



SİLİNDİRİK BORULARDA NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞ İÇİN VİSKOZ ISINMA ETKİSİNİN İNCELENMESİ

Yusuf İŞİKER* ve Bülent YEŞİLATA **

*Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü
63000 Merkez, Şanlıurfa, yusuf47@harran.edu.tr

** Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü
63000 Merkez, Şanlıurfa, byesilata@harran.edu.tr

Özet: Bu çalışmada; silindirik boru içi akışta, viskoz ısınma (viscous dissipation) etkisi hesaba katılarak; izotermal olmayan koşul için hız ve sıcaklık dağılımı tespit edilmiştir. Elde edilen sonuçlar; farklı üs parametresi (n) değerleri için sıcaklık profillerinin davranışının birbirine yakın olduğunu, dolayısıyla ' n ' parametresinin sıcaklık üzerindeki etkisinin çok büyük olmadığını göstermektedir. Sıcaklık profilleri eksenel ve radyal koordinatlara bağlı boyutsuz parametrelerdeki değişimlerden ise büyük oranda etkilenmektedir.

Anahtar kelimeler: Newtonyen olmayan akışkan, üs kanunu, viskoz ısınma, silindirik boru içi akış, analitik çözüm

EXAMINATION OF VISCOUS HEATING EFFECT FOR NON-NEWTONIAN FLOW IN CYLINDRICAL PIPES

Abstract: In this study, an analytical solution is obtained for non-isothermal flows in a cylindrical pipe. Velocity and temperature profiles are determined by considering viscous heating effect. The results obtained reveal that temperature profiles hardly change with various values of power-law parameter (n) and thus are found to be nearly independent from ' n ' values. It is on the other hand observed that temperature profiles are greatly affected from dimensionless parameters of axial and radial coordinates.

Keywords: Non-Newtonian fluid, power-law, viscous heating, cylindrical pipe flow, analytical solution

SEMBOLLER

a_k	Özdeğer matrisi
B_k	Sabit katsayı
g	Yer çekim ivmesi [m/s^2]
k	Isı iletim katsayısı [W/mK]
m	Power-law viskozite katsayısı [$Pa \cdot s^n$]
n	Power-law katsayısı
P	Basınç [Pa]
Pe	Peclet sayısı
R	Yarıçap [m]
T	Sıcaklık [K]
v	Hız [m/s]

X_k	Özdeğer fonksiyonu
τ	Kayma gerilmesi [N/m^2]
ρ	Yoğunluk [kg/m^3]
\dot{S}	Stres Tensörü
η	Newtonian olmayan viskozite [$Pa \cdot s$]
Θ	Sıcaklık değişimi [$= \frac{T - T_0}{\Delta T_0}$]
ζ	Eksenel koordinat parametresi [$= \alpha z / v_{max} R^2$]
ξ	Radyal koordinat parametresi [$= \frac{r}{R}$]

1. GİRİŞ

Newtonyen olmayan (Non-Newtonian) akışkanlar birçok karmaşık özellikleri ile klasik (Newtonian) akışkanlardan farklıdır. Örneğin, Newtonyen olmayan akışkanların viskoziteleri, akışın deformasyon oranı ile değişir. Bu değişim genellikle kayma miktarı ile ters orantılıdır. Dolayısıyla, klasik akış problemlerinin

çözümünde kullanılan temel denklemlere (süreklilik, momentum ve enerji) ek olarak, akışkanın gerilme ve deformasyon oranı arasındaki ilişkisini tanımlayan bir bünye denklemi de gereklidir. Bu ilişki doğru sal olmayan bir özellik taşıdığından, bünye denklemleri genellikle çözümü karmaşık duruma getirirler. Literatürde bünye denklemi olarak önerilen çok sayıda denklem bulunmaktadır (Bird ve ark., 1987).



Newtonyen olmayan akışkanların temel geometrilerdeki izo termal akışına yönelik çok sayıda çalışma vardır ve literatürde analitik çözümler mevcuttur. Ancak izotermal olmayan (Non-Isothermal) akışlarla ilgili çalışmaların sayısı oldukça sınırlıdır ve önerilen çözümler genellikle nümeriktir (İşiker 2007). Bu amaçla gerçekleştirilen bazı çalışmalar aşağıda özetlenmektedir:

