeden diferansiyel denklemler elde ederiz.

Kaynaksız RC Devresi

DC kaynağın bağlantısı kesildiğinde oluşan kaynaksız RC devresidir. Kapasitörde tutulan enerji dirençlere aktarılır.



→ kapasitör üzerindeki v(t) gerilimini devrenin cevabı olarak düşüneceğiz.

$t=0$ için, $V(0)=V_0$ 'dır. (Başlangıçta kapasitör yüklüdür)

$W(0)=\frac{1}{2}CV_0^2$ dur. KCL'den;

$i_C + i_R = 0$ 'dır. Öte yandan;

$i_C = C\cdot\frac{dV}{dt}$ ve $i_R=\frac{V}{R}$ $\Rightarrow$ $C\frac{dV}{dt}+\frac{V}{R}=0$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt}+\frac{V}{RC}=0$ ... 1. mertebeden dif. denk.'dir.

$\Rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{-V}{RC} \Rightarrow \int\frac{dV}{V}=\int\frac{-1}{RC}dt \Rightarrow \ln V=\frac{-t}{RC}+\ln A$

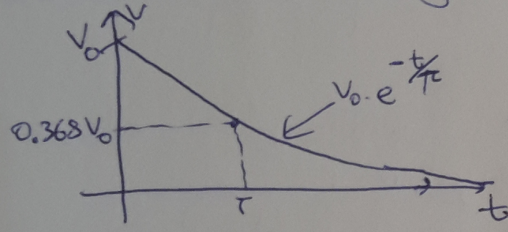
$\Rightarrow \ln V - \ln A = \frac{-t}{RC} \Rightarrow \ln\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{-t}{RC}$

$\Rightarrow V(t) = A \cdot e^{-t/RC}$; $V(0) = A = V_0$ old.'dan ;

$V(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC}$ olur.

↓

* Yani, devredeki voltaj cevabı başlangıç geriliminin üstel olarak düşüşüne göre değişir. Bu cevap herhangi bir dış akım veya gerilim kaynağına bağlı olmadığından, buna devrenin doğal cevabı denir.



→ Bir RC devrenin gerilim doğal cevabı.

Burada, τ'ya zaman sabiti denir ve gerilimin $0.368V_0$ değerindeki cevabı vermesi için gereken zamandır.

Dolayısıyla, $\tau = RC$ old.'dan ;

$V(t) = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$ olur.

* $i_R(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0 \cdot e^{-t/\tau}}{R}$; $P = V \cdot i_R = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$

*t'ye kadar dirençte tutulan enerji ;

$$w_R(t) = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}\,dt$$

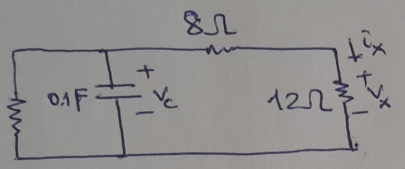
$$= -\frac{\tau \cdot V_0^2}{2R} e^{-2t/\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right), \quad \tau = RC$$

Dikkat edelim ki;

$t \to \infty$ için, $w_R(\infty) = \frac{1}{2} C v_0^2 = w_C(0)$

Yani, kapasitörde tutulan tüm enerji dirence aktarılmıştır.

Ör:



→ $v_c(0) = 15$ o.ü.

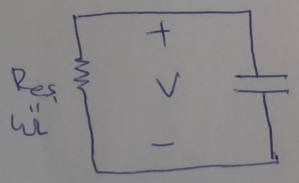
$t > 0$ için, v_c, v_x ve i_x'i bulunuz.

Ç: Önce kapasitördeki gerilimi bulmalıyız. Yani, $v_c(t)$'yi hesaplayalım;

Thevenin eşdeğer devresini oluşturalım.