İmal (2004) ile İmal ve Pınarbaşı (2004) düzlemsel bir kanal içerisinde, basınç gradyanı altındaki Newtonyan olmayan bir akışkanın, kararlı, izotermal olmayan, akışını, viskoz ısınma etkisini de hesaba katarak, araştırmıştır. Akışkanın viskozitesi hem sıcaklığa, hem de kayma oranına bağlı olarak ifade edilmiştir. Arrhenius Law kullanılarak, viskozitenin sıcaklığa üstel olarak bağlı olduğu kabul edilmiştir. Akışkanın Newtonyan olmayan davranışı iki sabit parametreye bağlı olan Carreau bağıntılarıyla modellenmiştir. Akış modelinin birbirine bağımlı hareket ve enerji denklemleri, lineer olmayan sınır değer problemi olarak elde edilmiş ve problem Chebyshev polinomlarını esas alan pseudo-spectral metot kullanılarak, ardışık noktalar metoduyla, nümerik olarak çözülmüştür. Aktivasyon enerji parametresi ve Brinkman sayısına ek olarak; üs kanunu (power law) indeksi ve akışkan zaman sabitinin, akış üzerindeki etkisi incelenmiştir. Basınç gradyanı – debi grafiği çizilmiş ve akışı kontrol eden bu parametreler arasındaki ilişkinin genel anlamda monotonik olduğu, fakat belli değerler için lineer olmayan sıçramalar yaptığı gösterilmiştir.

Jambal ve diğ. (2005) ise, paralel plaka ve dairesel boru için, sabit cidar sıcaklıklarında laminar ısı transferini araştırmışlardır. Brinkman sayısı ve Peclet sayısı için sonlu-farklar yöntemiyle, nümerik sonuç elde etmişlerdir. Nusselt sayısı üzerinde, Newtonyan olmayan akışkanlar için kullanılan üs kanunu (power law) indeksinin ($n=0.5$, $n=1$ ve $n=1.5$ değerleri için), Peclet sayısının ($Pe=10$ ve $Pe \rightarrow \infty$ değerleri için), ve Brinkman sayısının ($Br=0$, $Br=\pm 0.5$ ve $Br=\pm 1$ değerleri için) etkisi detaylı grafiklerle rapor edilmiştir.

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan üs kanunu (power-law) modeli kullanılarak, izotermal olmayan akış koşulları altında, analitik yöntemle, hız profiline ek olarak sıcaklık profilleri de belirlenmiştir. Mevcut çözüm yardımıyla termal sınır şartlarının akış üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

2. AKIŞ DENKLEMLERİ VE MODELLEME

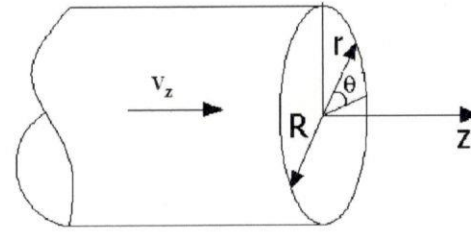
Şekil 1'de gösterilen dairesel kanal içi akış geometrisindeki kararlı ve sıkıştırılmaz akış için, tam gelişmiş ve laminar akım bölgesinde geçerli temel akış (süreklilik, momentum ve enerji) denklemleri ve Newtonyen olmayan akışkana ait üs kanunu (power-law) bünye denklemi aşağıda verilmiştir:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = (\nabla \cdot k \nabla T) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \dot{S} \quad (3)$$

$$\tau_{yx} = m \dot{\gamma}_{yx}^n = m (dv_x / dy)^n \quad (4)$$



Şekil 1. Dairesel kanal içi akış geometrisi

Bir-boyutlu akış koşullarında, hız bileşenleri $v_z = v_z(r)$, $v_\theta = 0$, $v_r = 0$ ve yerçekim ivme bileşenleri ise, $g_r = g \sin \theta$, $g_\theta = g \cos \theta$ ve $g_z = 0$ şeklindedir. 'z' yönündeki momentum denklemi ile enerji denklemi alınarak, bir boyutlu akışa ait hız ve yerçekimi ivmesi bileşenlerinin değerleri uygulandığında, enerji denklemi için

$$\rho c_p \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \quad (5)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Hız profilinin bağımsız çözümü için, akışkan fiziksel özelliklerinin sıcaklıkla değişmediği varsayımı kullanıldığında, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$v_z = \left(\frac{\tau_r}{nR} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{n+1} - r^{n+1}}{\frac{1}{n} + 1} \quad (6)$$

Son denklemdeki hız profilinin geliştirilebilmesi için, boyutsuz hız değerinin kullanılması gerekmektedir. Hızın boyutsuzlaştırılmasında, maksimum hız değerinden yararlanılır ve $s = 1/n$ dönüşümü yapılırsa;

$$u = \frac{v_z}{v_{\max}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] \quad (7)$$

denklemine ulaşılır. Hız profilini veren bu denklemin çözümüne yönelik ayrıntılar İşiker (2007) tarafından verilmiştir. Sıcaklık profilinin bulunabilmesi amacıyla, (5) denkleminin de boyutsuzlaştırılması daha uygundur. Aşağıda verilen tanımlamalar,

$$\xi = \frac{r}{R}, \zeta = \frac{az}{v_{\max} R^2} = \frac{z/R}{Pe}, \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_0}, \phi = \frac{v_z}{v_{\max}} \quad (8)$$

kullanıldığında boyutsuz enerji denklemi için,



$$\left(1 - \xi^{s+1}\right) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + (s+1) \frac{1}{\xi^{s+1}} \xi^{s+1} \quad (9)$$

ifadesi elde edilir. Son denklemin çözümü için uygulanan sınır şartları şunlardır:

$$\begin{aligned} \xi = 0 \text{ için } \Theta &= 0 \\ \xi = 0 \text{ için } \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} &= 0 \\ \xi = 1 \text{ için } \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

3. ANALİTİK ÇÖZÜM VE SAYISAL SONUÇLAR

(9)-(10) nolu denklem takımının çözümü için değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak;

$$\Theta(\xi, \zeta) = \Theta_1(\xi) - \Theta_2(\xi, \zeta) \quad (11)$$

elde edilir. Bu denklemin çözüm aşamaları literatürde (Bird ve ark., 1987) mevcuttur ve genel çözüm,

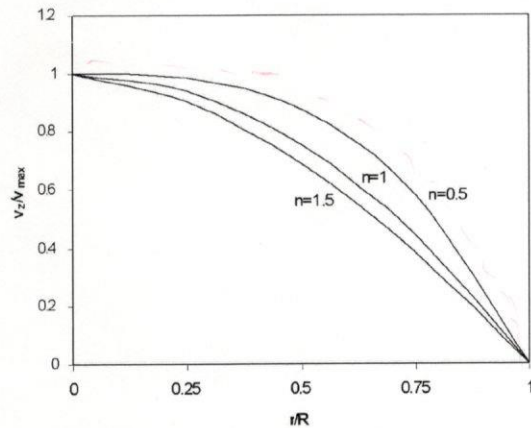
$$\Theta(\xi, \zeta) = \frac{(s+1)_{s+1}}{(s+3)^2} \left(1 - \xi^{(s+3)}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(\xi) e^{-a_k \zeta} \quad (12)$$

şeklinde dir. Seri terimindeki katsayılarının her bir 'n' değeri için ayrı ayrı bulunması gerekmektedir. Örneğin n=0.5 için bu lunan çözüm aşağıda verilmiştir.

$$\Theta(\xi, \zeta) = \frac{(s+1)_{s+1}}{(s+3)^2} \left(1 - \xi^{(s+3)}\right) - (0.283) \left[\begin{aligned} &\left((5.97) * \left(\frac{-1}{4} \xi^2 + \frac{1}{25} \xi^5 \right) \right) \\ &+ \left((5.97)^2 * \left(\frac{1}{64} \xi^4 - \frac{29}{4900} \xi^7 \right) \right) \\ &+ \left((5.97)^3 * \left(-\frac{1}{2304} \xi^6 \right) \right) \end{aligned} \right] e^{-5.97 \zeta} \quad (13)$$

edilmiştir. Sıcaklık dağılımının tespitinde, bağımsız olarak çözülen hız denklemi, enerji denklemine yerleştirilerek analitik çözüme ulaşılmıştır. Modelleme yapılırken; denge denklemleri boyutsuzlaştırılmış formu kullanılmıştır. Cidarlara sabit sıcaklık sınır şartı uygulanmıştır. Modellemede kullanılan varsayım ve sınır şartları sonucu, ortaya çıkan diferansiyel denklemin analitik çözümü; değişkenlere ayırma yöntemi ile ortaya çıkan güç serilerine ait katsayıların tespit edilmesi sonrasında elde edilmiştir. Böylece boru içi akışta; viskoz ısınma etkisiyle oluşan iki-boyutlu sıcaklık profilleri değerlendirilmiştir.

Farklı üs kanunu katsayılarına (n=0.5, n=1 ve n=1.5) ve eksenel koordinat parametrelerine (ζ) bağlı, radyal doğrultudaki (ξ) sıcaklık dağılımları tespit edilmeye çalışılmıştır. Farklı 'n' değerleri için elde edilen profillerin davranışı birbirine yakın olup, 'n' parametresinin sıcaklık üzerindeki etkisi çok büyük değildir. Diğer taraftan; sıcaklık profilleri, boyutsuz eksenel ve radyal koordinat parametrelerindeki (ζ ile ξ) değişimlerden büyük oranda etkilenmektedir.