$8\Omega - 12\Omega$ seri bağlıdır → $8 + 12 = 20\Omega$

$5\Omega - 20\Omega$ paralel bağlıdır → $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{R_{eş}} \Rightarrow R_{eş} = 4\Omega$



→ $Th_{eş}$ devre

$\tau = R_{eş} \cdot C = 4 \cdot (0.1) = 0.4\,s \Rightarrow v_c(t) = v(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= 15 \cdot e^{-\frac{t}{0.4}}\,V = 15 \cdot e^{-2.5t}\,V$

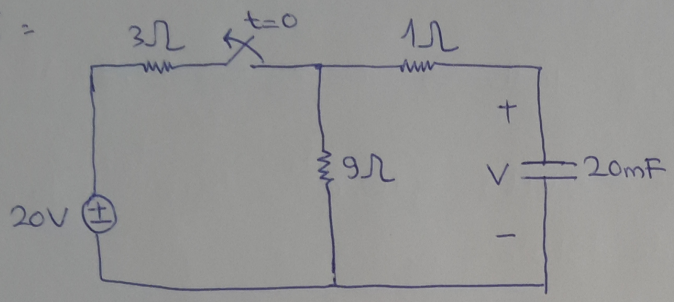
Gerilim bölmesinden;

$v_x = \frac{12}{12+8} \cdot V = 0.6 \cdot (15 \cdot e^{-2.5t}) = 9 \cdot e^{-2.5t}\,V$

Son olarak;

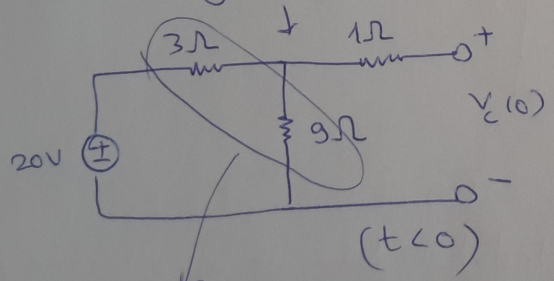
$i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75\,e^{-2.5t}\ A$ bulunur.

Ör:



Düğme uzun süre kapalı kaldıktan sonra $t=0$ anında düğme açılıyor. Buna göre, $t \geq 0$ için $v(t) = ?$ Kapasitörde başlangıçta depolanmış enerjiyi bulunuz.

Ç: $t<0$ için, düğme kapalı old.'dan, kapasitör açık devre gibi davranır.

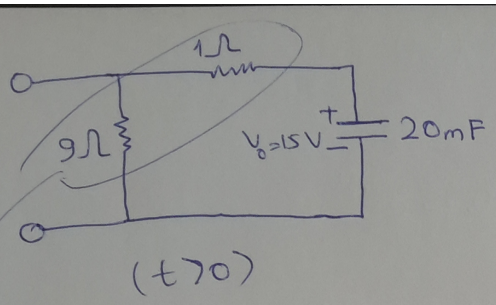


Voltaj bölmesinden, $V_c(t) = \frac{9}{9+3} \cdot 20 = 15\ V$

Kapasitördeki gerilim bir anda değişmediğinden;

$V_c(0) = V_0 = 15\ V$

Düğmeyi açarsak;



(t>0)

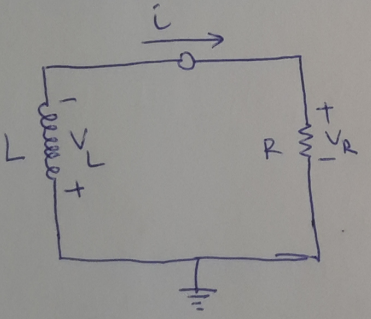
$R_{eş} = 1 + 9 = 10\Omega \Rightarrow \tau = R_{eş} \cdot C = 10 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 0.2s$

$\Rightarrow t \geq 0$ için, $v(t) = v_c(0) \cdot e^{-t/\tau} = 15 \cdot e^{-t/0.2} = 15\,e^{-5t}$ V

* Kapasitörde tutulan enerji ;

$w_c(0) = \frac{1}{2} C \cdot v_c^2(0) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (15)^2 = 2.25$ J

Kaynaksız RL Devreleri ;



→ Kaynaksız RL devresi

Aracımız : İndüktördeki i(t) akımını devrenin cevabı olarak düşüneceğiz. İndüktördeki akımın bir anda değişmediğini kabul edeceğiz.