Şekil 2. Silindirik boru içerisinden geçen akışkanın farklı 'n' değerleri için hız profili

Akış simetrik olduğundan, sadece boru merkezinden üst cidara kadar olan kısım için hız profili (yani $\xi = r/R = 0$ ile $\xi = r/R = 1$ arası) çizilmiştir. Denklem (13) kullanılarak elde edilen sıcaklık profili ise Şekil 3'de sunulmuştur. Sıcaklık profiline ait çözümler farklı 'n' değerleri için de gerçekleştirilmiş olup, ulaşılan gözlemler bir sonraki kısımda verilmiştir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada; silindirik boru içi akışta, viskoz ısınma (viscous dissipation) etkisi hesaba katılarak; izotermal olmayan koşul için hız ve sıcaklık dağılımı tespit

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Harran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Komisyonu (HÜBAK Proje No: 671) tarafından kısmen desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

BIRD, R.B., ARMSTRONG, R.C., HASSAGER, O., Dynamics of Polymeric Liquids, Volume 1: Fluid Mechanics, 2nd edition, Wiley Interscience (NewYork) 1987.

İMAL, M., ve PINARBAŞI, A., Newtonyen Olmayan Bir Akışkanın İki Paralel Levha Arasındaki Akışına Viskoz



17. ULUSAL ISI BİLİMİ ve TEKNİĞİ KONGRESİ

24 - 27 HAZİRAN 2009

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ - SİVAS

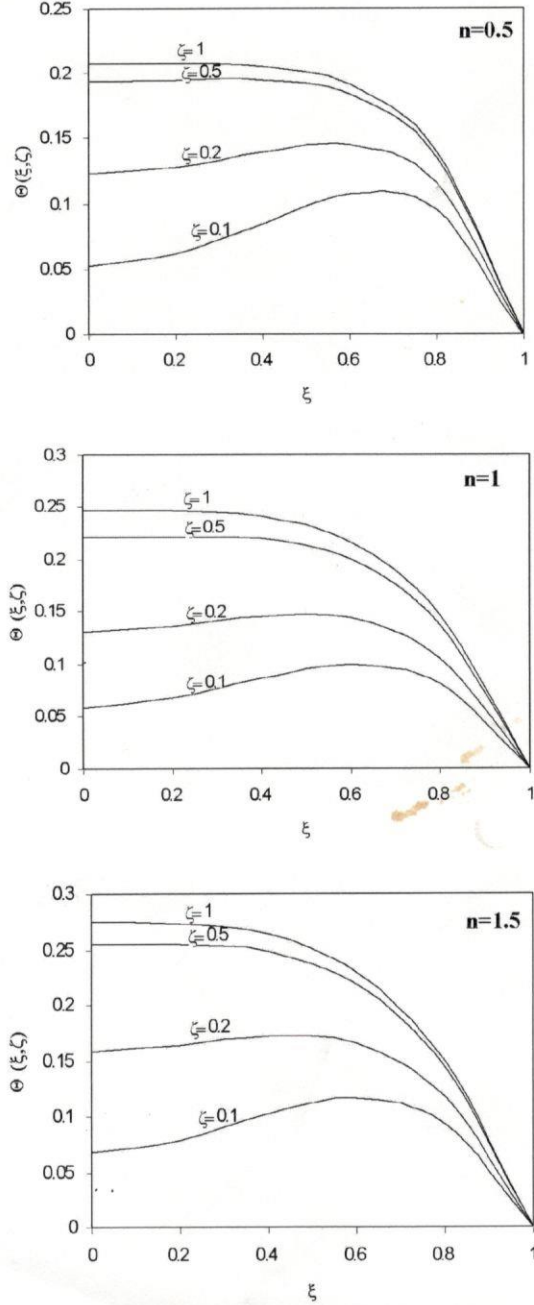


Isınma Etkisi. İtüdergisi/d mühendislik, 3 (1):15-21, 2004.

İMAL, M., Linear Stability Analysis of a Non-Newtonian Fluid With Viscous Heating. Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana, 2004.

İŞİKER Y., "Polimerik akışkanların lineer olmayan dinamiklerinin modellenmesi", Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2007.

JAMBAL, O., SHIGECHI, T., DAVAA, G., and MOMOKI, S., Effects of Viscous Dissipation and Fluid Axial Heat Conduction on Heat Transfer for Non-Newtonian Fluids in Ducts With Uniform Wall Temperature, Part I: Parallel Plates and Circular Ducts. International Communications in Heat and Mass Transfer, 32:1165-1173, 2005.



Şekil 3. Silindirik boru içerisindeki akışa ait sıcaklık profilleri;