$i(0) = I_0$ ve indüktörde tutulan enerji ;

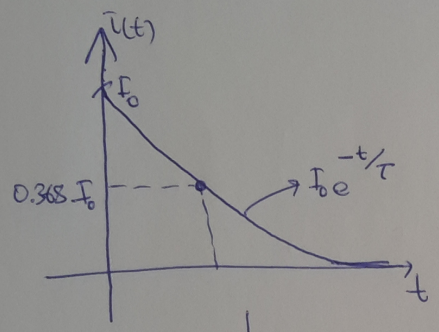
$w(0) = \frac{1}{2} L I_0^2$ 'dir. KVL uygularsak ;

$V_L + V_R = 0$ 'dır. $V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ ve $V_R = iR$ 'dir.

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

$$\Rightarrow \int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt \Rightarrow \ln(i(t)) - \ln(I_0) = \frac{-Rt}{L}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{i(t)}{I_0} = \frac{-Rt}{L} \Rightarrow \boxed{i(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L}} \text{ olur.}$$



(RL devrenin akım cevabı)

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$V_R(t) = iR = I_0 R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow P = V_R i = I_0^2 \cdot R\, e^{-2t/\tau}$$

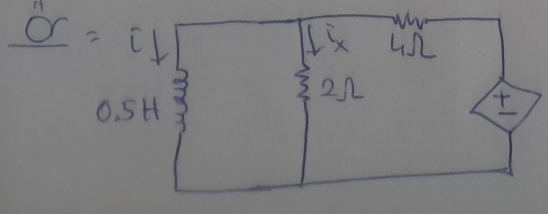
(dirençteki gerilim) (dirençteki güç)

$$W_R(t) = \int_0^t p\,dt = \int_0^t I_0^2 \cdot R \cdot e^{-2t/\tau}\,dt = \boxed{\frac{1}{2}LI_0^2\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}$$

dirençte tutulan enerji.

$$t \to \infty \Rightarrow W_R(\infty) = \frac{1}{2}LI_0^2 = w(0)$$

başlangıçtaki enerji dirençte harcanır.

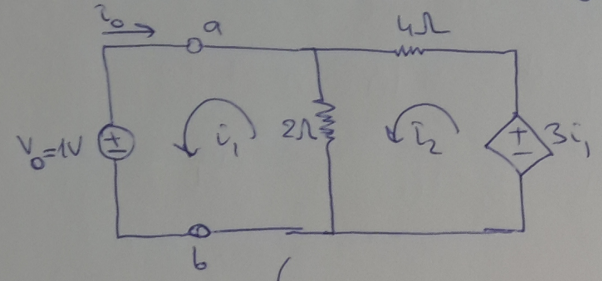
Ör: 

$\rightarrow i(0) = 10A$ o.ü;

i ve i_x'i bulunuz.

Ç: 1. yol

Bağımlı kaynaktan dolayı indüktörün a-b terminalleri arasına $V_0 = 1V$'luk bir gerilim kaynağı ekleyelim.



KVL uygularsak;

$$2(i_1 - i_2) + 1 = 0 \Rightarrow i_1 - i_2 = -\frac{1}{2}$$

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{5}{6} i_1$$

$\Rightarrow i_1 = -3A$

$$i_0 = -i_1 = -(-3) = 3A$$

$$R_{eş} = R_{Th} = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{3}\Omega$$

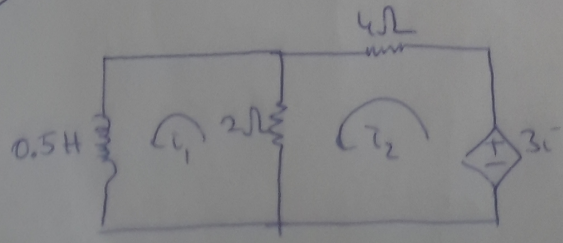
$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5\,s$$ olur. O halde,

İndüktördeki enerji;

$$i(t) = i(0).\, e^{-t/\tau} = 10.\, e^{(-2/3)t}\ A \quad (t>0)$$

2. yol

Direkt olarak KVL uygulayabiliriz;



$$\frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_2) = 0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 0$$

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{5}{6} i_1$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{2}{3} i_1 = 0 \Rightarrow \frac{di_1}{i_1} = -\frac{2}{3} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{di_1}{i_1} = \int -\frac{2}{3} dt \Rightarrow \ln i \Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{2}{3} t \Big|_0^t \Rightarrow \ln \frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{2}{3} t$$

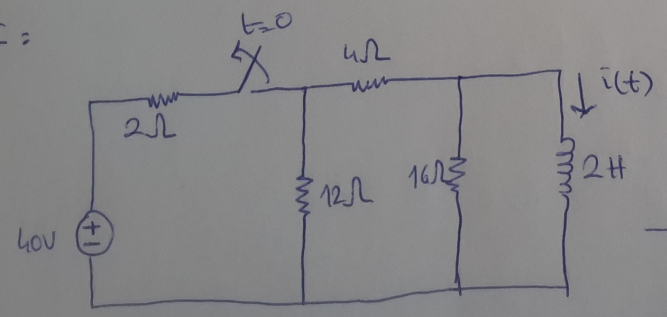
$$\Rightarrow i(t) = i(0) \cdot e^{-\frac{2}{3}t} = 10 \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \text{ A}$$

* $V_L = L \cdot \frac{di}{dt} = (0.5) \cdot 10 \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot e^{-\frac{2}{3}t} = -\frac{10}{3} e^{-\frac{2}{3}t}$ V

* İndüktör ve 2Ω'luk direnç paralel dd.'dan;

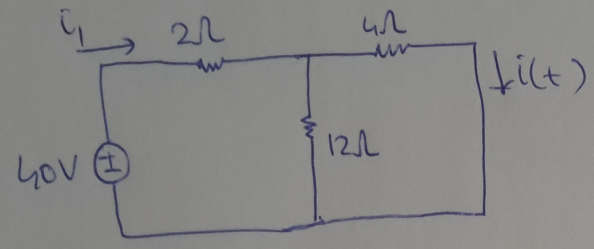
$i_x(t) = \frac{V_L}{2} = -1.6667 \cdot e^{-\frac{2}{3}t}$ A bulunur.

Ör:



→ Düğme uzun bir süre kapalı tutulduktan sonra $t=0$ anında açılmıştır. $t>0$ için, $i(t)$'yi hesaplayınız.

5: Düğme kapatıldığında 16Ω'luk direnç ve indüktör kısa devre yapar.



4Ω-12Ω paraleldir $\longrightarrow$ 3Ω

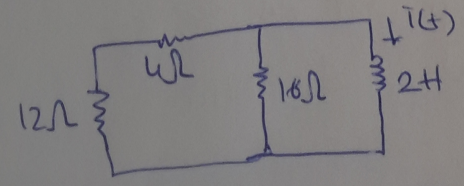
3Ω ve 2Ω seridir $\longrightarrow$ 3+2 = 5Ω = $R_{eş}$.

$$i_1 = \frac{40}{5} = 8A$$

Akım bölmesinden;

$$i(t) = \frac{12}{12+4} i_1 = 6A = i(0)\text{'dır.}$$

* t>0 için düğme açılırsa;



$\longrightarrow R_{eş} = (12+4) \| 16 = 8\Omega$

$$\tau = \frac{L}{R_{eş}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} s$$

$$\Rightarrow i(t) = i(0).e^{-t/\tau} = 6.e^{-4t} A$$